© μαθηματικός : Χριστόφορος Κατσίμπρας :τηλ:6973692006 - x11k10@yahoo.gr

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ- ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ

παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων
$(c)'=0$	Με Y = f(x) & $Y\,'=(f\ x)'$ ΙΣΧΥΕΙ:
$(x)'=1$	
$(x^\rho)'=\rho x^{\rho-1}$	$(Y^\rho)'=\rho\, Y^{\rho-1}\bullet Y\,'$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ x>0	$(\sqrt{Y})'=\frac{1}{2\sqrt{Y}}\bullet Y\,'$ Y>0
$(e^x)'=e^x$	$(e^Y)'=e^Y\bullet Y\,'$
$(\ell nx)'=\frac{1}{x}$	$(\ell nY)'=\frac{1}{Y}\bullet Y\,'$
$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu Y)'=\sigma\upsilon\nu Y\bullet Y\,'$
$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu Y)'=-\eta\mu Y\bullet Y\,'$
(εφx)΄ = $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ α.	(εφY)΄ = $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 Y}\bullet Y\,'$ γ.
(σφχ)΄ = $-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ β.	(σφY)΄ = $-\frac{1}{\eta\mu^2 Y}\bullet Y\,'$ δ.
$\text{Τοξημ}x\,'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$\text{Τοξημ}Y\,'=\frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}\bullet Y\,'$ *
$\text{Τοξσυν}x\,'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$\text{Τοξσυν}Y\,'=-\frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}\bullet Y\,'$ *
$\text{Τοξεφ}x\,'=\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Τοξεφ}Y\,'=\frac{1}{1+Y^2}\bullet Y\,'$
$\text{Τοξσφ}x\,'=-\frac{1}{1+\chi^2}$	$\text{Τοξσφ}Y\,'=-\frac{1}{1+Y^2}\bullet Y\,'$
α. χ≠κπ γ. συνY≠0 β. χ≠(2κ+1)π/2 δ. ημY≠0	* -1 < χ < 1 , -1 < Y < 1

ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ βασικών συναρτήσεων	
συνάρτηση f(x)	**ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ F(x)**
f(x) =0	F(x) = c
f(x) =1	F(x) = x + c
f(x) = x^ρ	F(x) = $\frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}$ +c
f(x) = $\sqrt{x}$ x≥0	F(x)= $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ +c
f(x) = e^x	F(x)= e^x +c
f(x) = $\frac{1}{x}$	F(x)= ℓnx +c χ>0
f(x) = $\eta\mu x$	F(x)=- $\sigma\upsilon\nu x$ + c
f(x) = $\sigma\upsilon\nu x$	F(x)= $\eta\mu x$ + c
f(x) = $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ α.	F(x)= εφx + c
f(x) = $-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ β.	F(x)= σφχ + c
f(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	F(x)= $\text{Τοξημ}x$ +c
f(x) = $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	F(x)= $\text{Τοξσυν}x$ +c
f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$	F(x)= $\text{Τοξεφ}x$ +c
f(x) = $-\frac{1}{1+\chi^2}$	F(x)= $\text{Τοξσφ}x$ +c

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ	ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ
1. $(cf(x))' = cf'(x)$ Βγάζουμε τον συντελεστή έξω από την παρένθεση 2. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ Το σπάω σε δύο παραγώγους 3. $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$ Δύο φορές το γινόμενο με (+) και εναλλάξ παραγώγους 4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$ $g(x)\neq 0$ Αριθμητή όπως και στο γινόμενο αλλά με (-) Και παρανομαστή το τετράγωνο του παρανομαστή 5. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$ Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης 6. $(f^{-1})'(y_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ *Η παράγωγος της αντιστρόφου της f ισούται με το αντίστροφο* $\left(\dfrac{1}{f'(x_0)}\right)$ *της παραγώγου της f* $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$	Αν οι συναρτήσεις *f* και *g* έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε: 1• $\int f(x)\,dx = F(x)+c,\quad c\in\Re$ Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ισούται με το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης *f* . 2. $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda\int f(x)\,dx,\quad \lambda\in\Re^*$ **Βγάζουμε τον συντελεστή έξω από την παρένθεση.** 3. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ **Το σπάω σε δύο ολοκληρώματα.** 4• $\int f'(x)\,dx = f(x)+c,\quad c\in\Re$ **Παράγωγος και ολοκλήρωμα φεύγουν +c .** $\int (f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x))\,dx = \int (f(x)\,g(x))'\,dx \Leftrightarrow$ 5• $\int (f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x))\,dx = f(x)\,g(x)+c$ **Ολοκλήρωμα αναπτύγματος παραγώγου γινομένου ισούται με το γινόμενο + c.** 6• $\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$ **Προκύπτει από την παραπάνω αν σπάσω το πρώτο μέλος σε δύο ολοκληρώματα και μετά λύσω ως προς το ένα.** 7. $\int \dfrac{1}{f'(x_0)}\,dx = \int (f^{-1})'(y_0)\,dx = (f^{-1})'(y_0)+c$ **Το ολοκλήρωμα της $1/f'(x_0)$ είναι (η παράγωγος της αντιστρόφου της f) + c**

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα *Δ,*

<<**Αρχική συνάρτηση F**>> ή **παράγουσα F της *f* στο Δ**

θα λέμε κάθε συνάρτηση *F* που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και για την οποία ισχύει:

$\mathbf{F'(x) = f(x)}$**, για κάθε** $x \in \Delta$**.**

Μπορούμε να αποδείξουμε:
Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ*,
έχει και παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Αόριστο ολοκλήρωμα της *f* στο Δ

ονομάζεται **το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης *f* ,**

στο διάστημα Δ,

συμβολίζεται με $\int f(x)dx$

και διαβάζεται "ολοκλήρωμα εφ του *x* ντε *x*".

Δηλαδή, $\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$,

όπου *F* μια παράγουσα της *f* στο Δ.

Για κάθε συνάρτηση *f*, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ*, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ο αριθμός $f(\xi)=\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta-\alpha}$

λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ και συμβολίζεται με $\bar{f}$.

Γεωμετρικά, η μέση τιμή $\bar{f}$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης

f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ παριστάνει το ύψος του ορθογωνίου

που έχει βάση το $[\alpha,\beta]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν

του χωρίου ***Ω*** που περικλείεται από τη γραφική παράσταση

της *f*, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (σχήμα κάτω).