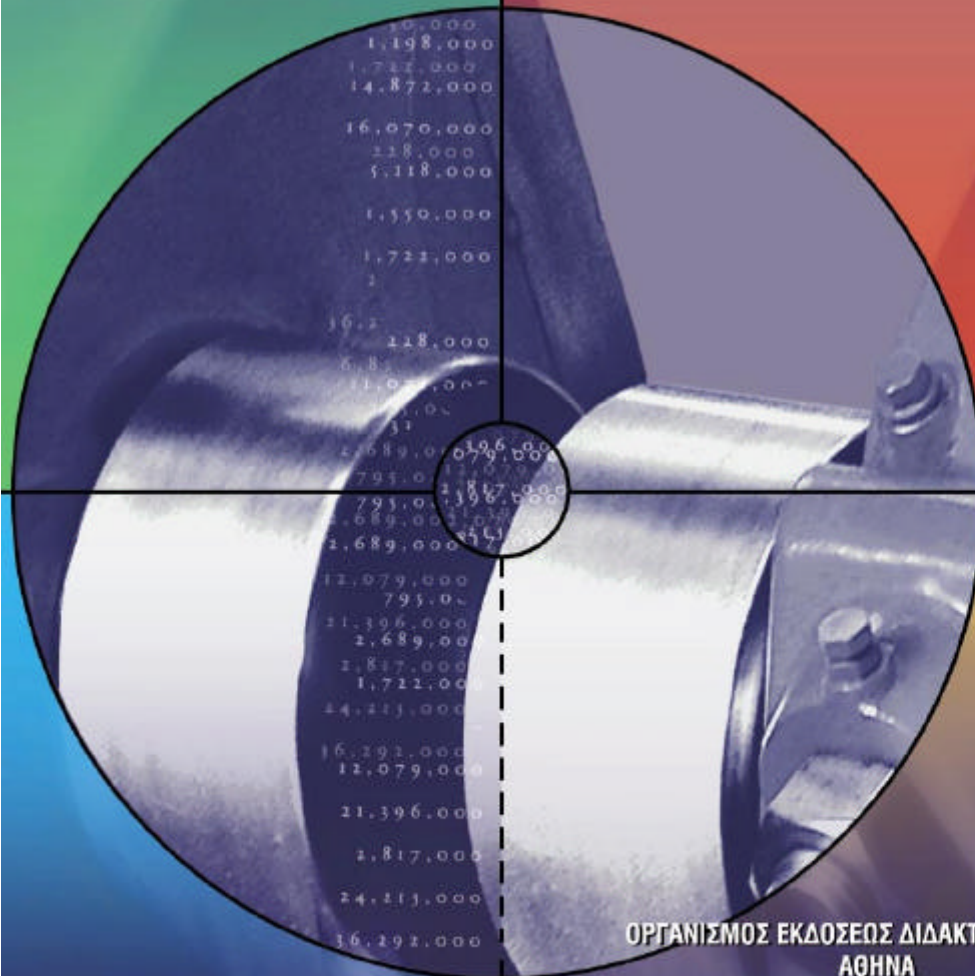


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΤΕΧΝΙΚΑ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' Τάξη 2ου Κύκλου



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

Συγγραφείς

- Π. Μ. Βλάμος : Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε. Μ. Πολυτεχνείου.
- Α. Ν. Δούναβης : Μαθηματικός, Καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.
- Δ. Ε. Ζέρβας : Μαθηματικός, Καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Γλωσσική Επιμέλεια

Α. Α. Ταλάρη : Φιλολόγος, Καθηγητής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Εποπτεία από μέρους του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π.Ι.)

Δημ. Καραγεώργος : Μαθηματικός, Λέκτορας Παν/μίου Αθηνών.
Τ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Κριτές

- Γ. Μ. Δημάκος : Μαθηματικός, Λέκτορας Παν/μίου Αθηνών.
- Α. Γ. Φελούρης : Επίκ. Καθηγητής Μαθηματικών
Ε. Μ. Πολυτεχνείου.

Ηλεκτρονική Στοιχειοθεσία – Επιμέλεια: Δημήτρης Σταθόπουλος.

Πρόλογος

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται στον Β' Κύκλο των Τεχνικών Επαγγελματικών Εκπαιδευτηρίων (Τ.Ε.Ε.) και έχει μία συγκεκριμένη φιλοσοφία. Η φιλοσοφία αυτή επιδιώκει την άμεση κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που παρουσιάζονται και την ικανότητα χρήσης τους σε πραγματικά προβλήματα.

Ο στόχος της ανάπτυξης της θεωρίας, στην οποία αποφεύγονται οι αποδείξεις, είναι η κατανόηση των εννοιών μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα. Μετά την ολοκλήρωση κάθε θεματικής ενότητας δίνονται λυμένες εφαρμογές που αποτελούν συνδυαστικό κρίκο με τις ασκήσεις που ακολουθούν.

Οι ασκήσεις έχουν χωρισθεί ως προς τη δυσκολία και τη διαβάθμισή τους στις εξής κατηγορίες:

- (α) **Ασκήσεις Εμπέδωσης**, οι οποίες αποτελούν άμεση εξάσκηση στις μαθηματικές έννοιες που έχουν παρουσιασθεί στην αντίστοιχη θεματική ενότητα. Στόχος τους είναι να βοηθήσουν τους μαθητές στην εμπέδωση των θεωρητικών εννοιών. Είναι απλές και αποφεύγεται η επανάληψη.
- (β) **Σύνθετες Ασκήσεις**, οι οποίες αποτελούνται από θέματα που απέχουν μόνο κατά ένα βήμα στη δυσκολία σε σχέση με τις ασκήσεις εμπέδωσης. Οδηγούν τους μαθητές σε μεγαλύτερη εμβάθυνση των εννοιών και σε ένα απλό επίπεδο κριτικής ή συνδυαστικής σκέψης.
- (γ) **Πρακτικές Εφαρμογές**, οι οποίες συντελούν στον ιδιαίτερο χαρακτήρα του βιβλίου. Επιδιώχθηκε το μεγαλύτερο ποσοστό των προβλημάτων αυτών, να είναι πραγματικά μαθηματικά μοντέλα και όχι ειδικά κατασκευασμένα προβλήματα. Πρέπει να τονισθεί ότι δεν αποτελεί προϋπόθεση η γνώση των εννοιών (συχνά από άλλες επιστήμες) που παρουσιάζονται στις πρακτικές εφαρμογές. Για το λόγο αυτό είναι μεγαλύτερα σε έκταση και απαιτούν από τους μαθητές προσεκτική μελέτη και ικανότητα προσαρμογής στη «γλώσσα» των πρακτικών αυτών εφαρμογών, καθώς έτσι θα τα συναντήσουν και στην πραγματικότητα. Ωστόσο, οι μαθηματικές απαιτήσεις στις πρακτικές εφαρμογές συχνά είναι μικρότερες και από αυτές των ασκήσεων εμπέδωσης.
- (δ) **Γενικές Ασκήσεις**, οι οποίες παρουσιάζουν το μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας και προτείνεται είτε η παρουσίασή τους από τον κα-

θηγητή, είτε η ανάθεση στους μαθητές με υποδείξεις ή ως συνθετική εργασία.

Κάθε κεφάλαιο έχει εμπλουτισθεί με εισαγωγικό σημείωμα, ανακεφαλαίωση καθώς και ερωτήσεις κατανόησης. Τα δύο τελευταία συντελούν σημαντικά στην κατανόηση και συγκρότηση των γνώσεων από τον μαθητή. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων, ευρετήριο όρων και ενδεικτική βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη.

Ελπίζουμε το παρόν βιβλίο να εκπληρώσει κατά το δυνατόν καλύτερα τους διδακτικούς του στόχους και να αποτελέσει μία απλή γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και των προβλημάτων από την πραγματικότητα.

Ευχαριστούμε ιδιαίτερα τους κριτές και τον επιστημονικό υπεύθυνο για τη δημιουργική συμβολή τους στην τελική μορφή του βιβλίου καθώς και τον Δημήτρη Σταθόπουλο για την τεχνική υποστήριξη που παρείχε για την παρουσίαση του βιβλίου.

Τέλος, θεωρούμε ευπρόσδεκτα οποιαδήποτε σχόλια και διορθώσεις που θα συντελέσουν στη συνεχή βελτίωση και αναβάθμιση του βιβλίου. Οι παρατηρήσεις και υποδείξεις αυτές παρακαλούμε να αποστέλλονται προς το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 15310, Αγ. Παρασκευή.

Οι συγγραφείς:

Π. Μ. Βλάμος

Α. Ν. Δούναβης

Δ. Ε. Ζέρβας

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

Εισαγωγή.....	1
1.1. Η έννοια του Πίνακα	1
1.2. Ισότητα Πινάκων	3
1.3. Είδη Πινάκων	4
Εφαρμογές	5
Ασκήσεις Εμπέδωσης	9
Σύνθετες Ασκήσεις	9
Πρακτικές Εφαρμογές.....	10
1.4. Πρόσθεση Πινάκων.....	13
Εφαρμογές	15
1.5. Πολλαπλασιασμός αριθμού με Πίνακα.....	18
Εφαρμογές	19
Ασκήσεις Εμπέδωσης	23
Σύνθετες Ασκήσεις	24
Πρακτικές Εφαρμογές.....	24
1.6. Πολλαπλασιασμός Πινάκων	26
Εφαρμογές	31
Ασκήσεις Εμπέδωσης	35
Σύνθετες Ασκήσεις	36
1.7. Γραμμικά Συστήματα.....	37
Εφαρμογές	45
Ασκήσεις Εμπέδωσης	50
Σύνθετες Ασκήσεις	51
Πρακτικές Εφαρμογές.....	52
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	52
Ανακεφαλαίωση.....	55
Ερωτήσεις Κατανόησης.....	57

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

Εισαγωγή.....	59
2.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	59
2.2. Συχνότητα Παρατηρήσεων	62
2.3. Ομαδοποίηση Παρατηρήσεων	72
2.4. Παράμετροι Θέσης.....	76
2.5. Παράμετροι Διασποράς.....	82

2.6. Συντελεστής Μεταβλητότητας (CV).....	88
Εφαρμογές	89
Ασκήσεις Εμπέδωσης	97
Σύνθετες Ασκήσεις	99
Πρακτικές Εφαρμογές.....	100
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	102
Ανακεφαλαίωση.....	103
Ερωτήσεις Κατανόησης.....	105

Κεφάλαιο 3: 'Οριο – Συνέχεια Συνάρτησης

Εισαγωγή.....	107
3.1. Η έννοια του Ορίου	107
3.2. Ιδιότητες του Ορίου Συνάρτησης	109
3.3. Πλευρικά 'Ορια Συνάρτησης.....	110
3.4. Μη πεπερασμένο 'Οριο Συνάρτησης – Απροσδιόριστες Μορφές	112
3.5. Κατακόρυφη Ασύμπτωτη Γραφ. Παράστασης Συνάρτησης..	116
Εφαρμογές	118
Ασκήσεις Εμπέδωσης	126
Σύνθετες Ασκήσεις	130
Πρακτικές Εφαρμογές.....	131
3.6. Η έννοια της Συνεχούς Συνάρτησης	133
3.7. Συνέχεια Συνάρτησης σε Διάστημα.....	138
3.8. Συνέχεια Βασικών Συναρτήσεων	138
3.9. Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων	140
Εφαρμογές	141
Ασκήσεις Εμπέδωσης	149
Σύνθετες Ασκήσεις	150
Πρακτικές Εφαρμογές.....	151
3.10. 'Οριο Συνάρτησης στο 'Απειρο.....	152
3.11. Οριζόντια Ασύμπτωτη	156
Εφαρμογές	158
Ασκήσεις Εμπέδωσης	163
Σύνθετες Ασκήσεις	164
Πρακτικές Εφαρμογές.....	165
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	165
Ανακεφαλαίωση.....	168
Ερωτήσεις Κατανόησης.....	172

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

Εισαγωγή.....	173
4.1. Η έννοια της Παραγώγου ως Ρυθμός Μεταβολής.....	173
Εφαρμογές	178
Ασκήσεις Εμπέδωσης	183
Σύνθετες Ασκήσεις	184
Πρακτικές Εφαρμογές.....	184
4.2. Παράγωγος Συνάρτηση	186
4.3. Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων	187
4.4. Κανόνες Παραγωγίσης.....	189
4.5. Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης	189
Εφαρμογές	190
Ασκήσεις Εμπέδωσης	194
Σύνθετες Ασκήσεις	195
Πρακτικές Εφαρμογές.....	196
4.6. Παράγουσα Συνάρτηση	197
4.7. Διαφορικές Εξισώσεις.....	200
Εφαρμογές	202
Ασκήσεις Εμπέδωσης	207
Σύνθετες Ασκήσεις	208
Πρακτικές Εφαρμογές.....	208
4.8. Μονοτονία Συνάρτησης	210
4.9. Ακρότατα Συνάρτησης	211
Εφαρμογές	214
Ασκήσεις Εμπέδωσης	219
Σύνθετες Ασκήσεις	220
Πρακτικές Εφαρμογές.....	221
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	222
Ανακεφαλαίωση.....	226
Ερωτήσεις Κατανόησης.....	228

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

Εισαγωγή.....	231
5.1. Η έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος	231
5.2. Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος.....	235
Εφαρμογές	236
Ασκήσεις Εμπέδωσης	239
Σύνθετες Ασκήσεις	240
5.3. Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος.....	241
Εφαρμογές	243

Ασκήσεις Εμπέδωσης	247
Σύνθετες Ασκήσεις	248
Πρακτικές εφαρμογές	249
5.4. Υπολογισμός Εμβαδού Επιπέδων Χωρίων.....	250
Εφαρμογές	253
Ασκήσεις Εμπέδωσης	256
Σύνθετες Ασκήσεις	257
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	258
Ανακεφαλαίωση.....	261
Ερωτήσεις Κατανόησης.....	263

Υποδείξεις για τη λύση των Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

§ 1.1 – 1.3	265
§ 1.4 – 1.5	266
§ 1.6.....	266
§ 1.7.....	267
Γενικές Ασκήσεις	268

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

§ 2.1 – 2.6	270
Γενικές Ασκήσεις	270

Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

§ 3.1 – 3.5	271
§ 3.6 – 3.9	272
§ 3.10 – 3.11.....	273
Γενικές Ασκήσεις	273

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

§ 4.1	275
§ 4.2 – 4.5	275
§ 4.6 – 4.7	276
§ 4.8 – 4.9	277
Γενικές Ασκήσεις	277

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

§ 5.1 – 5.2	279
§ 5.3.....	279
§ 5.4.....	280
Γενικές Ασκήσεις	280

Βιβλιογραφία	283
--------------------	-----

Ευρετήριο Όρων.....	285
---------------------	-----

Διδακτικές Οδηγίες

Α. Γενικοί Στόχοι του Βιβλίου

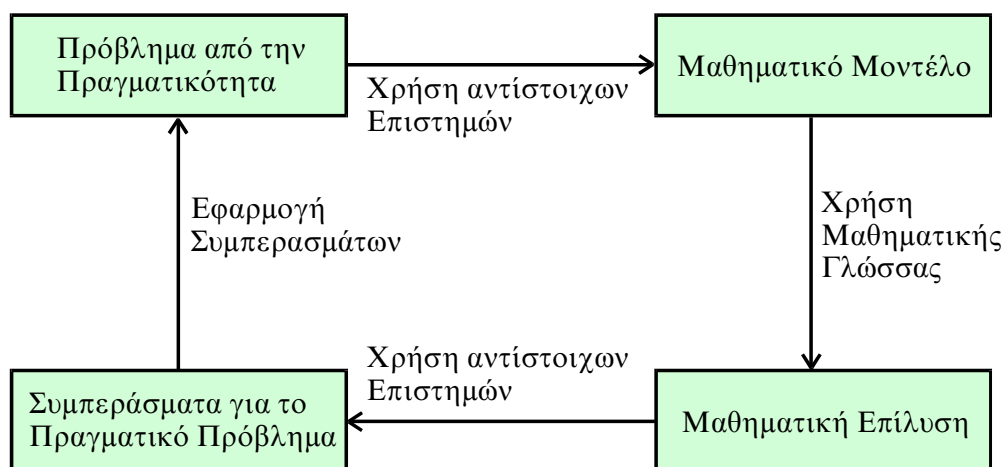
Οι βασικοί στόχοι του παρόντος βιβλίου καθορίζονται ουσιαστικά από το γεγονός ότι απευθύνεται σε μαθητές των Τεχνικών Επαγγελματικών Εκπαιδευτηρίων (Τ.Ε.Ε.). Για το λόγο αυτό δε δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα στην αυστηρή μαθηματική δομή και αποδεικτική διαδικασία, αλλά στη σύλληψη εννοιών, σχέσεων και ιδιοτήτων που συντελούν στην κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων μέσα από τη μαθηματική γλώσσα. Είναι πολύ σημαντική η χρήση της γλώσσας αυτής, η οποία χαρακτηρίζεται από τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια και λιτότητα στη ζωή.

Η απουσία της αποδεικτικής διαδικασίας, δεν επηρεάζει την πληρότητα και συνέπεια της μαθηματικής δομής. Ωστόσο, η επιμονή σε εισαγωγικά παραδείγματα οδηγεί στην κατανόηση και αναγκαιότητα κάθε νέας μαθηματικής έννοιας, ενώ με μεγάλη προσοχή παρουσιάζεται η σύνδεσή της με τα επόμενα. Η θεωρία παρουσιάζεται απέριττη με στόχο να διδάσκεται πλήρης μέσα στην τάξη.

Το αμέσως επόμενο βήμα της εκπαιδευτικής διαδικασίας αποτελούν οι λυμένες εφαρμογές, οι οποίες εμπεριέχουν θέματα διαφορετικής μορφής και διαβάθμισης. Το πρώτο είδος θεμάτων που συναντάμε στις εφαρμογές είναι ασκήσεις μεθοδολογίας, δηλαδή ασκήσεις που εισάγουν τον μαθητή στον τρόπο χρήσης των εννοιών που μόλις διδάχθηκε από τη θεωρία. Τις εφαρμογές αυτές είναι θεμιτό να επαναλαμβάνει ο μαθητής στην προσωπική του μελέτη. Μια δεύτερη μορφή εφαρμογών είναι αυτές που οδηγούν σε ένα λίγο πιο δύσκολο επίπεδο μαθηματικής μελέτης, με στόχο την άνοδο του επιπέδου της τάξης και τη δυνατότητα μεγαλύτερης τριβής με τις προτεινόμενες ασκήσεις που ακολουθούν. Τέλος, μια τρίτη μορφή εφαρμογών αποτελεί η εισαγωγή μαθηματικών μοντέλων από διάφορες επιστήμες. Οι εφαρμογές αυτές απαιτούν ιδιαίτερη προετοιμασία από τον καθηγητή και προσπάθεια μιας συγκροτημένης παρουσίασης. Ο διδακτικός στόχος των εφαρμογών αυτών, δεν είναι οι μαθητές να πλατιάσουν τις γνώσεις τους ή να ασχοληθούν με άλλες επιπρόσθετες γνώσεις από διάφορες επιστήμες, αλλά η αναγνώριση του μαθηματικού μοντέλου μέσα από "περίεργες" εκφωνήσεις, άγνωστες έννοιες και διαφορετικές ορολογίες από άλλες επιστήμες και τελικά η χρήση της μαθηματικής γλώσσας για την επίλυση των προβλημάτων αυτών.

Δεν κρίνεται λοιπόν απαραίτητη η εκτενής ανάλυση της προέλευσης του μαθηματικού μοντέλου, ούτε η γνώση των εννοιών άλλων επιστημών από τους μαθητές, καθώς μας ενδιαφέρει η ουσιαστική αναγνώριση και χρήση των μαθηματικών εννοιών που κρύβει μέσα του το μαθηματικό μοντέλο. Οι εφαρμογές αυτές ανταποκρίνονται στις ακόλουθες προτεινόμενες πρακτικές εφαρμογές και αποτελούν τη βασική αιτιολόγηση της Μαθηματικής επιστήμης στους μαθητές.

Οφείλουμε να τονίσουμε το γνωστό βασικό σχεδιασμό ενός μαθηματικού μοντέλου στους μαθητές:



Μέσω των, διαφορετικής μορφής, εφαρμογών οδηγούμαστε να προτείνουμε αντίστοιχες ασκήσεις, οι οποίες χωρίζονται σε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες, με εσωτερική διαβάθμιση:

1. **Ασκήσεις εμπέδωσης**, οι οποίες είναι απλές και πρέπει να δίνονται στους μαθητές στο σύνολό τους για επίλυση σε επίπεδο προσωπικής μελέτης.
2. **Σύνθετες ασκήσεις**, οι οποίες είναι καθαρά μαθηματικού περιεχομένου, αλλά σε ένα δυσκολότερο επίπεδο από τις προηγούμενες. Ο καθηγητής είναι αυτός που θα καθορίσει την επιλογή αυτών που θα αναθέσει στους μαθητές και αυτών που θα παρουσιάσει στην τάξη, ανάλογα με το επίπεδο της τάξης.
3. **Πρακτικές εφαρμογές**, στο πνεύμα της σύνδεσης των μαθηματικών μοντέλων με την πραγματικότητα. Κρίνεται απαραίτητη η επίλυση τέτοιων θεμάτων μέσα στην τάξη, προτού δοθούν στους μαθητές.

- 4. Γενικές Ασκήσεις**, οι οποίες είτε πρέπει εξ ολοκλήρου να παρουσιάζονται από τον καθηγητή - λόγω του αυξημένου βαθμού δυσκολίας τους - είτε να ανατίθενται σε ομάδες μαθητών ως δραστηριότητα ή συνθετική εργασία, με κατάλληλες υποδείξεις και συνεχή βοήθεια από τον καθηγητή.

Τέλος, κάθε κεφάλαιο κλείνει με μια ιδιαίτερα χρήσιμη ανακεφαλαίωση και ερωτήσεις κατανόησης, τα οποία προτείνεται να γίνονται μέσα στην τάξη, μετά από παραίνεση του καθηγητή για επανάληψη της διδακτικής ενότητας. Κατά τον τρόπο αυτό θα συντελέσουν ουσιαστικά στη συγκροτημένη θεώρηση της ύλης από τους μαθητές.

Το προηγούμενο διδακτικό πλάνο, απετέλεσε τον κύριο μοχλό διαμόρφωσης της δομής του παρόντος βιβλίου.

B. Η Μαθηματική Δομή του Βιβλίου

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από πέντε κεφάλαια, τα οποία απαρτίζουν ενιαίες θεματικές ενότητες και παρουσιάζουν κομμάτια από τρεις διαφορετικούς μαθηματικούς κλάδους: της Άλγεβρας, της Στατιστικής και της Ανάλυσης. Πιο αναλυτικά, έχουμε την εξής παρουσίαση:

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αρχικά η έννοια του πίνακα ως μία ορθογώνια διάταξη αριθμών που παρέχει κάποιες πληροφορίες για τα στοιχεία του. Η ισότητα και οι απλές μορφές πινάκων κλείνουν την πρώτη ενότητα και ακολουθούν εφαρμογές με τις οποίες οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τη χρησιμότητα του πίνακα.

Στην επόμενη θεματική ενότητα παρουσιάζονται η πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων καθώς και οι ιδιότητές τους. Επίσης παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με πίνακα και οι ιδιότητες της πράξης αυτής. Τα εισαγωγικά παραδείγματα είναι χαρακτηριστικά για να αντιληφθούν οι μαθητές το μηχανισμό πρόσθεσης – αφαίρεσης καθώς και τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα. Στο ίδιο πνεύμα παρουσιάζονται και μερικές από τις εφαρμογές αυτών των δύο παραγράφων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται με αναλυτικό τρόπο ο πολλαπλασιασμός πινάκων ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές το μηχανισμό της πράξης αυτής. Μέσα από τα παραδείγματα οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι μπορεί να ορίζεται η πράξη $A \cdot B$, όχι όμως η πράξη $B \cdot A$, δη-

λαδή ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, επομένως δεν ισχύουν ιδιότητες στον πολλαπλασιασμό πινάκων αντίστοιχες εκείνων που ισχύουν στον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών. Ακολουθούν οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων και ορίζεται ο μοναδιαίος πίνακας.

Τέλος, παρουσιάζεται η ενότητα των γραμμικών συστημάτων όπου αρχικά δίνονται οι έννοιες της γραμμικής εξίσωσης – γραμμικού συστήματος και ορισμοί που θα βοηθήσουν στην κατανόηση της επίλυσής τους. Γίνεται παρουσίαση γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια πινάκων και επίλυση αυτού με τη μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών (Gauss). Η παρουσίαση του αλγορίθμου γίνεται ταυτόχρονα με δύο μορφές, δηλαδή με πράξεις μεταξύ εξισώσεων του συστήματος και με γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Στις εφαρμογές που ακολουθούν αναφέρονται σοβαρές παρατηρήσεις που πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής όταν θα επιλύσει γραμμικό σύστημα απλό ή ομογενές με τη μέθοδο Gauss.

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

Η Στατιστική έχει σήμερα ιδιαίτερη σημασία για τον πολίτη, ο οποίος κατακλύζεται από ένα σύνολο στατιστικών πληροφοριών, και πρέπει να είναι σε θέση να τις κατανοεί, αλλά συγχρόνως να στέκεται κριτικά απέναντί τους.

Τα άμεσα συμπεράσματα από μια στατιστική παράσταση δεν είναι πάντοτε αντικειμενικά (π.χ. διάφορες δημοσκοπήσεις). Για το λόγο αυτό, η χρησιμοποίηση της μαθηματικής γλώσσας είναι επιβεβλημένη ώστε να αποφεύγονται παρερμηνείες ή λάθη.

Το κεφάλαιο αυτό είναι μια εισαγωγή στην Περιγραφική Στατιστική και μπορεί να διαιρεθεί σε έξι μέρη.

Στο πρώτο μέρος (§ 2.1) γίνεται μια πρώτη εισαγωγή στην έννοια του στατιστικού πληθυσμού – δείγματος και στην έννοια της μεταβλητής (ποιοτική – ποσοτική – διακριτή – συνεχής).

Στο δεύτερο μέρος (§ 2.2) περιγράφονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να παρουσιαστεί η κατανομή συχνότητας (σχετικών – αθροιστικών – σχετικών αθροιστικών) ποιοτικής ή διακριτής μεταβλητής και των αντίστοιχων διαγραμμάτων.

Στο τρίτο μέρος (§ 2.3) παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να παρουσιασθεί η κατανομή των συχνοτήτων σε συνεχείς μεταβλητές και των αντίστοιχων ιστογραμμάτων.

Στο τέταρτο μέρος (§ 2.4) ορίζονται οι παράμετροι θέσης μιας κατανομής (επικρατούσα τιμή – μέση τιμή – διάμεσος) και πως υπολογίζονται αυτές.

Στο πέμπτο μέρος (§ 2.5) ορίζονται οι παράμετροι διασποράς μίας κατανομής και πως υπολογίζονται αυτές.

Τέλος, στο έκτο μέρος (§ 2.6) παρουσιάζεται ο συντελεστής μεταβλητότητας που είναι ουσιαστικά ένα μέτρο της ομοιογένειας το δείγματος.

Η εισαγωγή όλων των εννοιών του κεφαλαίου αυτού γίνεται μέσω εισαγωγικών παραδειγμάτων.

Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αρχικά η έννοια του ορίου συνάρτησης, έτσι ώστε ο μαθητής να κατανοήσει τη σύγκλιση υπολογιστικά (με πίνακα τιμών) αλλά και εποπτικά (με τη γραφική της παράσταση). Μελετούνται οι αλγεβρικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, καθώς και η έννοια των πλευρικών ορίων. Η πρώτη θεματική ενότητα κλείνει με τη μελέτη μη πεπερασμένων ορίων, την αναγνώριση και αντιμετώπιση απροσδιόριστης μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$ για συγκεκριμένες συναρτήσεις και την εφαρμογή αυτών στον προσδιορισμό των κατακόρυφων ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Στην επόμενη θεματική ενότητα μελετάται η έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Πρώτα, εξετάζουμε τη συνέχεια συνάρτησης σε σημείο και αναλυτικά τα είδη των σημείων ασυνέχειας. Τέλος, παρουσιάζονται η συνέχεια συνάρτησης σε ανοιχτό και κλειστό διάστημα, η συνέχεια βασικών συναρτήσεων και οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

Το κεφάλαιο κλείνει με τη μελέτη ορίου συνάρτησης στο άπειρο και την αντιμετώπιση της απροσδιόριστης μορφής $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ για πολυωνμικές και ρητές συναρτήσεις. Το όριο στο άπειρο βρίσκει κατόπιν εφαρμογή στη μελέτη των οριζόντιων ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

Η θεματική αυτή ενότητα ξεκινά με την έννοια της παραγώγου, συνδέοντάς την με το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους, απεμπλέκο-

ντάς την ωστόσο από τη σχέση της με την ύπαρξη και την κλίση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Προτείνεται να τονισθεί η σύνδεση της παραγώγου με τις μεταβολές στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, καθώς επίσης και η παρατήρηση για τα γωνιακά σημεία, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίζουν άμεσα τα σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη μια συνάρτηση στη γραφική της παράσταση.

Κατόπιν ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση σε ανοιχτό και κλειστό διάστημα, καθώς και ο λογισμός με παραγώγους, αφού πρώτα παρουσιάζονται οι παράγωγοι βασικών συναρτήσεων. Τέλος, ορίζονται σύντομα οι παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Στην επόμενη παράγραφο αναπτύσσεται η έννοια της παράγουσας συνάρτησης ως αντίστροφη διαδικασία της παραγωγίσιμης και δίνονται οι πίνακες παραγουσών βασικών συναρτήσεων και σύνθετων συναρτήσεων. Με τη χρήση των παραγουσών οδηγούμαστε στις διαφορικές εξισώσεις, δίνοντας έμφαση στα προβλήματα αρχικών τιμών, λόγω των μεγάλων εφαρμογών τους σε πραγματικά προβλήματα.

Το κεφάλαιο κλείνει με τη μελέτη της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης, μέσα από τη μελέτη της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στη χρήση του κριτηρίου 2^{ης} παραγώγου για την εξακρίβωση του αν ένα στάσιμο σημείο είναι τελικά ακρότατο.

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

Το κεφάλαιο αυτό ξεκινά με τη σύνδεση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας θετικής συνάρτησης, τον άξονα x και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$, μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα και μετά παρουσιάζονται οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Κατόπιν, μελετάμε τις μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων, μέσα από την ανακάλυψη της παράγουσας (εδώ πρέπει να γίνει υπενθύμιση των αντίστοιχων πινάκων του κεφαλαίου 4 και της εφαρμογής 7, § 4.2 – 4.5), καθώς και με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Το κεφάλαιο κλείνει με τον αναλυτικό υπολογισμό του εμβαδού οποιουδήποτε επιπέδου χωρίου.

Γ. Γενικές Οδηγίες

Πριν από τις οδηγίες που ακολουθούν κατά κεφάλαιο για τη διδασκαλία, οι διδάσκοντες πρέπει να λάβουν υπόψη ότι:

1. Η ακριβής διατύπωση των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών αποτελεί βασικό κριτήριο ικανότητας εφαρμογής της μαθηματικής γλώσσας.
2. Το βιβλίο αποτελείται από τρεις διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών, οι οποίοι πρέπει να αντιμετωπισθούν με διαφορετική διδακτική λογική.
3. Ο ρυθμός διδασκαλίας στις βασικές πρωτοεισαγόμενες έννοιες πρέπει να είναι αργός και κατόπιν μπορεί να επιταχυνθεί κατά την κρίση του διδάσκοντα.
4. Το διδακτικό βιβλίο είναι το βιβλίο που χρησιμοποιεί ο μαθητής και πολλές φορές μοναδικό. Για το λόγο αυτό ο διδάσκων δε μπορεί να το παραβλέπει.
5. Σε κάθε ενότητα πρέπει να τονίζονται τα στοιχεία που συνθέτουν την αυτοτέλειά της και να εξασφαλίζονται τα στοιχεία υποδομής που θα χρειασθούν αργότερα. Ο διδάσκων έχει την ευχέρεια να αλλάξει τη σειρά, αν θέλει να εμφανίσει μια δομή του όλου πριν εξετάσει λεπτομερώς κάθε παράγραφο ή έννοια.
6. Οι ώρες που αναφέρονται σε κάθε κεφάλαιο είναι ενδεικτικές. Προσαρμόζονται ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών. Ο προγραμματισμός πρέπει να αναπροσαρμόζεται από τον διδάσκοντα ώστε να ολοκληρώνεται η διδακτέα ύλη στις εκάστοτε προβλεπόμενες ώρες ανά τάξη.
7. Αν σε κάποια ενότητα διατεθούν περισσότερες ώρες η εμπέδωση και καλύτερη κατανόηση ίσως βοηθήσει ώστε σε κάποια άλλη ενότητα να διατεθούν λιγότερες ώρες. Υποτίθεται ότι ο διδάσκων έχει κάνει έναν αρχικό προγραμματισμό τον οποίο αναπροσαρμόζει κατά χρονικά διαστήματα.
8. Οποιοιδήποτε όροι ή φράσεις δε βοηθούν τους μαθητές στην κατανόηση των κειμένων θα πρέπει να εξηγούνται στους μαθητές και να ζητείται από αυτούς η αναδιατύπωσή τους.
9. Κύριος στόχος του βιβλίου αποτελεί η ευκολία στη χρήση των μαθηματικών εννοιών και η σύνδεση αυτών με πραγματικά προβλήματα.

Δ. Οδηγίες κατά Κεφάλαιο

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες:** 15

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1^η ενότητα: § 1.1 – 1.3

2^η ενότητα: § 1.4 – 1.5

3^η ενότητα: § 1.6

4^η ενότητα: § 1.7

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 1.1 – 1.3 : 1 διδακτική ώρα

§ 1.4 : 1 διδακτική ώρα

§ 1.5 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 2 διδακτικές ώρες

§ 1.6 (Ορισμός και παραδείγματα) : 1 διδακτική ώρα

§ 1.6 (Ιδιότητες πολ/μού – δύναμη πίνακα – μοναδιαίος πίνακας) : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 2 διδακτικές ώρες

§ 1.7 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 2 διδακτικές ώρες

Γενικές Ασκήσεις : 2 διδακτικές ώρες

Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης : 1 διδακτική ώρα

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια και τη χρησιμότητα του πίνακα.
2. Να μπορούν οι μαθητές να εκφράζουν πληροφορίες με μορφή πινάκων, να βγάζουν συμπεράσματα από πίνακες δεδομένων, να παραβάλουν – συγκρίνουν πίνακες.
3. Να γνωρίζουν τις μορφές των πινάκων.
4. Να μπορούν να εκτελούν πράξεις με πίνακες και να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων.

5. Να κατανοήσουν μέσα από παραδείγματα ότι στο σύνολο των πινάκων δεν ισχύουν πάντα όλες οι γνωστές ιδιότητες που ισχύουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή ότι η δομή τους είναι διαφορετική.
 6. Να αντιληφθούν μέσα από πρακτικά προβλήματα και εφαρμογές τη χρησιμότητα των πινάκων και των πράξεών τους ως μαθηματικό μοντέλο επίλυσης αυτών των προβλημάτων.
 7. Να μπορούν να επιλύσουν ένα γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss, είτε με πράξεις μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος, είτε με γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.
 8. Να μπορούν να επιλύσουν πρόβλημα, μετατρέποντας τα δεδομένα του σε γραμμικό σύστημα.
- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την πρώτη θεματική ενότητα (§ 1.1 – 1.3) είναι χρήσιμο να επιμείνουμε στην έννοια του πίνακα ως μέσο πληροφοριών, ως μαθηματικό μοντέλο δηλαδή από το οποίο παίρνουμε πληροφορίες για τα στοιχεία του και αντλούμε συμπεράσματα απ' όλο τον πίνακα. Να τονισθεί ότι, στις πρακτικές εφαρμογές μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν αριθμητικό ή επιστημονικό υπολογιστή, όπου χρειάζεται.

Για τη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 1.4 – 1.5) είναι θεμιτό να επιμείνουμε στην κατανόηση των πράξεων πρόσθεσης πινάκων και πολλαπλασιασμού αριθμού επί πίνακα και τις ιδιότητές τους. Πρέπει και εδώ ο καθηγητής να επιμείνει στις πρακτικές εφαρμογές ώστε να κατανοούν σιγά-σιγά οι μαθητές τη χρήση μαθηματικού μοντέλου στα απλά προβλήματα.

Στην τρίτη θεματική ενότητα (§ 1.6) παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός πινάκων που είναι η δυσκολότερη από τις παρουσιαζόμενες πράξεις και πρέπει μέσα από πρακτικά παραδείγματα ο καθηγητής να επιμείνει ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν πλήρως το μηχανισμό της πράξης αυτής. Επίσης πρέπει να γίνει κατανοητό από τους μαθητές ότι μόνο $m \times r$ και $r \times n$ τύπου πίνακες πολλαπλασιάζονται και ότι δεν ισχύουν γνωστές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Τέλος, στην τέταρτη θεματική ενότητα (§ 1.7) πρέπει ο μαθητής να μπορεί να μετατρέπει γραμμικό σύστημα στην εξίσωση $A \cdot X = B$ και να το επιλύει με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss. Ο καθηγητής, αφού διδάξει τη μέθοδο αυτή και αναφερθεί στον αλγόριθμο, μπορεί να ε-

πιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιούν ή πράξεις μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος ή γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Χρήσιμο είναι σε κάθε περίπτωση να λαμβάνονται υπόψη και οι όποιοι περιορισμοί του προβλήματος οι οποίοι περιορίζουν το σύνολο των λύσεων του συστήματος. Στις ασκήσεις υπάρχουν και παραμετρικά συστήματα. Στην κρίση του διδάσκοντος αφήνεται αν πρέπει να γίνουν όλες ή μέρος των ασκήσεων αυτού του είδους.

Από τις προτεινόμενες γενικές ασκήσεις καλό είναι να επιλυθούν κάποιες ενδεικτικές από κάθε θεματική ενότητα. Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες:** 15
- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1^η ενότητα: § 2.1

2^η ενότητα: § 2.2

3^η ενότητα: § 2.3

4^η ενότητα: § 2.4

5^η ενότητα: § 2.5

6^η ενότητα: § 2.6

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 2.1	: 1 διδακτική ώρα
§ 2.2	: 1 διδακτική ώρα
§ 2.3	: 3 διδακτικές ώρες
§ 2.4	: 2 διδακτικές ώρες
§ 2.5	: 2 διδακτικές ώρες
§ 2.6	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
Γενικές Ασκήσεις	: 2 διδακτικές ώρες
Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης	: 1 διδακτική ώρα

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να γνωρίζουν οι μαθητές τις διαδοχικές φάσεις μιας στατιστικής έρευνας.
2. Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της περιγραφικής στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία.
3. Να μπορούν να διαβάζουν και να κατασκευάζουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων.
4. Να μπορούν να διαβάζουν τις διάφορες μορφές των γραφικών παραστάσεων κατανομών συχνοτήτων.
5. Να μπορούν να παριστάνουν γραφικά μια κατανομή συχνοτήτων.
6. Να γνωρίζουν και να μπορούν να υπολογίζουν τις παραμέτρους θέσεις και τις παραμέτρους διασποράς μιας κατανομής συχνοτήτων.
7. Να μπορούν να συγκρίνουν δύο κατανομές συχνοτήτων με τη βοήθεια των παραμέτρων και του συντελεστή μεταβλητότητας.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Στην πρώτη θεματική ενότητα (§ 2.1) οι μαθητές πρέπει να μάθουν το βασικό λεξιλόγιο της στατιστικής και να κατανοήσουν ότι η επιλογή του δείγματος είναι μία πολύ δύσκολη και λεπτή υπόθεση που απαιτεί μεγάλη προσοχή, ειδικές μεθόδους και ειδικούς επιστημονες.

Στη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 2.2) οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στην κατασκευή πινάκων κατανομής συχνοτήτων (σχετικών, αθροιστικών, σχετικών αθροιστικών) και την κατασκευή των αντίστοιχων διαγραμμάτων.

Στην τρίτη θεματική ενότητα (§ 2.3) οι μαθητές πρέπει να μπορούν να κάνουν ομαδοποίηση στατιστικών δεδομένων και να παριστάνουν μια ομαδοποιημένη κατανομή με ιστόγραμμα. Να τονισθεί ότι σε μια ομαδοποίηση στατιστικών δεδομένων δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης με τη μικρότερη παρατήρηση ούτε το δεξί άκρο της τελευταίας κλάσης με τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

Στην τέταρτη και πέμπτη θεματική ενότητα (§ 2.4 – 2.5) οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τους τύπους των παραμέτρων θέσης, διασποράς και να τις υπολογίζουν καθώς και τα προτερήματα ή μειονεκτήματα αυτών.

Στην έκτη θεματική ενότητα (§ 2.6) πρέπει οι μαθητές να εξασκηθούν στον υπολογισμό του συντελεστή μεταβλητότητας και να δοθεί έμφαση στην έννοια της ομοιογένειας του δείγματος.

Η διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού συνίσταται να γίνεται με ανοιχτά τα βιβλία των μαθητών και να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και τις ερωτήσεις κατανόησης.

Για μια επιτυχημένη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού και για καλύτερη αφομοίωση των εννοιών κρίνεται σκόπιμο οι μαθητές να προσκομίσουν στατιστικό υλικό από διάφορα έντυπα (εφημερίδες, περιοδικά, άλλα μαθήματα) αλλά κυρίως να κάνουν οι ίδιοι στατιστικές έρευνες στο άμεσο περιβάλλον τους (συλλογή στοιχείων, διαλογή, παρουσίαση, συμπεράσματα) σε ατομικές ή ομαδικές εργασίες.

Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες:** 18

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1^η ενότητα: § 3.1 – 3.5

2^η ενότητα: § 3.6 – 3.9

3^η ενότητα: § 3.10 – 3.11

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 3.1 – 3.2	: 1 διδακτική ώρα
§ 3.3 – 3.4 (μέχρι και επιτρεπτές πράξεις)	: 1 διδακτική ώρα
§ 3.4 (υπόλοιπο) – 3.5	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 3.6	: 1 διδακτική ώρα
§ 3.7 – 3.9	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 3.10	: 2 διδακτικές ώρες
§ 3.11	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
Γενικές Ασκήσεις	: 2 διδακτικές ώρες
Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης	: 2 διδακτικές ώρες

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να μπορούν οι μαθητές να προσδιορίζουν το όριο μιας συνάρτησης είτε με εποπτεία, είτε με την παρατήρηση ή δημιουργία κατάλληλου πίνακα τιμών.
2. Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.
3. Να κατανοήσουν την έννοια των πλευρικών ορίων.
4. Να καταλάβουν την έννοια του μη πεπερασμένου ορίου και να αναγνωρίζουν τις απροσδιόριστες μορφές, καθώς και τις επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο.
5. Να αντιμετωπίζουν την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ για ρητές συναρτήσεις και ριζικά.
6. Να μελετούν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
7. Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, καθώς και σε ένα διάστημα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.
8. Να διακρίνουν τη διαφορά συνεχούς γραμμής και συνεχούς συνάρτησης, και τα διαφορετικά είδη ασυνέχειας.
9. Να κατανοήσουν τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης για πολύ μικρές ή για πολύ μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και να αντιμετωπίζουν την απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ για πολυωνμικές και ρητές συναρτήσεις.
10. Να μπορούν να μελετήσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ως προς τις οριζόντιες ασύμπτωτες.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την πρώτη θεματική ενότητα (§ 3.1 – 3.5), η πρώτη προσέγγιση του ορίου συνάρτησης γίνεται εποπτικά, μέσω γραφικών παραστάσεων, και υπολογιστικά μέσω πινάκω τιμών του x και των αντίστοιχων τιμών της $f(x)$. Υπάρχουν αρκετές εφαρμογές και ασκήσεις προς αυτό το σκοπό. Η εφαρμογή 3, εκτός των παραπάνω, δημιουργεί την αίσθηση στο μαθητή της αντιμετώπισης ενός προβλήματος με τη βοήθεια ορίων εποπτικά.

Στη συνέχεια οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τις ιδιότητες

των ορίων και την έννοια των πλευρικών ορίων. Απαραίτητη κρίνεται η εφαρμογή 4 και υπάρχουν οι ασκήσεις εμπέδωσης 2 – 7 όπου οι μαθητές θα ασχοληθούν με τις δύο προαναφερόμενες έννοιες.

Η πρώτη ενότητα κλείνει με την παρουσίαση μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης, επιτρεπτών και μη επιτρεπτών πράξεων με το άπειρο καθώς και της κατακόρυφης ασύμπτωτης στη γραφική παράσταση συνάρτησης. Και εδώ κρίνεται απαραίτητη η προσέγγιση των εννοιών αυτών εποπτικά και υπολογιστικά και κατόπιν μέσω των ιδιοτήτων και των επιτρεπτών πράξεων.

Προς αυτό το σκοπό βοηθούν οι εφαρμογές 5, 6 καθώς και οι ασκήσεις εμπέδωσης 8 – 11. Οι σύνθετες ασκήσεις και οι πρακτικές εφαρμογές δίνουν την ευχέρεια στον καθηγητή να θέσει σε πιο γερές βάσεις τις γνώσεις των μαθητών γύρω από το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Στη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 3.6 – 3.9), η εποπτική ερμηνεία της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της γίνεται αναλυτικά με πολλά παραδείγματα και εφαρμογές. Τονίζεται ιδιαίτερα η διαφορά μιας συνεχούς γραμμής από μία συνεχή συνάρτηση και σε εφαρμογές και σε ασκήσεις. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι η συνέχεια είναι τοπική ιδιότητα της συνάρτησης και ότι απαιτούνται τρεις (3) προϋποθέσεις:

(α) $x_0 \in A_f$ (x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f)

(β) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Γι'αυτό το σκοπό προτείνονται οι εφαρμογές 1 – 5 και οι ασκήσεις εμπέδωσης 1 – 3. Η συνέχεια σε διάστημα και οι ιδιότητες συνέχειας κλείνουν την ενότητα αυτή. Προτείνονται οι εφαρμογές 6 – 7 καθώς και η άσκηση εμπέδωσης 4. Η άσκηση 3 από τις σύνθετες και οι πρακτικές εφαρμογές 1, 2 κρίνεται σκόπιμο να γίνουν μέσα στην τάξη.

Στην τρίτη θεματική ενότητα (§ 3.10 – 3.11) παρουσιάζεται η συμπεριφορά της συνάρτησης όταν το x παίρνει πολύ μεγάλες τιμές ($x \rightarrow +\infty$) ή πολύ μικρές τιμές ($x \rightarrow -\infty$). Πρέπει να τονισθεί σύντομα η χρησιμότητα της μελέτης αυτής για την κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, καθώς και στην αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων για πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές μιας μεταβλητής. Και εδώ η πρώτη παρουσίαση γίνεται εποπτικά και υπολογιστι-

κά (εφαρμογές 1 – 2) και κατόπιν περνάμε στις ιδιότητες ορίων (εφαρμογή 3). Όλες οι ασκήσεις εμπέδωσης είναι κατάλληλες για να αντιληφθούν οι μαθητές τα προηγούμενα. Οι εφαρμογές 5, 6 καθώς και οι πρακτικές εφαρμογές ανήκουν στο γενικότερο πνεύμα του βιβλίου για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών μέσω φυσικών προβλημάτων.

Από τις γενικές ασκήσεις προτείνεται να επιλυθούν στην τάξη οι 1, 2, 3 και να μείνουν τα προβλήματα ως δραστηριότητα / συνθετική εργασία. Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες: 18**

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1^η Ενότητα: § 4.1

2^η Ενότητα: § 4.2 – 4.5

3^η Ενότητα: § 4.6 – 4.7

4^η Ενότητα: § 4.8 – 4.9

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 4.1	: 1 διδακτική ώρα
§ 4.2 – 4.4	: 2 διδακτικές ώρες
§ 4.5	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 4.6	: 1 διδακτική ώρα
§ 4.7	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 4.8	: 1 διδακτική ώρα
§ 4.9	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
Γενικές Ασκήσεις	: 2 διδακτικές ώρες
Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης	: 2 διδακτικές ώρες

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε σημείο και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
2. Να γνωρίζουν και να εφαρμόζουν τους κανόνες παραγωγίσης βασικών συναρτήσεων και να υπολογίζουν παραγώγους ανώτερης τάξης.
3. Να κατανοήσουν την έννοια της παράγουσας συνάρτησης, της διαφορικής εξίσωσης και του προβλήματος αρχικών τιμών.
4. Να μπορούν να επιλύουν απλές διαφορικές εξισώσεις και απλά προβλήματα αρχικών τιμών.
5. Να μπορούν να μελετήσουν μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
6. Να αναγνωρίζουν τις πιθανές θέσεις ακροτάτων και να χρησιμοποιούν τα κριτήρια της 1^{ης} και 2^{ης} παραγώγου.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την § 4.1 είναι χρήσιμο να επιμείνουμε στην κατανόηση των εννοιών: οριακό κόστος, οριακό κέρδος, επιτάχυνση και για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής να γίνουν οι εφαρμογές που αφορούν στη μέτρηση στερεών, έτσι ώστε οι μαθητές να επαναλάβουν τους τύπους μέτρησης στερεών, αλλά και να ασκηθούν στην παραγωγή.

Στις § 4.2 – 4.5 οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στις τεχνικές παραγωγίσης ώστε να αποκτήσουν ευχέρεια καθώς και να συνδέσουν την παράγωγο συνάρτηση με τη γενική μορφή του ρυθμού μεταβολής, όπως εκφράζεται στις εφαρμογές με τα οικονομικά μαθηματικά.

Για τις § 4.6 – 4.7 οι μαθητές πρέπει να οδηγηθούν στην ικανότητα αναγνώρισης των παραγουσών βασικών ή σύνθετων συναρτήσεων και να λυθούν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών. Προτείνεται η παρουσίαση των εφαρμογών που εκφράζουν τα μοντέλα απεριορίστης και περιορισμένης ανάπτυξης και η χρήση τους στην επίλυση αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων.

Για τις § 4.8 – 4.9 θα παρουσιασθούν πραγματικά προβλήματα στα οποία θα μελετάται η μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης. Υπάρχει πληθώρα ασκήσεων και πρακτικών εφαρμογών κατάλληλες να καλύψουν τις αντίστοιχες θεωρητικές έννοιες.

Από τις προτεινόμενες γενικές ασκήσεις είναι θεμιτή η επίλυση κάποιων ενδεικτικών από κάθε θεματική ενότητα. Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες: 9**

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφοις**

1^η Ενότητα: § 5.1 – 5.2

2^η Ενότητα: § 5.3

3^η Ενότητα: § 5.4

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 5.1 – 5.2 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 1 διδακτική ώρα

§ 5.3 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 1 διδακτική ώρα

§ 5.4 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 1 διδακτική ώρα

Γενικές Ασκήσεις : 1 διδακτική ώρα

Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης : 2 διδακτικές ώρες

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια και τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.
2. Να υπολογίζουν ολοκληρώματα διαφόρων συναρτήσεων είτε με την ανακάλυψη της παράγουσας, είτε με την παραγοντική ολοκλήρωση.
3. Να μπορούν να χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων και για τον υπολογισμό του εμβαδού επιπέδου χωρίου.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την πρώτη θεματική ενότητα (§ 5.1 – 5.2) πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι έννοια γενικότε-

ρη του εμβαδού. Με τη χρήση των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος και του πίνακα των παραγουσών συναρτήσεων του κεφαλαίου 4 πρέπει οι μαθητές να εξασκηθούν στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.

Για τη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 5.3) πρέπει οι μαθητές να μάθουν να ανακαλύπτουν την παράγουσα χρησιμοποιώντας ουσιαστικά την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης. Πρέπει επίσης να μπορούν με τη χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης να υπολογίζουν πιο σύνθετα ολοκληρώματα και να γίνει αναλυτικά παράδειγμα επανεμφάνισης του ολοκληρώματος $(\int_a^b e^x \eta \mu x \, dx)$.

Τέλος, για την τρίτη θεματική ενότητα (§ 5.4) πρέπει οι μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν το πρόσημο μπροστά από το ολοκλήρωμα για να υπολογίζουν το εμβαδό μίας συνάρτησης στα αντίστοιχα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι θετική ή αρνητική. Για τον υπολογισμό εμβαδού μεταξύ δύο συναρτήσεων πρέπει να υπολογίζουν το πρόσημο της διαφοράς των δύο συναρτήσεων. Για την πληρέστερη κατανόηση του υπολογισμού εμβαδών επιπέδων χωρίων κρίνεται σκόπιμο να παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των οποίων υπολογίζεται το εμβαδόν.

Επίσης να σημειώσουμε ότι στις πρακτικές εφαρμογές ουσιαστικά χρησιμοποιείται ένας και μοναδικός τύπος:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x F'(x) \, dx.$$

Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.

1

Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

Εισαγωγή

Ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο είναι ο πίνακας, δηλαδή μια ορθογώνια διάταξη αριθμών. Η ορθογώνια αυτή διάταξη μας δίνει **πληροφορίες** για κάθε στοιχείο του.

Από τις πράξεις και τις ιδιότητες των πινάκων μπορούμε να αντλήσουμε συμπεράσματα που έχουν σχέση με τις αρχικές πληροφορίες που παρέχουν οι πίνακες.

Ιστορικά, η έννοια του πίνακα προέκυψε από τη μελέτη των οριζουσών για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος και αποτέλεσε ανεξάρτητο μαθηματικό σύμβολο με τις δικές του χρήσεις και ιδιότητες. Το 1855 ο A. Cayley εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια του πίνακα στη μελέτη γραμμικών μετασχηματισμών, ενώ το 1858 ανέπτυξε συστηματικά όλη τη βασική τους θεωρία στην εργασία του "Μια πραγματεία στη θεωρία των πινάκων".

Ο λογισμός των πινάκων αναπτύχθηκε τα επόμενα χρόνια σε μια αυτοτελή μαθηματική θεωρία που είναι μέρος της Γραμμικής Άλγεβρας.

1.1. Η έννοια του Πίνακα

Για διάφορους λόγους, τρεις μεγάλες αλυσίδες Super Market αποφάσισαν τη μείωση βασικών καταναλωτικών ειδών σε ποσοστά ως εξής:

- A:** Μείωση στα διαφόρου είδους χαρτικά 12%, στα γαλακτοκομικά 8%, στα αναψυκτικά-ποτά 6% και στα κρέατα-είδη ψαρικής 4,5%.
- B:** Μείωση στα χαρτικά 13%, στα γαλακτοκομικά 7,5%, στα αναψυκτικά-ποτά 5% και στα κρέατα-είδη ψαρικής 3%.
- Γ:** Μείωση στα χαρτικά 10%, στα γαλακτοκομικά 9%, στα αναψυκτικά-ποτά 7% και στα κρέατα-είδη ψαρικής 5%.

Για να μπορούμε να **συγκρίνουμε** τις εκπτώσεις για τα διάφορα είδη και να προτιμήσουμε την κατάλληλη αλυσίδα Super Market οργανώνουμε τις παραπάνω **πληροφορίες** ως εξής:

Εκπτώσεις % Αλυσίδα S-M	Χαρτικά	Γαλακτοκομικά	Αναψυκτικά- Ποτά	Κρέατα- Είδη ψαρικής
A	12	8	6	4,5
B	13	7,5	5	3
Γ	10	9	7	5

Η ορθογώνια διάταξη των πιο πάνω αριθμών είναι ένας πίνακας εκπτώσεων ειδών καταναλωτή. Αν γράψουμε τους αριθμούς αυτούς μέσα σε αγκύλες:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 & 4,5 \\ 13 & 7,5 & 5 & 3 \\ 10 & 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

λέμε ότι έχουμε ένα **πίνακα με 3 γραμμές και 4 στήλες** ή ένα πίνακα **3×4** που διαβάζεται **3 επί 4 πίνακας**. Τους πίνακες συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα A, B κ.λπ.

Ορισμός: Μια ορθογώνια διάταξη μ·ν αριθμών σε μ γραμμές και ν στήλες λέγεται **πίνακας μ×ν**.

Οι αριθμοί που αποτελούν τον πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα και καθένα από αυτά χαρακτηρίζεται **από τη θέση** που κατέχει στον πίνακα.

Π.χ. ο αριθμός 10 βρίσκεται στην 3^η γραμμή και 1^η στήλη του πίνακα, ο αριθμός 7,5 βρίσκεται στη 2^η γραμμή και 2^η στήλη του πίνακα.

Για να μπορούμε να χαρακτηρίζουμε το κάθε ένα από τα στοιχεία του πίνακα χρησιμοποιούμε δύο δείκτες. Ο **i-δείκτης** μας δείχνει τη **γραμμή** στην οποία βρίσκεται το στοιχείο και ο **j-δείκτης** τη **στήλη**.

Έτσι, ο αριθμός 10 χαρακτηρίζεται ως το a_{31} στοιχείο του πίνακα, ενώ ο αριθμός 7,5 ως το a_{22} στοιχείο.

Γενικά ο πίνακας έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iv} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu j} & \cdots & a_{\mu v} \end{bmatrix}$$

j-στήλη

i-γραμμή

Παρατηρήστε ότι στην i-γραμμή όλα τα στοιχεία του πίνακα έχουν ως πρώτο δείκτη i. Αντίστοιχα στη j-στήλη έχουν ως δεύτερο δείκτη j. Το στοιχείο a_{ij} κατέχει τη θέση της i-γραμμής και j-στήλης. Σε συντομογραφία (ή συμβολικά) μπορούμε να γράφουμε $A = [a_{ij}]$ με $i = 1, 2, 3, \dots, \mu$ και $j = 1, 2, 3, \dots, v$.

1.2. Ισότητα Πινάκων

Δύο πίνακες A, B είναι ίσοι όταν είναι του ίδιου τύπου (ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Έτσι, αν πάρουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 12x + 8y + 6\omega = 4,5 \\ 13x + 7,5y + 5\omega = 3 \\ 10x + 9y + 7\omega = 5 \end{cases}$$

ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και των σταθερών όρων είναι:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 & 4,5 \\ 13 & 7,5 & 5 & 3 \\ 10 & 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

και μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι είναι πίνακας ίσος με τον πίνακα A των εκπτώσεων που παρουσιάσαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. (Παρατηρήστε εδώ ότι οι πίνακες A και B δίνουν διαφορετικές πληροφορίες).

Έτσι, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε τους $x, y, \omega \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x + y \\ y + \omega \\ \omega + x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

πρέπει:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y + \omega = 6 \\ \omega + x = 8 \end{cases}$$

και αν λύσουμε το σύστημα θα προκύψουν οι αριθμοί $x = 3, y = 1$ και $\omega = 5$.

1.3. Είδη Πινάκων

(α) Ένας πίνακας με ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών λέγεται **τετραγωνικός πίνακας $n \times n$** . Η μορφή αυτού του πίνακα είναι:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ αποτελούν την **κύρια διαγώνιο** του πίνακα A .

(β) Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **διαγώνιος**, όταν όλα τα στοιχεία που δε βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(γ) Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **τριγωνικός άνω** όταν όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα ορίζεται και ο **τριγωνικός κάτω**:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vv} \end{bmatrix}$$

(δ) Ένας πίνακας που έχει μια μόνο γραμμή λέγεται **πίνακας γραμμή**:

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1v}]$$

και ένας που έχει μια μόνο στήλη λέγεται **πίνακας στήλη**:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{1\mu} \end{bmatrix}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Η κατανομή των μεταλλίων στο 17^ο Ευρωπαϊκό πρωτάθλημα στίβου το 1998 για τις τέσσερις πρώτες χώρες ήταν:

Μ. Βρετανία : Χρυσά 9, Ασημένια 4, Χάλκινα 3
 Γερμανία : Χρυσά 8, Ασημένια 7, Χάλκινα 8
 Ρωσία : Χρυσά 6, Ασημένια 9, Χάλκινα 7
 Πολωνία : Χρυσά 3, Ασημένια 4, Χάλκινα 1

Να κατασκευάσετε ένα πίνακα κατανομής μεταλλίων για τις 4 αυτές χώρες.

Λύση

Ο πίνακας που ακολουθεί είναι συνοπτικός των παραπάνω πληροφοριών:

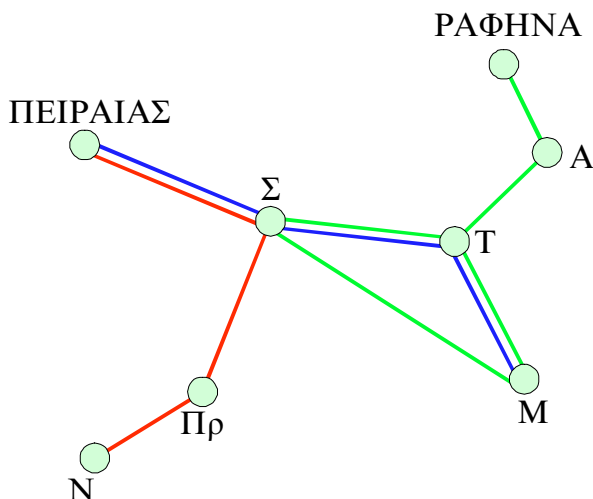
Χώρες	Χρ	Α	Χ
Μ. Βρετανία	9	4	3
Γερμανία	8	7	8
Ρωσία	6	9	7
Πολωνία	3	4	1

και αποδίδεται με τον 4×3 πίνακα:

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 2

Το δίκτυο ακτοπλοοίας που συνδέει δύο μεγάλα λιμάνια, Π (Πειραιά) και Ρ (Ραφήνα), με έξι νησιά των Κυκλάδων, Σ (Σύρο), Πρ (Πάρο), Ν (Νάξο), Α (Άνδρο), Τ (Τήνο) και Μ (Μύκονο) ως υποθέσουμε ότι αποδίδεται από το ακόλουθο σχήμα κατά τη χειμερινή περίοδο:



Τα πλοία (οχηματαγωγά) όπως φαίνεται στο σχήμα ακολουθούν τρία διαφορετικά δρομολόγια: (i) κόκκινη γραμμή: Π - Σ - Πρ - Ν - Πρ - Σ - Π, (ii) μπλέ γραμμή Π - Σ - Τ - Μ - Τ - Σ - Π, (iii) πράσινη γραμμή Ρ - Α - Τ - Μ - Σ - Τ - Α - Ρ.

- (α) Να φτιάξετε έναν πίνακα δρομολογίων από τον Πειραιά και τη Ραφήνα προς νησιά, του οποίου κάθε στοιχείο να δείχνει το πλήθος των συνδέσεων των δύο μεγάλων λιμανιών με τα νησιά.
- (β) Πόσες φορές διέρχεται πλοίο από τα νησιά αυτά καθ' όλη τη διάρκεια των δρομολογίων από και προς ΠΕΙΡΑΙΑ - ΡΑΦΗΝΑ;

Λύση

- (α) Ο πίνακας δρομολογίων παριστάνεται με τον πίνακα διπλής εισόδου:

	Σ	T	M	Πρ	N	A
Πειραιάς	2	1	1	1	1	0
Ραφήνα	1	1	1	0	0	1

και αποδίδεται με τον 2×6 πίνακα:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (β) Ο επόμενος πίνακας διπλής εισόδου μας δείχνει πόσες φορές κατά τη διάρκεια του δρομολογίου διέρχεται πλοίο από κάθε νησί ξεχωριστά από Πειραιά και Ραφήνα και συνολικά (στην τρίτη γραμμή):

	Σ	T	M	Πρ	N	A
Πειραιάς	4	2	1	2	1	0
Ραφήνα	1	2	1	0	0	2
Σύνολο	5	4	2	2	1	2

και αποδίδεται με τον 3×6 πίνακα:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 3

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 5y + 8\omega = 6 \\ y + 2\omega = 3 \\ \omega = 1 \end{array} \right\}$$

μπορεί να παρασταθεί με έναν **τριγωνικό άνω** πίνακα 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας των συντελεστών της πρώτης εξίσωσης του συστήματος με έναν **πίνακα γραμμή** 1×3 :

$$B = [3 \quad -5 \quad 8]$$

και ο πίνακας των σταθερών όρων με έναν **πίνακα στήλη** 3×1 :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 4

Να βρεθεί ο τύπος του πίνακα A που έχει 72 στοιχεία, συνολικά 17 γραμμές και στήλες και το πλήθος των γραμμών του είναι μικρότερο του πλήθους των στηλών του.

Λύση

Αν ο τύπος του πίνακα A είναι $\mu \times \nu$, θα ισχύουν:

$$\left. \begin{array}{l} \mu \cdot \nu = 72 \\ \mu + \nu = 17 \\ \mu < \nu \end{array} \right\}$$

Οι φυσικοί αριθμοί μ, ν θα είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 17x + 72 = 0$ άρα θα είναι $\mu = 8, \nu = 9$ ή $\mu = 9, \nu = 8$. Προφανώς, αφού $\mu < \nu$ ο πίνακας A είναι τύπου 8×9 .

Εφαρμογή 5

Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y αν ο 2×3 πίνακας B , τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} i^j x & , \quad i + j = \text{άρτιος} \\ (i - j)\omega & , \quad i + j = \text{περιττός} \end{cases}$$

είναι ίσος με τον 2×3 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 - x & 1 & 2x + \omega \\ 2\omega + x & 2x - 2\omega & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Ο πίνακας B γράφεται:

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{bmatrix}$$

και με τη βοήθεια της σχέσης που υπολογίζει τα στοιχεία του παίρνουμε:

$$\beta_{11} = 1^1 x = x$$

$$\beta_{21} = (2 - 1)\omega = \omega$$

$$\beta_{12} = (1 - 2)\omega = -\omega$$

$$\beta_{22} = 2^2 x = 4x$$

$$\beta_{13} = 1^3 x = x$$

$$\beta_{23} = (2 - 3)\omega = -\omega$$

Άρα $B = \begin{bmatrix} x & -\omega & x \\ \omega & 4x & -\omega \end{bmatrix}$ και λόγω της ισότητάς του με τον A έχουμε:

$$\begin{cases} x = 2 - x \\ -\omega = 1 \\ x = 2x + \omega \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \omega = 2\omega + x \\ 4x = 2x - 2\omega \\ -\omega = 1 \end{cases}$$

Οι τιμές $x = 1$ και $\omega = -1$ επαληθεύουν το σύστημα.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα $B = [\beta_{ij}]$ με $\beta_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη μορφή του πίνακα B;

Άσκηση 2

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - y^2 & (x + y)^2 \\ (x + 4)^2 & y^2 & x + 2y - 4 \\ y^2 - x^2 & x + y & (x - y)^2 \end{bmatrix}$$

με $x, y \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Βρείτε τον πίνακα $A = [a_{ij}]$ τύπου $n \times n$, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι $a_{ij} = \min \{i, j\}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$. Κατόπιν, βρείτε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Άσκηση 2

Θεωρούμε ένα $n \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$.

- (α) Πόσα στοιχεία έχει συνολικά ο πίνακας A ;
- (β) Πόσα στοιχεία υπάρχουν πάνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιο;
- (γ) Μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιο πίνακα με περισσότερα από $n^2 - n$ στοιχεία ίσα με μηδέν, που να έχει όλες τις γραμμές (αντίστοιχα στήλες) διάφορες της μηδενικής;

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Είναι γνωστό ότι το νερό βράζει στους 100°C . Ισχύει όμως πάντοτε αυτό; Η απάντηση μπορεί να δοθεί με χρήση της εξίσωσης Antoine που εκφράζει την «τάση ατμών» (δηλαδή την πίεση στο σημείο βρασμού) ως συνάρτηση της θερμοκρασίας:

$$\ln P^s = 18,3104 - \frac{3826,36}{T - 45,47} = A - \frac{B}{T + C}$$

όπου $A = 18,3104$, $B = 3826,36$, $C = -45,47$, T = θερμοκρασία σε Kelvin, P^s = τάση ατμών σε mm Hg.

Αν είναι γνωστό ότι οι βαθμοί Kelvin προκύπτουν, αν στους βαθμούς Κελσίου προσθέσουμε 273,15, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \text{C} & \text{K} & \frac{B}{C+T} & A - \frac{B}{C+T} & P^s \text{ (mm Hg)} & P^s \text{ (atm)} \\ 100 & & & & & \\ 90 & & & & & \\ 98 & & & & & \end{bmatrix}$$

Σχολιάστε τα αποτελέσματα του πίνακα.

Άσκηση 2

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογισμένες, με 3 διαφορετικά μοντέλα μέτρησης, τιμές για τον συντελεστή ενεργότητας μιας σειράς πολυμερών διαλυμάτων. Ο συντελεστής ενεργότητας είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα στην εφαρμοσμένη Θερμοδυναμική.

Σύστημα	Πειραματική Τιμή	Μοντέλο		
		A	B	Γ
PIB/τολουόλιο	5,30	5,28	6,19	7,01
PIB/τετραχλωράνθρακας	2,53	2,74	2,93	2,10
PVC/ακετόνη	11,80	9,98	10,17	3,64
PVC/κυκλοεξάνιο	16,10	10,96	8,96	5,36
BR/εξάνιο	6,36	5,79	4,97	9,89
BR/ακετόνη	10,40	11,36	9,49	33,63
PS/βενζόλιο	4,27	4,76	3,98	5,78
PS/αιθυλοβενζόλιο	4,96	4,63	4,23	7,02

Να σχηματίσετε έναν πίνακα όπου:

- (α) Στην πρώτη στήλη να εμφανίζονται οι πειραματικές τιμές και
 (β) Στις επόμενες στήλες να εμφανίζονται, αντί των υπολογισμένων τιμών, τα ποσοστιαία σφάλματα, καθώς και το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα του κάθε μοντέλου στην τελευταία γραμμή του πίνακα.

Σημείωση:

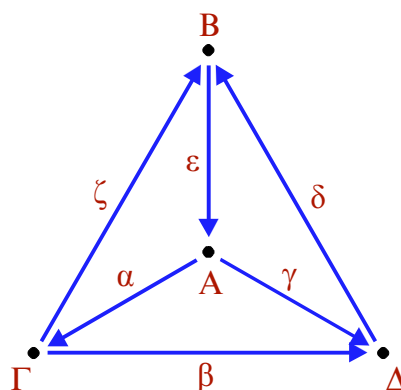
- Το ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:

$$Π.Σφ. = \frac{|Πειραματική τιμή - Υπολογισμένη τιμή|}{Πειραματική τιμή} \cdot 100$$
- Το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:

$$Μ.Π.Σφ. = \frac{Αθροισμα ποσοστιαίων σφαλμάτων κάθε μοντέλου}{Πλήθος μετρήσεων}$$

Άσκηση 3 (Τοπολογικός ή συνδετικός πίνακας)

Το διπλανό σχήμα μας δείχνει μια κεντρική Α και τρεις περιφεριακές γειτονιές Β, Γ, Δ που συνδέονται με δρόμους μονής κατεύθυνσης. Κάθε ένας απ' αυτούς τους δρόμους θα συμβολίζεται με δύο αριθμούς: -1 από τη γειτονιά που ξεκινάει, 1 σ' αυτή που καταλήγει και 0 σ' αυτή που δεν πάει. (π.χ. ο δρόμος ΑΓ, -1 στη γειτονιά Α, 1 στη γειτονιά Γ και 0 στις υπόλοιπες γειτονιές).



- (α) Φτιάξτε έναν πίνακα που να φανερώνει τον τρόπο που συνδέονται οι γειτονιές με τους μονόδρομους, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι γραμμές θα παριστάνουν τους δρόμους και οι στήλες τις γειτονιές.
- (β) Τι παρατηρείτε στις γραμμές αυτού του πίνακα για τα δίκτυα
- (i) $\gamma, \delta, \varepsilon$ (iii) α, β, γ
(ii) $\alpha, \zeta, \varepsilon$ (iv) β, δ, ζ
- (γ) Μπορείτε να γενικεύσετε για οποιοδήποτε από τα δίκτυα που συνδέουν τις τέσσερις γειτονιές;

Άσκηση 4 (Το πρόβλημα του γάμου)

Υποθέστε ότι έχουμε 4 γυναίκες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και 4 άνδρες A, B, Γ, Δ . Κάποια απ' αυτά τα 16 ζευγάρια συμφωνούν να δοκιμάσουν αν μπορούν να παντρευτούν και κάποια δε συμφωνούν για διάφορους λόγους. Αν με $a_{ij} = 0$ συμβολίσουμε ότι η i γυναίκα δε συμφωνεί με τον j άνδρα και $a_{ij} = 1$ ότι η i γυναίκα συμφωνεί με τον j άνδρα τότε:

- (α) Γράψτε έναν πίνακα που να δείχνει ότι:
- Η α γυναίκα συμφωνεί πως μπορεί να παντρευτεί με τον A ή τον Δ άνδρα.
 - Η β γυναίκα με τον B άνδρα.
 - Η γ γυναίκα με τον A ή τον Γ άνδρα
 - Η δ γυναίκα με τον B ή τον Δ ή τον A άνδρα.
- (β) Με δεδομένο ότι μια γυναίκα μπορεί να παντρευτεί έναν άνδρα και αντίστροφα, ποιά είναι τα δυνατά ζευγάρια του (α) ερωτήματος;
- (γ) Βρείτε ένα μέγιστο σύνολο γάμων που παριστάνουν οι επόμενοι πίνακες:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & \Gamma & \Delta & E \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{matrix} \end{matrix}, N = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & \Gamma & \Delta & E \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{matrix} \end{matrix}$$

1.4. Πρόσθεση Πινάκων

Μια έρευνα σε κεντρικό βιβλιοπωλείο της Αθήνας μας έδειξε τις πωλήσεις σε βιβλία τους μήνες Μάιο και Ιούνιο όπως φαίνονται στους παρακάτω πίνακες. Καταχωρούμε τις ενδείξεις μόνο τεσσάρων ειδών βιβλίων και έχουμε χωρίσει σε τρεις ομάδες τις ηλικίες αγοραστών.

Μάιος				
Είδος Ηλικία	Θετικές Επιστήμες	Λογοτεχνία	Τεχνολογία - Ηλ. Υπολογιστές	Κοινωνικές Επιστήμες
16 - 25	25	44	62	12
25 - 40	60	105	53	20
Ανω των 40	28	80	30	35

Ιούνιος				
Είδος Ηλικία	Θετικές Επιστήμες	Λογοτεχνία	Τεχνολογία - Ηλ. Υπολογιστές	Κοινωνικές Επιστήμες
16 - 25	30	40	54	15
25 - 40	50	115	58	22
Ανω των 40	24	95	20	38

Αν θέλουμε τις συνολικές πωλήσεις αυτούς τους δύο μήνες, τότε έχουμε:

Μάιος και Ιούνιος				
Είδος Ηλικία	Θετικές Επιστήμες	Λογοτεχνία	Τεχνολογία - Ηλ. Υπολογιστές	Κοινωνικές Επιστήμες
16 - 25	(25 + 30)	(44 + 40)	(62 + 54)	(12 + 15)
25 - 40	(60 + 50)	(105 + 115)	(53 + 58)	(20 + 22)
Ανω των 40	(28 + 24)	(80 + 95)	(30 + 20)	(35 + 38)

Μπορούμε να εκφράσουμε τα παραπάνω με πίνακες:

$$\text{Για τον Μάιο οι πωλήσεις είναι: } A = \begin{bmatrix} 25 & 44 & 62 & 12 \\ 60 & 105 & 53 & 20 \\ 28 & 80 & 30 & 35 \end{bmatrix}$$

Για τον Ιούνιο οι πωλήσεις είναι: $B = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 54 & 15 \\ 50 & 115 & 58 & 22 \\ 24 & 95 & 20 & 38 \end{bmatrix}$

και ο πίνακας:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 25 + 30 & 44 + 40 & 62 + 54 & 12 + 15 \\ 60 + 50 & 105 + 115 & 53 + 58 & 20 + 22 \\ 28 + 24 & 80 + 95 & 30 + 20 & 35 + 38 \end{bmatrix}$$

εκφράζει τις πωλήσεις και για τους δύο μήνες.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας Γ αποτελείται από το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B . Ο πίνακας Γ ονομάζεται **άθροισμα** των πινάκων A και B .

Ορισμός: 'Αθροισμα δύο πινάκων $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$, λέγεται ο $m \times n$ πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ για τον οποίο κάθε στοιχείο του προκύπτει από το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B . Δηλαδή $\gamma_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

• Ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων

Επειδή η πρόσθεση δύο πινάκων ορίζεται από την πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων τους, οι ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων είναι ανάλογες με τις ιδιότητες πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών.

(α) $A + B = B + A$ αντιμεταθετική ιδιότητα

(β) $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$ προσεταιριστική ιδιότητα

Είναι φανερό ότι το άθροισμα τριών πινάκων $A + B + \Gamma$ μπορεί να υπολογιστεί με έναν από τους δύο τρόπους:

$$A + B + \Gamma = (A + B) + \Gamma \quad \text{ή} \quad A + B + \Gamma = A + (B + \Gamma)$$

Για πρόσθεση περισσότερων πινάκων ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία:

$$A + B + \Gamma + \Delta = [(A + B) + \Gamma] + \Delta \quad \text{κ.λ.π.}$$

(γ) **Μηδενικός πίνακας**

Στους πραγματικούς αριθμούς το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης. Ισχύει δηλαδή $a + 0 = 0 + a = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Στους πίνακες το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης (δηλαδή ο πίνακας που θα προστεθεί σ' οποιονδήποτε άλλο πίνακα και δε θα τον μεταβάλει) είναι ο **μηδενικός πίνακας**. Είναι δηλαδή αυτός ο πίνακας που όλα του τα στοιχεία είναι 0. Συμβολίζεται με 0 και ισχύει:

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$\text{Π.χ. } \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Γίνεται φανερό από το παράδειγμα ότι όλοι οι μηδενικοί πίνακες δεν είναι του ίδιου τύπου αλλά για απλούστευση συμβολίζονται με 0 .

(δ) Αντίθετος πίνακας

Αν έχουμε έναν πίνακα $A_{\mu \times \nu}$ τότε ο αντίθετός του συμβολίζεται $-A$, είναι πίνακας $\mu \times \nu$ και τα στοιχεία του είναι τα αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων του A . Ισχύει:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

$$\text{Π.χ. Αν } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ τότε ο } -A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

• Αφαίρεση πινάκων

Ορισμός: Διαφορά δύο πινάκων $\mu \times \nu$ $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$, λέγεται ο $\mu \times \nu$ πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ για τον οποίο κάθε στοιχείο του προκύπτει από την αφαίρεση των αντίστοιχων στοιχείων του πίνακα B από τα στοιχεία του A . Δηλαδή $\gamma_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \mu$ και $j = 1, 2, \dots, \nu$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να βρείτε πίνακα X ώστε να ισχύει $X - A + B = 0$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Για να ορίζεται η αφαίρεση και η πρόσθεση μεταξύ πινάκων πρέπει να είναι του ίδιου τύπου. Άρα ο πίνακας X είναι 3×2 . Έχουμε:

$$X - A + B = 0 \Leftrightarrow X = A - B$$

Άρα:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Τελικά:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Μια τέτοια ισότητα μεταξύ πινάκων λέγεται **εξίσωση**. Ο πίνακας X είναι ο **άγνωστος** της εξίσωσης και η διαδικασία υπολογισμού του λέγεται **επίλυση της εξίσωσης**.

Εφαρμογή 2

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} \sin x & \eta \mu x \\ -\eta \mu x & \sin x \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \sin x & -\eta \mu x \\ \eta \mu x & \sin x \end{bmatrix}$$

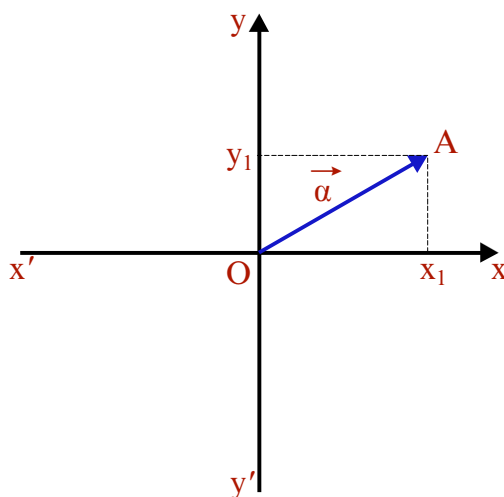
Να βρείτε το $x \in (0, \pi)$ για να ισχύει $A + B = 0$.

Λύση

Είναι $A + B = \begin{bmatrix} 2\sin x & 0 \\ 0 & 2\sin x \end{bmatrix}$, επομένως για να ισχύει $A + B = 0$ θα πρέπει $2\sin x = 0$, άρα $x = \frac{\pi}{2}$.

Εφαρμογή 3

Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια πίνακα γραμμής ή στήλης των συντεταγμένων του όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



$$\vec{a} = \vec{OA} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \vec{a} = \vec{OA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε δύο διανύσματα, προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες τους. Αν π.χ.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$\vec{a} + \vec{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{a} - \vec{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα με αρχή το O και τέλος το A ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** ή **διανυσματική ακτίνα του A**.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ αν γνωρίζετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων θέσης των σημείων A και B.

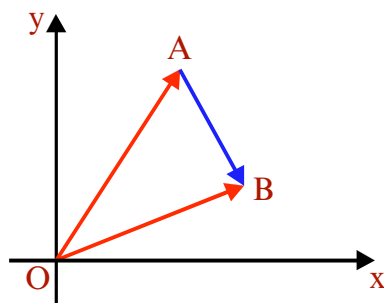
Λύση

Αν υποθέσουμε ότι $\vec{OA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ και

$\vec{OB} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Τότε:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\text{'Αρα } \vec{AB} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$



Τα παραπάνω εκφράζονται με την πρόταση:

«Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{AB}$ προκύπτουν αν από τις συντεταγμένες του τέλους B αφαιρέσουμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες της αρχής A »

1.5. Πολλαπλασιασμός αριθμού με Πίνακα

Μια εταιρεία παραγωγής και εμπορίας πλαστικών σωλήνων από σκληρό PVC (πολυβινυλ-χλωρίδιο) κατασκευάζει σωλήνες διαφορετικών διατομών και διαφορετικών τύπων, όσον αφορά το βάρος και το πάχος των τοιχωμάτων του σωλήνα. Ο επόμενος πίνακας δείχνει **το μέσο βάρος ανά μέτρο (kg/m)** σωλήνων με εξωτερική διάμετρο 200 χιλιοστά (Φ200) και 250 χιλιοστά (Φ250).

Εξ. διάμετρος kg/m	Φ200	Φ250
A	3,57	3,69
B	4,47	5,62
Γ	5,16	7,01

Η εταιρεία πουλά τα προϊόντα της ανάλογα με το βάρος κάθε σωλήνα. Έτσι αν κοστολογεί με 604 δραχμές το ένα kg ο τιμοκατάλογος **δραχμών ανά μέτρο σωλήνα** είναι:

Εξ. διάμετρος δρχ/m	Φ200	Φ250
A	2156,28	2228,76
B	2699,88	3394,48
Γ	3116,64	4234,04

Ο πίνακας αυτός προέκυψε από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων του προηγούμενου πίνακα επί τον αριθμό 604, δηλαδή:

$$604 \cdot \begin{bmatrix} 3,57 & 3,69 \\ 4,47 & 5,62 \\ 5,16 & 7,01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2156,28 & 2228,76 \\ 2699,88 & 3394,48 \\ 3116,64 & 4234,04 \end{bmatrix}$$

Να κατασκευάσετε πίνακα τιμοκατάλογο για τρίμετρους και εξάμετρους σωλήνες των παραπάνω τύπων.

Ορισμός: Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα $A = [a_{ij}]_{\mu \times \nu}$, λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με τον αριθμό λ . Έχουμε τότε $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \mu$ και $j = 1, 2, \dots, \nu$.

• Ιδιότητες

Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και A, B είναι πίνακες του ίδιου τύπου, τότε ισχύουν:

(α) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(β) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(γ) $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu A)$

(δ) $1 \cdot A = A$

Είναι φανερό από τον ορισμό και τις προηγούμενες ιδιότητες ότι ισχύουν:

(1) $(-1) A = -A$

(2) $(-\lambda) A = -(\lambda A)$

(3) $\lambda A = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $\lambda = 0$ ή $A = \mathbf{0}$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Η ανάλυση εξόδων μιας πολυκατοικίας 5 οροφοδιαμερισμάτων για το μήνα Φεβρουάριο είναι:

<u>Κοινόχρηστα</u>	<u>Ασανσέρ</u>	<u>Θέρμανση</u>	<u>Ειδικά Έξοδα</u>
76.500	14.000	60.050	12.150

Αν η αναλογία επιβάρυνσης κατά διαμέρισμα συνολικά (χωρίς ειδικές αναλογίες για θέρμανση - ασανσέρ κ.λ.π) είναι για το διαμέρισμα του 1^{ου} ορόφου 150%, του 2^{ου} ορόφου 170%, του 3^{ου} ορόφου 200%, του 4^{ου} ορόφου 230% και του 5^{ου} ορόφου 250%.

- (α) Να φτιάξετε έναν πίνακα που να αναλύει τα έξοδα κατά κατηγορία σε κάθε διαμέρισμα.

- (β) Αν το Μάρτιο υποθέσουμε ότι μειώνεται κατά 10% η κατανάλωση για τη θέρμανση αλλά αυξάνονται τα ειδικά έξοδα (έξοδα κήπου - συντήρηση αποχετεύσεων κ.λπ) κατά 30% και θεωρήσουμε ότι τα άλλα έξοδα παραμένουν σταθερά, ποιός θα είναι ο πίνακας εξόδων κατά κατηγορία σε κάθε διαμέρισμα; Πόσο θα πληρώσει συνολικά το κάθε διαμέρισμα το μήνα Μάρτιο;

Λύση

- (α) Τα έξοδα κατά κατηγορία προκύπτουν από τους πολ/σμούς:

$$(i) \quad 76.500 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.475 \\ 13.005 \\ 15.300 \\ 17.595 \\ 19.125 \end{bmatrix} \quad \text{για τα κοινόχρηστα}$$

$$(ii) \quad 14.000 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.100 \\ 2.380 \\ 2.800 \\ 3.220 \\ 3.500 \end{bmatrix} \quad \text{για το ασανσέρ}$$

$$(iii) \quad 60.050 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.007,5 \\ 10.208,5 \\ 12.010 \\ 13.811,5 \\ 15.012,5 \end{bmatrix} \quad \text{για τη θέρμανση και}$$

$$(iv) \quad 12.150 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.822,5 \\ 2.065,5 \\ 2.430 \\ 2.794,5 \\ 3.037,5 \end{bmatrix} \quad \text{για τα ειδικά έξοδα}$$

Άρα ο αναλυτικός πίνακας εξόδων για το κάθε διαμέρισμα είναι:

Εξόδα Διαμέρισμα	Κοινόχρηστα	Ασανσέρ	Θέρμανση	Ειδ. Εξόδα	
1 ^ο	11.475	2.100	9.007,5	1.822,5	24.405
2 ^ο	13.005	2.380	10.208,5	2.065,5	27.659
3 ^ο	15.300	2.800	12.010	2.430	32.540
4 ^ο	17.595	3.220	13.811,5	2.794,5	37.421
5 ^ο	19.125	3.500	15.012,5	3.037,5	40.675
	76.500	14.000	60.050	12.150	Σύνολο ανά διαμέρ. Σύνολο ανά κατηγορία

- (β) Το μήνα Μάρτιο θα μειωθεί η κατανάλωση για τη θέρμανση κατά 10% άρα η στήλη της θέρμανσης θα προκύψει από τον πολ/σμό:

$$60.050 \cdot 0,90 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, η στήλη των ειδικών εξόδων θα προκύψει από τον πολ/σμό:

$$12.150 \cdot 1,30 \cdot \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

Οι υπόλοιπες στήλες θα παραμείνουν αμετάβλητες και για να υπολογίσουμε πόσο θα πληρώσει το μήνα Μάρτιο κάθε διαμέρισμα θα έχουμε:

$$(76.500 + 14.000 + 60.050 \cdot 0,90 + 12.150 \cdot 1,30) \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix} =$$

$$= 160.340 \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,17 \\ 0,20 \\ 0,23 \\ 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.051 \\ 27.257,8 \\ 32.068 \\ 36.878,2 \\ 40.085 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 2

Αν για τους πίνακες τύπου $n \times n$ A και B ισχύουν:

$$\lambda A = B \quad (1) \quad \text{και} \quad (\lambda^2 + 1)B = 2\lambda^2 A \quad (2)$$

να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $A = B$.

Λύση

Έχουμε $\lambda A = B$. Άρα:

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 1)(\lambda A) &= 2\lambda^2 A \Leftrightarrow [(\lambda^2 + 1)\lambda]A = 2\lambda^2 A \Leftrightarrow \\ \lambda[(\lambda^2 + 1) - 2\lambda]A &= 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)^2 A = 0 \end{aligned}$$

Άρα $\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ ή $A = 0$.

- Αν $\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ τότε $\lambda = 1$ (αφού $\lambda \in \mathbb{R}^*$) και από (1) έχουμε $A = B$.
- Αν $A = 0$ τότε πάλι από (1) έχουμε $B = 0$, άρα $A = B$.

Εφαρμογή 3

Αν $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ και $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει: $2x \cdot A + y \cdot B = 3\Gamma$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} x & 2x \\ 2x & -4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & -y \\ 2y & 2y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 2y = 6 \\ -4x + 2y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \\ 2(x + y) = 6 \\ -2(2x - y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \right\}$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & x^2 - 9 \end{bmatrix}$ είναι μηδενικός όταν:

(α) $x = 3$

(β) $x = -3$

(γ) $x = 6$

Κυκλώστε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε.

Άσκηση 2

Στις επόμενες περιπτώσεις να υπολογίσετε τους $A + B$ και $A - B$, εφόσον βέβαια ορίζονται:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (β) $A = [2 \ 1 \ 0], B = [-2 \ -1 \ 0]$

(γ) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (δ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 3

Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x^2 & x \\ y^2 & 4 \\ x^2 + 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & y \\ 1 & 5y \\ 5x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -y^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (β) $X + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$(\gamma) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\delta) X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στους επόμενους ισχυρισμούς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- (α) Το άθροισμα και η διαφορά δύο διαγώνιων πινάκων τύπου $n \times n$ είναι διαγώνιος πίνακας $n \times n$.
- (β) Το άθροισμα και η διαφορά δύο τριγωνικών άνω (ή κάτω) πινάκων είναι τριγωνικός άνω (ή κάτω) πίνακας.
- (γ) Ο μηδενικός είναι διαγώνιος πίνακας.

Άσκηση 2

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (α) Να υπολογίσετε τον πίνακα $3A - 2B$.
- (β) Να βρείτε πίνακα X τέτοιο ώστε $3A - 2X = 2B + 5X$.

Άσκηση 3

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε πίνακες X και Ψ για τους οποίους ισχύουν:

$$\left. \begin{aligned} 2X - A &= \Psi - 2B \\ X - 2B &= A - \Psi \end{aligned} \right\}$$

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Οι ημερήσιες πωλήσεις εφημεριδών από το περίπτερο μιας συνοικίας αριθμούν σε φύλλα όπως δείχνουν οι επόμενοι πίνακες:

1^η ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	25	20	20
Απόγευμα	5	60	4

2^η ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	20	22	25
Απόγευμα	4	65	8

Αν ονομάσουμε M τον πίνακα πωλήσεων της 1^{ης} ημέρας και N τον πίνακα πωλήσεων της 2^{ης} ημέρας, υπολογίστε τον $M + N$. Ποιά είναι η ερμηνεία που δίνετε για τον πίνακα $M + N$;

Άσκηση 2

Τα τρίποντα, δίποντα και οι ελεύθερες βολές που πέτυχαν, εντός και εκτός έδρας, στις τέσσερις πρώτες αγωνιστικές του πρωταθλήματος μπάσκετ τρεις ομάδες δίνονται παρακάτω:

ΟΜΑΔΕΣ \ ΠΟΝΤΟΙ	ΤΡΙΠΟΝΤΑ		ΔΙΠΟΝΤΑ		ΕΛ. ΒΟΛΕΣ	
	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός
1 ^η Ομάδα	28	16	60	48	40	36
2 ^η Ομάδα	24	20	68	56	52	44
3 ^η Ομάδα	32	12	84	76	44	68

- (α) Να γραφούν τα δεδομένα με μορφή τριών πινάκων A , B , Γ που να περιέχουν αντίστοιχα τα τρίποντα, δίποντα και τις ελεύθερες βολές της κάθε ομάδας.
- (β) Να βρεθεί ένας πίνακας ο οποίος δίνει τους συνολικούς πόντους κάθε ομάδας, εντός και εκτός έδρας.

Άσκηση 3

Η κατανάλωση ρεύματος σε κιλοβατώρες, δύο οικογενειών ανά τετράμηνο δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	Α' ΤΕΤΡ.	Β' ΤΕΤΡ.	Γ' ΤΕΤΡ.
1 ^η Οικογένεια	1828	1700	1560
2 ^η Οικογένεια	2230	1920	1870

Αν η κιλοβατώρα κοστίζει 35 δρχ. και το πάγιο κάθε τετραμήνου είναι 4450 δρχ:

- (α) Να παραστήσετε μ' έναν πίνακα X τα ποσά που θα πληρώνει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο.
- (β) Να βρείτε πόσα χρήματα θα πλήρωναν οι ίδιες οικογένειες, αν μείωναν την κατανάλωση ρεύματος κατά 10%.

1.6. Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Το προσωπικό μιας εταιρείας κατασκευών ανταλλακτικών αυτοκινήτων κατανέμεται σε τρεις κατηγορίες στις οποίες ανήκουν έμπειροι, εξειδικευμένοι και ανειδίκευτοι εργαζόμενοι. Η εταιρεία έχει δύο εργοστάσια κατασκευών και το προσωπικό είναι κατανομημένο ως ακολούθως:

	Έμπειροι	Εξειδικευμένοι	Ανειδίκευτοι
1 ^ο Εργοστάσιο	20	18	40
2 ^ο Εργοστάσιο	15	20	30

Η αμοιβή των εργαζομένων κατά κατηγορία τις εργάσιμες ημέρες και η αποζημίωσή τους τις ημέρες αργίας, σε χιλιάδες δραχμές, είναι:

	Εργάσιμες	Αργίες
Έμπειροι	20	18
Εξειδικευμένοι	15	13
Ανειδίκευτοι	10	8

Για να βρούμε την ημερήσια δαπάνη της εταιρείας και στα δύο εργοστάσια έχουμε:

1^ο Εργοστάσιο: $20 \cdot 20 + 18 \cdot 15 + 40 \cdot 10$ για εργάσιμη μέρα
 $20 \cdot 18 + 18 \cdot 13 + 40 \cdot 8$ για αργία

2^ο Εργοστάσιο: $15 \cdot 20 + 20 \cdot 15 + 30 \cdot 10$ για εργάσιμη μέρα
 $15 \cdot 18 + 20 \cdot 13 + 30 \cdot 8$ για αργία

Αν όλα τα παραπάνω θέλουμε να τα αποδόσουμε με πίνακες τότε:

$A = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 40 \\ 15 & 20 & 30 \end{bmatrix}$ ονομάζουμε τον 2×3 πίνακα εργαζομένων στα δύο εργοστάσια.

$B = \begin{bmatrix} 20 & 18 \\ 15 & 13 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ ονομάζουμε τον 3×2 πίνακα των αποδοχών τους τις εργάσιμες ημέρες και των αποζημιώσεων τις αργίες.

και ο πίνακας $\Gamma = \begin{bmatrix} 20 \cdot 20 + 18 \cdot 15 + 40 \cdot 10 & 20 \cdot 18 + 18 \cdot 13 + 40 \cdot 8 \\ 15 \cdot 20 + 20 \cdot 15 + 30 \cdot 10 & 15 \cdot 18 + 20 \cdot 13 + 30 \cdot 8 \end{bmatrix}$ είναι ο 2×2 πίνακας ημερήσιας δαπάνης της εταιρείας για εργάσιμες και για ημέρες αργίας και στα δύο εργοστάσιά της.

Ο πίνακας Γ λέγεται **γινόμενο** του πίνακα A με τον πίνακα B και συμβολίζεται $A \cdot B$. Παρατηρήστε ότι το στοιχείο γ_{11} του πίνακα Γ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1^{ης} στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα. Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλα τα στοιχεία του πίνακα Γ όπως φαίνεται στο επόμενο σχεδιάγραμμα, που δείχνει και το μηχανισμό της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων. Για παράδειγμα, το στοιχείο γ_{21} του πίνακα Γ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 2^{ης} γραμμής του A με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1^{ης} στήλης του B και προσθέσουμε τα γινόμενα, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

ή $\gamma_{21} = 15 \cdot 20 + 20 \cdot 15 + 30 \cdot 10$.

Ορισμός: Αν A είναι ένας πίνακας $\mu \times \rho$ και B ένας πίνακας $\rho \times \nu$, ονομάζουμε γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B και τον συμβολίζουμε $A \cdot B$ έναν πίνακα $\mu \times \nu$ του οποίου το κάθε στοιχείο γ_{ij} (i γραμμής και j στήλης) προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης του πίνακα B και προσθέσουμε τα γινόμενα. Δηλαδή:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \dots + \alpha_{i\rho}\beta_{\rho j}$$

Σχηματικά έχουμε:

$$\begin{array}{c} \text{j-στήλη} \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} \text{i-γραμμή} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{i\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \dots & \alpha_{\mu \rho} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \dots & \beta_{2\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{\rho 1} & \dots & \beta_{\rho \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i1} & \dots & \gamma_{ij} & \dots & \gamma_{i\nu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\mu 1} & \dots & \gamma_{\mu j} & \dots & \gamma_{\mu \nu} \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Προσοχή στους τύπους των πινάκων: $\begin{array}{c} A \cdot B = \Gamma \\ \mu \times \rho \quad \rho \times \nu \quad \mu \times \nu \end{array}$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε πίνακες τέτοιους ώστε ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα να έχει το ίδιο πλήθος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα.

Παραδείγματα

Να βρείτε, όταν ορίζεται ο πολλαπλασιασμός, τα γινόμενα AB και BA στις επόμενες περιπτώσεις:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Εδώ ορίζεται το γινόμενο AB αφού ο A είναι 3×2 πίνακας και ο B είναι 2×3 πίνακας.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 5 \\ 12 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Επίσης ορίζεται γαι το γινόμενο BA αφού ο B είναι 2×3 πίνακας και ο A είναι 3×2 πίνακας.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι $AB \neq BA$.

$$(ii) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Εδώ ορίζεται το γινόμενο AB αφού ο A είναι 2×2 πίνακας και ο B είναι 2×1 πίνακας.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x + y \end{bmatrix}$$

Δεν ορίζεται όμως ο BA αφού ο B είναι 2×1 και ο A είναι 2×2 .

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Εδώ ορίζονται τα γινόμενα AB και BA αφού οι πίνακες A, B είναι τετραγωνικοί 2×2 .

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

και εδώ φαίνεται ότι $AB \neq BA$.

Επιπλέον, έχουμε δύο πίνακες **μη μηδενικούς** που έχουν γινόμενο τον **μηδενικό πίνακα**. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ λοιπόν στον πολλαπλασιασμό πινάκων η ιδιότητα $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ή $B = 0$. Απλά όταν ένας εκ των δύο πινάκων είναι **ο μηδενικός**, τότε το γινόμενό τους είναι 0 .

• Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

Αν λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί και A, B, Γ πίνακες, τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται κάθε φορά οι πράξεις που σημειώνονται.

$$(α) A(B\Gamma) = (AB)\Gamma \quad \text{προσεταιριστική ιδιότητα}$$

$$(β) A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma \text{ και } (B + \Gamma)A = BA + \Gamma A \quad \text{επιμεριστική ιδιότητα}$$

$$(γ) (\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$$

Σημειώσεις:

- (i) Στα προηγούμενα παραδείγματα έγινε κατανοητό ότι δεν ισχύει γενικά η **αντιμεταθετική ιδιότητα** στον πολλαπλασιασμό πινάκων. Αν λοιπόν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε μια σειρά πινάκων $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_k$, το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεσθεί ο πολλαπλασιασμός, αρκεί να μην αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων. Π.χ. $[A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)] \cdots A_k$.
- (ii) Αν επιπλέον $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, τότε έχουμε $A_1 A_2 \cdots A_k = A^k$.

Ορισμός: Δύναμη ενός $n \times n$ πίνακα A με εκθέτη θετικό ακέραιο κ , ορίζουμε τον πίνακα $A^\kappa = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{\kappa\text{-παράγοντες}}$.

Όταν $\kappa = 1$ έχουμε $A^1 = A$.

Αν κ, λ θετικοί ακέραιοι και ρ πραγματικός αριθμός, ισχύουν:

- $A^\kappa A^\lambda = A^{\kappa+\lambda} = A^\lambda A^\kappa$
- $(A^\kappa)^\lambda = A^{\kappa \cdot \lambda} = (A^\lambda)^\kappa$
- $(\rho A)^\kappa = \rho^\kappa A^\kappa$

• Μοναδιαίος πίνακας

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ και τον 2×2 πίνακα $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

και

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

δηλαδή $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$ για οποιονδήποτε 2×2 πίνακα A .

Ορισμός: Ορίζουμε ως μοναδιαίο πίνακα $n \times n$ το διαγώνιο πίνακα που όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι ίσα με 1 και συμβολίζουμε:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Αν A είναι οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ ισχύει:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Σημειώσεις:

- (i) $(I_n)^k = I_n$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο k .
- (ii) Αν ο πίνακας A είναι $m \times n$ τύπου τότε ισχύει $A \cdot I_n = A$ και $I_m \cdot A = A$.
- $$\text{π.χ.} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ και}$$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$
- (iii) Τον πίνακα I_n θα τον γράφουμε απλούστερα I όταν είναι φανερός ο τύπος του από τις πράξεις με τους άλλους πίνακες.

Εφαρμογές**Εφαρμογή 1**

Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = (A + B)^2$. Ποιό είναι το συμπέρασμά σας;

Λύση

Είναι:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Άρα: $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$ (1)

Επίσης $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$, οπότε:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Άρα: $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $A^2 + B^2 = (A + B)^2$.

Το συμπέρασμα είναι ότι γενικά στους πίνακες **δεν ισχύουν οι ταυτότητες** που γνωρίζουμε στους πραγματικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί στους πίνακες δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ($AB \neq BA$).

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αν θέλαμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $(A + B)^2$ διαφορετικά, θα είχαμε:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Δικαιολογήστε, κάνοντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων, γιατί είναι $AB + BA = 0$.

Εφαρμογή 2

Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A . Δικαιολογήστε γιατί ισχύει η σχέση $(3A + 2I)^2 = 9A^2 + 12A + 4I$. Ποιό είναι το γενικότερο συμπέρασμα σας;

Λύση

Είναι:

$$\begin{aligned} (3A + 2I)^2 &= (3A + 2I)(3A + 2I) = \\ &= (3A)(3A) + (3A)(2I) + (2I)(3A) + (2I)(2I) = \\ &= 3^2 A^2 + (3 \cdot 2)A + (2 \cdot 3)A + 2^2 I^2 = 9A^2 + 12A + 4I \end{aligned}$$

Αφού για τους πίνακες $3A$, $2I$ ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού:

$$\left. \begin{aligned} (3A)(2I) &= 6A \\ (2I)(3A) &= 6A \end{aligned} \right\} \text{ άρα } (3A)(2I) = (2I)(3A)$$

ισχύει και η γνωστή ταυτότητα του διωνύμου στο τετράγωνο. Γενικά, για αυτούς τους πίνακες ισχύουν πάντα οι ταυτότητες.

Εφαρμογή 3

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τα γινόμενα AB και $A\Gamma$ και να δικαιολογήσετε γιατί δεν ισχύει η ιδιότητα $AB = A\Gamma \Rightarrow B = \Gamma$ (νόμος της διαγραφής).

Λύση

Είναι φανερό ότι $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ και $A\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ άρα $AB = A\Gamma$.

Όμως από την ισότητα $AB = A\Gamma$ δε μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι $B = \Gamma$.

Εφαρμογή 4

Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε τους πίνακες A^2 και A^{20} .

(β) Αν επιπλέον ισχύει: $A^{20} + \alpha A^2 + 7\beta I = 0$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta + 7^9 = 0$.

Λύση

$$(α) \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7I$$

$$A^{20} = (A^2)^{10} = (7I)^{10} = 7^{10} \cdot I^{10} = 7^{10} \cdot I$$

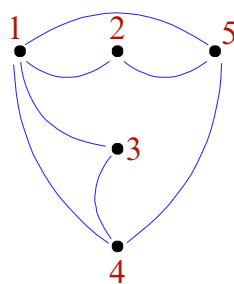
$$(β) \quad A^{20} + \alpha A^2 + (7\beta)I = 0 \Leftrightarrow 7^{10}I + \alpha(7I) + (7\beta)I = 0 \Leftrightarrow$$

$$(7^9 + \alpha + \beta)(7I) = 0 \text{ και αφού } 7I \neq 0 \text{ τότε } 7^9 + \alpha + \beta = 0.$$

Εφαρμογή 5

Θεωρούμε πέντε Τηλεφωνικά Κέντρα και τα συμβολίζουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5. Από αυτά άλλα συνδέονται με απλή σύνδεση (π.χ. το 1 με το 4) και άλλα με συνδυασμό απλών συνδέσεων (π.χ. το 2 με το 4), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι συνδέσεις αυτές περιγράφονται με έναν 5×5 πίνακα $A = [a_{ij}]$ που ορίζεται κάθε στοιχείο του ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \text{ και τα τηλεφ. κέντρα } i, j \\ & \text{δεν συνδέονται με απλή σύνδεση} \\ 1 & \text{αν } i \neq j \text{ και τα τηλεφ. κέντρα } i, j \\ & \text{συνδέονται με απλή σύνδεση} \end{cases}$$



- (α) Να ορίσετε τον πίνακα A .
- (β) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^2 και να ερμηνεύσετε τι εκφράζουν τα στοιχεία του.

Λύση

- (α) Ο 5×5 πίνακας A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και παριστάνει τις απλές συνδέσεις κάθε τηλεφωνικού κέντρου με τα υπόλοιπα.

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad A^2 = A \cdot A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Το τυχαίο στοιχείο β_{ij} του πίνακα A^2 μας πληροφορεί για το **πλήθος** των συνδέσεων του κέντρου i με το κέντρο j , **με δύο (2) απλές συνδέσεις**. Δηλαδή $\beta_{24} = 2$ σημαίνει ότι το τηλεφωνικό κέντρο 2 συνδέεται με το τηλεφωνικό κέντρο 4 με τις εξής απλές συνδέσεις: **21 – 14** και **25 – 54**. Μπορεί να συνδέεται και με τη σύνδεση 21 – 13 – 34 αλλά αυτή είναι μια τριπλή σύνδεση και δεν αφορά τον πίνακα A^2 . Όμοια $\beta_{55} = 3$ σημαίνει ότι το τηλεφωνικό κέντρο 5 συνδέεται με το τηλεφωνικό κέντρο 5 με τις τρεις απλές συνδέσεις: **51 – 15**, **54 – 45**, **52 – 25**. Όμοια συμπεράσματα έχουμε και για τα υπόλοιπα στοιχεία.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων, όπου αυτά ορίζονται:

$$(α) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(β) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(γ) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(δ) [3 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ε) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(στ) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$. Ποιό γενικότερο συμπέρασμα εξάγεται;

Άσκηση 3

Αν α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ και για τους πίνακες:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \text{ και } M = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & -\beta \end{bmatrix}$$

ισχύει $\Lambda^2 = M^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τους 3×3 διαγώνιους πίνακες A και B .

(α) Δείξτε ότι:

(i) AB διαγώνιος (ii) $AB = BA$

(β) Ισχύουν τα ίδια αν οι πίνακες είναι 3×3 τριγωνικοί άνω (ή κάτω);

Άσκηση 5

Ποιοί από τους επόμενους πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με τον πίνακα $(A + B)^2$;

(i) $(B + A)^2$

(iii) $A(A + B) + B(A + B)$

(ii) $A^2 + 2AB + B^2$

(iv) $A^2 + AB + BA + B^2$

Για κάθε έναν που νομίζετε ότι είναι ίσος με τον $(A + B)^2$, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ όπου $\alpha, \beta \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι $A^2 = \alpha \cdot A$.

(β) Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι από την ισότητα $A^2 = \alpha \cdot A$ προκύπτει η ισότητα $A = \alpha \cdot I$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 7

Θεωρούμε δύο πίνακες 3×3 A και B . Σημειώστε ποιους από τους επόμενους ισχυρισμούς θεωρείτε σωστούς (Σ) ή λάθος (Λ). Δικαιολογήστε την απάντησή σας στους σωστούς ισχυρισμούς και δώστε ένα αριθμητικό αντιπαράδειγμα στους λάθος ισχυρισμούς.

(α) Αν η πρώτη και η τρίτη στήλη του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη στήλη του AB είναι ίδιες.

(β) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.

(γ) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του A είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Αν ο A είναι πίνακας τύπου $\mu \times 1999$, ο B είναι πίνακας τύπου $\kappa \times \lambda$ και ισχύει $AB = BA$, να βρείτε τους κ, λ, μ .

Άσκηση 2

Βρείτε, με δοκιμές, πίνακες 2×2 τέτοιους ώστε:

(α) $A^2 = -I$, με στοιχεία του A πραγματικούς αριθμούς.

- (β) $B^2 = 0$, με κάποια στοιχεία του B διάφορα του μηδενός.
 (γ) $\Gamma\Delta = -\Delta\Gamma$, εκτός της περίπτωσης όπου $\Gamma\Delta = 0$.
 (δ) $EZ = 0$, με όλα τα στοιχεία των E και Z μη μηδενικά.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix}$.

- (α) Δείξτε ότι $A^2 + A - (2 + \beta\gamma)I = 0$.
 (β) Ισχύει $AB = BA$ τότε και μόνο τότε αν $A^2B = BA^2$.

Άσκηση 4

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε πραγματικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει $A^2 = xA + yI$. Κατόπιν υπολογίστε τον πίνακα A^3 ως συνάρτηση των A και I .

Άσκηση 5

Αν για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 3 & -\lambda \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ισχύει $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ υπολογίστε τον αριθμό λ . Για ποιές τιμές του λ ισχύει $AB + BA = 0$;

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $A^2 = -I, A^3 = -A, A^4 = I$
 (β) $A^{99} + A^{100} + A^{101} = I$

1.7. Γραμμικά Συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα παρουσιάζονται σε όλους τους κλάδους των θετικών και τεχνολογικών επιστημών. Στα Μαθηματικά, στη Μηχανική, στη Μηχανολογία, στις Επιχειρησιακές έρευνες κ.λπ. καλούμαστε να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα. Τα συστήματα που παρουσιάζονται στην πράξη είναι πολύ μεγαλύτερα από αυτά που συ-

ναντά ο μαθητής. Τα γραμμικά συστήματα χωρίζονται σε μικρά (πλήθος εξισώσεων ≤ 100), στα μεσαία ($100 < \text{πλήθος εξισώσεων} \leq 500$) και στα μεγάλα (πλήθος εξισώσεων > 500).

Στη σύγχρονη τεχνολογία, τα συστήματα που παρουσιάζονται είναι συνήθως μεσαία και μεγάλα. Για την επίλυση τέτοιου μεγέθους γραμμικών συστημάτων απαιτείται η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή (H/Y). Είναι αξιοσημείωτο ότι τα προγράμματα που χρησιμοποιούνται στον H/Y βασίζονται στον αλγόριθμο Gauss και απαιτούνται μόνο λίγα λεπτά για την επίλυση ενός μεσαίου συστήματος. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ένα σύστημα 361 εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους ειδικής μορφής λύθηκε από την ομάδα Αριθμητικής Ανάλυσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων σε 2 μόλις λεπτά.

Παράδειγμα

Μια βιομηχανία χρησιμοποιεί τέσσερις μηχανές, με τις οποίες κατασκευάζει πέντε βιομηχανικά είδη. Ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποιείται κάθε μηχανή για την κατασκευή μιας μονάδας από κάθε είδος δίνεται από τον πίνακα:

Μηχανές \ Είδη	1 ^ο	2 ^ο	3 ^ο	4 ^ο	5 ^ο
1 ^η	1	1	2	2	1
2 ^η	2	1	3	1	0
3 ^η	0	2	1	1	1
4 ^η	1	1	0	0	3

Να βρείτε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευασθούν σε μια ημέρα, αν κάθε μηχανή λειτουργεί 8 ώρες την ημέρα.

Αν ονομάσουμε x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τον αριθμό των μονάδων που παράγονται από κάθε είδος μέσα σε μια ημέρα, τότε από την 1^η μηχανή παίρνουμε την εξίσωση: $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$. Αυτή ονομάζεται γραμμική εξίσωση με 5 αγνώστους. Μια λύση αυτής της εξίσωσης είναι η εξής:

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1 \quad \text{ή αλλιώς} \quad (2, 3, 0, 1, 1)$$

Ορισμός 1: Κάθε εξίσωση με μορφή $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \beta$ λέγεται γραμμική εξίσωση με n αγνώστους. Οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ λέγονται συντελεστές των αγνώστων $x_1, x_2, \dots, x_n$ και ο πραγματικός αριθμός β λέγεται σταθερός όρος.

Ορισμός 2: Λύση της γραμμικής εξίσωσης λέγεται κάθε διατεταγμένη n -άδα αριθμών $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ τέτοια ώστε η εξίσωση να επαληθεύεται αν θέσουμε $x_1=s_1, x_2=s_2, \dots, x_n=s_n$.

Το σύνολο των εξισώσεων που παίρνουμε από την παραγωγή των τεσσάρων μηχανών σε 8 ώρες είναι:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 8 \\2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 &= 8 \\0x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8 \\x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= 8\end{aligned}$$

και λέγεται **γραμμικό σύστημα** τεσσάρων εξισώσεων με πέντε αγνώστους ή συντομότερα γραμμικό σύστημα 4×5 . Γενικότερα, έχουμε ό-
τι:

Ορισμός 3: Ένα πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους των οποίων ζητούμε τις κοινές λύσεις, λέγεται **γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με n αγνώστους** ή πιο απλά **γραμμικό σύστημα $\mu \times n$** .

Ορισμός 4: Λύση ενός γραμμικού συστήματος $\mu \times n$ λέγεται **κάθε διατεταγμένη n -άδα αριθμών** που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

Μια λύση του παραπάνω γραμμικού συστήματος είναι η 5άδα $(2, 3, 0, 1, 1)$ αφού επαληθεύει και τις τέσσερις εξισώσεις.

Ορισμός 5: **Συμβιβαστό** θα λέγεται ένα γραμμικό σύστημα $\mu \times n$ αν έχει λύση. Ένα συμβιβαστό σύστημα έχει ή μία λύση ή άπειρες.

Με τη βοήθεια πινάκων, το παραπάνω γραμμικό σύστημα μ×ν γράφεται:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ή $A \cdot X = B$, όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών, X ο πίνακας των αγνώστων και B ο πίνακας των σταθερών όρων.

- Αν όλοι οι σταθεροί όροι του γραμμικού συστήματος είναι **μη-δέν**, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές** και γράφεται $A \cdot X = 0$.
- Ο πίνακας που προκύπτει από τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους ενός γραμμικού συστήματος:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2v} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu v} & \beta_\mu \end{array} \right]$$

λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος και παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του συστήματος. Η κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή απλώς χωρίζει τους συντελεστές των αγνώστων από τη στήλη των σταθερών όρων.

• Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss

Αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε μια από τις επόμενες διαδικασίες, τότε προκύπτει ισοδύναμο σύστημα.

- Μπορούμε να αλλάζουμε τη θέση δύο εξισώσεων.
- Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε με ένα μη μηδενικό αριθμό και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης.
- Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη δύο εξισώσεις αφού πρώτα έχουμε πολλαπλασιάσει τη μία από αυτές με ένα μη μηδενικό αριθμό.

Έτσι, όταν έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα, προσπαθούμε με τις παραπάνω διαδικασίες, να το μετασχηματίσουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα με φανερή λύση.

Παράδειγμα

Να επιλύσετε το 4×3 γραμμικό σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} y + 2\omega = 1 \\ 2x + 2y + 2\omega = 4 \\ -x + y + 3\omega = 0 \\ 2x - y + \omega = 6 \end{array} \right\}$$

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} y + 2\omega = 1 \\ 2x + 2y + 2\omega = 4 \\ -x + y + 3\omega = 0 \\ 2x - y + \omega = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + 2\omega = 4 \\ y + 2\omega = 1 \\ -x + y + 3\omega = 0 \\ 2x - y + \omega = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_1 \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \omega = 2 \\ y + 2\omega = 1 \\ -x + y + 3\omega = 0 \\ 2x - y + \omega = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \\ \sim \\ \varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + (-2)\varepsilon_1 \end{array}$$

Ο συμβολισμός $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$ σημαίνει ότι αλλάζουμε τη θέση της πρώτης με τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. (Αυτό γίνεται για να υπάρχει στην πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του συστήματος, άγνωστος με μη μη-δενικό συντελεστή)

Ο συμβολισμός $\varepsilon_1 \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_1$ σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης με $\frac{1}{2}$. (Αυτό γίνεται, γιατί μας διευκολύνει όπως θα δούμε παρακάτω, ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου της πρώτης εξίσωσης να είναι 1)

Ο συμβολισμός $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + \varepsilon_1$ σημαίνει ότι η τρίτη εξίσωση αντικαθίσταται από το άθροισμα της τρίτης με την πρώτη. (Αυτό γίνεται για να απαλείψουμε από την τρίτη εξίσωση τον άγνωστο x). Όμοια $\varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + (-2)\varepsilon_1$ σημαίνει ότι η τέταρτη εξίσωση αντικαθίσταται από το άθροισμα της τέταρτης με το γινόμενο της πρώτης επί (-2) . (Επίσης απαλείφεται ο άγνωστος x από την τέταρτη εξίσωση)

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + \omega & = & 2 \\ y + 2\omega & = & 1 \\ 2y + 4\omega & = & 2 \\ -3y - \omega & = & 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_3 + (-2)\varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \rightarrow \varepsilon_4 + 3\varepsilon_2 \end{array}$$

Όμοια απαλείφουμε τον άγνωστο y από την τρίτη και τέταρτη εξίσωση.

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + \omega & = & 2 \\ y + 2\omega & = & 1 \\ 0y + 0\omega & = & 0 \\ 5\omega & = & 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_4 \rightarrow \frac{1}{5}\varepsilon_4 \\ \sim \end{array}$$

Η τρίτη εξίσωση παραλείπεται γιατί αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των αγνώστων και για την τέταρτη εξίσωση γνωρίζουμε ήδη τον συμβολισμό.

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + \omega & = & 2 \\ y + 2\omega & = & 1 \\ \omega & = & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1 + (-1)\varepsilon_3 \\ \sim \\ \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 + (-2)\varepsilon_3 \end{array}$$

Μπορούμε εδώ να σταματήσουμε τη διαδικασία και με αντικαταστάσεις να υπολογίσουμε τους αγνώστους. Συνεχίζουμε όμως και παριστάνουμε συμβολικά τους μετασχηματισμούς του συστήματος ώστε να καταλήξουμε στη λύση.

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ y & = & -1 \\ \omega & = & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1 + (-1)\varepsilon_2 \\ \sim \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ \omega & = & 1 \end{array} \right\}$$

και η λύση είναι $(x, y, \omega) = (2, -1, 1)$.

Είναι απλό να αντιληφθεί κανείς ότι οι άγνωστοι στην επίλυση του συστήματος δεν παίζουν ιδιαίτερο ρόλο. Το βασικό ρόλο τον έχουν οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι. Για το λόγο αυτό η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια του **επαυξημένου πίνακα**, του πίνακα δηλαδή των συντελεστών και των σταθερών όρων του συστήματος. Η διαδικασία που θα χρησιμοποιηθεί είναι αντίστοιχη αυτής που γνωρίσαμε με τις πράξεις μεταξύ των εξισώσεων και γίνεται με τη βοήθεια των γραμμών του επαυξημένου πίνακα που ονομάζονται **γραμμοπράξεις**. Ο συμβολισμός διατηρείται, αλλά αναφέρεται πλέον σε γραμμοπράξεις.

Αν E ονομάσουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος τότε:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + \gamma_1 \\ \gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + (-2)\gamma_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-2)\gamma_2 \\ \gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + 3\gamma_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_4 \rightarrow \frac{1}{5}\gamma_4 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-1)\gamma_3 \\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-2)\gamma_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-1)\gamma_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x, y, \omega) = (2, -1, 1)$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να περιγραφεί με τον επόμενο **αλγόριθμο**:

- Βήμα 1^ο:** Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.
- Βήμα 2^ο:** Μεταφέρουμε στον πίνακα, πρώτη τη γραμμή που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (1^η γραμμοπράξη).
- Βήμα 3^ο:** Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (2^η γραμμοπράξη).
- Βήμα 4^ο:** Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα, μηδενικά (3^η γραμμοπράξη)
- Βήμα 5^ο:** Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6^ο βήμα.
- Βήμα 6^ο:** Από γραμμή σε γραμμή, χρησιμοποιώντας το πρώτο αριστερά 1 κάθε γραμμής και την 3^η γραμμοπράξη, κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που βρίσκεται η μονάδα αυτή, μηδενικά. Δηλαδή κάνουμε μηδενικά και τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από τη μονάδα.

Ο παραπάνω αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή το πρώτο αριστερά 1 είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει. Ονομάζεται και αλγόριθμος του Gauss.

Ο αλγόριθμος αυτός γίνεται εύκολα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γραμμικών συστημάτων πολλών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Ας επανέλθουμε στο εισαγωγικό μας πρόβλημα για να βρούμε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευασθούν σε μια μέρα. Το σύστημά μας ήταν:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 8 \\2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 &= 8 \\0x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8 \\x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= 8\end{aligned}$$

και με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα και του αλγορίθμου του Gauss έχουμε:

$$\begin{aligned}E &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-2)\gamma_1 \\ \gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + (-1)\gamma_1 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow (-1)\gamma_2 \\ \sim \end{array} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-2)\gamma_2 \\ \sim \end{array} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_3 \rightarrow (-1)\gamma_3 \\ \sim \end{array}\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + 2\gamma_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 16 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_4 \rightarrow \frac{1}{8}\gamma_4 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-2)\gamma_4 \\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-3)\gamma_4 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-5)\gamma_4 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-2)\gamma_3 \\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-1)\gamma_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-1)\gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_5 = 4 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_3 - 2x_5 = -2 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{array} \right\}$$

και αν θέσουμε $x_5 = t$ έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4 - 2t \\
 x_2 &= 4 - t \\
 x_3 &= -2 + 2t \\
 x_4 &= 2 - t \\
 x_5 &= t
 \end{aligned}$$

που έχει **άπειρες λύσεις** για τις διάφορες πραγματικές τιμές του t . Επειδή οι μονάδες από κάθε είδος που παράγουν οι μηχανές είναι αριθμοί θετικοί ακέραιοι, πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες:

$$\begin{aligned}
 4 - 2t &\geq 0 \\
 4 - t &\geq 0 \\
 -2 + 2t &\geq 0 \\
 2 - t &\geq 0 \\
 t &\geq 0
 \end{aligned}$$

που δίνουν τον περιορισμό για το t : $1 \leq t \leq 2$.

Για $t = 1$ παίρνουμε ως λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 3, 0, 1, 1)$ και

για $t = 2$ παίρνουμε ως λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 2, 0, 2)$.

Εφαρμογή 2

Να εξετάσετε αν το ακόλουθο σύστημα είναι συμβιβάστο:

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\
 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\
 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\
 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7
 \end{aligned}$$

Λύση

Το σύστημα με τη βοήθεια πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

και ο επανζημμένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + 2\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + 3\gamma_1 \\ \sim \\ \gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + 4\gamma_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 22 \\ 0 & 2 & -2 & 33 \\ 0 & 3 & -2 & 43 \end{array} \right] \xrightarrow[\gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + (-3)\gamma_2]{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-2)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 22 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & -23 \end{array} \right] \xrightarrow[\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{4}\gamma_3]{\gamma_1 \rightarrow (-1)\gamma_1} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 7 & -23 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_4 \rightarrow \gamma_4 + (-7)\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση μορφής $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -\frac{15}{4}$ είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Σημείωση:

- (i) Αν κατά τη διάρκεια επίλυσης του συστήματος με τη μέθοδο Gauss εμφανισθεί στον επαυξημένο πίνακα γραμμή μορφής:

$$0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \alpha \neq 0$$

τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Αν εμφανισθεί γραμμή μορφής:

$$0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid 0$$

τότε αυτή παραλείπεται και η διαδικασία συνεχίζεται.

- (ii) Όταν σε ένα γραμμικό σύστημα το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό των αγνώστων, επιλέγουμε συνήθως τόσες εξισώσεις όσες είναι και οι άγνωστοι και λύνουμε με τη γνωστή διαδικασία το σύστημα αυτό. Κατόπιν εξετάζουμε αν η λύση που προκύπτει (αν το σύστημα είναι συμβιβάσιμο) επαληθεύει και τις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος. Αν τις επαληθεύει τότε αυτή είναι η λύση του αρχικού συστήματος. Αν δεν τις επαληθεύει, το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο (παράδειγμα θεωρίας και εφαρμογή 2).
- (iii) Όταν σε ένα γραμμικό σύστημα το πλήθος των εξισώσεων είναι μικρότερο από τον αριθμό των αγνώστων τότε το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις (εφαρμογή 1).

Εφαρμογή 3

Ας πάρουμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $AX = 3X$ είναι ομογενές σύστημα. Κατόπιν, να λύσετε το σύστημα αυτό με τη μέθοδο Gauss.

Λύση

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad AX = 3X &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
 \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + x_3 = 3x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3x_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

που είναι ομογενές σύστημα και έχει **μία προφανή λύση**, την $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

(β) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}
 E &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-2)\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-4)\gamma_1 \end{array}} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 14 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-2)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)\gamma_2} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-1)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

και αν θέσουμε $x_3 = t$ έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{2}{3}t \\ x_2 = \frac{7}{3}t \\ x_3 = t \end{array} \right\}$$

που έχει άπειρες λύσεις για τις διάφορες πραγματικές τιμές του t
 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{3}t, \frac{7}{3}t, t\right)$. Ο πραγματικός αριθμός t ονομάζεται «ελεύθερος άγνωστος».

Σημείωση:

Το ομογενές σύστημα όπως είδαμε στο (α) ερώτημα της εφαρμογής 3 έχει πάντα μια φανερή λύση που λέγεται **μηδενική λύση**. Άρα δεν είναι ποτέ αδύνατο. Σε αυτού του είδους τα συστήματα λοιπόν ή θα έχουμε μοναδική λύση τη μηδενική ή θα έχουμε άπειρες λύσεις.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2\lambda - 1)x + \mu y = 7 \\ (\lambda - 2)x + (\mu - 1)y = 2 \end{array} \right\}$$

Βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει λύση $(x, y) = (2, 2)$.

Άσκηση 2

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

$$\left. \begin{array}{l} -y + \omega = 4 \\ 2x + 2y + 6\omega = 4 \\ 3x + 6y + 15\omega = 9 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 4y - 2\omega = 4 \\ -x - 4y + 5\omega = 13 \\ 2x + 8y - 2\omega = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -2x + 2y - 2\omega = -18 \\ x - y - \omega = 1 \\ 2x - 2y + 5\omega = 33 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(α)} \\ \text{(β)} \\ \text{(γ)} \end{array}$$

Άσκηση 3

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(α) Υπολογίστε το γινόμενο $A \cdot B$.

(β) Αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ γράψτε το σύστημα που εκφράζει η εξίσωση πινάκων $A \cdot X = 0$ και διαπιστώστε ότι ο πίνακας B είναι μια λύση αυτού του συστήματος. Μπορείτε να βρείτε και άλλες λύσεις αυτού του συστήματος;

Άσκηση 4

Δίνεται ο πίνακας A τύπου $(\kappa + \lambda) \times (2\kappa + \lambda - 1)$ και ο πίνακας B τύπου $(2\lambda - \kappa) \times (3\kappa - \lambda + 2)$. Να βρείτε τους ακέραιους κ, λ ώστε να ορίζεται το άθροισμα $A + B$ και το γινόμενο $A \cdot B$.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

$$(α) \quad \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -1 \\ 2x + y = 1 \\ 5x + 4y = -5 \end{array} \right\} \quad (β) \quad \left. \begin{array}{l} \lambda x + y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{array} \right\} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 2

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} [x \ y \ \omega] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [y \ -2\omega \ -x] \\ x + y - 3\omega = 2\lambda \end{array} \right\}$$

είναι συμβιβαστό.

Άσκηση 3

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

έχει λύση. Γι' αυτές τις τιμές του λ να υπολογίσετε τον πίνακα

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ μία γωνία του είναι 10° μεγαλύτερη από τη δεύτερη και η δεύτερη διπλάσια από την τρίτη. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου.

Άσκηση 2

Ο ανοξειδωτος χάλυβας περιέχει σίδηρο (Fe), άνθρακα (C), νικέλιο (Ni) και χρώμιο (Cr). Η ανάλυση έδειξε ότι το 80% του χάλυβα αποτελείται από σίδηρο και νικέλιο, υπάρχει 5% χρώμιο και η ποσότητα του Fe είναι τετραπλάσια της ποσότητας του C. Να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C, Ni, Cr.

Άσκηση 3

Ένα ξενοδοχείο έχει x μονόκλινα, y δίκλινα και ω τρίκλινα δωμάτια.

- (α) Να εκφράσετε το πλήθος των δωματίων και κλινών με τη βοήθεια των x , y , ω .
- (β) Αν το πλήθος όλων των δωματίων είναι 18, το πλήθος των κλινών 33 και το πλήθος των δίκλινων δωματίων όσο των μονόκλινων και τρίκλινων μαζί, να βρείτε πόσα είναι τα μονόκλινα, δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια.

Άσκηση 4

Ο μπρούτζος είναι κράμα χαλκού (Cu) και κασσίτερου (Sn). Ένα κομμάτι μπρούτζου ζυγίζει 81,877 gr και έχει όγκο 10 cm^3 . Αν η πυκνότητα του Cu είναι $8,92 \text{ gr/cm}^3$ και του Sn είναι $7,29 \text{ gr/cm}^3$, να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου σε χαλκό και κασσίτερο.

(Θυμίζουμε ότι: πυκνότητα = $\frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}}$, $\rho = \frac{m}{V}$).

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1

Θεωρούμε ένα $n \times m$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ ώστε για το κάθε στοιχείο του πίνακα να ισχύει $a_{ij} = i \cdot j$. Αν το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης, δείξτε ότι ο πίνακας είναι τετραγωνικός.

Άσκηση 2

Σ' έναν πίνακα 6×6 τοποθετούμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 36 κατά σειρά, ξεκινώντας από την πρώτη γραμμή και γράφοντας διαδοχικά τους παραπάνω αριθμούς. Μπορείτε να τοποθετήσετε τους αριθμούς αυτούς έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι περιττός αριθμός;

Άσκηση 3

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 - \beta\gamma & \beta^2 - \alpha\gamma \\ \beta^3 - \gamma^2\alpha & \alpha\beta\gamma & \gamma^2 - \alpha\beta \\ \gamma^3 - \alpha^2\beta & \alpha^3 - \beta^2\gamma & \beta\gamma^2 \end{bmatrix}$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

Άσκηση 4

Θεωρούμε έναν πίνακα A τύπου 2×3 και έναν πίνακα B τύπου 3×4 . Πόσους πολλαπλασιασμούς και πόσες προσθέσεις πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο $A \cdot B$;

Άσκηση 5

Θεωρούμε έναν 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

- (α) Βρείτε τον τύπο του πίνακα X για τον οποίο έχει έννοια η εξίσωση $AX - XA = I$ (1).
- (β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας X για τον οποίο αληθεύει η (1).

Άσκηση 6

Θεωρούμε δύο $n \times n$ πίνακες A, B και τον τύπου $n \times 1$ πίνακα στήλη:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (α) Ποιά στοιχεία του γινομένου AB είναι αποτέλεσμα της πράξης $(AB)X$;

- (β) Γνωρίζοντας ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων, ποιά στοιχεία του γινομένου AB εκφράζει το γινόμενο $A(BX)$;

Άσκηση 7

Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A, B για τους οποίους ισχύει $A - B = 2I$ και $A^2 + B^2 = 6I$.

- (α) Δείξτε ότι $AB = BA = I$.
 (β) Υπολογίστε τον πίνακα $A^3 - B^3 - A^2 - B^2$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ισοδύναμα τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \quad \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 4 \\ 2x + \lambda^2 y = 0 \end{array} \right\} \quad (\Sigma_2) \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + \mu y = \lambda + \mu \end{array} \right\}$$

Άσκηση 9

Μια βιομηχανία, χρησιμοποιεί τρεις μηχανές, με τις οποίες κατασκευάζει τέσσερα βιομηχανικά είδη. Κάθε μηχανή δουλεύει 8 ώρες την ημέρα και ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποιείται κάθε μηχανή για την παραγωγή μιας μονάδας από κάθε είδος δίνεται από τον πίνακα:

Μηχανή \ Είδη	1 ^ο	2 ^ο	3 ^ο	4 ^ο
1 ^η	1	2	1	2
2 ^η	2	0	1	1
3 ^η	1	2	3	0

Να βρείτε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευαστούν μέσα σε μια ημέρα.

Ανακεφαλαίωση

- Οι δείκτες του στοιχείου a_{ij} μας πληροφορούν ότι αυτό βρίσκεται στην i γραμμή και τη j στήλη.
- Δύο πίνακες του ίδιου τύπου $\mu \times \nu$ είναι ίσοι όταν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.
- Τα βασικότερα είδη πινάκων είναι:
 - (α) Πίνακας στήλη ή πίνακας γραμμή
 - (β) Τετραγωνικός πίνακας
 - (γ) Τριγωνικός άνω ή κάτω
 - (δ) Διαγώνιος
- Προσθέτουμε μόνο πίνακες του ίδιου τύπου. Κάθε στοιχείο του αθροίσματος προκύπτει αν προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο (ή περισσότερων) πινάκων.

Ιδιότητες:

- ♦ $A + B = B + A$
- ♦ $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$
- ♦ $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$
- ♦ $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$
- Το γινόμενο αριθμού επί πίνακα προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του πίνακα με τον αριθμό.

Ιδιότητες:

- ♦ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- ♦ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- ♦ $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- ♦ $1 \cdot A = A$

Επίσης ισχύει $\lambda A = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $A = \mathbf{0}$.

- Για να πολλαπλασιάσουμε πίνακες πρέπει το πλήθος των στηλών του πρώτου πίνακα να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου πίνακα. Σχηματικά: $A_{\mu \times \rho} \cdot B_{\rho \times \nu} = \Gamma_{\mu \times \nu}$. Για το στοιχείο γ_{ij} της i γραμμής και j στήλης του γινομένου AB ισχύει:

$$\gamma_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i\rho}b_{\rho j}$$

Ιδιότητες:

- ♦ $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$
- ♦ $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$ και $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$
- ♦ $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$
- ♦ $A \cdot I_v = I_v \cdot A = A$

Προσοχή!! ΔΕΝ ισχύουν:

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ή $B = 0$
- Ένα γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους έχει μορφή:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1v}x_v & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2v}x_v & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu v}x_v & = & \beta_\mu \end{array}$$

και μπορεί συνοπτικά να γραφεί $A \cdot X = B$ όπου $A_{\mu \times v}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $X_{v \times 1}$ είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων και $B_{\mu \times 1}$ είναι ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων.

- Το ομογενές γραμμικό σύστημα γράφεται $A \cdot X = 0$.
- Ισοδύναμα λέγονται δύο συστήματα που έχουν ίδιες λύσεις.
- Η γρηγορότερη μέθοδος επίλυσης ενός $\mu \times v$ γραμμικού συστήματος είναι η μέθοδος διαδοχικών απαλειφών του Gauss. Ο αλγόριθμος του Gauss χρησιμοποιεί τις γραμμοπράξεις για το μηδενισμό όσο το δυνατόν περισσότερων στοιχείων του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων. Ο παραπάνω αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή το πρώτο αριστερά 1 είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τι είναι ένας πίνακας $m \times n$; Πόσα στοιχεία έχει;
2. Τι μας πληροφορούν οι δείκτες του στοιχείου a_{23} ;
3. Δύο πίνακες ίδιου τύπου $m \times n$ είναι ίσοι; Αν όχι, τι πρέπει να ισχύει για να είναι ίσοι;
4. Σημειώστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί (Σ) ή λάθος (Λ) και δικαιολογήστε την απάντησή σας:
 - (α) Οι μηδενικοί πίνακες είναι πάντα ίσοι.
 - (β) Οι μηδενικοί πίνακες είναι πάντα τετραγωνικοί.
 - (γ) Αν ο πίνακας A είναι τύπου $m \times n$ και ισχύει $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ τότε $m = n$.
 - (δ) Αν ο πίνακας A είναι $m \times n$ και ο B είναι $n \times m$, τότε ορίζονται τα γινόμενα AB και BA .
 - (ε) Τα παραπάνω γινόμενα AB και BA είναι ίσοι πίνακες.
 - (στ) Για να ορίζεται ο A^2 πρέπει να είναι τετραγωνικός.
 - (ζ) Αν A είναι $n \times n$ πίνακας, τότε $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$.
 - (η) Αν A είναι $n \times n$ πίνακας, τότε $A^{10} \cdot A^{10} = A^{100}$.
 - (θ) Αν A, B πίνακες $n \times n$ και λ πραγματικός αριθμός ισχύει:
 - (i) $(\lambda \cdot A)^2 = \lambda^2 A^2$
 - (ii) $(AB)^2 = A^2 B^2$
5. Σημειώστε τη σωστή απάντηση και δικαιολογήστε:
 - (α) Αν δύο πίνακες είναι $n \times m$ τότε ορίζεται:
 - (i) Το γινόμενο AB
 - (ii) Το άθροισμα $A + B$
 - (iii) Και τα δύο
 - (iv) Τίποτα απ' τα δύο
 - (β) Αν για δύο πίνακες $n \times n$ ισχύει $A^2 = B^2$, τότε:
 - (i) $A = B$
 - (ii) $A = -B$
 - (iii) Μπορεί να μην ισχύει κανένα απ' τα δύο
 - (iv) Ισχύουν και τα δύο
 - (γ) Αν για δύο πίνακες $n \times n$ ισχύει $(A - B)^2 = 0$, τότε:
 - (i) $A = B$
 - (ii) $A = B = 0$
 - (iii) Δεν είναι απαραίτητο να ισχύει το (i) ή το (ii)

- (δ) Αν A, B δύο $n \times n$ πίνακες και I ο μοναδιαίος $n \times n$ τότε:
- (i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 - (ii) $(\lambda A + \mu B)^2 = \lambda^2 A^2 + 2\lambda\mu AB + \mu^2 B^2$
 - (iii) $(\lambda A + \mu I)^2 = \lambda^2 A^2 + 2\lambda\mu A + \mu^2 I^2$
 - (iv) Κανένα από τα προηγούμενα
6. Σημειώστε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) ή λάθος (Λ) και δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (α) Τα ισοδύναμα συστήματα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος εξισώσεων.
 - (β) Τα ισοδύναμα συστήματα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος αγνώστων.
 - (γ) Το ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση.
 - (δ) Αν κατά τη διαδικασία των διαδοχικών απαλειφών Gauss καταλήξουμε σε γραμμή « $0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid 0$ » τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
 - (ε) Αν όμοια καταλήξουμε σε γραμμή « $0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid \alpha \neq 0$ » τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

2

Περιγραφική Στατιστική

Εισαγωγή

Σε πολλά έντυπα του ημερήσιου και περιοδικού τύπου δημοσιεύονται τα αποτελέσματα διαφόρων ερευνών, εργασιών και απογραφών, με τη μορφή πινάκων και διαγραμμάτων.

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτών γίνεται με πολλούς τρόπους και σκοπό έχει την καλύτερη και ευκολότερη κατανόησή τους ώστε να είναι απλή η εξαγωγή συμπερασμάτων και η λήψη κατάλληλων αποφάσεων.

Οι παραπάνω ενέργειες εκτελούνται με τη βοήθεια της **Στατιστικής**. Δηλαδή, **Στατιστική** είναι ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος ως έργο έχει την *συγκέντρωση* στοιχείων, την *ταξινόμησή* τους και την παρουσίασή τους σε κατάλληλη μορφή ώστε να μπορούν να αναλυθούν και να ερμηνευθούν για την εξυπηρέτηση διαφόρων σκοπών.

2.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί

Πληθυσμός

Στη στατιστική, για τη σύνταξη των πινάκων, συλλέγονται στοιχεία που αναφέρονται σε σύνολο αντικειμένων (εμψύχων ή απύχων). Το σύνολο αυτό των αντικειμένων ονομάζεται **πληθυσμός**.

Κάθε στοιχείο του πληθυσμού θα το ονομάζουμε **άτομο**. Το πλήθος των ατόμων ενός πληθυσμού ονομάζεται **μέγεθος του πληθυσμού**, και θα συμβολίζεται με **v** .

Μεταβλητή

Όπως είδαμε, η στατιστική ασχολείται με τη συλλογή και την παρουσίαση στοιχείων ενός πληθυσμού. Συνήθως ένας πληθυσμός εξετάζεται ως προς κάποιο χαρακτηριστικό του, το χαρακτηριστικό αυτό

του πληθυσμού ονομάζεται **μεταβλητή**¹.

Η εξέταση ενός δείγματος ως προς κάποιο χαρακτηριστικό των ατόμων του, μπορεί να γίνει για ποσοτικά ή ποιοτικά χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα έχουμε ότι:

- **Ποσοτικά** χαρακτηριστικά είναι εκείνα τα οποία μπορούν να μετρηθούν. Σε έναν πληθυσμό εργαζομένων για παράδειγμα ποσοτικά χαρακτηριστικά είναι ο μισθός, το ύψος, οι ώρες εργασίες κ.λπ.

Οι μεταβλητές των ποσοτικών χαρακτηριστικών είναι δύο ειδών:

- *Διακριτές μεταβλητές*, στις οποίες κάθε άτομο του πληθυσμού μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές. Για παράδειγμα,
 1. Η εξέταση ενός πληθυσμού οικογενειών ως προς τη μεταβλητή «Πόσα παιδιά έχει η οικογένεια».
 2. Η εξέταση ενός πληθυσμού κατοίκων μιας πόλης ως προς τη μεταβλητή «Πόσες πιστωτικές κάρτες έχει κάθε άτομο του πληθυσμού».
- *Συνεχείς μεταβλητές*, στις οποίες κάθε άτομο του πληθυσμού μπορεί να αντιστοιχηθεί σε οποιαδήποτε πραγματική τιμή που ανήκει σε διάστημα των πραγματικών αριθμών ή ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα,
 1. Η εξέταση ενός πληθυσμού κατοίκων μιας πόλης ως προς τη μεταβλητή «Πόσο ύψος έχει κάθε άτομο του πληθυσμού».
 2. Η εξέταση ενός πληθυσμού ζώων μιας περιοχής ως προς τη μεταβλητή «Πόσο βάρος έχει κάθε άτομο του πληθυσμού».
- **Ποιοτικά** χαρακτηριστικά είναι εκείνα τα οποία δεν επιδέχονται μέτρηση. Σε έναν πληθυσμό εργαζομένων ποιοτικά χαρακτηριστικά είναι το χρώμα των ματιών τους, το επίπεδο μόρφωσής τους, κ.λπ.

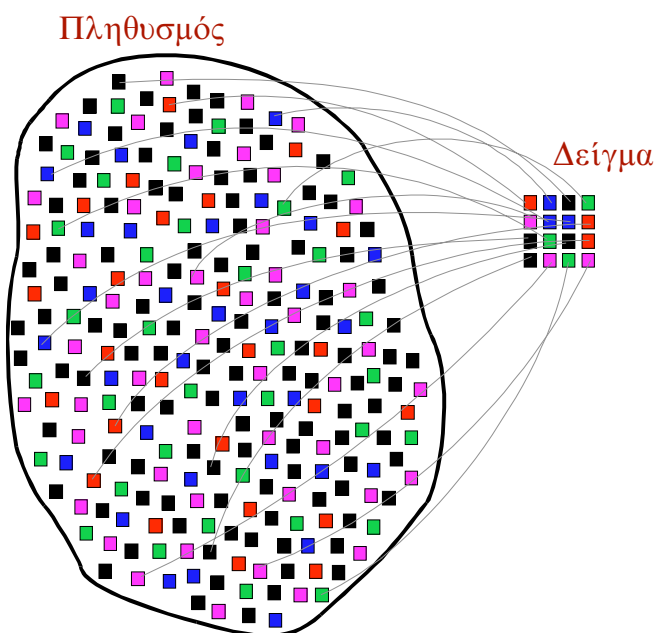
Σημείωση: Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά οφείλουν να είναι αντικειμενικά, δηλαδή η έννοια «ωραίος», «ψηλός» κ.λπ. δεν είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά, αφού για τον χαρακτηρισμό ενός ατόμου ως προς το «ωραίος» θα υπήρχαν πολλές διαφορετικές αντιλήψεις

Δείγμα

Είναι φανερό ότι αν θέλουμε να καταγράψουμε το ύψος των Ελληνί-

¹ Εάν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ είναι ο πληθυσμός τότε μια απεικόνιση X του Ω σε σύνολο A ονομάζεται μεταβλητή του Ω , δηλαδή $X: \Omega \rightarrow A$ με $X(\omega_i) = t_i$.

δων στη χώρα μας θα πρέπει να κάνουμε **απογραφή** του ύψους τους, δηλαδή να μετρήσουμε το ύψος όλων των Ελληνίδων και στη συνέχεια να συντάξουμε τους αντίστοιχους πίνακες με τα αποτελέσματα. Όπως καταλαβαίνουμε αυτό είναι αδύνατο, όχι μόνο για τεχνικούς λόγους αλλά και επειδή είναι εξαιρετικά δαπανηρό. Σε αυτές τις περιπτώσεις όπου η απογραφή είναι αδύνατη, επιλέγουμε ένα μέρος (υποσύνολο) του πληθυσμού που είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού και το εξετάζουμε. Το μέρος αυτό πληθυσμού λέγεται **δείγμα**.



Η εξέταση ενός δείγματος του πληθυσμού λέγεται **δειγματοληψία**. Η επιλογή του σωστού δείγματος είναι μία πολύ δύσκολη εργασία, αφού πρέπει το δείγμα να αποτελεί μια μικρογραφία του πληθυσμού.

Είναι γνωστή η ιστορία των εκλογών του 1936 στις Η.Π.Α, όπου μια μεγάλης κυκλοφορίας εφημερίδα, χρησιμοποιώντας ένα πολύ μεγάλο δείγμα (50.000) προέβλεψε ό-

τι νικητής των εκλογών θα ήταν ο Alf London, ενώ ο G. Gallup χρησιμοποιώντας μικρότερο δείγμα σε μικρής κυκλοφορίας εφημερίδα, την «America Speaks», κατάφερε να προβλέψει σωστά τη νίκη του άλλου υποψηφίου, του Franklin Roosevelt.

Αν θέλουμε να μετρήσουμε το ύψος των μαθητών ενός λυκείου που έχει 200 μαθητές στην Α' Λυκείου, 150 στη Β' και 100 στη Γ' και πάρουμε 10 από την Α', 20 από τη Β' και 15 από τη Γ', τότε είναι προφανές ότι η επιλογή αυτού του δείγματος είναι λανθασμένη.

Ένα αναξιόπιστο δείγμα θα μας δώσει συχνά αποτελέσματα που απέχουν πολύ από την πραγματικότητα. Υπάρχει η κατάλληλη μεθοδολογία για την επιλογή του σωστού δείγματος, έτσι ώστε το δείγμα του πληθυσμού να είναι μια **ακριβής μικρογραφία του** και να αποδίδει σωστά την **εικόνα** του πληθυσμού.

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι το δείγμα έχει επιλεγεί σωστά και δεν θα ασχοληθούμε με τον τρόπο επιλογή του δείγματος.

Η στατιστική με τη χρήση των δειγμάτων είναι ουσιαστικά μια επαγωγική επιστήμη αφού από το μέρος ενός συνόλου προσπαθεί να βγάλει συμπεράσματα για το όλον.

2.2. Συχνότητα Παρατηρήσεων

Στο σχολείο μας θέλουμε να εξετάσουμε τους μαθητές ως προς το χαρακτηριστικό «πόσα αδέρφια έχουν». Από τον πληθυσμό του σχολείου σχηματίζουμε ένα δείγμα 50 ατόμων, δηλαδή $n = 50$. Από τις απαντήσεις που παίρνουμε σχηματίζουμε ένα πίνακα. Στη μία στήλη του πίνακα βρίσκεται ο αύξων αριθμός του μαθητή και στη δεύτερη ο αριθμός των αδελφών που έχει.

A/A Μαθητή	Αδέρφια	A/A Μαθητή	Αδέρφια	A/A Μαθητή	Αδέρφια
1	0	18	4	35	2
2	1	19	1	36	0
3	0	20	2	37	3
4	1	21	2	38	4
5	0	22	1	39	1
6	1	23	1	40	0
7	2	24	1	41	1
8	0	25	1	42	2
9	1	26	1	43	2
10	0	27	0	44	3
11	2	28	1	45	1
12	3	29	0	46	2
13	0	30	2	47	3
14	1	31	0	48	1
15	2	32	3	49	1
16	1	33	3	50	2
17	0	34	3		

Μία τέτοιου είδους καταγραφή των τιμών είναι μάλλον κακή. Καλύτερα θα ήταν να κάνουμε την εξής καταγραφή: στην πρώτη στήλη να γράψουμε τον αριθμό των αδελφών και στη δεύτερη των αριθμό των μαθητών που έχουν τόσα αδέρφια όσα δηλώνει η πρώτη στήλη. Η παραπάνω εργασία είναι ευκολότερη και έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Αρ. Αδελφών	Διαλογή	Μαθητές
0	☐☐└	12
1	☐☐☐└	18
2	☐☐	11
3	☐└	7
4	└	2

Έτσι, έχουμε μετρήσει «τον αριθμό των αδελφών» στα άτομα του δείγματος και μπορούμε να πούμε ότι έχουμε την **κατανομή** του αριθμού των αδελφών του δείγματος.

Αρ. Αδελφών (x_i)	Μαθητές (v_i)
0	12
1	18
2	11
3	7
4	2
Σύνολο	50

Είναι εμφανές ότι στην κατανομή αυτή η τιμή 1 εμφανίζεται συχνότερα από την τιμή 0 και η τιμή 3 εμφανίζεται πιο συχνά από την τιμή 4. Τον αριθμό των εμφανίσεων μιας τιμής ονομάζουμε **συχνότητα εμφάνισης** της τιμής ή απλά **συχνότητα** της τιμής και συμβολίζεται με v_i . Δηλαδή:

- Η τιμή $x_1 = 0$ έχει συχνότητα $v_1 = 12$
- Η τιμή $x_2 = 1$ έχει συχνότητα $v_2 = 18$

- Η τιμή $x_3 = 2$ έχει συχνότητα $v_3 = 11$
- Η τιμή $x_4 = 3$ έχει συχνότητα $v_4 = 7$
- Η τιμή $x_5 = 4$ έχει συχνότητα $v_5 = 2$

Αν το δείγμα εμφανίζει k διαφορετικές τιμές της μεταβλητής με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ τότε προφανώς ισχύει ότι:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$$

Η συχνότητα ουσιαστικά μας πληροφορεί ότι ο αριθμός 3 εμφανίζεται 7 φορές στις 50. Βέβαια, ο άνθρωπος εν γένει έχει συνηθίσει να εκφράζει τις μεταβολές επί της εκατό (%), δηλαδή αντιλαμβάνεται καλύτερα κάποια αποτελέσματα, όταν αυτά δίνονται κατ' αναλογία του 100 και όχι του 50 ή οποιουδήποτε άλλου αριθμού. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε συνήθως τη έννοια της σχετικής συχνότητας, η οποία ορίζεται ως εξής:

Αν n είναι το μέγεθος ενός δείγματος (πληθυσμού) τότε το πηλίκο $\frac{v_i}{n}$ ονομάζεται **σχετική συχνότητα** και συμβολίζεται με f_i δηλαδή:

$$f_i = \frac{v_i}{n} = \frac{\text{αριθμός εμφανίσεων}}{\text{μέγεθος δείγματος}}$$

Είναι φανερό ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

Αρ. Αδελφών (x_i)	Συχνότητα (v_i)	Σχ. συχνότητα (f_i)	Σχ. συχνότητα (%)
0	12	0,24	24
1	18	0,36	36
2	11	0,22	22
3	7	0,14	14
4	2	0,04	4
Αθροίσματα	50	1	100

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι:

Ορισμός 1: Συχνότητα τιμής x_i μιας μεταβλητής ονομάζεται το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού (ή του δείγματος) για τα οποία η μεταβλητή παίρνει την τιμή x_i και συμβολίζεται με v_i .

Ορισμός 2: Σχετική συχνότητα τιμής x_i μιας μεταβλητής ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας προς το μέγεθος του δείγματος και συμβολίζεται με f_i , δηλαδή $f_i = \frac{v_i}{n}$.

Η προσεκτική ανάγνωση του πίνακα μας δίνει τις πληροφορίες για τους μαθητές του συγκεκριμένου σχολείου και για το πόσα αδέρφια έχουν. Αν θέλουμε να μάθουμε πόσοι μαθητές έχουν λιγότερα από 2 αδέρφια πρέπει να προσθέσουμε τις συχνότητες των τιμών 0, 1 για λιγότερα από 3 πρέπει να προσθέσουμε τις συχνότητες των τιμών 0, 1, 2 κ.λπ. Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε συνήθως και μια άλλη στήλη η οποία έχει το άθροισμα των συχνοτήτων των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες από αυτήν. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται αθροιστική συχνότητα. Έχουμε λοιπόν τον εξής πίνακα:

Αριθμός αδελφών (x_i)	Συχνότητα (v_i)	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική συχνότητα (f_i)	Σχετική αθροιστική συχνότητα
0	12	12	0,24	0,24
1	18	30	0,36	0,60
2	11	41	0,22	0,82
3	7	48	0,14	0,96
4	2	50	0,04	1
Αθροίσματα	50		1	

Η αθροιστική συχνότητα τιμής x_i μας δίνει την πληροφορία «Πόσα άτομα του πληθυσμού έχουν τιμή της μεταβλητής μικρότερη ή ίση από x_i »

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η σχετική αθροιστική συχνότητα του 3 είναι 0,96 το οποίο εκφράζει ότι «Το 96% των παιδιών έχουν λιγότερα από 4 αδέρφια».

Ορισμός 3: Σε ποσοτική μεταβλητή, αθροιστική συχνότητα μιας τιμής x_i λέγεται το άθροισμα των συχνοτήτων v_i των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή αυτή.

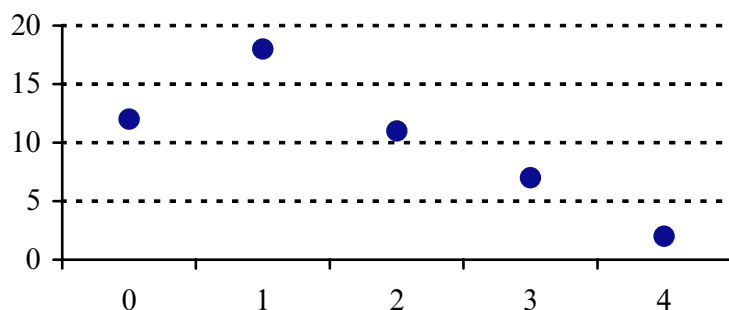
Ορισμός 4: Σε ποσοτική μεταβλητή, σχετική αθροιστική συχνότητα μιας τιμής x_i λέγεται το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή αυτή.

Είναι φανερό ότι η παραπάνω κατασκευή των πινάκων έχει νόημα μόνο αν οι τιμές της μεταβλητής έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά.

Για την καλύτερη παρουσίαση των παραπάνω συνήθως χρησιμοποιούμε γραφικές παραστάσεις.

- **Γραφικές Παραστάσεις**

Στον άξονα των τετμημένων (x') θεωρούμε τον αριθμό των αδελφών (0, 1, 2, 3, 4) δηλαδή τις τιμές της μεταβλητής x_i και στον άξονα των τεταγμένων (y') πόσοι μαθητές έχουν τον αντίστοιχο αριθμό αδελφών, δηλαδή τις τιμές των αντιστοίχων συχνοτήτων.

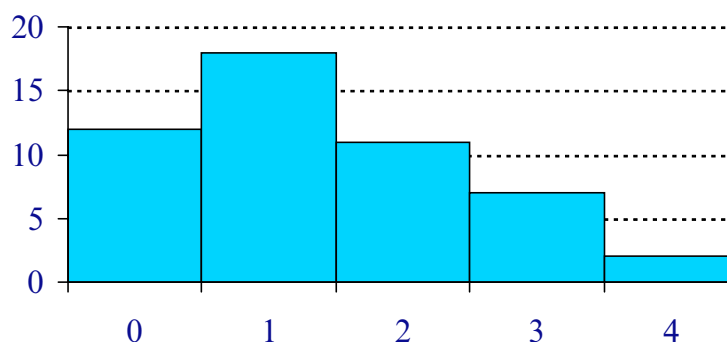


Η εμφάνιση της παραπάνω γραφικής παράστασης δεν μας επιτρέπει να καταλάβουμε γρήγορα και εύκολα την κατανομή. Για το λόγο αυτό υπάρχουν και άλλοι τύποι διαγραμμάτων.

Ραβδογράμματα

- **Κατακόρυφο ραβδόγραμμα**

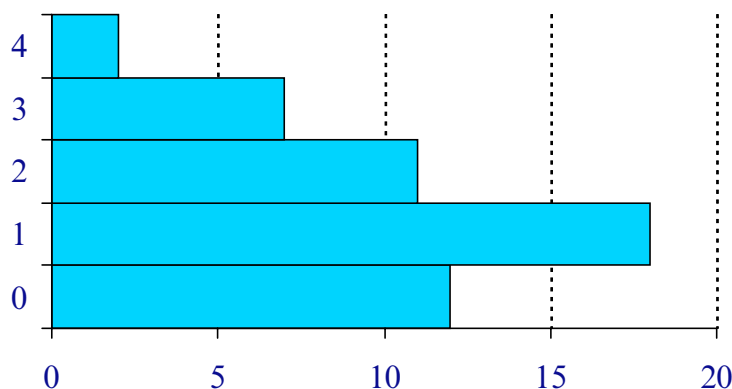
Κατασκευάζουμε όπως και προηγούμενα τον άξονα των τετμημένων, τον οποίο διαιρούμε σε πέντε ισομήκη διαστήματα σε καθένα από αυτά αντιστοιχούμε μια τιμή της μεταβλητής και σε κάθε διάστημα κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο, με ύψος την αντίστοιχη τιμή του.



Είναι φανερό ότι η συχνότητα της τιμής x_i ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που αντιστοιχεί σε αυτήν, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης το πλάτος του ορθογωνίου. Ακόμη, ισχύει ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

- **Οριζόντιο ραβδόγραμμα**

Κατασκευάζεται όπως και το κατακόρυφο, αλλά με εναλλαγή του ρόλου των αξόνων.

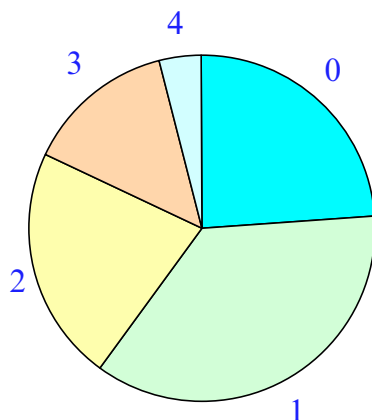


Κυκλικό διάγραμμα

Πολλές φορές εμφανίζουμε τα αποτελέσματα μιας μέτρησης με τη μορφή κυκλικού διαγράμματος. Αυτό γίνεται ως εξής:

1. Διαιρούμε το κύκλο σε μέρη ανάλογα των συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής .
2. Κατασκευάζουμε τους αντίστοιχους κυκλικούς τομείς και χρωματίζουμε τον καθένα με ένα διαφορετικό χρώμα. Δηλαδή:
 - Στο 12 αντιστοιχούμε το $M_0 = \frac{12}{50} 360 = 86^\circ 24'$.

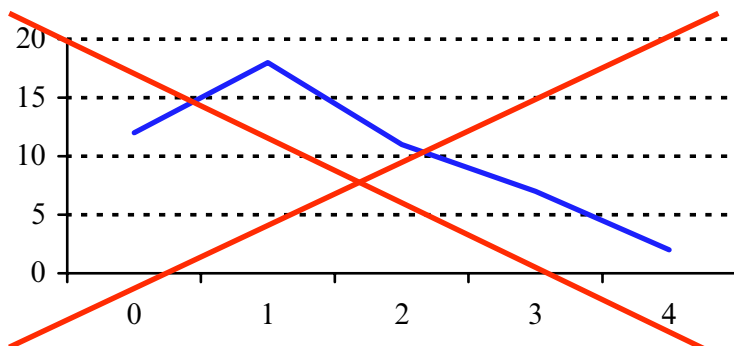
- Στο 18 αντιστοιχούμε το $M_1 = \frac{18}{50} 360 = 129^\circ 36'$.
- Στο 11 αντιστοιχούμε το $M_2 = \frac{11}{50} 360 = 79^\circ 12'$.
- Στο 7 αντιστοιχούμε το $M_3 = \frac{7}{50} 360 = 50^\circ 24'$.
- Στο 4 αντιστοιχούμε το $M_4 = \frac{4}{50} 360 = 14^\circ 24'$.



Σημείωση: Η μονάδα μέτρησης των γωνιών ως γνωστόν είναι η μοίρα η οποία όμως υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά και το κάθε λεπτό σε 60 δεύτερα. Έτσι δεν είναι σωστό να γράφουμε 45,4 μοίρες αλλά 45 μοίρες και $\frac{4}{10} 60 = 24$ πρώτα λεπτά δηλαδή $45^\circ 24'$.

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

Σε μία κλασική γραφική παράσταση σημείων (σε διακριτή μεταβλητή), είναι λάθος να συνδέσουμε τα μεμονωμένα σημεία μεταξύ τους με ευθύγραμμα τμήματα.

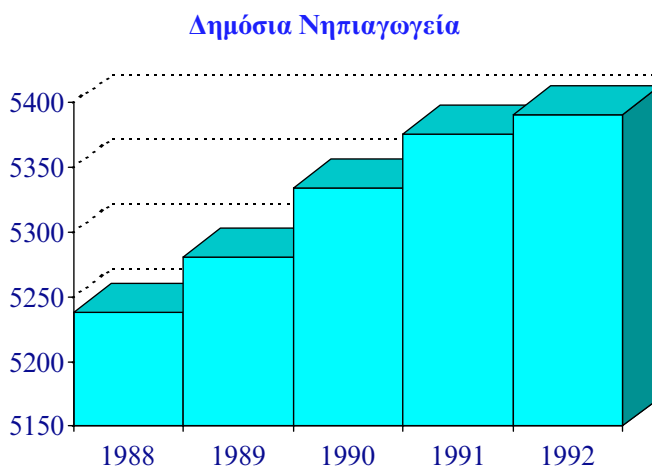


Παράδειγμα 1

Από τη στατιστική επετηρίδα της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδος παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα για τα δημόσια νηπιαγωγεία που λειτούργησαν κατά τα έτη 1988 - 1992.

Δημόσια Νηπιαγωγεία	
Έτος	Σχολικές μονάδες
1988	5238
1989	5281
1990	5334
1991	5376
1992	5391

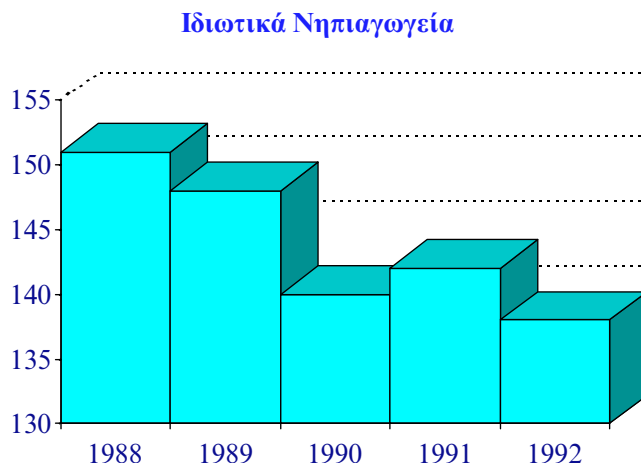
Τα ραβδογράμματα πολλές φορές τα κατασκευάζουμε τρισδιάστατα:



Αν κάνουμε την ίδια μελέτη και για τα ιδιωτικά νηπιαγωγεία θα διαπιστώσουμε ότι:

Ιδιωτικά Νηπιαγωγεία	
Έτος	Σχολικές μονάδες
1988	151
1989	148
1990	140
1991	142
1992	138

Οπότε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα θα είναι:



Από τη σύγκριση αυτών των δύο διαγραμμάτων συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία αύξηση (μικρή βέβαια σε σχέση με τα υπάρχοντα) στα δημόσια και συγχρόνως μία μικρή μείωση των ιδιωτικών νηπιαγωγείων.

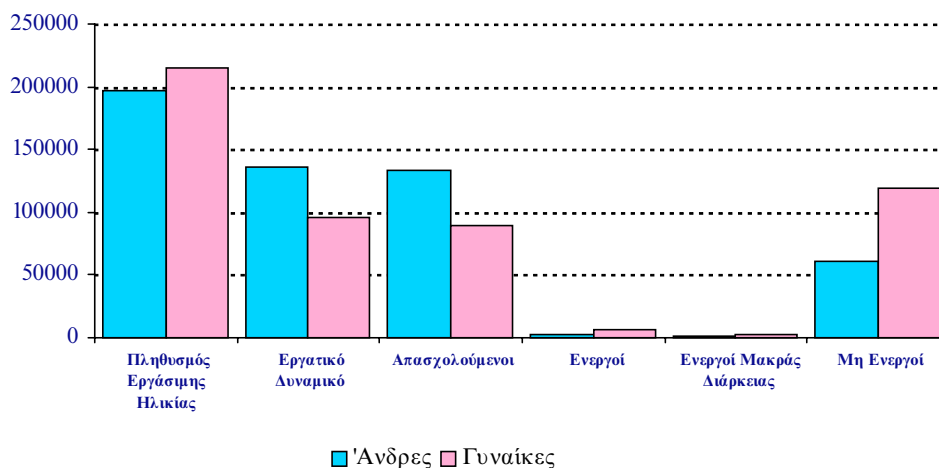
Πολλές φορές για τη μελέτη της ίδιας μεταβλητής σε δύο πληθυσμούς (π.χ άρρενες, θήλειες) κατασκευάζουμε για κάθε τιμή της μεταβλητής δύο ορθογώνια, ένα για κάθε πληθυσμό, με σκοπό να έχουμε εύκολη σύγκριση.

Παράδειγμα 2

Από το Κέντρο Ερευνών για Θέματα Ισότητας (Κ.Ε.Θ.Ι) έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Εργατικό δυναμικό, απασχολούμενοι, άνεργοι και μη ενεργοί κατά φύλλο το 1996 στην Κρήτη		
Κατηγορία	Άνδρες	Γυναίκες
Πληθυσμός Εργάσιμης Ηλικίας	196960	215134
Εργατικό Δυναμικό	135432	95823
Απασχολούμενοι	133138	89181
Ενεργοί	2294	6642
Ενεργοί Μακράς Διάρκειας	785	3140
Μη Ενεργοί	61527	119311

Ο παραπάνω πίνακας είναι πίνακας διπλής εισόδου. Η μεταβλητή είναι ποιοτική και οι συχνότητες είναι καταγεγραμμένες σε στήλες. Το αντίστοιχο ραβδόγραμμα είναι:

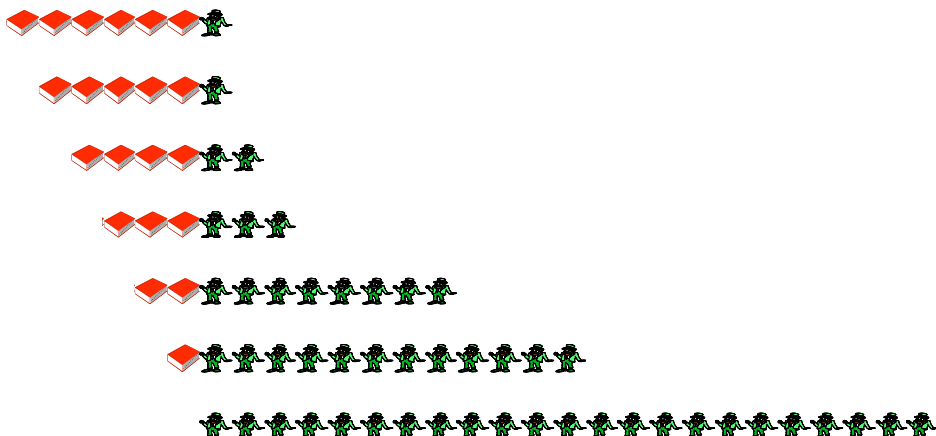


Εικονογράμματα

Στη μελέτη μεγάλων δειγμάτων πολλές φορές χρησιμοποιούμε εικονογράμματα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πληθυσμό 50.000 μαθητές με μεταβλητή «πόσα εξωσχολικά βιβλία διάβασαν κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών». Οι συχνότητες καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

A/A	Αριθμός Βιβλίων	Συχνότητα
1	0	23000
2	1	12000
3	2	8000
4	3	3000
5	4	2000
6	5	1000
7	Περισσότερα από 5	1000
Σύνολο		50000

Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τα εικονογράμματα:



2.3. Ομαδοποίηση Παρατηρήσεων

Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε το ύψος των μαθητών ενός λυκείου και επιλέγουμε ένα κατάλληλο δείγμα 50 μαθητών. Αν προσπαθήσουμε να καταγράψουμε τα ύψη τους με την προηγούμενη μέθοδο θα παρατηρήσουμε ότι είναι μία δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία, λόγω των πολλών τιμών που θα εμφανισθούν. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις τιμές:

1,50 - 1,52 - 1,53 - 1,53 - 1,54 - 1,54 - 1,60 - 1,60 - 1,60 - 1,60
 1,60 - 1,61 - 1,61 - 1,62 - 1,63 - 1,64 - 1,64 - 1,65 - 1,66 - 1,67
 1,68 - 1,69 - 1,70 - 1,71 - 1,71 - 1,72 - 1,72 - 1,73 - 1,75 - 1,75
 1,78 - 1,79 - 1,79 - 1,79 - 1,79 - 1,80 - 1,81 - 1,81 - 1,81 - 1,81
 1,82 - 1,83 - 1,84 - 1,85 - 1,86 - 1,91 - 1,95 - 1,97 - 2,00 - 2,05

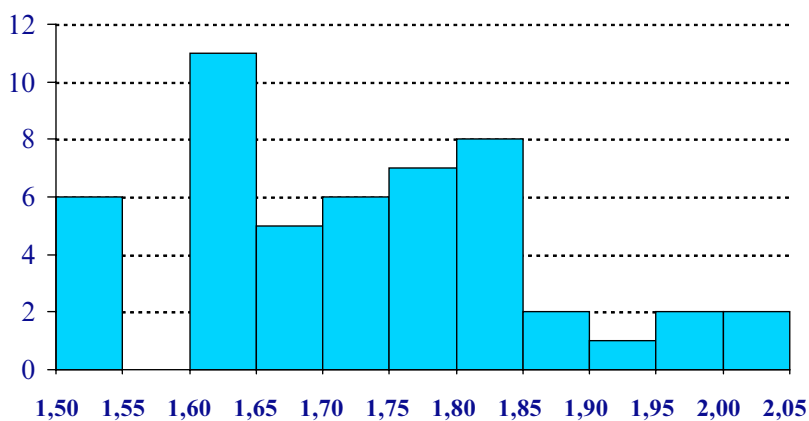
Είναι προφανές ότι η προσπάθεια κατασκευής ενός πίνακα συχνοτήτων θα αποτύχει. Η αποτυχία οφείλεται στο ότι η μεταβλητή «ύψος» μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ανάμεσα στην ελάχιστη και τη μέγιστη, γιατί είναι μια συνεχής μεταβλητή. Για το λόγο αυτό βρίσκουμε τη διαφορά μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης τιμής, που είναι $2,05 - 1,50 = 0,55$ και τη διαιρούμε σε ισομήκη διαστήματα. Για μεγαλύτερη ακρίβεια θεωρούμε 11 διαστήματα (κλάσεις) πλάτους 0,05, δηλαδή τα:

[1,50, 1,55), [1,55, 1,60), [1,60, 1,65), [1,65, 1,70),
 [1,70, 1,75), [1,75, 1,80), [1,80, 1,85), [1,85, 1,90),
 [1,90, 1,95), [1,95, 2,00), [2,00, 2,05)

και καταγράφουμε πόσα άτομα ανήκουν σε κάθε διάστημα. Το μέσον κάθε διαστήματος το ονομάζουμε **κέντρο της κλάσης**.

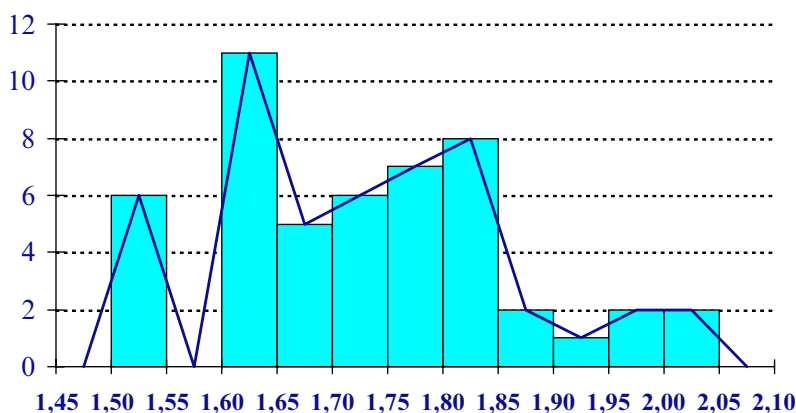
Διαστήματα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
[1,50, 1,55)	6	0,12
[1,55, 1,60)	0	0
[1,60, 1,75)	11	0,22
[1,65, 1,70)	5	0,10
[1,70, 1,75)	6	0,12
[1,75, 1,80)	7	0,14
[1,80, 1,85)	8	0,16
[1,85, 1,90)	2	0,04
[1,90, 1,95)	1	0,02
[1,95, 2,00)	2	0,04
[2,00, 2,05)	2	0,04
Αθροίσματα	50	1

Το αντίστοιχο ιστόγραμμα της παραπάνω κατανομής είναι το ακόλουθο:



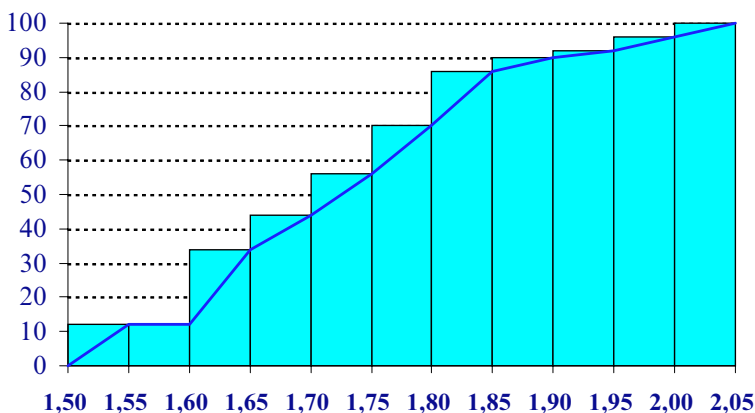
Συνήθως σε κάθε τέτοιο ιστόγραμμα, προσπαθούμε να αντιστοιχίσουμε και ένα πολύγωνο συχνοτήτων. Έτσι, κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα κανονικά, εμφανίζοντας όμως και το διάστημα [1,45, 1,50)

πριν το $[1,50, 1,55)$ και το $[2,05, 2,10)$ κατόπιν του διαστήματος $[2,00, 2,05)$. Στη συνέχεια, σημειώνουμε το μέσο της πάνω οριζόντιας γραμμής κάθε ορθογωνίου, καθώς και τα μέσα του προηγούμενου διαστήματος $[1,45, 1,50)$ και του επόμενου $[2,05, 2,10)$ και τα ενώνουμε, κατασκευάζοντας έτσι το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής αυτής:



Το πολύγωνο συχνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα σχηματίζει χωρίο ίσου εμβαδού με αυτό που σχηματίζουν τα ορθογώνια αφού παρατηρούμε ότι για κάθε κομμάτι που προσθέτουμε (με φόντο άσπρο) αφαιρείται και ένα ισεμβαδικό κομμάτι (με φόντο γαλάζιο).

Για το ιστόγραμμα της αθροιστικής συχνότητας - σχετικής αθροιστικής συχνότητας ακολουθείται η παραπάνω διαδικασία. Το πολύγωνο αθροιστικών - σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων σχηματίζεται ενώνοντας τα δεξιά άκρα (όχι τα μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα:



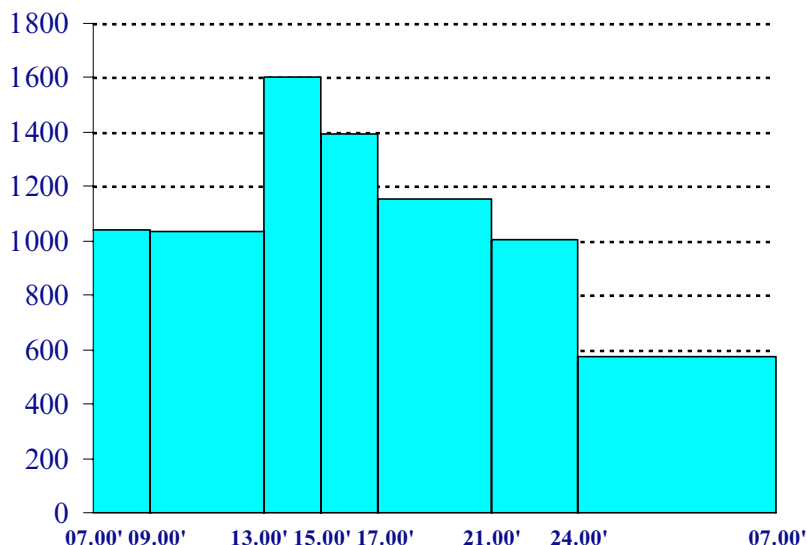
Στο προηγούμενο παράδειγμα επιλέξαμε κλάσεις ίσου πλάτους. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που είναι απαραίτητο να έχουμε κλάσεις με διαφορετικά πλάτη.

Ώρα	Ατυχήματα
07.00' – 09.00'	2.080
09.00' – 13.00'	4.141
13.00' – 15.00'	3.210
15.00' – 17.00'	2.790
17.00' – 21.00'	4.625
21.00' – 24.00'	3.021
24.00' – 07.00'	4.016
Σύνολο	23.883

Προφανώς η κατασκευή ενός ιστογράμματος με ίσες κλάσεις και ύψη ορθογωνίων τη συχνότητας είναι λάθος. Το ύψος κάθε ορθογωνίου πρέπει να είναι αντίστροφα ανάλογο του πλάτους της κλάσης. Για το λόγο αυτό εκτός από τη συχνότητα ορίζουμε και δύο νέες στήλες: η μία είναι το πλάτος της κλάσης και η άλλη το πηλίκο της συχνότητας προς το πλάτος της κλάσης.

Ώρα	v_i	c_i	$\frac{v_i}{c_i}$
07.00' – 09.00'	2080	2	1040
09.00' – 13.00'	4141	4	1035,25
13.00' – 15.00'	3210	2	1605
15.00' – 17.00'	2790	2	1395
17.00' – 21.00'	4625	4	1156,25
21.00' – 24.00'	3021	3	1007
24.00' – 07.00'	4016	7	573,71
Σύνολο	23883		

Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων με ύψος κάθε ορθογώνιου το $\frac{v_i}{c_i}$.



2.4. Παράμετροι Θέσης

- **Επικρατούσα τιμή**

Ορισμός 1: Επικρατούσα τιμή μιας μεταβλητής ονομάζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Αν δύο ή περισσότερες τιμές έχουν τη μέγιστη συχνότητα τότε υπάρχουν περισσότερες από μία επικρατούσες τιμές.

Για παράδειγμα:

- Αν η μεταβλητή παίρνει τις τιμές 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9 τότε έχουμε τον πίνακα συχνοτήτων:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v_i	2	1	1	3	1	2	4	2	1

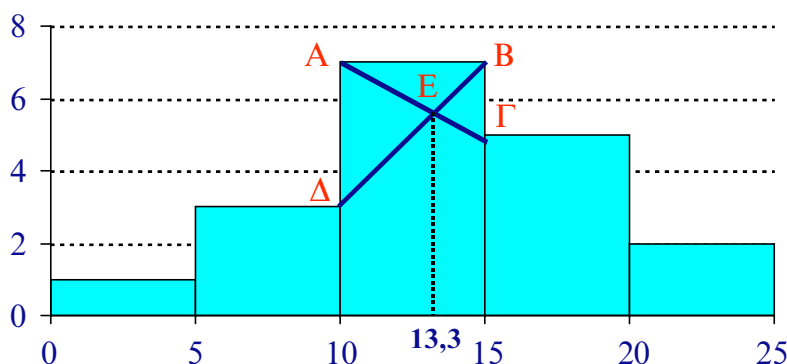
Η επικρατούσα τιμή είναι 7.

- Αν η μεταβλητή παίρνει τις τιμές 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9 τότε έχουμε τον πίνακα συχνοτήτων:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v_i	2	3	1	1	1	3	2	1	2

Οι επικρατούσες τιμές είναι οι 2, 6.

- Σε συνεχή μεταβλητή ορίζουμε ως επικρατούσα κλάση αυτή με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Η επικρατούσα τιμή υπολογίζεται γραφικά όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στο παράδειγμα αυτό η επικρατούσα τιμή βρίσκεται από την τετμημένη του σημείου τομής των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ και είναι προσεγγιστικά 13,3.

• Μέση τιμή

Η μέση τιμή διαφόρων τιμών, είναι γνωστή ως το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών προς το πλήθος τους. Για παράδειγμα ο βαθμός του απολυτηρίου ενός μαθητή είναι ο μέσος όρος των βαθμών των μαθημάτων που διδάσκεται. Ο μέσος όρος υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. Ο μέσος όρος ποιοτικών χαρακτηριστικών δεν ορίζεται στη στατιστική. Οι εκφράσεις της μορφής «μέσος άνθρωπος» είναι κοινωνιολογικές εκφράσεις και προφανώς περιέχουν μια αοριστία.

• Διακριτή μεταβλητή

Ας εξετάσουμε ένα δείγμα πληθυσμού 50 ανθρώπων με μεταβλητή «πόσες πιστωτικές κάρτες έχουν» και έστω ότι έχουμε τα παρακάτω

A/A	x_i	v_i	$v_i x_i$
1	0	8	0
2	1	19	19
3	2	14	28
4	3	7	21
5	4	2	8
Αθροίσματα		50	76

Καταλήγουμε λοιπόν πάλι, ότι η μέση τιμή είναι $\frac{76}{50} = 1,52$.

- **Συνεχής μεταβλητή**

Ας μετρήσουμε το βάρος 50 αρνιών, οπότε έχουμε τις τιμές:

10,03 - 9,57 - 9,35 - 7,79 - 8,86 - 9,83 - 10,64 - 9,76 - 10,30 -
 8,12 - 10,84 - 9,60 - 9,27 - 8,75 - 10,25 - 7,03 - 9,28 - 10,64 -
 8,25 - 10,80 - 9,35 - 10,37 - 8,79 - 8,26 - 7,59 - 10,33 - 8,99 -
 7,63 - 9,25 - 10,11 - 10,22 - 7,40 - 8,23 - 8,87 - 9,03 - 10,65 -
 8,27 - 9,90 - 9,33 - 9,77 - 10,61 - 9,75 - 9,34 - 7,57 - 10,02 -
 10,54 - 10,49 - 10,42 - 10,69 - 7,83

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή του βάρους είναι ίση με το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών αυτών διά το πλήθος των τιμών. Αν προσθέσουμε όλες τις τιμές βρίσκουμε 468,56, οπότε έχουμε μέση τιμή $\frac{468,56}{50} = 9,37$.

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής στην παραπάνω κατανομή μέσω της ομαδοποίησης γίνεται ως εξής:

Διάστημα	Συχνότητα v_i	Μέσο διαστήματος O_i	$v_i O_i$
7,0 – 7,5	2	7,25	14,5
7,5 – 8,0	4	7,75	31
8,0 – 8,5	6	8,25	49,5
8,5 – 9,0	5	8,75	43,75
9,0 – 9,5	8	9,25	74
9,5 – 10,0	7	9,75	68,25
10,0 – 10,5	10	10,25	102,5
10,5 – 11,0	8	10,75	86
Αθροίσματα	50		469,5

Σε κάθε διάστημα υπολογίζουμε το μέσον του O_i , για παράδειγμα, το μέσον του διαστήματος από το 7 έως 7,5 είναι $\frac{7+7,5}{2} = 7,25$, οπότε έχουμε $O_1 = 7,25$. Όμοια υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα μέσα διαστημάτων.

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε κάθε μέσον διαστήματος με την αντιστοιχη συχνότητα του διαστήματος, δηλαδή σχηματίζουμε μια στήλη με στοιχεία τα $v_i O_i$ και υπολογίζουμε το άθροισμα αυτών που είναι 469,5. Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το μέγεθος του δείγματος ($n = 50$) και βρίσκουμε τη μέση τιμή του. Οπότε η μέση τιμή είναι $\frac{469,5}{50} = 9,39$.

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέσες τιμές που υπολογίσθηκαν διαφέρουν κατά 0,02 και το σφάλμα αυτό παρουσιάζεται λόγω του έμμεσου υπολογισμού του αθροίσματος όλων των τιμών.

Η μέση τιμή είναι μία παράμετρος θέσεως γιατί μας πληροφορεί για τον μέσο όρο του δείγματος. Πολλές φορές όμως δεν είναι αξιόπιστο στοιχείο. Το επόμενο παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό.

Παράδειγμα

Σε ένα εργοστάσιο έχουμε 100 εργάτες με καθαρές αποδοχές 175.000 το μήνα, 12 προϊστάμενους με 380.000, 12 συμβούλους με 620.000, 2 γενικούς διευθυντές με 1.200.000 και οι ιδιοκτήτες είναι 4 και αποτελούν το Διοικητικό συμβούλιο με αποδοχές 2.400.000 ο καθένας. Έχουμε:

x_i	v_i	$v_i x_i$
165000	100	16500000
380000	12	4560000
620000	12	7440000
1200000	2	2400000
2400000	4	9600000
	130	40500000

Οπότε η μέση τιμή θα είναι $\frac{40500000}{130} = 311538,5$.

Με άλλα λόγια, η μέση τιμή δεν είναι επαρκής πληροφορία για την κατανομή της μεταβλητής. Για το λόγο αυτό ορίζεται στη στατιστική και η διάμεσος.

• Διάμεσος

Αν έχουμε τις 9 αριθμητικές τιμές 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, τότε ο μεσαίος όρος αυτών είναι ο 5^{ος}, δηλαδή ο 3. Αν έχουμε τις 10 αριθμητικές τιμές 1, 1, 2, 2, 3, 7, 7, 8, 9, 9 τότε δεν υπάρχει μεσαίος όρος. Τότε ως μεσαίο όρο θεωρούμε το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων, δηλαδή του 5^{ου} και του 6^{ου} όρου, δηλαδή $\frac{3+7}{2} = 5$. Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1: Διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ονομάζεται:

- Η μεσαία παρατήρηση αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό.
- Το ημιάθροισμα των μεσαίων παρατηρήσεων αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο.

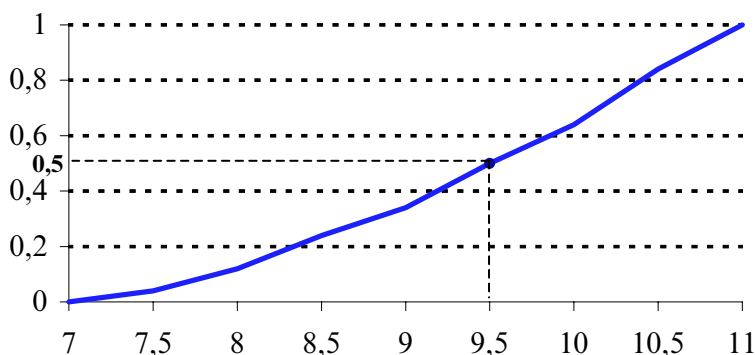
Στο προηγούμενο παράδειγμα, η μεσαία παρατήρηση είναι προφανώς 165.000 (αφού περισσότεροι από τους μισούς εργαζόμενους πληρώνονται με 165.000) και η μεγάλη διαφορά που υπάρχει μεταξύ μέσης τιμής και διαμέσου μας δίνει την πληροφορία ότι η κατανομή δεν είναι «σωστή».

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη διάμεσο από την αθροιστική συχνότητα ή τη σχετική αθροιστική συχνότητα. Συνήθως η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται στις ομαδοποιημένες παρατηρήσεις.

Στο παράδειγμα που είδαμε προηγούμενα με το βάρος των 50 αρνιών έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Διάστημα	Συχνότητα v_i	Αθροιστική	Σχετική f_i	Σχετική αθροιστική
7,0 – 7,5	2	2	0,04	0,04
7,5 – 8,0	4	6	0,08	0,12
8,0 – 8,5	6	12	0,12	0,24
8,5 – 9,0	5	17	0,10	0,34
9,0 – 9,5	8	25	0,16	0,50
9,5 – 10,0	7	32	0,14	0,64
10,0 – 10,5	10	42	0,20	0,84
10,5 – 11,0	8	50	0,16	1
Αθροίσματα	50			

Ας χαράξουμε τη γραφική παράσταση της σχετικής αθροιστικής συχνότητας:



Για την τιμή 0,5 του άξονα των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων (yy') βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής η οποία είναι 9,5.

• Σύγκριση παραμέτρων θέσης

Για τις τρεις παραμέτρους θέσης έχουμε τα εξής:

- Η μέση τιμή επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές και εξαρτάται από όλες τις τιμές της μεταβλητής.
- Η επικρατούσα τιμή εξαρτάται μόνο τη μεγαλύτερη τιμή
- Η διάμεσος δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές και εξαρτάται από όλες τις τιμές της μεταβλητής. Ο υπολογισμός της διαμέσου παρουσιάζει δυσκολίες σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ. σε συνεχή μεταβλητή).

2.5. Παράμετροι Διασποράς

Η σύγκριση ερευνών με το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικούς πληθυσμούς είναι ένας από τους σκοπούς της Στατιστικής. Με τις παραμέτρους θέσης έχουμε κάποιες πληροφορίες για τις κατανομές.

Είναι όμως δυνατόν σε δύο κατανομές (σε διαφορετικούς πληθυσμούς) της ίδιας μεταβλητής να έχουμε την ίδια παράμετρο θέσης (π.χ. την ίδια μέση τιμή) και οι τιμές της μιας κατανομής να είναι «κοντά» στη μέση τιμή ενώ στην άλλη κατανομή «μακριά» από αυτήν.

Είναι λογικό λοιπόν να εξετάζουμε τη διασπορά των τιμών της μεταβλητής γύρω από την παράμετρο θέσης και συνήθως αυτό γίνεται για τη μέση τιμή.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τμήματα της Β' Λυκείου και εξετάζουμε τους μαθητές ως προς τη μεταβλητή «Βαθμός στα Μαθηματικά».

Τμήμα Α₁Τμήμα Α₂

x_i	v_i	$v_i x_i$	x_i	v_i	$v_i x_i$
8	3	24	8	0	0
9	3	27	9	0	0
10	4	40	10	4	40
11	2	22	11	3	33
12	2	24	12	4	48
13	0	0	13	1	13
14	0	0	14	2	28
15	1	15	15	4	60
16	2	32	16	6	96
17	1	17	17	1	17
18	2	36	18	0	0
19	2	38	19	0	0
20	3	60	20	0	0
Αθροίσματα	25	335	Αθροίσματα	25	335

Μέση τιμή $\bar{x} = 13,4$ Μέση τιμή $\bar{x} = 13,4$

Οι κατανομές αυτές έχουν την ίδια μέση τιμή (παράμετρος θέσης), όμως παρατηρούμε ότι:

- Στο τμήμα Α₁ η μέση τιμή επηρεάζεται πολύ από την ύπαρξη πολύ καλών μαθητών όπως και από μαθητές με μικρή βαθμολογία δηλαδή έχουμε μεγάλη διασπορά τιμών.
- Στο τμήμα Α₂ οι βαθμολογίες είναι ανάμεσα στο 10 και 17 και έτσι έχουμε μικρότερη διασπορά τιμών.

Οι αριθμοί που μας πληροφορούν για τη διασπορά των τιμών είναι το **εύρος**, η **μέση απόλυτη απόκλιση**, η **διακύμανση**, και η **τυπική απόκλιση**.

- **Εύρος**

Ορισμός 1: Εύρος είναι η διάφορα της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη.

Είναι προφανές ότι το εύρος υπολογίζεται εύκολα αν οι τιμές της μεταβλητής έχουν διαταχθεί. Για παράδειγμα:

- Στο τμήμα A_1 το εύρος είναι $20 - 8 = 12$.
- Στο τμήμα A_2 το εύρος είναι $17 - 10 = 7$.

Το εύρος ως παράμετρος διασποράς έχει το μειονέκτημα ότι χρησιμοποιούμε μόνο τις ακραίες τιμές της μεταβλητής και καθόλου τις υπόλοιπες.

- **Μέση απόλυτη απόκλιση**

Ορισμός 1: Αν μια μεταβλητή παίρνει τις n τιμές $t_1, t_2, \dots, t_n$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε μέση (απόλυτη) απόκλιση της μεταβλητής ονομάζεται το πηλίκο:

$$\frac{|\bar{x} - t_1| + |\bar{x} - t_2| + \dots + |\bar{x} - t_n|}{n}$$

Ισοδύναμος είναι και ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 2: Αν μια μεταβλητή παίρνει τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε μέση (απόλυτη) απόκλιση της μεταβλητής ονομάζεται το πηλίκο:

$$\frac{v_1|\bar{x} - x_1| + v_2|\bar{x} - x_2| + \dots + v_k|\bar{x} - x_k|}{n}$$

Αυτός ο τύπος της απόλυτης απόκλισης είναι πιο εύχρηστος για τον υπολογισμό της. Αρκεί να σχηματίσουμε στον πίνακα συχνοτήτων μια νέα στήλη με τα γινόμενα $v_i|\bar{x} - x_i|$, να τα προσθέσουμε και να διαιρέσουμε με το μέγεθος του δείγματος.

Τμήμα Α₁

x_i	v_i	$v_i x_i$	$ \bar{x} - x_i $	$v_i \bar{x} - x_i $
8	3	24	5,4	16,2
9	3	27	4,4	13,2
10	4	40	3,4	13,6
11	2	22	2,4	4,8
12	2	24	1,4	2,8
13	0	0	0,4	0
14	0	0	0,6	0
15	1	15	1,6	1,6
16	2	32	2,6	5,2
17	1	17	3,6	3,6
18	2	36	4,6	9,2
19	2	38	5,6	11,2
20	3	60	6,6	19,8
Αθροίσματα	25	335		101,2

Η μέση τιμή τότε είναι $\bar{x} = \frac{335}{25} = 13,4$ και η μέση απόλυτη απόκλιση

$$\frac{101,2}{25} = 4,048.$$

Τμήμα Α₂

x_i	v_i	$v_i x_i$	$ \bar{x} - x_i $	$v_i \bar{x} - x_i $
8	0	0	5,4	0
9	0	0	4,4	0
10	4	40	3,4	13,6
11	3	33	2,4	7,2
12	4	48	1,4	5,6
13	1	13	0,4	0,4
14	2	28	0,6	1,2
15	4	60	1,6	6,4
16	6	96	2,6	15,6
17	1	17	3,6	3,6
18	0	0	4,6	0
19	0	0	5,6	0
20	0	0	6,6	0
Αθροίσματα	25	335		53,6

Στο παράδειγμα αυτό η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{335}{25} = 13,4$ και η μέση απόλυτη απόκλιση $\frac{53,6}{25} = 2,144$.

Έτσι έχουμε ότι η «διασπορά» των βαθμών στο A_1 είναι σχεδόν διπλάσια από τη διασπορά των βαθμών στο A_2 .

Η αντίρρηση που μπορεί να διατυπωθεί για την μέση απόλυτη απόκλιση είναι ότι η χρήση των απολύτων τιμών δυσκολεύει τον υπολογισμό της.

• Διακύμανση – Τυπική απόκλιση

Για τον υπολογισμό της μέσης απόλυτης απόκλισης χρησιμοποιούνται οι διαφορές $|\bar{x} - x_i|$. Η διασπορά των τιμών γύρω από τη μέση τιμή προσδιορίζεται καλύτερα από τις διαφορές $(\bar{x} - x_i)^2$ και οι οποίες είναι και πιο κατάλληλες για υπολογισμούς. Η μέση τιμή των διαφορών αυτών ονομάζεται διακύμανση και συμβολίζεται με s^2 .

Ορισμός 1: Αν μια μεταβλητή παίρνει τις n τιμές $t_1, t_2, \dots, t_n$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε διακύμανση της μεταβλητής ονομάζεται το πηλίκο:

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - t_1)^2 + (\bar{x} - t_2)^2 + \dots + (\bar{x} - t_n)^2}{n}$$

Ισοδύναμος είναι και ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 2: Αν μια μεταβλητή παίρνει τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε διακύμανση της μεταβλητής ονομάζεται το πηλίκο:

$$s^2 = \frac{v_1(\bar{x} - x_1)^2 + v_2(\bar{x} - x_2)^2 + \dots + v_k(\bar{x} - x_k)^2}{n}$$

Ο υπολογισμός της διακύμανσης γίνεται εύκολα αν στον πίνακα συχνοτήτων προσθέσουμε μια στήλη με τα στοιχεία $v_i(\bar{x} - x_i)^2$.

Τμήμα Α₁

x_i	v_i	$v_i x_i$	$v_i (\bar{x} - x_i)^2$
8	3	24	87,48
9	3	27	58,08
10	4	40	46,24
11	2	22	11,52
12	2	24	3,92
13	0	0	0
14	0	0	0
15	1	15	2,56
16	2	32	13,52
17	1	17	12,96
18	2	36	42,32
19	2	38	62,72
20	3	60	130,68
Αθροίσματα	25	335	472

Η μέση τιμή τότε είναι $\bar{x} = \frac{335}{25} = 13,4$ και η διακύμανση $s^2 = \frac{472}{25} = 18,88$.

Για το Α₂ με τον ίδιο τρόπο έχουμε μέση τιμή $\bar{x} = \frac{335}{25} = 13,4$ και η διακύμανση $s^2 = \frac{136}{25} = 5,44$.

Η χρήση της διακύμανσης παρουσιάζει ένα σοβαρό πρόβλημα: Οι μονάδες της διακύμανσης είναι τα τετράγωνα των μονάδων της αντίστοιχης μεταβλητής. Για το λόγο αυτό αντί της διακύμανσης χρησιμοποιούμε ως μέτρο διασποράς την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, που τη συμβολίζουμε με s και την ονομάζουμε τυπική απόκλιση.

Ορισμός 1: Αν μια μεταβλητή παίρνει τις v τιμές $t_1, t_2, \dots, t_v$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε τυπική απόκλιση της μεταβλητής ονομάζεται το:

$$s = \sqrt{\frac{(\bar{x} - t_1)^2 + (\bar{x} - t_2)^2 + \dots + (\bar{x} - t_v)^2}{v}}$$

Ισοδύναμος είναι και ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 2: Αν μια μεταβλητή παίρνει τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε τυπική απόκλιση της μεταβλητής ονομάζεται το:

$$s = \sqrt{\frac{v_1(\bar{x} - x_1)^2 + v_2(\bar{x} - x_2)^2 + \dots + v_k(\bar{x} - x_k)^2}{v}}$$

Για παράδειγμα το A_1 έχει τυπική απόκλιση $s = \sqrt{18,88} = 4,354$ ενώ το A_2 $s = \sqrt{5,44} = 2,33$.

2.6. Συντελεστής Μεταβλητότητας (CV)

Όταν εξετάζουμε δύο δείγματα ως προς την ίδια μεταβλητή παρουσιάζονται διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους θέσης και διασποράς.

- Η μέση τιμή των υψών των μαθητών ενός Γυμνασίου είναι $\bar{x} = 162$ cm και η τυπική απόκλιση είναι $s = 5,7$ cm.
- Η μέση τιμή των υψών των μαθητών ενός Γυμνασίου είναι $\bar{x} = 181$ cm και η τυπική απόκλιση είναι $s = 5,8$ cm.

Είναι φανερό ότι δε μπορούμε να πούμε ότι οι δύο πληθυσμοί παρουσιάζουν τον ίδιο βαθμό μεταβλητότητας. Το παραπάνω πρόβλημα παρουσιάζεται αν μετράμε σε διαφορετικές μονάδες ή κλίμακες.

- Οι μαθητές ενός Λυκείου στην Ελλάδα εξεταζόμενοι ως προς την επίδοσή τους παρουσιάζουν μέση τιμή $\bar{x} = 14,5$ και τυπική απόκλιση $s = 2,5$ (κλίμακα βαθμολογίας 0 – 20).
- Οι μαθητές ενός Λυκείου στις Η.Π.Α (U.S.A) εξεταζόμενοι ως προς την επίδοσή τους παρουσιάζουν μέση τιμή $\bar{x} = 62$ και τυπική απόκλιση $s = 16$ (κλίμακα βαθμολογίας 0 – 100).

Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατόν να συγκριθούν τα δύο δείγματα λόγω της διαφορετικής κλίμακας βαθμολογίας.

Ένα μέτρο με το οποίο μπορούμε να ξεπεράσουμε τις παραπάνω δυσκολίες είναι ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας.

Ορισμός 1: Αν ένα δείγμα εξεταζόμενο ως προς μία ποσοτική μεταβλητή του, παρουσιάζει μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας ονομάζεται το πηλίκο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}} 100\%$$

Στο πρώτο παράδειγμα:

- Οι μαθητές στο Γυμνάσιο παρουσιάζουν συντελεστή μεταβλητότητας $CV = \frac{5,7 \text{ cm}}{162 \text{ cm}} 100\% = 3,51\%$.
- Οι μαθητές στο Λύκειο παρουσιάζουν συντελεστή μεταβλητότητας $CV = \frac{5,8 \text{ cm}}{181 \text{ cm}} 100\% = 3,2\%$.

Στο δεύτερο παράδειγμα:

- Οι μαθητές στην Ελλάδα παρουσιάζουν συντελεστή μεταβλητότητας $CV = \frac{2,5}{14,5} 100\% = 17,24\%$.
- Οι μαθητές στις Η.Π.Α (U.S.A) παρουσιάζουν συντελεστή μεταβλητότητας $CV = \frac{16}{62} 100\% = 38,9\%$.

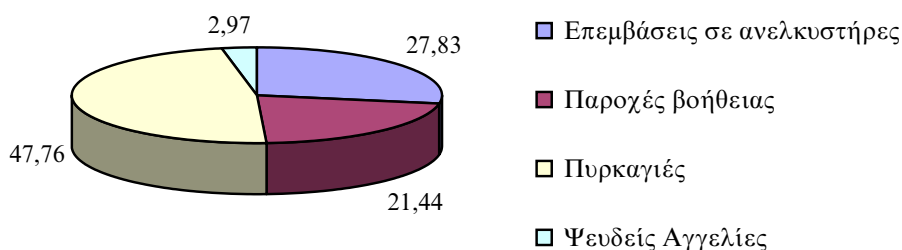
Ο συντελεστής μεταβλητότητας ουσιαστικά μετράει την ομοιογένεια του πληθυσμού. Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10% ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Από τη Στατιστική υπηρεσία της Πυροσβεστικής έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:

Ποσοστιαία κατανομή κλήσεων κατά κατηγορία



Σύνολο κλήσεων: 60740

Να βρεθούν οι συχνότητες των διαφόρων ποιοτικών χαρακτηριστικών.

Λύση

Ο τύπος που μας δίνει τη σχετική συχνότητα είναι $f_i = \frac{v_i}{n}$, οπότε έχουμε ότι $v_i = f_i \cdot n$ και εφόσον $n = 60740$ έχουμε:

$$v_1 = f_1 \cdot n = 0,2783 \cdot 60740 = 16904$$

$$v_2 = f_2 \cdot n = 0,2144 \cdot 60740 = 13024 \text{ κ.λπ.}$$

οπότε έχουμε τον πίνακα συχνοτήτων:

Είδος κλήσης	$f_i\%$	f_i	v_i
Επεμβάσεις σε ανελκυστήρες	27,83	0,2783	16904
Παροχές βοήθειας	21,44	0,2144	13024
Πυρκαγιές	47,76	0,4776	29010
Ψευδείς Αγγελίες	2,97	0,0297	1802
Σύνολο	100	1	

Εφαρμογή 2

Οι βαθμοί των 25 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου είναι:

15, 9, 17, 8, 11, 12, 18, 11, 10, 14, 17, 18,
16, 10, 11, 12, 15, 9, 17, 11, 13, 12, 13, 12, 11

(α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

- (β) Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από 12;
 (γ) Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 14;

Λύση

- (α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων με διαλογή:

x_i	Διαλογή	v_i
8		1
9	└─	2
10	└─	2
11	▣	5
12	□	4
13	└─	2
14		1
15	└─	2
16		1
17	└─	3
18	└─	2
'Αθροισμα		25

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την αθροιστική συχνότητα και έχουμε:

x_i	v_i	Αθροιστική
8	1	1
9	2	3
10	2	5
11	5	10
12	4	14
13	2	16
14	1	17
15	2	19
16	1	20
17	3	23
18	2	25
'Αθροισμα	25	

- (β) Ο αριθμός των μαθητών που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του 12 είναι η αθροιστική συχνότητα του 12 δηλ. 14.
- (γ) Ο αριθμός των μαθητών που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του 14 είναι η αθροιστική συχνότητα του 14 δηλαδή 17. Οι μαθητές που έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 14 είναι οι υπόλοιποι, δηλαδή $25 - 17 = 8$.

Εφαρμογή 3

Για τα δεδομένα της εφαρμογής 2 να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και την τυπική απόκλιση.

Λύση

Συμπληρώνουμε τον πίνακα της εφαρμογής 2 με τις στήλες $v_i x_i$, $v_i(\bar{x} - x_i)^2$:

x_i	v_i	Αθροιστική	$v_i x_i$	$v_i(\bar{x} - x_i)^2$
8	1	1	8	27,8784
9	2	3	18	36,6368
10	2	5	20	21,5168
11	5	10	55	25,992
12	4	14	48	6,5536
13	2	16	36	0,1568
14	1	17	14	0,5184
15	2	19	30	5,9168
16	1	20	16	7,3984
17	3	23	51	41,5152
18	2	25	36	44,5568
Αθροίσματα	25		332	218,64

Οπότε έχουμε ότι:

- Η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των στοιχείων της στήλης $v_i x_i$ και παρονομαστή το πλήθος των στοιχείων, άρα $\bar{x} = \frac{332}{25} = 13,28$.

- Η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή των 25 τιμών δηλαδή η 13^η. Η 13^η είναι στις πρώτες δεκατέσσερις αλλά όχι στις δέκα πρώτες, άρα είναι η τιμή που αντιστοιχεί στη τιμή με σχετική συχνότητα 14 άρα είναι 12.
- Η επικρατούσα τιμή προφανώς είναι 11 (Η τιμή της μεταβλητής με τη μεγαλύτερη συχνότητα).
- Η διακύμανση s^2 ισούται με το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των στοιχείων της στήλης $n_i(\bar{x} - x_i)^2$ και παρονομαστή το πλήθος των στοιχείων, άρα $s^2 = \frac{218,64}{25} = 8,7456$, οπότε τυπική απόκλιση $s = \sqrt{8,7456} = 2,9572$.

Εφαρμογή 4

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει την ηλικία 50 εργαζομένων ενός εργοστασίου.

[18,23)	[23,28)	[28,33)	[33,38)	[38,43)	[43,48)	[48,53)	[53,58)
2	5	6	11	9	7	6	4

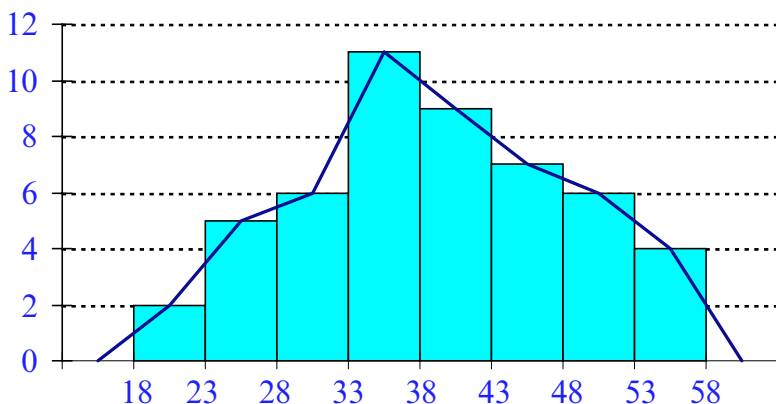
- (α) Να γίνει ιστόγραμμα συχνοτήτων.
 (β) Να γίνει πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.
 (γ) Να βρεθεί η διάμεσος.

Λύση

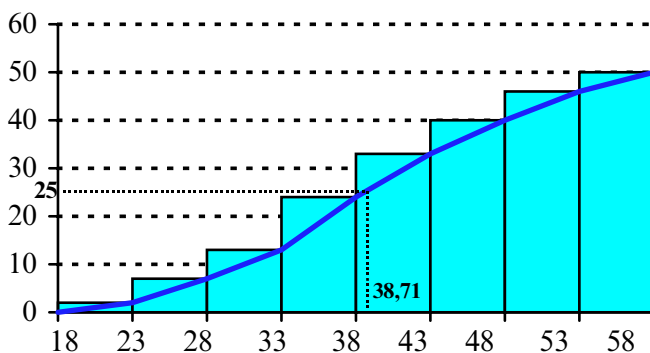
Κατασκευάζουμε τον πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.

x	n_i	Αθροιστική συχνότητα
[18,23)	2	2
[23,28)	5	7
[28,33)	6	13
[33,38)	11	24
[38,43)	9	33
[43,48)	7	40
[48,53)	6	46
[53,58)	4	50
'Αθροισμα	50	

(α) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων είναι:



(β) Το ιστόγραμμα – πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι:



(γ) Η διάμεσος αντιστοιχεί στο 25 του y'y. Από το παραπάνω γράφημα παρατηρούμε ότι αυτή είναι 38,71.

Εφαρμογή 5

Το μέσο βάρος 30 μαθητών και μαθητριών ενός Γυμνασίου είναι 62 Kg. Ποιό θα είναι το μέσο βάρος του Γυμνασίου:

(α) Αν έρθει μια μαθήτρια με βάρος 64 Kg.

(β) Αν φύγει ένας μαθητής με βάρος 66 Kg.

Λύση

Είναι $\bar{x} = 62$ Kg, αλλά $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{30}}{30}$, οπότε:

$$62 \cdot 30 = t_1 + t_2 + \dots + t_{30}$$

(α) Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{y} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{30} + 64}{31} = \frac{62 \cdot 30 + 64}{31} = 62,06 \text{ Kg}$$

(β) Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{y} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{30} - 66}{29} = \frac{62 \cdot 30 - 66}{29} = 61,86 \text{ Kg}$$

Εφαρμογή 6

Δίνεται ο πίνακας:

x_i	v_i
4	9
5	;
6	3
7	2
8	4

με τις τιμές μιας μεταβλητής και τις αντίστοιχες συχνότητες. Αν η συχνότητα του 5 έχει "χαθεί", να βρεθεί αυτή στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Υπάρχουν δύο επικρατέστερες τιμές.

(β) Η μέση τιμή είναι 5,5.

Λύση

(α) Οι γνωστές συχνότητες είναι μικρότερες ή ίσες από τη συχνότητα του 4 που είναι 9. Για να υπάρχουν δύο επικρατέστερες τιμές πρέπει η συχνότητα του 5 να είναι ίση με τη συχνότητα του 4 δηλαδή να είναι 9.

(β) Αν η συχνότητα του 5 είναι κ τότε έχουμε:

x_i	v_i	$v_i x_i$
4	9	36
5	κ	5κ
6	3	18
7	2	14
8	4	32
Αθροίσματα	$18 + \kappa$	$100 + 5\kappa$

'Αρα η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{100 + 5\kappa}{18 + \kappa}$, επομένως:

$$5,5 = \frac{100 + 5\kappa}{18 + \kappa} \quad \text{ή} \quad \frac{55}{10} = \frac{100 + 5\kappa}{18 + \kappa} \quad \text{ή} \quad 55(18 + \kappa) = 10(100 + 5\kappa) \quad \text{ή} \\ 990 + 55\kappa = 1000 + 50\kappa \quad \text{ή} \quad 55\kappa - 50\kappa = 1000 - 990 \quad \text{ή} \\ 5\kappa = 10 \quad \text{ή} \quad \kappa = 2$$

Εφαρμογή 7

Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειώνονται κατά 2 και οι 9 αυξάνονται κατά 6, να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

Λύση

Αν $\bar{x} = 20$ τότε $20 = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{40}}{40}$, οπότε $t_1 + t_2 + \dots + t_{40} = 800$.

Για τη νέα μέση τιμή θα έχουμε $\bar{y} = \frac{t'_1 + t'_2 + \dots + t'_{40}}{40}$, αλλά:

$$t'_1 + t'_2 + \dots + t'_{40} = t_1 + t_2 + \dots + t_{40} - 7 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 800 - 14 + 54 = 840$$

'Αρα $\bar{y} = \frac{840}{40} = 21$.

Εφαρμογή 8

Ελέγχονται 35 αυτοκίνητα ως προς το χρώμα τους και μας παραδίδεται ο παρακάτω πίνακας:

Χρώμα	n_i	$f_i\%$
Κόκκινο	3	
Κίτρινο	9	
Πράσινο	14	
Μπλε		20
Μαύρο		
Σύνολα	35	

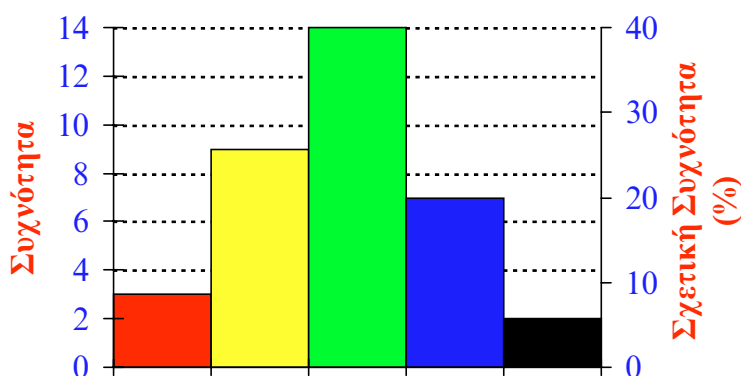
Να υπολογιστούν όλες οι συχνότητες και οι σχετικές συχνότητες και να γίνει το ραβδόγραμμα των συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων.

Λύση

Το 20% του 35 είναι $35 \cdot 0,2 = 7$, δηλαδή η συχνότητα του μπλε χρώματος είναι 7 και έχουμε ότι η συχνότητα του μαύρου χρώματος θα είναι $35 - (3 + 9 + 14 + 7) = 35 - 33 = 2$. Άρα ο πίνακας γίνεται:

Χρώμα	n_i	$f_i\%$
Κόκκινο	3	8,57
Κίτρινο	9	25,71
Πράσινο	14	40
Μπλε	7	20
Μαύρο	2	5,72
Σύνολα	35	100

και το ραβδόγραμμα συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων είναι:



Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Οι εισαγωγές – εξαγωγές της χώρας από το 1974 έως το 1993 δίνονται από τον παρακάτω πίνακα. Να γίνει η γραφική παράσταση αυτών με πολυγωνικές γραμμές στην ίδια γραφική παράσταση.

Εισαγωγές και Εξαγωγές 1974 – 1993

Έτος	Εισαγωγές	Εξαγωγές	Έτος	Εισαγωγές	Εξαγωγές
1974	132181	60980	1984	1083880	542676
1975	172041	74441	1985	1412797	629085
1976	223159	93811	1986	1582298	789995
1977	252150	101330	1987	1867354	955070
1978	287729	123727	1988	1756998	776434
1979	356820	144238	1989	2625714	1230942
1980	452881	221108	1990	3137524	1267507
1981	493764	237928	1991	3921522	1579967
1982	665920	286281	1992	4484059	1880763
1983	848295	392652	1993	5050531	1933422

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Άσκηση 3

Το μέσο ύψος των 80 κατοίκων ενός νησιού είναι 172 cm. Στις καλοκαιρινές διακοπές φθάνουν στο νησί 60 τουρίστες με μέσο ύψος 187 cm. Ποιό είναι το μέσο ύψος των ατόμων που βρίσκονται στο νησί στις καλοκαιρινές διακοπές;

Άσκηση 4

Σε ένα εργοστάσιο με 100 εργαζόμενους η μέση τιμή των αμοιβών είναι 185000. Το 45% των εργαζομένων στο εργοστάσιο πληρώνονται με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής και οι μισθοί τους έχουν μέση τιμή 165000. Αν οι αποδοχές των εργαζομένων με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής αυξηθούν στη μέση τιμή, ποιά θα είναι η νέα μέση τιμή;

Άσκηση 5

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τη σχετική συχνότητα μιας μεταβλητής με μέση τιμή 2,1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να βρεθεί η διάμεσος.

X_i	1	2	3	4
$f_i\%$	26		23	

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές x , $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, $x + 4\omega$, $x + 5\omega$ με $\omega > 0$. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση.

Άσκηση 2

Μετράμε το βάρος των κατοίκων ενός χωριού και έχουμε μέση τιμή 72Kg και τυπική απόκλιση 5Kg. Η μέτρηση του βάρους έγινε με μια ζυγαριά που όπως αποδείχθηκε μετά τις μετρήσεις έδειχνε 2Kg λιγότερο σε κάθε μέτρηση. Ποιά είναι η πραγματική μέση τιμή και ποιά η πραγματική τυπική απόκλιση;

Άσκηση 3

Οι απουσίες των μαθητών μιας τάξης Λυκείου κατά τον μήνα Σεπτέμβριο είναι 0, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 7, 2, 1, 0, 5, 6, 7, 4, 5, 2, 1, 0, 6, 7, 8, 9, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 9. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν περισσότερες από 6 απουσίες.

Άσκηση 4

Αν οι απουσίες δύο Λυκείων Α, Β δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

- (α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των δύο κατανομών
- (β) Να σχεδιαστεί το πολύγωνο συχνοτήτων σε κοινό διάγραμμα.
- (γ) Από τα Λύκεια Α, Β ποιο είναι πιο ομοιογενές ως προς τις απουσίες;

Απουσίες	Α' Λύκειο	Β' Λύκειο
[0, 10)	20	25
[10, 20)	16	11
[20, 30)	25	17
[30, 40)	26	22
[40, 50)	7	8
[50, 60)	8	20
[60, 80)	9	13
[80, 100)	12	4
[100, 125)	3	4

Άσκηση 5

Οι 8 από τους 20 εργαζόμενους σε ένα εργοστάσιο έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 175000 και οι υπόλοιποι 215000. Ποιός είναι ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των εργαζόμενων;

Άσκηση 6

Η ευστοχία μιας ομάδας Μπάσκετ στις ελεύθερες βολές είναι 70%. Οι 5 βασικοί παίκτες έχουν ευστοχία 75% και οι 3 επιθετικοί αναπληρωματικοί 60%. Πόση ευστοχία έχουν οι 2 αμυντικοί αναπληρωματικοί;

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων – αθροιστικών – σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της παρακάτω κατανομής:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΠΑΘΟΝΤΩΝ (οδηγοί – επιβάτες – πεζοί) κατά το 1998 έως 50 ετών

Ηλικία (έτη)	Μέχρι 5	6-12	13-17	18-20	21-24	25-29	30-34	35-44	45-50
Άτομα	354	704	2.124	3.739	5.043	4.783	3.824	4.654	2.259

Πηγή: Υπουργείο Δημόσιας Τάξης

Κατόπιν να κατασκευαστεί το διάγραμμα συχνοτήτων.

Άσκηση 2

Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει την κατανομή των μηχανοκίνητων αλιευτικών σκαφών ως προς την ιπποδύναμη τους:

**Μηχανοκίνητα αλιευτικά σκάφη, κατά κλιμάκια
ιπποδυνάμεως μέχρι 200 HP κατά το έτος 1991**

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	v_i
[0, 10)	10
[10, 20)	52
[20, 30)	1777
[30, 40)	1317
[40, 50)	856
[50, 60)	863
[60, 70)	434
[70, 80)	517
[80, 90)	486
[90, 100)	452
[100, 150)	1243
[150, 200)	410

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

- (α) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
 (β) Να βρεθεί η μέση τιμή.
 (γ) Να βρεθεί η διακύμανση και τυπική απόκλιση.

Άσκηση 3

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει την κατανομή των κατοίκων της Ελλάδας ως προς την ηλικία κατά το έτος 1992:

Κατανομή ηλικίας κατοίκων Ελλάδας κατά το 1992

Ηλικία	Άτομα	Ηλικία	Άτομα	Ηλικία	Άτομα
[0, 5)	529501	[30, 35)	731310	[60, 65)	634154
[5, 10)	620540	[35, 40)	698124	[65, 70)	511206
[10, 15)	741210	[40, 45)	666503	[70, 75)	358530
[15, 20)	768765	[45, 50)	624437	[75, 80)	285435
[20, 25)	788764	[50, 55)	609587	[80, 85)	203942
[25, 30)	759301	[55, 60)	659035	85 και άνω	131539

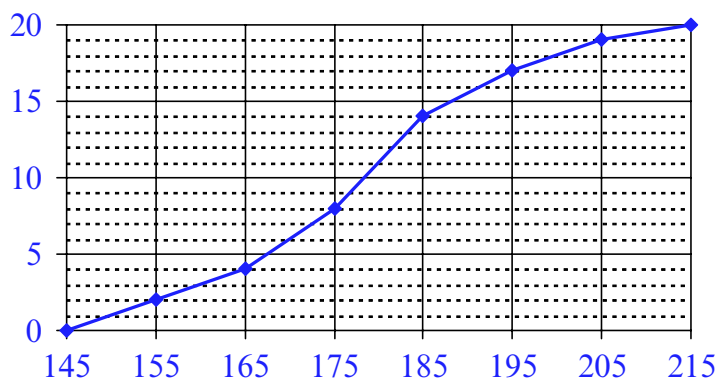
Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

- (α) Να γίνει γραφική παράσταση των συχνοτήτων.
- (β) Να γίνει γραφική παράσταση των σχετικών συχνοτήτων
- (γ) Να βρεθεί τι ποσοστό του πληθυσμού είχε ηλικία μικρότερη ή ίση των 23 ετών.
- (δ) Να βρεθεί τι ποσοστό του πληθυσμού είχε ηλικία μεγαλύτερη ή ίση των 50 ετών.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1

Σε σχολείο πραγματοποιήθηκε έρευνα για το ύψος των μαθητών. Κατόπιν όμως χάθηκαν τα στοιχεία μετρήσεων και βρέθηκε μόνο το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



- (α) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.
- (β) Να βρείτε τη μέση τιμή.
- (γ) Να βρείτε τη διάμεσο.
- (δ) Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

Άσκηση 2

Αν οι τιμές μιας μεταβλητής αυξηθούν κατά L ναδειχθεί ότι η μέση τιμή αυξάνεται κατά L ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει σταθερή.

Άσκηση 3

- (α) Ποιά είναι η μέση τιμή των γωνιών ενός τριγώνου;
- (β) Ποιά είναι η μέση τιμή των γωνιών ενός n -γωνου;

Άσκηση 4

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων μεταβλητής x πολλαπλασιασθούν με έναν αριθμό $a > 0$, πώς μεταβάλλεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση;

Άσκηση 5

Οι οκτώ εργαζόμενοι μιας επιχείρησης έχουν μέσο μισθό 125000 και ο μέσος μισθός των υπολοίπων είναι 145000. Αν ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση είναι 137000, να βρεθεί πόσοι εργάζονται στην επιχείρηση.

Ανακεφαλαίωση

- **Στατιστική** είναι ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος ως έργο έχει την *συγκέντρωση* στοιχείων, την *ταξινόμησή* τους και την παρουσίασή τους σε κατάλληλη μορφή ώστε να μπορούν να αναλυθούν και να ερμηνευθούν για την εξυπηρέτηση διαφόρων σκοπών.
- Οι μεταβλητές διαχωρίζονται
 - ♦ **Ποιοτικές** μεταβλητές
 - ♦ **Ποσοτικές** μεταβλητές και αυτές σε:
 - Διακριτές
 - Συνεχείς
- Το δείγμα του πληθυσμού πρέπει να είναι μια **ακριβής μικρογραφία του** και να αποδίδει σωστά την **εικόνα** του πληθυσμού.
- Τον αριθμό των εμφανίσεων μιας τιμής στο σύνολο τιμών μιας μεταβλητής την ονομάζουμε **συχνότητα εμφάνισης** της τιμής ή απλά **συχνότητα** της τιμής.
- **Σχετική συχνότητα** είναι ο λόγος της συχνότητας προς το μέγεθος του δείγματος.
- Σε ποσοτική μεταβλητή, **αθροιστική συχνότητα** μιας τιμής x_i λέγεται το άθροισμα των συχνοτήτων n_i των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή αυτή.
- Σε ποσοτική μεταβλητή, **σχετική αθροιστική συχνότητα** μιας τιμής x_i λέγεται το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων f_i των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή αυτή.
- **Επικρατούσα τιμή** μιας μεταβλητής ονομάζεται η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα.
- Η **μέση τιμή** διαφόρων τιμών είναι το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών προς το πλήθος τους.
- **Διάμεσος** ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ονομάζεται:
 - ♦ Η **μεσαία παρατήρηση** αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό.
 - ♦ Το **ημιάθροισμα** των μεσαίων παρατηρήσεων αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο.

- **Εύρος** τιμών μεταβλητής είναι η διάφορα της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη.
- Αν μια μεταβλητή παίρνει τις n τιμές $t_1, t_2, \dots, t_n$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε **μέση (απόλυτη) απόκλιση** της μεταβλητής ονομάζεται το πηλίκο:

$$\frac{|\bar{x} - t_1| + |\bar{x} - t_2| + \dots + |\bar{x} - t_n|}{n}$$

- Αν μια μεταβλητή παίρνει τις n τιμές $t_1, t_2, \dots, t_n$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε **διακύμανση** της μεταβλητής ονομάζεται το πηλίκο:

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - t_1)^2 + (\bar{x} - t_2)^2 + \dots + (\bar{x} - t_n)^2}{n}$$

- Αν μια μεταβλητή παίρνει τις n τιμές $t_1, t_2, \dots, t_n$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ τότε **τυπική απόκλιση** της μεταβλητής ονομάζεται το:

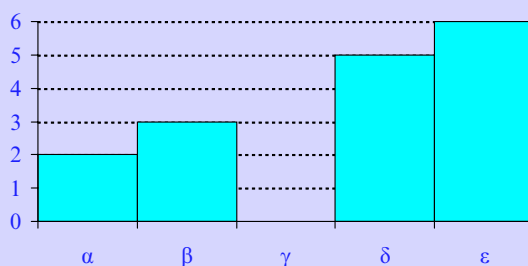
$$s = \sqrt{\frac{(\bar{x} - t_1)^2 + (\bar{x} - t_2)^2 + \dots + (\bar{x} - t_n)^2}{n}}$$

- **Συντελεστής μεταβλητότητας** ονομάζεται το πηλίκο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}} 100\%$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τα νεογέννητα σκυλιά ανοίγουν τα μάτια τους κατά μέσο όρο τη 15^η μέρα. Ένα νεογέννητο δεν ανοίγει τα μάτια του τη 15^η μέρα. Ο ιδιοκτήτης του πρέπει να ανησυχεί;
2. Αν σε μια κατανομή συχνοτήτων απαλείψουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, η διάμεσος μεταβάλλεται;
3. Σε δείγμα 5 ατόμων για τον έλεγχο του αριθμού των αυτοκινήτων που κατέχουν παρουσιάζεται το παρακάτω διάγραμμα. Αν ο συνολικός αριθμός αυτοκινήτων είναι 20, μπορείτε να το συμπληρώσετε;



4. Είναι ομογενές το δείγμα 50 ατόμων που εξετάζονται ως προς το ύψος τους αν έχουν μέση τιμή ύψους 1,80 m και διακύμανση 36 cm;
5. Η διακύμανση εκφράζεται με τις μονάδες μέτρησης της μεταβλητής;
6. Ο λόγος της διακύμανσης προς την τυπική απόκλιση είναι μία παράμετρος διασποράς;
7. Αν από τις τιμές μιας μεταβλητής εξαιρέσουμε μια τιμή της που είναι "κοντά" στη μέση τιμή, θα έχουμε μικρή μεταβολή της μέσης τιμής;
8. Η σχετική συχνότητα μας δίνει το ποσοστό επί τις χιλίους ‰ των ατόμων του δείγματος που έχουν την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής;
9. Είναι ποιοτική μεταβλητή του πληθυσμού των γυναικών το χρώμα των ματιών τους;
10. Η σύμπτωση διαμέσου και μέσης τιμής μας δίνει την πληροφορία ότι είναι ομογενές το δείγμα ως προς το χαρακτηριστικό μέγεθος που εξετάζεται;



Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η πρωταρχική έννοια του ορίου μιας συνάρτησης. Θα παρουσιασθούν οι βασικές ιδιότητές του και βασικές συνέπειες, όπως η μελέτη της ύπαρξης κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Κατόπιν θα εξετάσουμε την έννοια της συνέχειας η οποία είναι μια τοπική ιδιότητα για μια συνάρτηση.

Θα ασχοληθούμε τέλος με τα όρια στο άπειρο, συνέπεια των οποίων είναι η μελέτη της ύπαρξης οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

3.1. Η έννοια του Ορίου

Στην καθημερινή μας ζωή είναι αρκετά συνηθισμένη η έννοια του ορίου σε διάφορες καταστάσεις. Αν προσπαθήσουμε να αφαιρέσουμε την ιδιαιτερότητα των καταστάσεων αυτών, θα συνειδητοποιήσουμε ότι η έννοια του ορίου είναι μια γενικότερη έννοια που μας εκφράζει ότι αν μια «ποσότητα» τείνει προς ένα συγκεκριμένο όριο, τότε οσοδήποτε κοντά στο όριο αυτό, θα υπάρχουν άπειρες τιμές της ποσότητας. Δηλαδή, οι τιμές της ποσότητας συγκλίνουν / συσσωρεύονται προς την τιμή του ορίου.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό τρένο στο οποίο κάνουμε δοκιμαστικές μετρήσεις. Έστω f η συνάρτηση θέσης του τρένου, η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου t . Για $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ οι τιμές της f θα είναι:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$	0	4	16	36	64	100	144	198	256	324	400

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση θέσης f , έχει τη μορφή:

$f(t) = 4t^2$, $t \geq 0$. Η μέση ταχύτητα του τρένου δίνεται από το πηλίκο:

$$\frac{\text{απόσταση που έχει διανυθεί}}{\text{αντίστοιχο χρονικό διάστημα}}$$

Ας εξετάσουμε τη συμπεριφορά της μέσης ταχύτητας για χρόνους πολύ κοντά στο $t_0 = 2$. Η μέση ταχύτητα δίνεται από τη συνάρτηση:

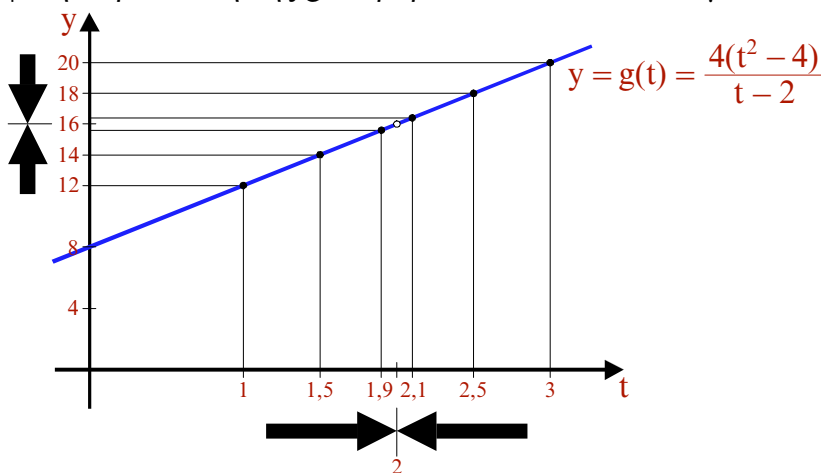
$$g(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2}$$

t	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1	2,5
g(t)	14	15,6	15,96	15,996	15,9996	16,0004	16,004	16,04	16,4	18

Παρατηρούμε ότι όσο το t πλησιάζει το $t_0 = 2$, οι τιμές της g τείνουν στην τιμή 16, είτε από δεξιά, είτε από αριστερά. Τότε θα λέμε ότι το όριο της g , όταν το t τείνει στο $t_0 = 2$, είναι ίσο με 16, και θα γράφουμε:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = 16$$

Η γραφική παράσταση της g επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα αυτό:



Επίσης παρατηρούμε ότι το σημείο $t_0 = 2$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Ωστόσο, μας είναι αδιάφορη η τιμή της g στο $t_0 = 2$, καθώς δεν παίζει κανένα ρόλο στη διαδικασία σύγκλισης της g προς το όριο. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι το πραγματικό παράδειγμα που μελετήσαμε εκφράζει το γνωστό αποτέλεσμα από τη Φυσική ότι το όριο της μέσης ταχύτητας $g(t)$, όταν το t τείνει στο $t_0 = 2$, είναι ίσο με τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική αυτή στιγμή.

Η έννοια ότι το x τείνει στο x_0 , δηλαδή ότι βρίσκεται αρκετά κοντά στο x_0 , εκφράζεται διαφορετικά λέγοντας ότι το x ανήκει σε μια **περιοχή** του x_0 , δηλαδή σε ένα ανοιχτό διάστημα της μορφής (α, x_0) , (x_0, β) ή και στην ένωσή τους $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Ορισμός: Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)^* \rightarrow \mathbb{R}$, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ όταν το x τείνει στο x_0 , αν οι τιμές της $f(x)$ βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στον αριθμό ℓ , όταν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0 (αλλά δεν γίνεται απαραίτητα ίσο με το x_0). Θα συμβολίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Η έννοια ότι οι τιμές της $f(x)$ βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στο όριο ℓ , σημαίνει ότι οι τιμές $f(x)$ ανήκουν σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του ℓ .

3.2. Ιδιότητες του Ορίου Συνάρτησης

Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε:

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell_1 \pm \ell_2$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\ell_2 \neq 0$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell_1|$
- (v) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \ell_1^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\ell_1}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$,
όπου η f είναι θετική σε μια περιοχή του x_0 .

* Το πεδίο ορισμού της f είναι φυσικά δυνατόν να είναι ευρύτερο του $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Για να δώσουμε έμφαση θα γράφουμε από εδώ και στο εξής το ελάχιστο δυνατό υποσύνολο που απαιτείται στους ορισμούς των ορίων μιας συνάρτησης.

3.3. Πλευρικά Όρια Συνάρτησης

Έγινε φανερό από τις ιδιότητες των ορίων ότι μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων, ακόμα και ριζικών, εφόσον διατηρούν σταθερό τύπο. Τι γίνεται όμως όταν η συνάρτηση την οποία μελετάμε είναι κλαδωτή, δηλαδή περιέχει περισσότερους από έναν τύπους γνωστών συναρτήσεων;

Παράδειγμα 1

Ένας εργαζόμενος κάνει την εξής συμφωνία με τον εργοδότη του: να πληρώνεται 1000 δραχμές την ώρα για τις πρώτες οκτώ ώρες εργασίας του και 1500 δραχμές την ώρα όταν κάνει υπερωρίες, δηλαδή όταν εργάζεται περισσότερο από οκτώ ώρες. Να βρεθεί η συνάρτηση f που εκφράζει το μισθό του εργαζομένου και να υπολογισθούν τα $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$.

Λύση

Ας ονομάσουμε x τις ώρες εργασίας του εργαζομένου. Τότε όταν $0 \leq x \leq 8$, δηλαδή στο πρώτο οκτάωρο εργασίας, οι αποδοχές του εργαζομένου θα είναι:

$$f(x) = 1000x \text{ δραχμές}$$

Για $x > 8$ θα έχουμε ότι οι αποδοχές του θα είναι $1500x$ δραχμές, αφαιρώντας όμως $8 \cdot 500 = 4000$ δραχμές, καθώς το πρώτο οκτάωρο δε χρεώθηκε στις υπερωρίες. Η συνάρτηση f του μισθού του εργαζομένου, θα έχει τη μορφή:

$$f(x) = \begin{cases} 1000x & \text{αν } 0 \leq x \leq 8 \\ 1500x - 4000 & \text{αν } 8 < x \leq 24 \end{cases}$$

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, είναι φανερό ότι εργαζόμαστε με τον πρώτο κλάδο της f , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (1000x) = 5000$$

Όμοια, για το $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$ εργαζόμαστε με το δεύτερο κλάδο της f και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} (1500x - 4000) = 9500$$

Όμως δε μπορούμε να εργασθούμε με έναν μόνο κλάδο για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$. Περιοριζόμαστε λοιπόν σε κάθε κλάδο ξεχωριστά και έχουμε:

$$(α) \text{ Για } x < 8: \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} (1000x) = 8000$$

$$(β) \text{ Για } x > 8: \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} (1500x - 4000) = 8000$$

Τα δύο αυτά όριο ονομάζονται **πλευρικά όρια** της f και για να τα διακρίνουμε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$ αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι το x τείνει (πλησιάζει) στο $x_0 = 8$ από τα αριστερά ($x \rightarrow x_0^-$), ενώ στη δεύτερη ότι το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά ($x \rightarrow x_0^+$).

Παράδειγμα 2

Ας μελετήσουμε και ένα παράδειγμα ορίου συνάρτησης σε σημείο στο οποίο τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά. Ας εξετάσουμε το όριο της συνάρτησης:

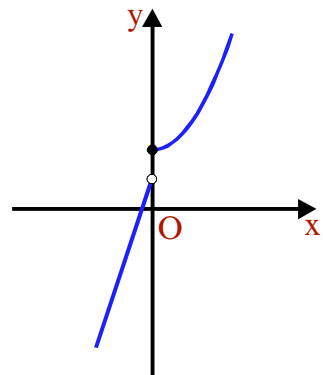
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & , \quad x < 0 \\ x^2 + 2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

στο $x_0 = 0$. Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 1) = 1$$

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



Είναι φανερό ότι το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει, αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά της όρια και είναι ίσα, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, όπου $\ell \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

Αν τα δυο πλευρικά όρια μιας συνάρτησης είναι διαφορετικά, τότε θα λέμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f , όταν το x τείνει στο x_0 .

3.4. Μη πεπερασμένο Όριο Συνάρτησης – Απροσδιόριστες Μορφές

Η έννοια του απείρου είναι γνωστή σε όλους μας, με την έννοια της απεριόριστης αύξησης $(+\infty)$ ή μείωσης $(-\infty)$ μιας ποσότητας. Στην περίπτωση του $+\infty$ η ποσότητα αυτή ξεπερνά οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό, ενώ για το $-\infty$ έχουμε ότι η ποσότητα είναι μικρότερη από οποιονδήποτε αρνητικό πραγματικό αριθμό.

Η διαδικασία της προσέγγισης του απείρου από μια συνάρτηση εκφράζεται με το όριο της συνάρτησης, το οποίο θα λέμε ότι είναι **μη πεπερασμένο**.

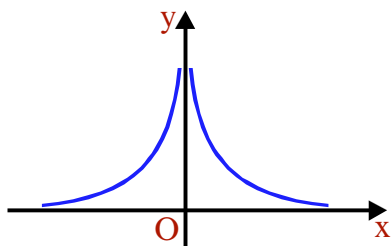
Παράδειγμα

Ας μελετήσουμε το όριο της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x^2}$, όταν το x τείνει στο 0.

x	-0,1	-0,001	-0,000001	0,000001	0,001	0,1
f(x)	100	10^6	10^{12}	10^{12}	10^6	100

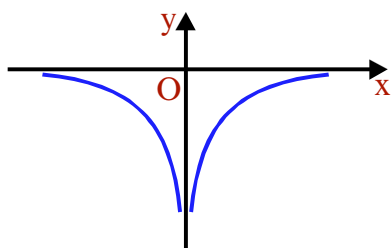
Είναι φανερό ότι καθώς το x τείνει στο 0, οι τιμές της $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M . Τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$



Όμοια για τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, έχουμε ότι οι τιμές της ελαττώνονται απεριόριστα όταν το x τείνει στο 0. Τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$



Ορισμός: (α) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: (α, x_0) \cup (x_0, β) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο x_0 , αν οι τιμές της $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα ξεπερνώντας κάθε θετικό πραγματικό αριθμό, καθώς το x πλησιάζει το x_0 .

(β) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: (α, x_0) \cup (x_0, β) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει όριο το $-\infty$ όταν το x τείνει στο x_0 , αν οι τιμές της $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα ώστε να γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό, καθώς το x πλησιάζει το x_0 .

• Επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο

Για να μπορούμε πλέον να κάνουμε πράξεις με μη πεπερασμένα όρια, θα πρέπει να γνωρίζουμε ποιες είναι οι δυνατές ή όπως λέμε **επιτρεπτές πράξεις**.

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

- (i) $x + \infty = +\infty, x - \infty = -\infty$
- (ii) Αν $x > 0$, τότε $x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$
- (iii) Αν $x < 0$, τότε $x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$
- (iv) $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$

Επιπλέον των παραπάνω πράξεων έχουμε και τις πράξεις μεταξύ του $(+\infty)$ και του $(-\infty)$ ως εξής:

- (i) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- (ii) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

Είναι σημαντική η παρατήρηση ότι δεν ορίζονται οι πράξεις:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot (\infty), (+\infty) + (-\infty)$$

οι οποίες καλούνται **απροσδιόριστες μορφές**.

• Μελέτη απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$ για ρητές συναρτήσεις

Στα όρια ρητών συναρτήσεων, συναντάμε συχνά την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, όταν έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0},$$

με $\alpha_v, \beta_\mu \neq 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0) = 0$$

Τότε ισοδύναμα έχουμε ότι το x_0 αποτελεί ρίζα των πολωνύμων $p(x)$, $q(x)$, δηλαδή τα p, q έχουν παράγοντα τον όρο $(x - x_0)$ υψωμένο σε κάποια δύναμη.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις, ταυτότητες, παραγοντοποιήσεις κ.λπ. θα απλοποιούμε τις δυνάμεις του $(x - x_0)$ από τον αριθμητή και τον παρονομαστή και κατόπιν θα εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}$.

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-3} = -1$.

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\frac{x^2 - 4}{(x-2)^3} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^3} = \frac{x+2}{(x-2)^2}$.

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x-2)^2} = +\infty$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8} = \frac{(x - 2)^2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 4}$.

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 4} = 0$.

- Μελέτη απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$ για ριζικά**

Όταν συναντάμε την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ σε συναρτήσεις που περιλαμβάνουν ριζικά, τότε συνήθως πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με κατάλληλες συζυγείς παραστάσεις (βλ. πίνακα).

Πίνακας Συζυγών Παραστάσεων

Αποτέλεσμα Γινομένου	Παράγοντας	Συζυγής Παράσταση
$x - a$	$\sqrt{x} - \sqrt{a}$	$\sqrt{x} + \sqrt{a}$
$x - a$	$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}$	$(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2$
$x - a$	$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}$	$(\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{a} + \dots + \sqrt[n]{x}(\sqrt[n]{a})^{n-2} + (\sqrt[n]{a})^{n-1}$

Παραδείγματα**Παράδειγμα 1**

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$.

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}.$

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}.$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]}{(x - 1)[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]} = \frac{x - 1}{(x - 1)[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}$$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}.$

3.5. Κατακόρυφη Ασύμπτωτη Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης στα σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της προσδιορίζεται άμεσα από τον τύπο της. Ωστόσο, στη μελέτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης συναντάμε ιδιαίτερο πρόβλημα στον προσδιορισμό της συμπεριφοράς της συνάρτησης, σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, αλλά υπάρχει περιοχή τους μέσα σε αυτό.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει γνωστή συμπεριφορά σε κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Για παράδειγμα: $f(-5) = -\frac{1}{5}$, $f(8) = \frac{1}{8}$ κ.ο.κ.

Ωστόσο, δε γνωρίζουμε πως συμπεριφέρεται κοντά στο σημείο $a = 0$, το οποίο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , αλλά υπάρχουν περιοχές του $a = 0$ και στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

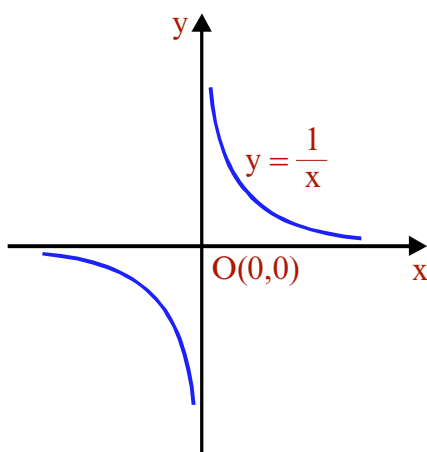
Είναι λογικό να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των τιμών της f , όταν το x τείνει στο $a = 0$. Φυσικά η μελέτη αυτή πρέπει να γίνει από τα δεξιά και από τα αριστερά. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι τιμές της f τείνουν στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο $a = 0$ από τα δεξιά, επομένως συμπεριφέρονται όπως η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$), χωρίς όμως η γραφική παράσταση της f να τέμνει την $x = 0$. Η συμπεριφορά αυτή της C_f λέγεται **ασυμπτωτική συμπεριφορά** και η ευθεία $x = 0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f , όταν το x τείνει στο $a = 0$ από τα δεξιά.

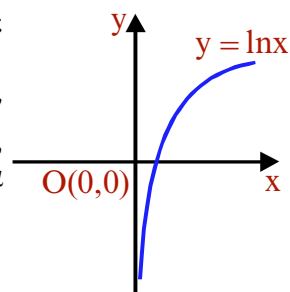
Όμοια η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και όταν το x τείνει στο $a = 0$ από τα αριστερά, με τη διαφορά ότι οι τιμές της f τείνουν στο $-\infty$.



Παράδειγμα 2

Ας μελετήσουμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \ln x$, ως προς τις κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Το μοναδικό σημείο στο οποίο θα εξετάσουμε αν η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι το $a = 0$, καθώς δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , αλλά υπάρχει περιοχή του $a = 0$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.



Προφανώς, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ δεν έχει νόημα η μελέτη για κατακόρυφες ασύμπτωτες, παρ'όλο που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f , αφού δεν υπάρχει περιοχή τους μέσα σε αυτό. Έτσι, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

οπότε η $x = 0$ είναι μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , όταν το x τείνει στο $a = 0$ από τα δεξιά.

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \notin A$, αλλά υπάρχει περιοχή του a στο A . Η ευθεία $x = a$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

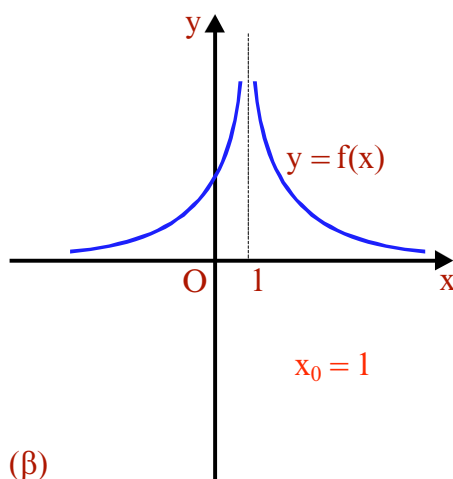
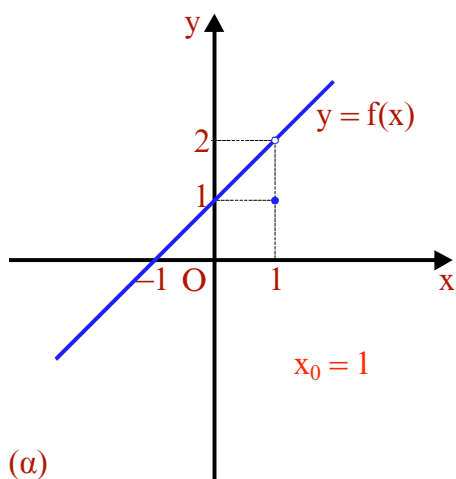
ή όταν:

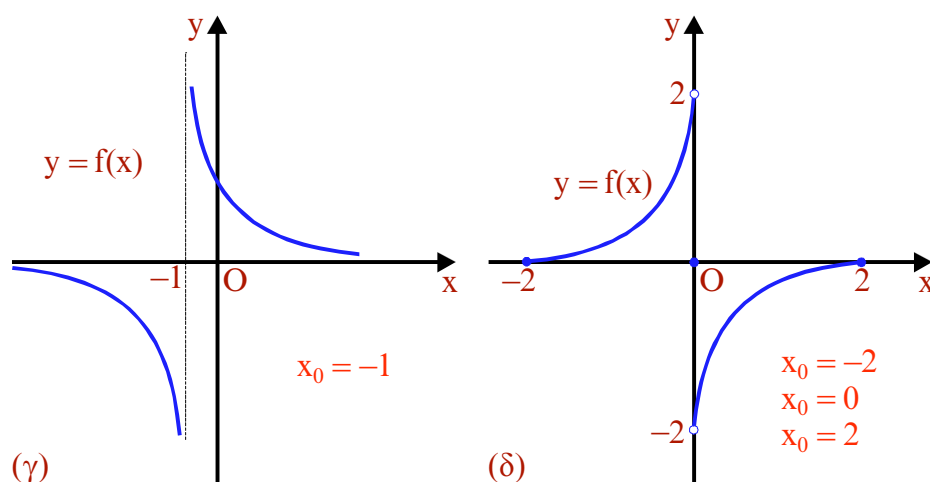
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Χρησιμοποιήστε τις επόμενες γραφικές παραστάσεις για να εκτιμήσετε τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όπου αυτά υπάρχουν και βρείτε την τιμή $f(x_0)$, όπου ορίζεται.





Λύση

- (α) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, f(1) = 1.$
- (β) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty,$ δεν ορίζεται $f(1).$
- (γ) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty,$ δεν υπάρχει $\lim_{x \rightarrow -1} f(x),$ δεν ορίζεται $f(-1).$
- (δ) (i) Δεν ορίζεται $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0, f(-2) = 0.$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2,$ δεν υπάρχει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(0) = 0.$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0,$ δεν ορίζεται $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0, f(2) = 0.$

Εφαρμογή 2



Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f κάθε φορά.

(α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)						

(β) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x^2, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)						

(γ) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)						

(δ) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)						

Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, όπου υπάρχει.

Λύση

(α)

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)	-0,19	-0,0199	-0,0019	0,0020	0,0201	0,21

Είναι φανερό πως καθώς το x πλησιάζει πάρα πολύ κοντά στο 1 οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν πάρα πολύ κοντά στο 0. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Παρατηρήστε ότι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(1) = 1$ δεν έχει σχέση με την προσέγγιση των τιμών της f πολύ κοντά στο 0.

(β)

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)	-0,19	-0,0199	-0,0019	2,0020	2,0201	2,21

Είναι φανερό πως καθώς το x πλησιάζει πάρα πολύ κοντά στο 1 από αριστερά οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν πολύ κοντά στο 0. Όταν όμως το x πλησιάζει πολύ κοντά στο 1 από δεξιά οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν πολύ κοντά στο 2. Επομένως εδώ δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(γ)

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)	100	1000	1000000	1000000	1000	100

Είναι φανερό πως καθώς το x πλησιάζει πολύ κοντά στο 0 οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα. Αυτό μας οδηγεί να αντιληφθούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

(δ)

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	-9	-99	-999	1001	101	11

Καθώς το x πλησιάζει πολύ κοντά στο 1 από αριστερά οι τιμές της συνάρτησης μειώνονται απεριόριστα. Αυτό μας οδηγεί να αντιληφθούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Όμοια όταν το x πλησιάζει το 1 από δεξιά οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα, άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

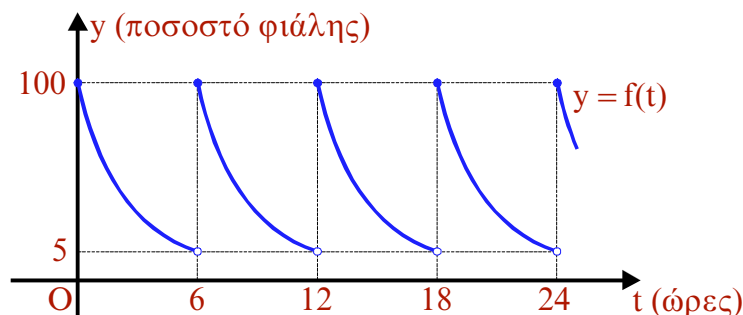
Εφαρμογή 3 (Χορήγηση ενδοφλεβίου διαλύματος)

Ένα διάλυμα δεξτρόζης χορηγείται σ' έναν ασθενή ενδοφλέβια. Η πρώτη φιάλη - φορείου που έχει το παραπάνω διάλυμα αφαιρείται και αντικαθίσταται από άλλη μόλις το περιεχόμενο πέφτει περίπου στο 5% του αρχικού (1 λίτρο) ποσού. Η εκροή του διαλύματος είναι συνεχής και χρειάζεται 6 ώρες για να διοχετευθεί το 95% του περιεχόμενου μιας πλήρους φιάλης στον ασθενή.

- (α) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(t)$ όπου t χρόνος και y το ποσοστό το διαλύματος δεξτρόζης σε μια φιάλη, για μια περίοδο πάνω από 24 ώρες, υποθέτοντας ότι η χορήγηση ξεκινά με γεμάτη φιάλη.
- (β) Υπολογίστε τα $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(t)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(t)$. Τι παρατηρείτε; Πώς το ερμηνεύετε;

Λύση

(α)



Είναι φανερό πως από το 100% του περιεχόμενου η εκροή φθάνει στο 95%, στη φιάλη μένει περίπου 5% και τότε αλλάζουμε φιάλη. Αυτό συμβαίνει κατά τον ίδιο τρόπο κάθε 6 ώρες.

- (β) Από τη γραφική παράσταση καταλαβαίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(t) = 5$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(t) = 100$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} f(t)$, όπως επίσης δεν υπάρχουν τα όρια στις χρονικές στιγμές $t = 12, 18, 24$ κ.λπ. Αυτό ερμηνεύεται από τη γραφική παράσταση, λόγω αλλαγής φιάλης.

Εφαρμογή 4

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

(β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 3x + 2}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1}$

Λύση

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) = 4 - 10 + 6 = 0$

Άρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4$.

(β) Όμοια έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

Έστω $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{x-3}{(x-1)^2}$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$.

(γ) Όμοια έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \text{'Εστω } f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ &= \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}. \\ \text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt[3]{x}) = 1 - \sqrt[3]{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) = \sqrt{1} - 1 = 0$$

'Αρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \text{'Εστω } f(x) &= \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(1 - \sqrt[3]{x})[1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2](\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)[1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2]} = \\ &= \frac{(1 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = - \frac{\sqrt{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}. \\ \text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(- \frac{\sqrt{x} + 1}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} \right) = - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Εφαρμογή 5

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = \frac{\lambda}{x^2}$, $\lambda \in (0, +\infty)$, $x \neq 0$.

(α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν υπάρχουν.

(β) Ποιάς μορφής απροσδιοριστία βρίσκουμε όταν αναζητούμε το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)]$;

(γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (0, +\infty)$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)]$.

Λύση

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda}{x^2} = +\infty$, αφού $\lambda > 0$.

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = (+\infty) - (+\infty)$ απροσδιοριστία.

$$(\gamma) \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\lambda}{x^2} = \frac{1-\lambda}{x^2}$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\lambda}{x^2} = (1-\lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = (1-\lambda)(+\infty).$$

$$(i) \quad \text{Αν } 1-\lambda > 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = +\infty.$$

$$(ii) \quad \text{Αν } 1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = -\infty.$$

$$(iii) \quad \text{Αν } 1-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ τότε } f(x) - g(x) = \frac{1-1}{x^2} = 0 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Εφαρμογή 6

Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων, αν βέβαια υπάρχουν. Σ' αυτές που υπάρχουν να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση.

$$(\alpha) \quad f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x} \qquad (\beta) \quad f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad x > 0 \\ x^2 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι για να έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει κάποιο από τα $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

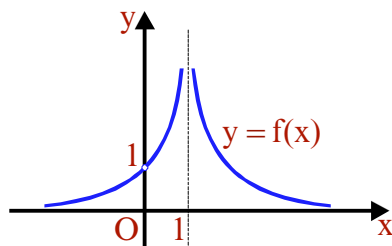
να είναι $(+\infty)$ ή $(-\infty)$. Η αναζήτηση των ασυμπτώτων γίνεται στα σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού τους, αλλά υπάρχει περιοχή τους μέσα σ' αυτό.

(α) Η συνάρτηση f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

με $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$.



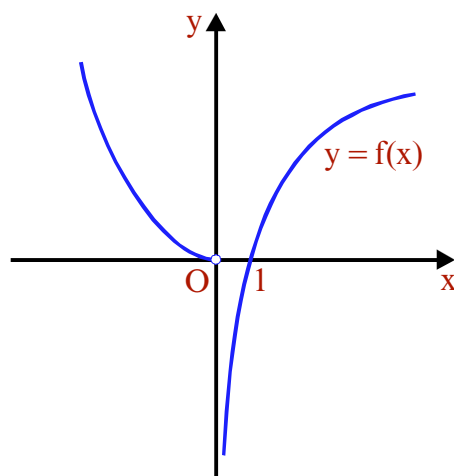
- Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ δεν παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$.

- Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της f .

(β) Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο $x_0 = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$,

ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$, έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.



Εφαρμογή 7

Σε μια πόλη ο κεντρικός αγωγός νερού βρέθηκε πρόσφατα μολυσμένος με τριχλωροαιθυλένη, ένα επικίνδυνο χημικό παράγωγο, ως αποτέλεσμα ενός εγκαταλελειμένου χημικού εργοστασίου του οποίου τα απόβλητα έπεφταν πολύ κοντά στον αγωγό νερού της πόλης. Ένας προϋπολογισμός που έγινε από μια εταιρεία για να καθαρίσει τον κεντρικό αγωγό νερού έδειξε ότι, για τη συλλογή $x\%$ (τοις εκατό) της τοξικής αυτής ουσίας, το κόστος δίνεται από τη συνάρτηση

$K(x) = \frac{0,5x}{100 - x}$ σε εκατοντάδες εκατομμύρια δραχμές.

(α) Βρείτε το κόστος για τη συλλογή 50%, 80%, 90%, 99% της τοξικής αυτής ουσίας.

(β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 100^-} K(x)$.

(γ) Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα.

Λύση

(α) Ο επόμενος πίνακας μας δείχνει το κόστος σε εκατοντάδες εκατομμύρια:

x	50	80	90	99
K(x)	0,5	2	4,5	49,5

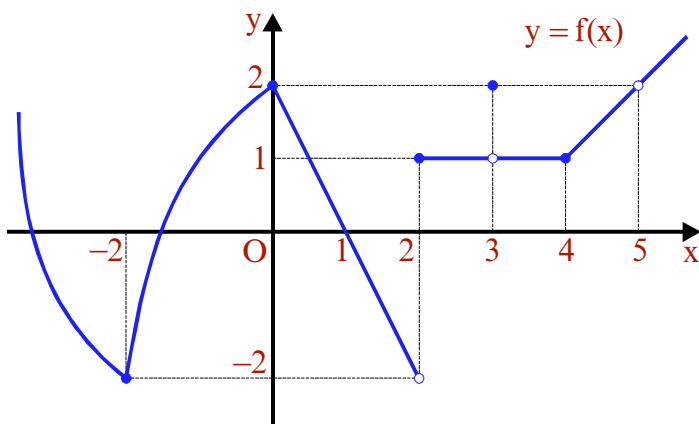
$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 100^-} K(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{0,5x}{100 - x} = \lim_{x \rightarrow 100^-} 0,5x \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{1}{100 - x} = 50(+\infty) = +\infty$$

(γ) Είναι φανερό ότι για τη συλλογή του μεγαλύτερου μέρους αυτής της τοξικής ουσίας έως και 90% το κόστος αυξάνει άλλα σε λογικά πλαίσια (από 50 εκατομμύρια έως 450 εκατομμύρια). Κατόπιν υπάρχει απότομη αύξηση και για το 99% απαιτούνται περίπου 5 δις (ακριβώς 4950 εκατομμύρια). Στη συνέχεια το κόστος παίρνει απότομες διαστάσεις.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

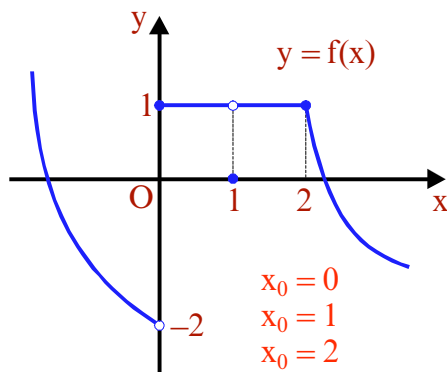
Άσκηση 1

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , που φαίνεται στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αν φυσικά υπάρχει, για $x_0 = -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



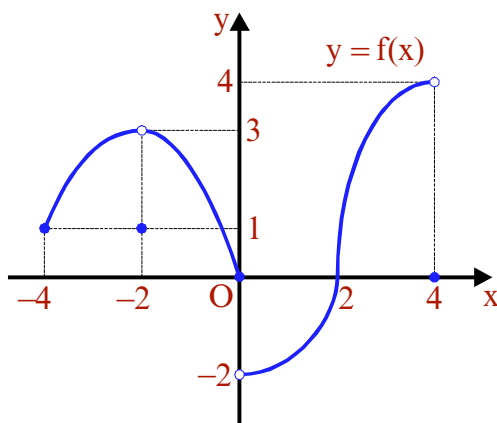
Άσκηση 2

Χρησιμοποιήστε τη διπλανή γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε (υπολογίσετε) τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ στα δοσμένα σημεία.



Άσκηση 3

Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $[-4, 4]$ και γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ). Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



(α) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 1$

(β) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

(στ) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 4$

(ζ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

Άσκηση 4

Αφού χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \leq 0 \\ x - 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$

να εκτιμήσετε τα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, αν αυτά υπάρχουν. Επίσης, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές $f(0)$, $f(1)$.

Άσκηση 5

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f . Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f , αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = x^2 - 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)						

$$(\beta) f(x) = \frac{|x|}{x} + 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

x	0,1	0,01	0,001	-0,001	-0,01	-0,1
f(x)	2					0

$$(\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)		0,5012				0,4880

$$(\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , x > 1 \\ -x^2 + 1 & , x \leq 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)						

Άσκηση 6

Αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 4$ υπολογίστε τα παρακάτω:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{10g(x)}{f(x)}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2f(x) + 5g(x)}{f(x) \cdot g(x)}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x) + 5g(x)}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{\frac{1}{2g(x)}}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x) + \sqrt{g(x)}}$$

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} (x^{-3} - 3x^{-2} + 5x^3)$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} [(1 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})]$$

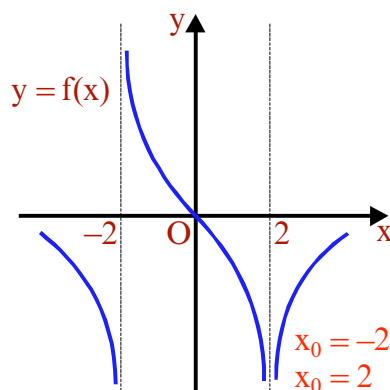
$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 4}{x^2 - 3x + 4}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x+1}$$

Άσκηση 8

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f . Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) τα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$



Άσκηση 9

Σε ποιές από τις προηγούμενες περιπτώσεις της άσκησης 8 παρουσιάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; Ποιά είναι η εξίσωση της ασύμπτωτης, όπου υπάρχει αυτή;

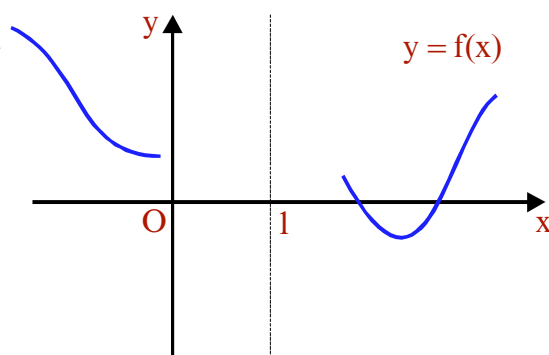
Άσκηση 10

Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διπλανό σχήμα, ώστε να ισχύει:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$



Άσκηση 11



Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f . Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f , αν αυτό υπάρχει.

$$(\alpha) f(x) = -\frac{10}{|x|}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)	-100		-10000		-1000	

$$(\beta) f(x) = \frac{x+10}{x-2}, \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)	-119			12001		

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{2 - \sqrt{x}}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2x+1| - 3}{x - 3}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + |x|}{(x+1)|x|}$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + 2 & , \quad x \leq a \\ x^2 - 1 & , \quad x > a \end{cases}$$

Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - \alpha & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + \alpha + 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Κατόπιν να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Άσκηση 6

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{\sqrt{x} - 4}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^3+2x}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{|1-x|}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{x^3-3x-2}$$

Άσκηση 7

Βρείτε τις περιπτώσεις όπου υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και γράψτε την εξίσωσή της στις συναρτήσεις της άσκησης 6.

Πρακτικές Εφαρμογές**Άσκηση 1**

Τα τέλη αποστολής μεμονωμένων δεμάτων όταν πρόκειται για δέματα εσωτερικού που αποστέλλονται από τα Ελληνικά Ταχυδρομεία δίνονται από το γράφημα της "ταχυδρομικής συνάρτησης":

$$f(x) = \begin{cases} 450 & 0 < x \leq 1 \\ 550 & 1 < x \leq 3 \\ 700 & 3 < x \leq 5 \\ 850 & 5 < x \leq 7 \\ 1050 & 7 < x \leq 9 \end{cases}$$

όπου x είναι το βάρος ενός πακέτου σε Kgr (κιλά) και $f(x)$ η αξία σε δραχμές.

- (α) Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε σύστημα αξόνων xOy όπου στον άξονα Ox η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε κιλό και στο Oy η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε εκατοντάδα δρχ.
- (β) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ και να τις συγκρίνετε με τα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$.
- (γ) Υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$;

Άσκηση 2

Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου είδους τρωκτικών που αναπαράγονται σ' ένα απομονωμένο νησί δίνεται από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{720}{9-t}$, $0 \leq t < 9$ όπου ο χρόνος t μετριέται σε μήνες.

- (α) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών στο νησί σε χρόνο $t = 0$, δηλαδή από τότε που αρχίζουμε να παρατηρούμε την αναπαραγωγή τους. Τι εκφράζει αυτός ο αριθμός;
- (β) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών μετά 1, 3, 5, 8 μήνες.
- (γ) Δείξτε ότι ο πληθυσμός των τρωκτικών αυξάνεται απεριόριστα καθώς ο χρόνος πλησιάζει στους 9 μήνες.

Άσκηση 3

Στην περιβαλλοντική επιστήμη συχνά μελετάμε τη διασπορά διαφόρων ρύπων σε οικοσυστήματα. Αρκετά απ' αυτά τα μοντέλα είναι μοντέλα "άπειρης αραίωσης" όπως π.χ. ίχνη SO_2 στην ατμόσφαιρα. Για να μελετήσουμε τη διασπορά αυτή χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συνάρτηση (συντελεστής ενεργότητας α) της συγκέντρωσης x_1 , x_2 των συστατικών ρύπου – ατμόσφαιρας αντίστοιχα:

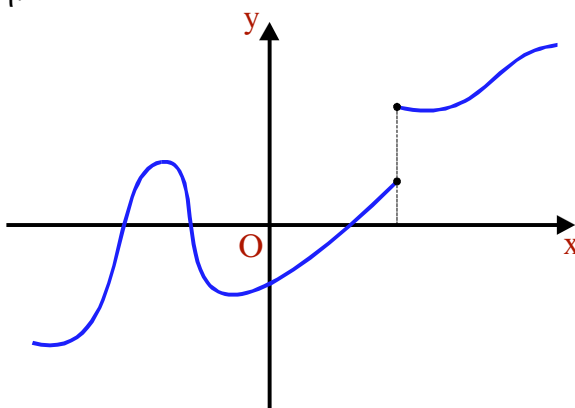
$$\ln \alpha = \ln \frac{\varphi_1}{x_1} + 1 - \frac{\varphi_1}{x_1}$$

όπου $\varphi_1 = \frac{x_1 V_1}{x_1 V_1 + x_2 V_2}$ και V_1 , V_2 οι όγκοι των δύο συστατικών, δηλαδή του ρύπου και της ατμόσφαιρας αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή α σε άπειρη αραίωση, δηλαδή το $\lim_{x_1 \rightarrow 0} (\ln \alpha)$, αν γνωρίζετε ότι $x_1 + x_2 = 1$.

3.6. Η έννοια της Συνεχούς Συνάρτησης

Η έννοια της συνεχούς συνάρτησης δεν είναι τόσο οικεία, όσο η έννοια μιας συνεχούς γραμμής ή καμπύλης. Είναι λογικό να συνδέσουμε τις δύο αυτές έννοιες συνέχειας, αφού οι περισσότερες γραφικές παραστάσεις συνάρτησης αποτελούνται από ευθείες και καμπύλες. Ωστόσο, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης είναι πιο πολύπλοκη από αυτή μιας συνεχούς γραμμής.

Αν, καθώς χαράσσουμε μια γραμμή, σηκώσουμε το μολύβι μας και συνεχίσουμε από κάποιο άλλο σημείο, τότε αυτόματα έχουμε μια ασυνεχή γραμμή.



Το αν είναι ασυνεχής μια αντίστοιχη συνάρτηση εξαρτάται και από την προσεκτική μελέτη του πεδίου ορισμού της. Όπως καταλαβαίνουμε η συνέχεια είναι τοπική ιδιότητα, δηλαδή μελετάται γύρω από κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, επομένως θα πρέπει το σημείο αυτό να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Επιπλέον, η συνέχεια της f σε ένα σημείο εκφράζει ότι η "συμπεριφορά" των γειτονικών σημείων είναι η "αναμενόμενη", δηλαδή δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές στη γραφική παράσταση της f .

Η συνέχεια της f σε ένα σημείο x_0 εξασφαλίζεται με τρεις προϋποθέσεις:

- (i) Το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $f(x_0)$.
- (ii) Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, δηλαδή τα δύο πλευρικά όρια της f , όταν $x \rightarrow x_0$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσα.
- (iii) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ορισμός (Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο):

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 , αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Παραδείγματα

Στα ακόλουθα παραδείγματα θα μελετήσουμε όλες τις μορφές ασυνέχειας που μπορεί να παρουσιάσει μια συνάρτηση.

Παράδειγμα 1

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το $x_0 = 1$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και ότι $f(1) = 1^2 = 1$.

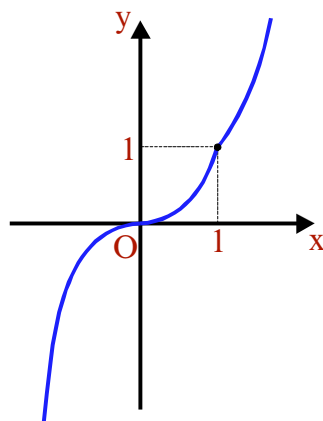
Εξετάζουμε αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, βρίσκοντας τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

Άρα υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και μάλιστα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$.

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

**Παράδειγμα 2**

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$. Παρατηρούμε ότι:

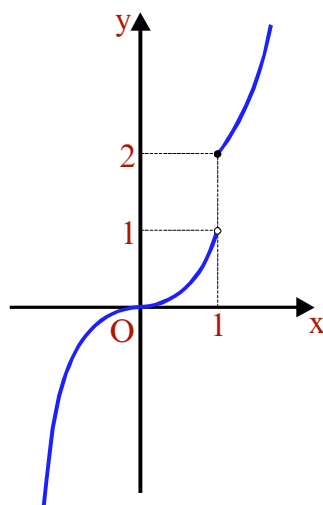
$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

Έχουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Επομένως η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$.

Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 = f(1)$, δηλαδή ότι ο δεξιός κλάδος της C_f είναι "συνεχής". Θα λέμε τότε ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$, συνεχής από δεξιά.



Παράδειγμα 3

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

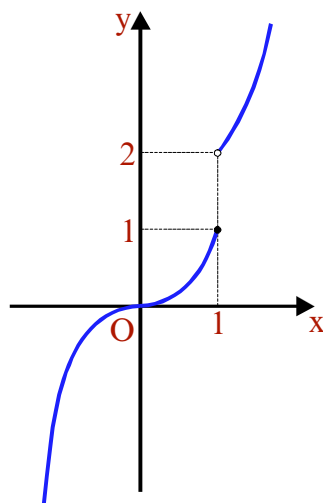
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \leq 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$. Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

οπότε η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$, και αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα συνεχής από αριστερά.



Παράδειγμα 4

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

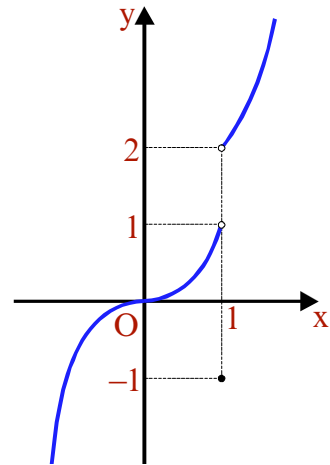
στο σημείο $x_0 = 1$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Επομένως η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$.

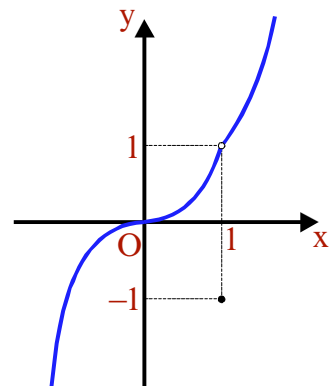


Παράδειγμα 5

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \\ x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$. Έχουμε ότι $f(1) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, ωστόσο η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.

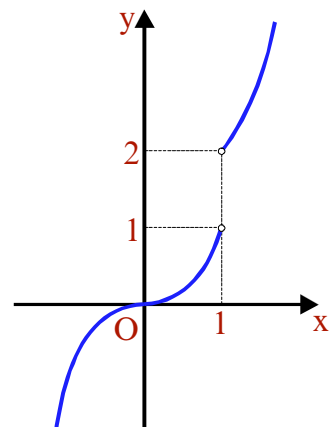


Παράδειγμα 6

Η συνάρτηση:

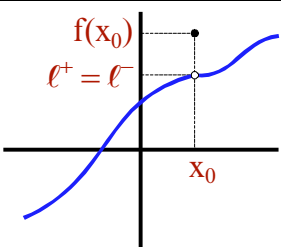
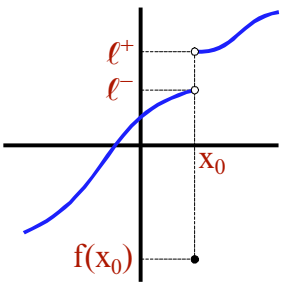
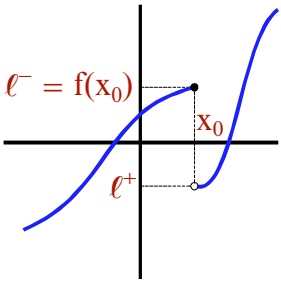
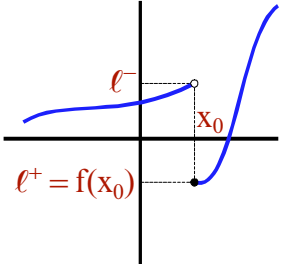
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

δε μπορεί να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 1$, καθώς αυτό δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.



• Σημεία ασυνέχειας

Συνοψίζοντας τα εποπτικά αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων μπορούμε να δούμε όλα τα είδη των σημείων ασυνέχειας μιας συνάρτησης. Θέτουμε $\ell^+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και $\ell^- = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Γραφική Παράσταση της f	Μελέτη Συνέχειας	Χαρακτηρισμός
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ • $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 5)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 4)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$ • Ισχύει ότι $\ell^- = f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0 , συνεχής από αριστερά (Παράδειγμα 3)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$ • Ισχύει ότι $\ell^+ = f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0 , συνεχής από δεξιά (Παράδειγμα 2)

3.7. Συνέχεια Συνάρτησης σε Διάστημα

Θα στρέψουμε τώρα τη μελέτη μας – αφού τονίσαμε την τοπική φύση της συνέχειας – σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα. Ο ορισμός της συνέχειας σε ανοιχτό διάστημα ή σε ένωση ανοιχτών διαστημάτων είναι απλός:

Ορισμός 1: Μια συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο διάστημα (a, β) αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, \beta)$.

Η έννοια της συνέχειας σε κλειστό διάστημα είναι περισσότερο πολύπλοκη καθώς πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τι συμβαίνει στα άκρα του:

Ορισμός 2: Μια συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, \beta)$ και επιπλέον έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

3.8. Συνέχεια Βασικών Συναρτήσεων

Οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς, δηλαδή:

1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = c$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = c = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = x_0 = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = x_0^v = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x^v}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \frac{1}{x_0^v} = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

5. Η πολωνομική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ με } a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq v.$$

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6. Η ρητή συνάρτηση $f: \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\mathbb{R}' = \{x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0\}$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}'$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}'$.

7. Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^a$, $a > 0$.

Για κάθε $x_0 \geq 0$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = x_0^a = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

8. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x^a}$, $a > 0$.

Για κάθε $x_0 > 0$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \frac{1}{x_0^a} = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

9. Η εκθετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a^{x_0} = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

10. Η λογαριθμική συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$.

Για κάθε $x_0 > 0$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \log_a x_0 = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

11. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, με $f(x) = \eta \mu x$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \eta \mu x_0 = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

12. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, με $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sigma \upsilon \nu x_0 = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \epsilon \phi x$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \epsilon \phi x_0 = f(x_0),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

14. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{ \kappa \pi, \kappa \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \sigma \phi x$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \{ \kappa \pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sigma \phi x_0 = f(x_0),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

3.9. Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A$, τότε

- (i) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (ii) Η συνάρτηση $h(x) = \kappa \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 , για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
- (iii) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (iv) Αν $g(x_0) \neq 0$, η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (v) Η συνάρτηση $h(x) = |f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (vi) Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[\kappa]{f(x)}$ με $f(x) \geq 0$ είναι συνεχής στο x_0 .

Επίσης, έχουμε ότι και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση:

Θεώρημα

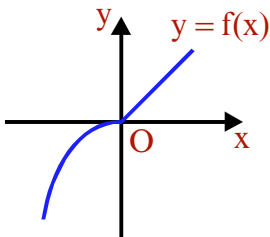
Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g στο $f(x_0) \in B$, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 .

Εφαρμογές

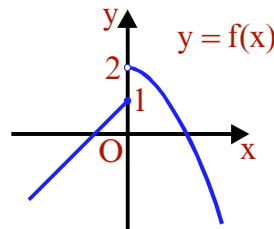
Εφαρμογή 1

Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και οι τύποι μερικών συναρτήσεων, από τις οποίες κάποιες είναι συνεχείς και κάποιες ασυνεχείς. Βρείτε τις τιμές του x που παρουσιάζεται ασυνέχεια της συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε γιατί υπάρχει ασυνέχεια.

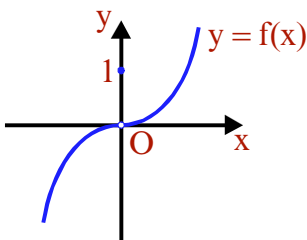
$$(\alpha) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x \leq 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases}$$



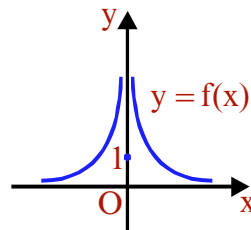
$$(\beta) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \leq 0 \\ -x^2+2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$



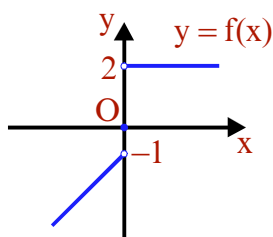
$$(\gamma) \quad f(x) = \begin{cases} x|x| & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$



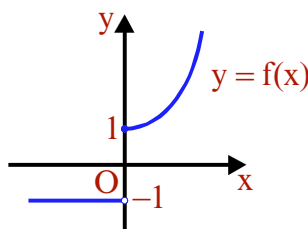
$$(\delta) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$



$$(\varepsilon) f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$



$$(\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$



Λύση

- (α) Η f είναι συνεχής.
- (β) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Εδώ αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$ λέμε ότι είναι συνεχής μόνο από αριστερά του 0.
- (γ) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί παρόλο που υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ δε συμπίπτει με την αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(0) = 1$.
- (δ) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και γνωρίζουμε ότι για να είναι συνεχής πρέπει απαραίτητα το όριο να είναι πραγματικός αριθμός.
- (ε) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Επομένως ούτε δεξιά, ούτε αριστερά του 0 είναι συνεχής.
- (στ) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Εδώ αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$ λέμε ότι είναι συνεχής μόνο από δεξιά του 0.

Εφαρμογή 2



Βρείτε τον πίνακα τιμών και εκτιμήστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο δοσμένο σημείο:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0 \\
 (\beta) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0 \\
 (\gamma) \quad f(x) &= \begin{cases} x + 1 & , \quad x > 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ x - 1 & , \quad x < 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 1
 \end{aligned}$$

Λύση

(α)	x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
	f(x)	-0,01	-0,0001	-0,000001	0	0,000001	0,0001	0,01

Είναι φανερό ότι οι τιμές δεξιά και αριστερά του $x_0 = 0$ προσεγγίζουν την αριθμητική τιμή της f για $x = 0$, δηλαδή $f(0) = 0$. Άρα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, επομένως συνεχής η f στο 0.

(β)	x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
	f(x)	10	1000	100000	0	0,000001	0,0001	0,01

Είναι φανερό ότι οι τιμές της συνάρτησης αριστερά του $x_0 = 0$ μεγαλώνουν απεριόριστα ενώ δεξιά του $x_0 = 0$ πλησιάζουν προς το 0. Δηλαδή έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ και $f(0) = 0$. Επομένως η f είναι ασυνεχής στο 0. Λέμε ότι είναι συνεχής στο 0 μόνο από δεξιά.

(γ)	x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
	f(x)	-0,1	-0,01	-0,001	1	2,001	2,01	2,1

Καθώς το x πλησιάζει το 1 από αριστερά οι τιμές της συνάρτησης είναι αρνητικές αλλά συνεχώς μεγαλώνουν και πλησιάζουν το 0. Όταν όμως το x πλησιάζει το 1 από δεξιά οι τιμές της συνάρτησης προσεγγίζουν τον αριθμό 2. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Επιπλέον $f(1) = 1$, άρα η f δεν είναι συνεχής ούτε δεξιά ούτε αριστερά του $x_0 = 1$.

Εφαρμογή 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & , \quad 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- (α) Υπάρχουν τα όρια της f στα σημεία με τετμημένη $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$;
 (β) Σε ποιά από τα προηγούμενα σημεία είναι συνεχής η f ;

Λύση

(α) (1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$
 Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{x-1} = 2$

- (β) (1) Αφού $f(1) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
 (2) Αφού $f(2) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, η f είναι συνεχής στο $x_1 = 2$.
 (3) Αφού $f(5) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2$, η f είναι συνεχής στο άκρο του διαστήματος $(0, 5]$, δηλαδή στο $x_2 = 5$.

Εφαρμογή 4

Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 4x + a & , \quad x < 1 \\ a^2 x^2 - 2x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ όπου:

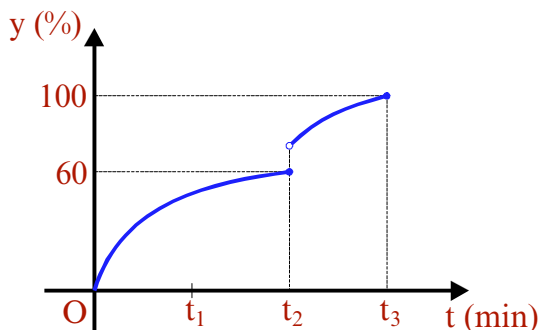
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + a) = 4 + a \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a^2 x^2 - 2x) = a^2 - 2.$$

Επίσης $f(1) = a^2 - 2$.

Άρα $a^2 - 2 = 4 + a \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ ή } a = 3$.

Εφαρμογή 5 (Μαθησιακές Καμπύλες)

Η διπλανή γραφική παράσταση περιγράφει την πρόοδο που έκανε κάποιος μαθητής για να λύσει σωστά ένα Μαθηματικό πρόβλημα. Εδώ το y μας δείχνει το ποσοστό (%) της ολοκληρωμένης εργασίας του μαθητή και το t μας δείχνει το χρόνο σε λεπτά (min).



- (α) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.
 (β) Δικαιολογήστε γιατί η συνάρτηση είναι ασυνεχής στη θέση t_2 .
 (γ) Τι συμβαίνει στη θέση t_3 ;

Λύση

- (α) Στη γραφική παράσταση φαίνεται, ότι ο μαθητής, στο $1/3$ περίπου του συνολικού χρόνου που αφιέρωσε για να ολοκληρώσει την επίλυση του προβλήματος, έχει αντιμετωπίσει σωστά το 50% του προβλήματος. Επομένως, η πρόοδος είναι σημαντική. Στο επόμενο $1/3$ του συνολικού χρόνου η πρόοδος μειώνεται αισθητά, ίσως γιατί κουράστηκε πνευματικά ο μαθητής, ίσως γιατί η δυσκολία του προβλήματος αυξάνεται και σ' αυτό το χρόνο αντιμετωπίζει το 10% του προβλήματος. Στο τελευταίο $1/3$ του συνολικού χρόνου η πρόοδος είναι πάλι σημαντική μέχρι την ολοκλήρωση της επίλυσης του προβλήματος.
- (β) Στη χρονική στιγμή t_2 η πρόοδος του μαθητή διακόπτεται και αυξάνεται απότομα γιατί σ' εκείνο το συγκεκριμένο λεπτό ο μαθητής ξεπερνά τη δυσκολία του προβλήματος (λύνει ουσιαστικά το πρόβλημα) και στη συνέχεια το ολοκληρώνει.
- (γ) Στη θέση t_3 έχει ολοκληρώσει πλέον την εργασία του (100% του προβλήματος).

Εφαρμογή 6

Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι επόμενες συναρτήσεις. Γι' αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 1} & , \quad x \neq -1 \\ 1 & , \quad x = -1 \end{cases} & (\beta) \quad f(x) &= \begin{cases} \sin x & , \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \eta \mu x & , \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
 (\gamma) \quad f(x) &= \ln|x| & (\delta) \quad f(x) &= \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Λύση

(α) Όταν $x \neq -1$ η $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων (πολυωνυμικών).

$$\text{Στο } x_0 = -1, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1.$$

Επίσης $f(-1) = 1$, άρα η f ασυνεχής στο $x_0 = -1$.

(β) Όταν $x \in [0, \frac{\pi}{4})$ η $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής.

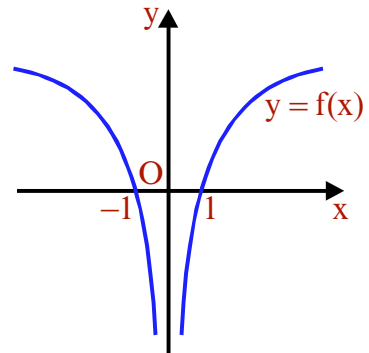
Όταν $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ η $f(x) = \eta \mu x$ είναι συνεχής.

$$\text{Στο } x_0 = \frac{\pi}{4}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (\sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και}$$

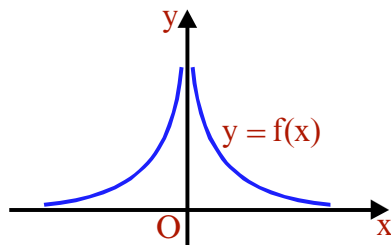
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} (\eta \mu x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Άρα συνεχής σε όλο το $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(γ) Η f είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, της $g(x) = \ln x$ και της $\varphi(x) = |x|$. Επομένως είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



- (δ) Όμοια η f είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



Σημείωση: Άλλο συνεχείς γραμμές και άλλο συνεχείς συναρτήσεις. **Προσοχή!!** Πολλά εξαρτώνται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Εφαρμογή 7

- (α) Υποθέστε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η g είναι ασυνεχής στο x_0 .
- Είναι το άθροισμα $f + g$ ασυνεχής στο x_0 ; Δικαιολογήστε.
 - Είναι το γινόμενο $f \cdot g$ ασυνεχής στο x_0 ; Δικαιολογήστε.
- (β) Υποθέστε τώρα ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στο σημείο x_0 .
- Είναι το άθροισμα $f + g$ ασυνεχής στο x_0 ;
 - Είναι το γινόμενο $f \cdot g$ ασυνεχής στο x_0 ;
- Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας με τη βοήθεια παραδειγμάτων.

Λύση

- (α) (i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma(x) = f(x) + g(x)$. Αν υποθέσουμε ότι είναι συνεχής στο x_0 τότε η $g(x) = \sigma(x) - f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 ως διαφορά συνεχών, άτοπο.
Άρα $\sigma(x) = f(x) + g(x)$ ασυνεχής στο x_0 .
- (ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$. Υποθέτουμε ότι είναι συνεχής στο x_0 , τότε η $g(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ θα είναι συνεχής στο x_0 , αν $f(x_0) \neq 0$, ως πηλίκο συνεχών πράγμα άτοπο.
Άρα $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ ασυνεχής στο x_0 .
- !! Τι γίνεται όμως αν $f(x_0) = 0$;** Δίνουμε τρία παραδείγματα με τρία διαφορετικά αποτελέσματα:

$$\bullet \quad f(x) = x^2, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε } \varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

με $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ και $\varphi(0) = 0$, άρα συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\bullet \quad f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε } \varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

με $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$ και $\varphi(0) = 0$, άρα ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\bullet \quad f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε } \varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

η οποία δεν έχει όριο όταν $x \rightarrow 0$, επομένως πάλι ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

!! Είναι φανερό ότι δε μπορούμε να απαντήσουμε με σιγουριά στο ερώτημα (ii) όταν $f(x_0) = 0$.

(β) Δε γνωρίζουμε αν οι συναρτήσεις $f + g$ και $f \cdot g$ είναι ασυνεχείς στο x_0 , αφού για παράδειγμα οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

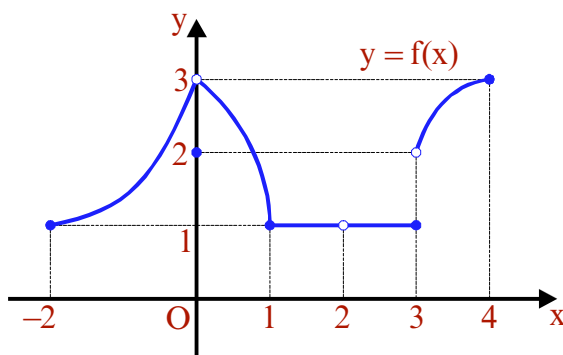
είναι ασυνεχείς στο $x_0 = 0$, όμως οι $(f + g)(x) = 1$ και $(f \cdot g)(x) = 0$ είναι συνεχείς στο 0 (και όχι μόνο σ' αυτό το σημείο) ως σταθερές συναρτήσεις.

Σημείωση: Κατασκευάστε δικά σας παραδείγματα ασυνεχών συναρτήσεων f και g στο x_0 με ασυνεχές άθροισμα $f + g$ και γινόμενο $f \cdot g$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Άσκηση 2

Στις επόμενες συναρτήσεις να ελέγξετε τη συνέχεια στην τιμή του x που αλλάζει τύπο η συνάρτηση. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας να σημειώσετε **ποιές προϋποθέσεις** του ορισμού συνέχειας παραβιάζονται.

$$(α) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , \quad x \leq 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

$$(β) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & , \quad x \geq 1 \\ 2 + \sqrt{x} & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$(γ) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , \quad x \neq -1 \\ 1 & , \quad x = -1 \end{cases}$$

$$(δ) f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 2 \\ \frac{1}{|x - 2|} & , \quad x \neq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad 0 < x < 2 \\ x^3 - 3 & , \quad 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(α) Υπάρχουν τα όρια της f στα σημεία με τετμημένη $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ και $x_2 = 5$;

(β) Σε ποιά από τα προηγούμενα σημεία είναι συνεχής η f ;

Άσκηση 4

Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι επόμενες συναρτήσεις. Για αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

$$(\alpha) f(x) = 5x^2 - x + 4$$

$$(\beta) f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$(\gamma) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$(\delta) f(x) = \begin{cases} -x + 1 & , \quad x < 0 \\ e^x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Βρείτε τις τιμές του a που κάνουν την f συνεχή στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της.

$$(\alpha) f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \quad x \leq 1 \\ ax^2 - a^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

$$(\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & , \quad x \neq -2 \\ a & , \quad x = -2 \end{cases}$$

Άσκηση 2

Να δικαιολογήσετε γιατί οι επόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

$$(\alpha) f(x) = \eta\mu \frac{1}{x^2}$$

$$(\beta) f(x) = e^{x^2-1}$$

Άσκηση 3

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ είναι ορισμένη για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και σ' αυτό το σύνολο είναι συνεχής. Μπορείτε να την ορίσετε κατάλληλα στο σημείο $x_0 = 0$ ώστε να είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$;

Άσκηση 4

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

(α) Υπολογίστε την τιμή $f(1)$ και μετά παραγοντοποιήστε τη διαφορά $f(x) - f(1)$.

(β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, αν βέβαια αυτό υπάρχει.

(γ) Αν πάρουμε τιμές του x πολύ κοντά στο 1, όπως:

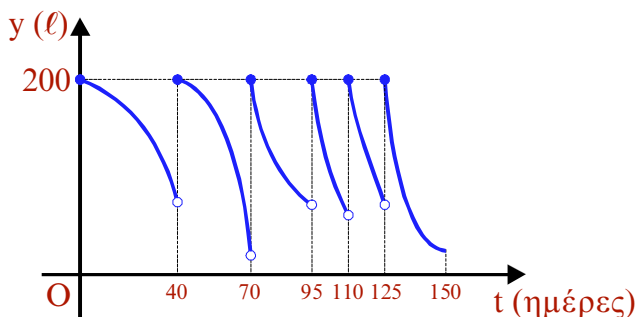
$$x \in (1 - \frac{1}{10}, 1) \cup (1, 1 + \frac{1}{10}) \quad \text{ή αλλιώς} \quad \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}, x \neq 1$$

τότε να αποδείξετε ότι $|f(x) - f(1)| < \frac{12}{100}$.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1 (Πρόβλημα Κατανάλωσης)

Η διπλανή γραφική παράσταση δείχνει την ποσότητα πετρελαίου θέρμανσης σε μια δεξαμενή 200 λίτρων (ℓ) που υπάρχει σε μια πολυκατοικία για μια περίοδο 150 ημερών. Αν θεωρήσουμε ότι $t = 0$ αντιστοιχεί στην αρχή Νοεμβρίου.



- (α) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.
- (β) Εξηγήστε γιατί η συνάρτηση είναι ασυνεχής στις θέσεις $t = 40$, $t = 70$, $t = 95$, $t = 110$, $t = 125$.
- (γ) Ποιός μήνας νομίζετε ότι ήταν περισσότερο κρύος;

Άσκηση 2 (Πρόβλημα Τιμών Εμπορεύματος)

Η συνάρτηση που δίνει το κόστος ενός συγκεκριμένου εμπορεύματος δίνεται από τη συνάρτηση K με τύπο:

$$K(x) = \begin{cases} 5x & , \quad 0 < x < 10 \\ 4x & , \quad 10 \leq x < 30 \\ 3x + 30 & , \quad 30 \leq x < 60 \\ 3,2x & , \quad 60 \leq x \leq 90 \end{cases}$$

όπου x είναι ο αριθμός των γραμμαρίων του παραγόμενου εμπορεύματος και $K(x)$ το κόστος σε χιλιάδες δραχμές.

- (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $K(x)$ και βρείτε τις τιμές του x που είναι αυτή ασυνεχής.
- (β) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.

3.10. Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο

Μέχρι τώρα, μελετήσαμε το όριο μιας συνάρτησης καθώς το x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό x_0 . Συχνά, είμαστε αναγκασμένοι να μελετήσουμε το όριο μιας συνάρτησης, καθώς το x αυξάνει απεριόριστα, δηλαδή όταν το x τείνει στο άπειρο.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ένα κλειστό οικοσύστημα, δηλαδή μια δεξαμενή εργαστηρίου, στην οποία επιτρέπουμε να υπάρχουν μόνο χρυσόψαρα. Τροφοδοτούμε τη δεξαμενή έτσι ώστε να υπάρχει πάντα σταθερή ποσότητα τροφής για τα χρυσόψαρα: $c = 20$ kgr. Έστω f η συνάρτηση του πληθυσμού των χρυσόψαρων, με μεταβλητή το χρόνο t . Έστω $f(0) = 100$ είναι ο αρχικός πληθυσμός των χρυσόψαρων (για $t = 0$), και ο τύπος της f είναι:

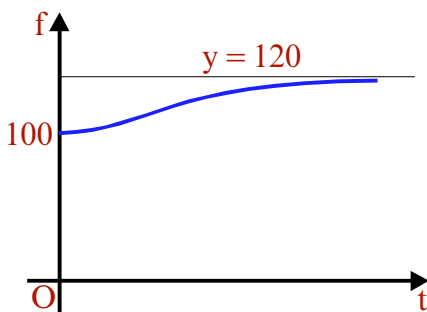
$$f(t) = f(0) + \frac{ct^2}{1+t^2}, t > 0 \quad \text{ή} \quad f(t) = 100 + \frac{20t^2}{1+t^2}$$

Θέλουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη του πληθυσμού των χρυσόψαρων μέσα στη δεξαμενή για οσοδήποτε μεγάλους χρόνους. Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

t	1	2	5	10	100	1000
$f(t)$	110	116	119,2	119,8	119,998	119,99998

Παρατηρούμε λοιπόν ότι παρόλο που ο χρόνος t αυξάνεται απροσδιόριστα, οι τιμές της f δεν ακολουθούν την ίδια αύξηση, αλλά τείνουν στην τιμή 120, κάτι που είναι αναμενόμενο, και από τη μορφή του φυσικού προβλήματος. Επομένως, έχουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 120$$



όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση της f .

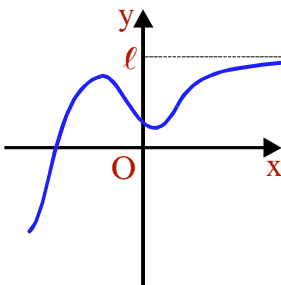
Ορισμός: (α) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ όταν το x τείνει στο $+\infty$ αν οι τιμές της $f(x)$ βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στο ℓ , καθώς το x παίρνει πάρα πολύ μεγάλες θετικές τιμές και συμβολίζουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Όμοια ορίζεται και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

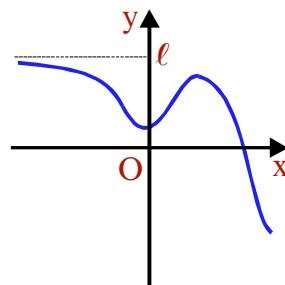
(β) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο $+\infty$ αν οι τιμές της $f(x)$ αυξάνουν απεριόριστα καθώς το x πλησιάζει το $+\infty$. Συμβολίζουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ανάλογα ορίζονται και τα όρια:

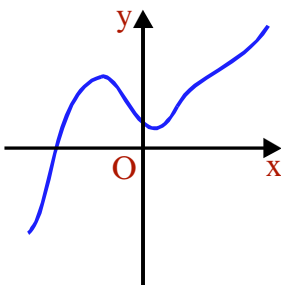
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



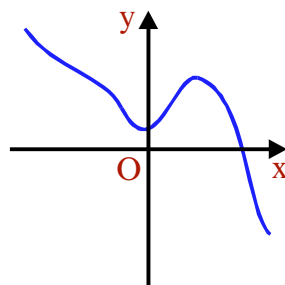
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



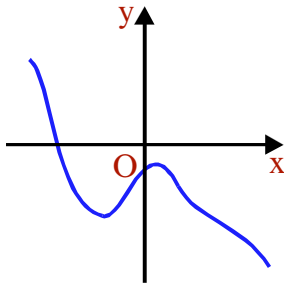
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$



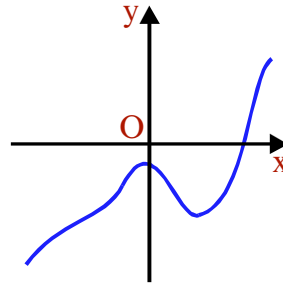
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• Όριο πολωνυμικής συνάρτησης στο άπειρο

Για να υπολογίσουμε το όριο μιας πολωνυμικής συνάρτησης, όταν το x τείνει στο άπειρο, αρκεί να συνειδητοποιήσουμε ότι ακολουθεί τη συμπεριφορά του μεγιστοβάθμιου όρου της.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το όριο της πολωνυμικής συνάρτησης:

$$P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4$$

όταν το x τείνει στο $-\infty$. Αρκεί να γράψουμε την P ως εξής:

$$P(x) = x^3 \left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^3} \right)$$

Τότε παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = -2 + 0 + 0 = -2$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = (-\infty) \cdot (-2) = +\infty$$

Γενικότερα, ισχύει ότι:

Αν $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_v \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_v x^v)$$

• Όριο ρητής συνάρτησης στο άπειρο

Το προηγούμενο αποτέλεσμα για τις πολωνυμικές εφαρμόζεται και στις ρητές συναρτήσεις, οι οποίες είναι πηλίκο πολωνυμικών.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 5x + 2}{x^2 - x + 1}$$

όταν το x τείνει στο $+\infty$. Η f γράφεται ως εξής:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(-3 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{-3 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Όμως έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = -3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-3}{1} = -3.$$

Γενικότερα, ισχύει ότι:

$$\text{Αν } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad \alpha_v \neq 0, \beta_\mu \neq 0, \text{ τότε:}$$

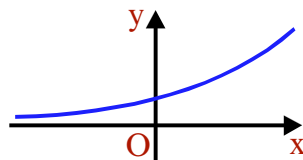
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_v x^v}{\beta_\mu x^\mu} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha_v x^v}{\beta_\mu x^\mu}$$

- **Όριο εκθετικής συνάρτησης στο άπειρο**

Από τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα όριά της στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

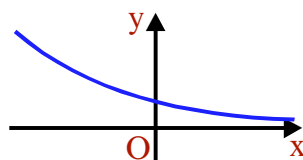
(i) Αν $a > 1$, τότε έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$



(ii) Αν $0 < a < 1$, τότε έχουμε ότι:

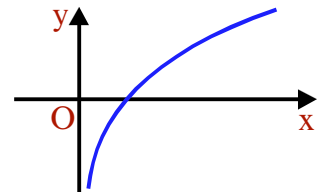
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$



• Όριο λογαριθμικής συνάρτησης στο άπειρο

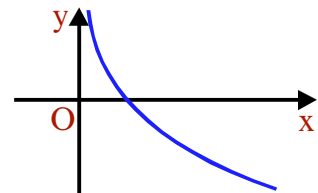
Από τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα όριά της όταν το x τείνει στο $+\infty$ (φυσικά η λογαριθμική δεν ορίζεται στο $-\infty$).

(i) Αν $a > 1$, τότε έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.



(ii) Αν $0 < a < 1$, τότε έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$$



3.11. Οριζόντια Ασύμπτωτη

Είδαμε ότι η συμπεριφορά μιας συνάρτησης προσδιορίζεται άμεσα στα σημεία του πεδίου ορισμού της καθώς και σε συγκεκριμένα σημεία εκτός του πεδίου ορισμού της, στα οποία μελετάμε αν η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Ένα δεύτερο σημείο μελέτης της συμπεριφοράς της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης προκύπτει, εφόσον υπάρχει περιοχή του απείρου ($+\infty$ ή $-\infty$) στο πεδίο ορισμού της f .

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Ας μελετήσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

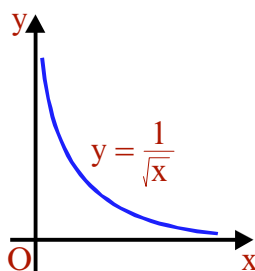
Ας θεωρήσουμε έναν πίνακα τιμών της f :

x	10	10^5	10^{10}	10^{100}	...
f(x)	0,1	0,00001	10^{-10}	10^{-100}	...

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνουν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x , τόσο μικραίνουν αυτές της συνάρτησης $f(x)$. Θα έχουμε τότε ότι όταν το x τείνει στο $+\infty$, η $f(x)$ τείνει στο 0, δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι η C_f στην περιοχή του $+\infty$ συμπεριφέρεται όπως η $y = 0$, την οποία ονομάζουμε **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f για $x \rightarrow +\infty$.



Παράδειγμα 2

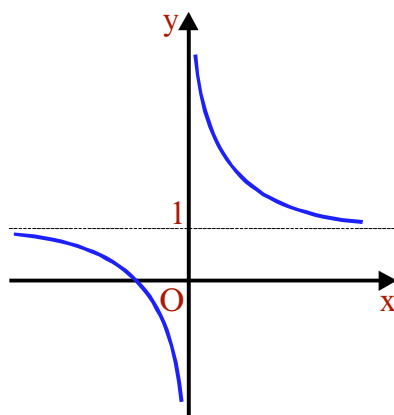
Ας μελετήσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x} \right)^3$$

στο άπειρο. Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, ο-

πότε η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f για $x \rightarrow +\infty$. Όμοια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, οπότε η $y = 1$ είναι οριζό-

ντια ασύμπτωτη της C_f και όταν $x \rightarrow -\infty$.



Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού της A περιέχει περιοχές του $(+\infty)$ και του $(-\infty)$. Η ευθεία $y = c$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f , όταν $x \rightarrow +\infty$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$$

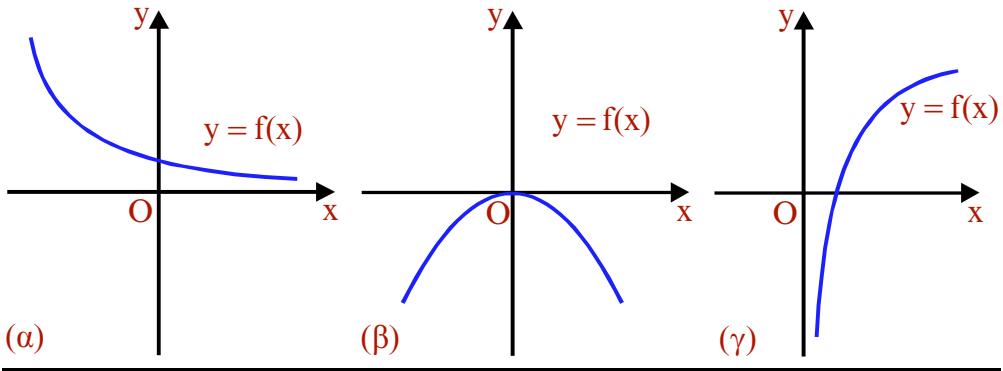
Όμοια, αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$, η ευθεία $y = c$ καλείται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow -\infty$.

Είναι φανερό ότι αν το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ δεν υπάρχει ή δίνει αποτέλεσμα ∞ , τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Επίσης, δεν είναι απαραίτητο μια συνάρτηση να έχει την ίδια οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, όπου αυτά ορίζονται, στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που ακολουθούν.



Λύση

- (α) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ καθώς όταν το x απειρίζεται θετικά οι τιμές της f πλησιάζουν το 0.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται αρνητικά οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα.
- (β) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται θετικά οι τιμές της f μικραίνουν απεριόριστα.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται αρνητικά οι τιμές της f μικραίνουν απεριόριστα.
- (γ) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται θετικά οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα.
- Δεν ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ γιατί το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει περιοχή του $(-\infty)$.

Εφαρμογή 2

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f . Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f , αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = \frac{0,5x}{x + 100}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

x	10	100	1000	10000	1000000
f(x)					

(β) $f(x) = \sqrt{1000x} + x^2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

x	10	100	1000	100000
f(x)				

(γ) $f(x) = 10 \left(\frac{1}{2} \right)^x, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

x	-5	-8	-10	-15
f(x)				

Λύση

(α)

x	10	100	1000	10000	1000000
f(x)	0,045	0,25	0,45	0,495	0,4999

Εδώ οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό 0,5 καθώς το x παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,5$.

(β)

x	10	100	1000	100000
f(x)	200	10316,23	1001000	10000010000

Εδώ οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα καθώς το x παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(γ)

x	-5	-8	-10	-15
f(x)	320	2560	10240	327680

Εδώ οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα καθώς το x αρχίζει να μειώνεται. Οι μεταβολές αυτές είναι πολύ μεγάλες και ονομάζονται εκθετικές μεταβολές. Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Εφαρμογή 3

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + x - 1)$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100x - 10x|x - 1|}{x^2 - 1}$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3) = -5(+\infty) = -\infty$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 2 \cdot 0 = 0$$

(γ) Έχει έννοια η αναζήτηση του ορίου αφού $2x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2}|x| + x) \stackrel{(*)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(1 + \sqrt{2})] = (-\infty)(1 + \sqrt{2}) = -\infty \text{ καθώς } 1 + \sqrt{2} > 0.$$

(*) Αφού $x \rightarrow -\infty$ σημαίνει ότι $x \in (-\infty, 0)$ άρα $|x| = -x$.

(δ) Αφού $x \rightarrow +\infty$ μπορούμε να επιλέξουμε μια κατάλληλη περιοχή του $+\infty$ που να μας απαλλάσει από το απόλυτο, έστω $x \in (1, +\infty)$,

$$\text{οπότε } f(x) = \frac{100x - 10x(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{-10x^2 + 110x}{x^2 - 1}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10x^2}{x^2} = -10.$$

Εφαρμογή 4

Βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, όταν υπάρχουν, στις αντίστοιχες περιπτώσεις της εφαρμογής 3.

Λύση

Οριζόντιες ασύμπτωτες υπάρχουν όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ είναι πραγ-

ματικός αριθμός. Επομένως:

- Στη (β) έχουμε την $y = 0$ όταν $x \rightarrow -\infty$.
- Στη (δ) έχουμε την $y = -10$ όταν $x \rightarrow +\infty$.

Εφαρμογή 5

Όταν οργανικά απόβλητα πετιούνται σε μια λίμνη, η οξειδωτική διαδικασία που δημιουργείται, μειώνει το περιεχόμενο της λίμνης σε οξυγόνο. Παρ' όλα αυτά, με το χρόνο η φύση επαναφέρει το περιεχόμενο οξυγόνο στο φυσιολογικό του επίπεδο. Υποθέστε ότι το περιεχόμενο οξυγόνο, σε ποσοστό επί τοις % του φυσιολογικού επιπέδου, t ημέρες μετά τη ρύψη των αποβλήτων στη λίμνη δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 100 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}$$

- (α) Υπολογίστε το ποσοστό του οξυγόνου που θα περιέχεται στη λίμνη για $t = 0, 1, 2, 5, 10, 15, 20$ ημέρες.
- (β) Από τους προηγούμενους υπολογισμούς αντιληφθείτε ότι ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα η περιεκτικότητα της λίμνης σε οξυγόνο αυξάνεται ημέρα με την ημέρα.
- (γ) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Λύση

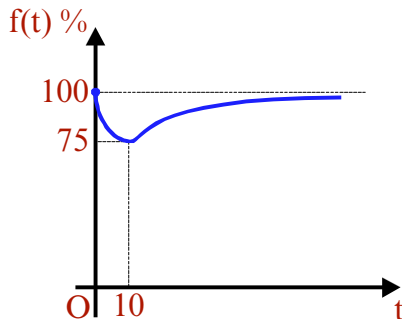
(α)	t	0	1	2	5	10	15	20
	% f(t)	100	91,7	86,1	77,8	75	76	77,7

- (β) Είναι φανερό ότι ύστερα από 10 η-μέρες μείωσης του οξυγόνου, η περιεκτικότητά του στη λίμνη αρχίζει να αυξάνεται.

(γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(100 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100} \right) =$

$$100 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2} = 100 \cdot 1 = 100$$

που σημαίνει ότι ύστερα από πολλές ημέρες η περιεκτικότητα του νερού σε οξυγόνο θα πλησιάζει πάλι το 100% του φυσιολογικού επιπέδου.



Εφαρμογή 6 (Κόστος Οδήγησης)

Μια μελέτη για τα έξοδα οδήγησης τετρακύλινδρων αυτοκινήτων μοντέλων του 1995, βρήκε ότι το μέσο κόστος των εξόδων (ασφάλειες, συντήρηση, κατανάλωση, βενζίνη κ.λπ) μετρούμενα σε δραχμές ανά χιλιόμετρο δίνονται από τη συνάρτηση:

$$\bar{K}(x) = \frac{2010}{x^3} + 17,80$$

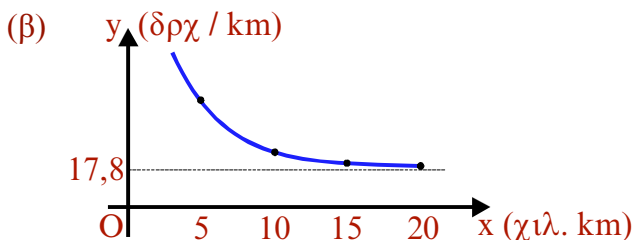
όπου x είναι ο αριθμός των χιλιομέτρων (σε χιλιάδες) που διανύει το αμάξι το χρόνο.

- (α) Ποιό είναι το μέσο κόστος οδήγησης ενός τέτοιου τετρακύλινδρου αμαξιού που διανύει 5000, 10000, 15000 και 20000 χιλιόμετρα το χρόνο;
- (β) Χρησιμοποιήστε το (α) ερώτημα για να σχεδιάσετε **ποιοτικά** τη γραφική παράσταση της $\bar{K}(x)$.
- (γ) Τι συμβαίνει με το μέσο κόστος οδήγησης όταν ο αριθμός των χιλιομέτρων που διανύει το αμάξι το χρόνο αυξάνει χωρίς όριο;

Λύση

- (α) Ο πίνακας τιμών που ακολουθεί μας δείχνει το μέσο κόστος οδήγησης:

x	5	10	15	20
$\bar{K}(x)$	33,88	19,81	18,40	18,05



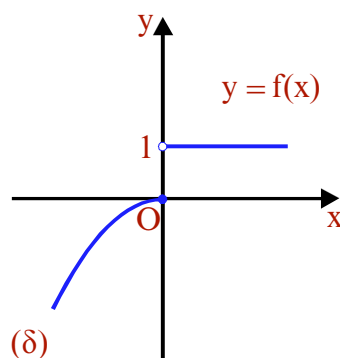
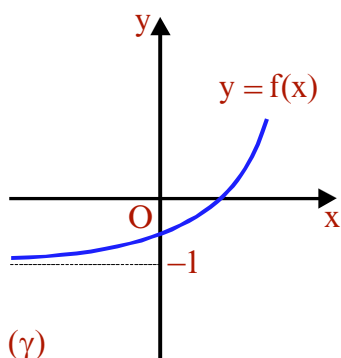
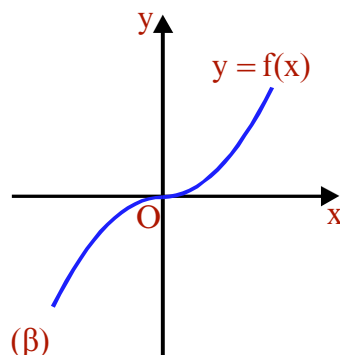
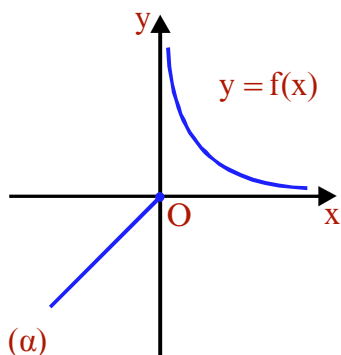
- (γ) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{K}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2010}{x^3} + 17,80 \right) = 17,80$.

Άρα όταν ο αριθμός των χιλιομέτρων που διανύει το αμάξι το χρόνο αυξάνει αρκετά τότε το μέσο κόστος οδήγησης μικραίνει και φτάνει οριακά τις 17,80 δραχμές/km.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (α), (β) και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (γ), (δ), αν υπάρχει:



Άσκηση 2



Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f . Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f , αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

x	10	50	100	1000	1500
f(x)	1,01			1,000001	

$$(\beta) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

x	-10	-50	-100	-1000	-1500
f(x)	0,0498			0,0004	

Άσκηση 3

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - x + 1) \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^3 + 1} \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{2x - 1}$$

Άσκηση 4

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[101 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2 - x} + \frac{2x^2}{2x + 10} \right) \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{2x + 1}$$

Άσκηση 5

Στις ασκήσεις 3 και 4 να βρείτε τις εξισώσεις των οριζόντιων ασυμπτωτών των συναρτήσεων, όπου αυτές υπάρχουν.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Για τις επόμενες συναρτήσεις υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε επίσης το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$.

$$(\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x}$$

$$(\beta) f(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$(\gamma) f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$(\delta) f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα επόμενα όρια εκθετικών μορφών, αν υπάρχουν.

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-4x} + 1)$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x}$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x \ln x) \qquad (β) \lim_{x \rightarrow 0^+} (2^x \ln x)$$

Πρακτικές Εφαρμογές**Άσκηση 1**

Το κόστος κατασκευής ενός DVD δίσκου εξαρτάται από το πλήθος x των κατασκευαζομένων DVD από μια εταιρεία, με βάση τη συνάρτηση κόστους $K(x) = 0,5 + \frac{2500}{x}$ σε χιλιάδες δρχ.

- (α) Υπολογίστε το κόστος ενός DVD δίσκου αν η εταιρεία κατασκευάζει 1000, 1500, 2500, 5000, 50000 δίσκους.
- (β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 2

Η συγκέντρωση ενός συγκεκριμένου φάρμακου στην κυκλοφορία του αίματος ενός ασθενή, t ώρες μετά την ένεση, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \frac{0,2t}{t^2 + 1}$ όπου οι τιμές της συνάρτησης υπολογίζονται σε mg/cm^3 .

- (α) Υπολογίστε τη συγκέντρωση για $t = 1, 2, 4, 5, 10$ ώρες.
- (β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου**Άσκηση 1**

Βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ) και αιτιολογήστε την άποψή σας.

1. Για κάθε συνάρτηση f που ορίζεται σε σύνολο μορφής (α, β) με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L - \ell$.

3. Αν για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ τότε για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\lambda}{(x-1)^2}, \lambda \neq 0, 0 \leq x \neq 1$$

- (α) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, αν υπάρχουν.
- (β) Ποιάς μορφής απροσδιοριστία βρίσκουμε όταν αναζητούμε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$;
- (γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

Άσκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν.

- (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2\ln x - \ln(x^2 + 1)]$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Άσκηση 4

Ένα ψάρι κολυμπά μια απόσταση ℓ μέτρων με ταχύτητα v m/sec αντίθετα προς το ρεύμα ενός ποταμού, του οποίου η ταχύτητα του νερού είναι u m/sec ($u < v$). Η ενέργεια που ξοδεύει το ψάρι δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(v) = \frac{a \ell v^3}{v - u}$$

όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά και η ενέργεια E μετριέται σε Joule.

- (α) Υπολογίστε το $\lim_{v \rightarrow u^+} E(v)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.
 (β) Υπολογίστε το $\lim_{v \rightarrow +\infty} E(v)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 5

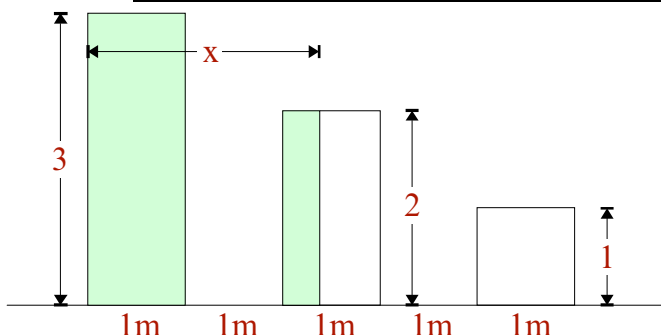
Αν για τις συναρτήσεις f και g που ορίζονται σε ένα διάστημα μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ τότε για τιμές του x πολύ κοντά στο x_0 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $f(x) \simeq g(x)$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ και $g(x) = \frac{x}{2}$.

- (α) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
 (β) Υπολογίστε προσεγγιστικά τη $\sqrt{10}, \sqrt{105}, \sqrt{0,3}, \sqrt{0,002}$.

Άσκηση 6 (Πρόβλημα Εμβαδού)

Τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν ίδια βάση 1 m, ύψη 3 m, 2 m, 1 m αντίστοιχα, και απέχουν μεταξύ τους κατά 1 m, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



- (α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδό του σχήματος.
 (β) Αν $E(x)$ η συνάρτηση του εμβαδού, να ελέγξετε αν είναι συνεχής και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

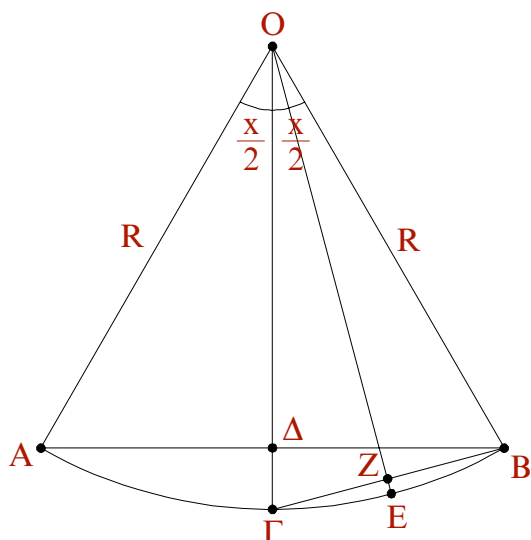
Άσκηση 7

Θεωρούμε έναν κυκλικό τομέα AOB ακτίνας R με επίκεντρη γωνία x όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- (α) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB και το μήκος του "βέλους" $\widehat{\Delta\Gamma}$ ως συνάρτηση της γωνίας x , όπου Γ είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$.

- (β) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής $B\Gamma$ και το μήκος του "βέλους" ZE ως συνάρτηση της γωνίας x , όπου E είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$.
- (γ) Να βρείτε τα όρια της χορδής AB και του "βέλους" $\Delta\Gamma$ όταν $x \rightarrow 0$.
- (δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{ZE} = 4.$$



Ανακεφαλαίωση

• Ιδιότητες Ορίων:

Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell_1 \pm \ell_2$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}, \text{ εφόσον } \ell_2 \neq 0$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell_1|$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \ell_1^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$(vi) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\ell_1}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

όπου η f είναι θετική σε μια περιοχή του x_0 .

• Επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο:

$$(i) \quad x + \infty = +\infty, x - \infty = -\infty$$

$$(ii) \quad \text{Αν } x > 0, \text{ τότε } x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(iii) \quad \text{Αν } x < 0, \text{ τότε } x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(iv) \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

Επιπλέον των παραπάνω πράξεων έχουμε και τις πράξεις μεταξύ του $(+\infty)$ και του $(-\infty)$ ως εξής:

$$(i) \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(ii) \quad (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

• Απροσδιόριστες μορφές $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot (\infty), (+\infty) + (-\infty)\right)$:

– $\frac{0}{0}$ σε Ρητές: Παραγοντοποιήσεις

– $\frac{0}{0}$ σε Ριζικά: Συζυγής Παράσταση

– $\frac{\infty}{\infty}$ σε Ρητές: Πηλίκο Μεγιστοβάθμιων όρων

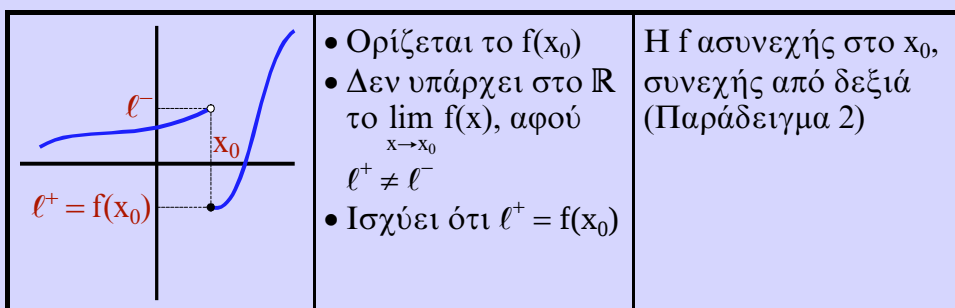
- **Κατακόρυφη ασύμπτωτη γραφικής παράστασης:**

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

- **Συνέχεια συνάρτησης:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

- **Σημεία ασυνέχειας:**

Γραφ. Παράσταση της f	Μελέτη Συνέχειας	Χαρακτηρισμός
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ • $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 5)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αφού $l^+ \neq l^-$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 4)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αφού $l^+ \neq l^-$ • Ισχύει ότι $l^- = f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0 , συνεχής από αριστερά (Παράδειγμα 3)



• **Συνέχεια βασικών συναρτήσεων:**

- Πολυωνυμικές
- Ρητές
- Ριζικά
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές

• **Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων:**

Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A$, τότε:

- (i) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (ii) Η συνάρτηση $h(x) = \kappa \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 , για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
- (iii) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (iv) Αν $g(x_0) \neq 0$, η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (v) Η συνάρτηση $h(x) = |f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0 .
- (vi) Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[k]{f(x)}$ με $f(x) \geq 0$ είναι συνεχής στο x_0 .

Επίσης, έχουμε ότι και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση:

Θεώρημα

Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g στο $f(x_0) \in B$, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 .

• **Οριζόντια ασύμπτωτη γραφικής παράστασης:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποιά η έννοια του ορίου; Δώστε ένα παράδειγμα από την καθημερινότητα. Τι πρέπει να ισχύει για να ορίζεται ένα όριο;
2. Τι λέμε μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης;
3. Ποιές οι επιτρεπτές και ποιές οι μη επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο;
4. Σε ποιά σημεία ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης;
5. Ποιά η έννοια μιας συνεχούς γραμμής και μιας συνεχούς συνάρτησης;
6. Εκφράστε εποπτικά τα δυνατά σημεία ασυνέχειας μιας συνάρτησης.
7. Γράψτε τους ορισμούς των ορίων:
 - (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
 - (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 - (iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
8. Ποιά τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;
9. Μια συνάρτηση που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες;
10. Μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει οριζόντιες ασύμπτωτες;
11. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ χωρίς οριζόντιες ασύμπτωτες.
12. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης ορισμένης στο $(0, +\infty)$ χωρίς οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη.

4

Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την έννοια της παραγώγου, την οποία θα εισάγουμε ταυτίζοντάς την με το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους, δίνοντας πολλές χρήσιμες πρακτικές εφαρμογές.

Παρουσιάζεται ο λογισμός με παραγώγους, καθώς και οι παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Εισάγεται, κατόπιν, η αντίστροφη διαδικασία της παραγωγίσης με την παράγουσα συνάρτηση και την παρουσίαση διαφορικών εξισώσεων και προβλημάτων αρχικών τιμών.

Τέλος, το πρόσημο των παραγώγων μας οδηγεί στην εύκολη μέλητη της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης.

4.1. Η έννοια της Παραγώγου ως Ρυθμός Μεταβολής

Στο κεφάλαιο 3 εκφράσαμε μαθηματικά ένα γνωστό αποτέλεσμα της φυσικής, ότι το όριο της μέσης ταχύτητας ενός κινητού είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Ας αναλύσουμε γενικότερα το παράδειγμα αυτό:

Έστω ότι το μέγεθος S αποτελεί τη συνάρτηση θέσης ενός κινητού ως προς το χρόνο t . Μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , το κινητό θα έχει διανύσει απόσταση $S(t_0)$. Μετά από χρόνο h , δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_0 + h$, η απόσταση που θα έχει διανύσει θα είναι $S(t_0 + h)$. Ως **μέση ταχύτητα**, ορίζεται το πηλίκο:

$$\frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

Η **στιγμιαία** ή **οριακή ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 , δίνεται από το όριο:

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

Είναι φανερό ότι το όριο αυτό, εφόσον υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θέσης ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 και ισούται με την οριακή του ταχύτητα, την ίδια χρονική στιγμή.

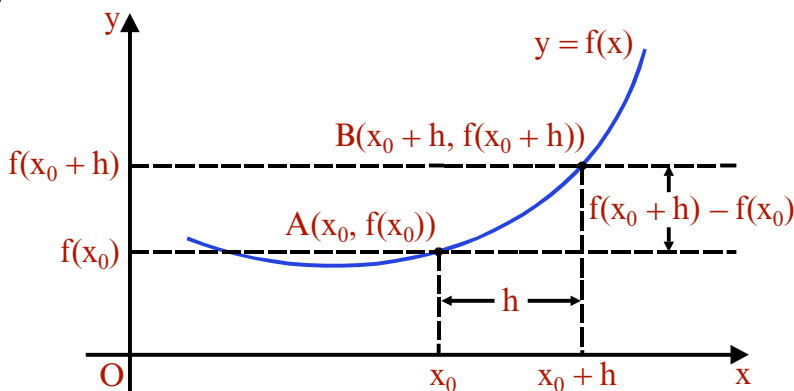
Θα λέμε τότε ότι υπάρχει η **παράγωγος** της S στο t_0 και θα τη συμβολίζουμε με $S'(t_0)$, δηλαδή:

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = S'(t_0)$$

Ας μελετήσουμε κατόπιν την έννοια της παραγώγου στη γενική της μορφή. Έστω ότι η συνάρτηση f εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών x και y ως εξής:

$$y = f(x)$$

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f και ας μετακινηθούμε σε ένα άλλο σημείο $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ της C_f , όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η διαφορά $f(x_0 + h) - f(x_0)$ εκφράζει τη μεταβολή του μεγέθους y , που αντιστοιχεί στη μεταβολή h του μεγέθους x . Ο λόγος:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

εκφράζει τη **μέση τιμή της μεταβολής** του μεγέθους y . Αν θεωρήσουμε ότι η μεταβολή h της ποσότητας x , γίνεται οσοδήποτε μικρή ($h \rightarrow 0$), τότε προκύπτει το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

το οποίο εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** της f στο x_0 και ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** . Συμβολίζουμε με $f'(x_0)$.

• Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο

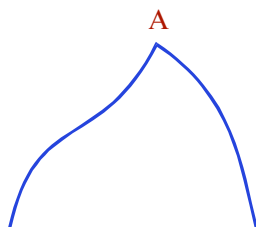
Ορισμός: Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό $f'(x_0)$ και το ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 .

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ότι το ακόλουθο σχήμα περιγράφει μια διαδρομή την οποία ακολουθεί ένας δρομέας.



Βελτιώνοντας διαρκώς την τεχνική του, ο δρομέας ακολουθεί χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια τις στροφές της διαδρομής. Τη μόνη δυσκολία τη συναντά στο σημείο A , όπου χρειάζεται διαφορετική αντιμετώπιση. Για να μελετήσουμε μαθηματικά την ιδέα αυτή, ας θεωρήσουμε ότι η διαδρομή του δρομέα στο σχήμα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \leq 1 \\ 2 - x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

και ότι θέλουμε να μελετήσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες $x_0 = -1, 1, 2$.

(α) Όταν $x_0 = -1$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^3 - (-1)^3}{h} = \\ \frac{h[(-1+h)^2 + (-1+h)(-1) + (-1)^2]}{h} &= (h-1)^2 - (h-1) + 1 \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(h-1)^2 - (h-1) + 1] = 3$$

και άρα $f'(1) = 3$.

(β) Όταν $x_0 = 2$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2 - (2+h)^2 + 2}{h} = \frac{4 - (2+h)^2}{h} = -h - 4$$

Επομένως $f'(2) = -4$.

(γ) Όταν $x_0 = 1$ θα πρέπει να εργασθούμε όπως και στη συνέχεια με πλευρικά όρια, αφού η f αλλάζει κλάδο. Για $x < 1$ ή $h < 0$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = (1+h)^2 + (1+h) + 1$$

οπότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$$

Για $x > 1$ ή $h > 0$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2 - (1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1 - (1+h)^2}{h} = -(h+2)$$

οπότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2$$

Αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά θα έχουμε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0 = 1$.

Γενικότερα, ισχύει ότι:

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός.

• Συνέχεια και Παραγωγισιμότητα

Αν μελετήσουμε την προηγούμενη συνάρτηση της διαδρομής:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \leq 1 \\ 2 - x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$, θα δούμε ότι είναι συνεχής. Ωστόσο, προηγουμένως αποδείξαμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια συνεχής συνάρτηση, δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη. Όμως, το αντίστροφο ισχύει πάντα, δηλαδή μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι απαραίτητα και συνεχής, όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Πόρισμα

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Παρατήρηση

Στα σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , στα οποία η f είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη, σχηματίζεται γωνία (βλέπε σχήμα παραδείγματος) και για το λόγο αυτό ονομάζονται **γωνιακά σημεία**.

• Ρυθμός μεταβολής μεγέθους σε συγκεκριμένη τιμή

Ορισμός: Αν δυο μεγέθη x , y συνδέονται με τη συνάρτηση f , έτσι ώστε $y = f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η παράγωγος $f'(x_0)$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς x , για τη συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$.

Παραδείγματα ρυθμού μεταβολής

Επιτάχυνση

Αν θεωρήσουμε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t , τη χρονική στιγμή t_0 , τότε εκφράζει την επιτάχυνση του κινητού

τη δεδομένη χρονική στιγμή. Δηλαδή:

$$\gamma(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = v'(t_0)$$

Οριακό κόστος – Οριακό κέρδος

Στην οικονομία, θεωρούμε τις συναρτήσεις του κόστους παραγωγής K και του κέρδους P , ως προς μεταβλητή x την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος. Είναι γνωστό ότι τα πηλίκια:

$$\frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{h}, \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}$$

εκφράζουν το μέσο κόστος και το μέσο κέρδος, αντίστοιχα.

Τα όρια των πηλίκων αυτών όταν η μεταβολή της παραγόμενης ποσότητας x τείνει στο μηδέν (δηλαδή όταν $h \rightarrow 0$) εκφράζει το οριακό κόστος και το οριακό κέρδος, αντίστοιχα, για παραγόμενη ποσότητα προϊόντος x_0 :

$$K'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{h}$$

$$P'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + h) - P(x_0)}{h}$$

Ανάλογα ορίζονται οι ρυθμοί μεταβολής οποιωνδήποτε άλλων μεγεθών μελετάμε.

Εφαρμογές

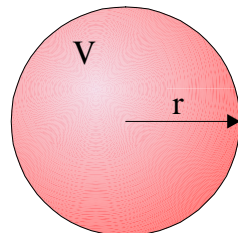
Εφαρμογή 1

Ένα σφαιρικό μπαλόνι γεμίζεται με αέρα με ρυθμό που εκφράζεται σε cm^3/min . Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του μπαλονιού, όταν η ακτίνα του γίνει ίση με 3 cm;

Λύση

Αν V είναι ο όγκος του μπαλονιού και r η ακτίνα του τότε είναι $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$. Οπότε για $r_0 = 3$ έχουμε ότι:

$$\frac{V(3 + h) - V(3)}{h} = \frac{4\pi}{3h} [(3 + h)^3 - 3^3] =$$



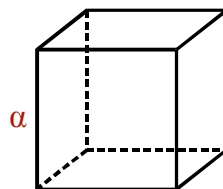
$$= \frac{4\pi}{3} [(3+h)^2 + 3(3+h) + 3^2]$$

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} [(3+h)^2 + 3(3+h) + 3^2] = \frac{4\pi}{3} (3^2 + 3 \cdot 3 + 3^2) = 36\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

Εφαρμογή 2

Ένας κύβος μεγαλώνει ως προς την ακμή του. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου ως συνάρτηση της ακμής του.



Λύση

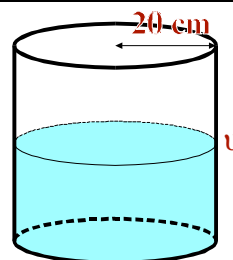
Αν a είναι η ακμή του κύβου, τότε ο όγκος του είναι $V(a) = a^3$. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου είναι το όριο για $h \rightarrow 0$ του πηλίκου:

$$\frac{V(a+h) - V(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = (a+h)^2 + a(a+h) + a^2.$$

Επομένως, $V'(a) = 3a^2$.

Εφαρμογή 3

Μια δεξαμενή νερού με σχήμα ορθού κυλίνδρου διαμέτρου 40 cm αρχίζει να αδειάζει έτσι ώστε η στάθμη του νερού να κατεβαίνει με σταθερό ρυθμό $\frac{3}{2}$ cm/min. Πόσο γρήγορα φθίνει ο όγκος του νερού;



Λύση

Έχουμε ότι η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι 20 cm και v το ύψος του. Αφού η στάθμη του νερού φθίνει με σταθερό ρυθμό θα έχουμε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0+h) - v(t_0)}{h} = -\frac{3}{2}$$

σε κάθε χρονική στιγμή t_0 .

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi R^2 v$, με μέσο ρυθμό μεταβολής:

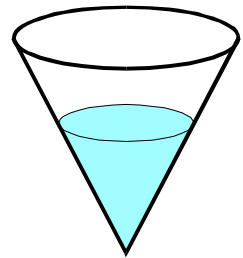
$$\frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = \frac{\pi R^2 v(t_0 + h) - \pi R^2 v(t_0)}{h} = \pi R^2 \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h}$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του όγκου σε κάθε χρονική στιγμή t είναι:

$$V'(t_0) = \pi R^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + h) - v(t_0)}{h} = -\frac{3}{2} \pi \cdot 400 = -600\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

Εφαρμογή 4

Ένα κωνικό δοχείο νερού (ορθός κώνος) αρχίζει να στάζει με σταθερό ρυθμό, ώστε ο όγκος του να μειώνεται με ρυθμό $1 \text{ cm}^3/\text{min}$ και το ύψος της επιφάνειας του νερού είναι τριπλάσιο της ακτίνας της σε κάθε χρονική στιγμή. Αν το δοχείο ήταν γεμάτο για $t = 0$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας της επιφάνειας του νερού τη χρονική στιγμή όπου η ακτίνα αυτή είναι ίση με 2 cm .



Λύση

Ο όγκος του κωνικού δοχείου δίνεται από τον τύπο $V = \frac{1}{3} \pi R^2 v$, όπου

R η ακτίνα και v το ύψος του και αφού $v = 3R$, τότε $V = \pi R^3$, επομένως:

$$\frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = \pi \frac{R(t_0 + h) - R(t_0)}{h} [R^2(t_0 + h) + R(t_0)R(t_0 + h) + R^2(t_0)]$$

Οπότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t_0 + h) - R(t_0)}{h} = \frac{1}{3\pi R^2(t_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = -\frac{1}{12\pi} \text{ cm/min}$$

Εφαρμογή 5

Η απόσταση που διανύει ένας πύραυλος (σε m) σε μια ευθύγραμμη κίνηση t δευτερόλεπτα μετά την εκκίνησή του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = t^4, \quad 0 \leq t \leq 30$$

- (α) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του πυραύλου στα χρονικά διαστήματα $[10, 11]$, $[10, 10,1]$ και $[10, 10,01]$.
- (β) Να υπολογίσετε τη στιγμιαία ταχύτητα του πυραύλου όταν $t = 10 \text{ sec}$.
- (γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των (α) και (β).

Λύση

- (α) Υπολογίζουμε αρχικά τη μέση ταχύτητα στο διάστημα $[t_0, t_0 + h]$. Βρίσκουμε ότι:

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{(t_0 + h)^4 - t_0^4}{h} = \frac{h(2t_0 + h)[(t_0 + h)^2 + t_0^2]}{h} =$$

$$(2t_0 + h)[(t_0 + h)^2 + t_0^2]$$

Επομένως, για $t_0 = 10$ και $h = 1$ βρίσκουμε ότι η μέση ταχύτητα του πυραύλου στο χρονικό διάστημα $[10, 11]$ είναι ίση με $21 \cdot 221 = 4641 \text{ m/sec}$. Για $t_0 = 10$ και $h = 0,1$ η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα $[10, 10,1]$ είναι ίση με $20,1 \cdot 202,01 = 4060,401 \text{ m/sec}$, ενώ για $t_0 = 10$ και $h = 0,01$ η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα $[10, 10,01]$ είναι ίση με $4006,004 \text{ m/sec}$.

- (β) Η οριακή ή στιγμιαία ταχύτητα του πυραύλου είναι το όριο για $h \rightarrow 0$ της μέσης ταχύτητας, δηλαδή:

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2t_0 + h)[(t_0 + h)^2 + t_0^2] = 2t_0 \cdot 2t_0^2 = 4t_0^3.$$

Για $t_0 = 10 \text{ sec}$ έχουμε ότι $v(10) = 4000 \text{ m/sec}$.

- (γ) Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των (α) και (β) προκύπτει ότι όσο μικραίνει το χρονικό διάστημα στο οποίο ορίζεται η μέση ταχύτητα, τόσο αυτή πλησιάζει στην τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας.

Εφαρμογή 6

Το συνολικό κόστος $K(x)$ (σε χιλιάδες δραχμές) παραγωγής x ιστιοπλοϊκών πανιών την ημέρα από μια εταιρεία δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = -x^2 + 30x + 15, \quad 0 \leq x \leq 15$$

Ποιός ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους, αν η εταιρεία παράγει δέκα πανιά την ημέρα;

Λύση

Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κόστους στο σημείο $x_0 = 10$, οπότε:

$$\begin{aligned}\frac{K(10+h) - K(10)}{h} &= \frac{-(10+h)^2 + 30(10+h) + 15 - 215}{h} = \\ \frac{-h^2 + 10h}{h} &= -h + 10\end{aligned}$$

Οπότε:

$$K'(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(10+h) - K(10)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 10) =$$

10 χιλιάδες δρχ. ανά ημέρα.

Εφαρμογή 7

Μια εταιρεία παράγει ηλεκτρονικά εξαρτήματα έχοντας πάγιο ετήσιο κόστος 4,5 εκατομμύρια δραχμές και κόστος ανά εξάρτημα 1000 δραχμές. Η τιμή πώλησης κάθε εξαρτήματος είναι 1800 δραχμές.

- (α) Ποιά είναι η συνάρτηση κόστους;
- (β) Ποιά η συνάρτηση των εσόδων;
- (γ) Ποιά η συνάρτηση κέρδους;
- (δ) Ποιός ο ρυθμός μεταβολής των παραπάνω συναρτήσεων όταν η εταιρεία παράγει έναν αριθμό εξαρτημάτων x_0 ;

Λύση

- (α) Αν η εταιρεία παράγει x εξαρτήματα, τότε η συνάρτηση κόστους είναι:

$$K(x) = 4500 + x \text{ χιλιάδες δραχμές, για } x > 0$$

- (β) Η συνάρτηση εσόδων είναι:

$$E(x) = 1,8x \text{ χιλιάδες δραχμές, για } x > 0$$

- (γ) Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$P(x) = E(x) - K(x) = 0,8x - 4500 \text{ χιλιάδες δραχμές, για } x > 0$$

- (δ) Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(x_0+h) - K(x_0)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x_0+h) - E(x_0)}{h} = 1,8$$

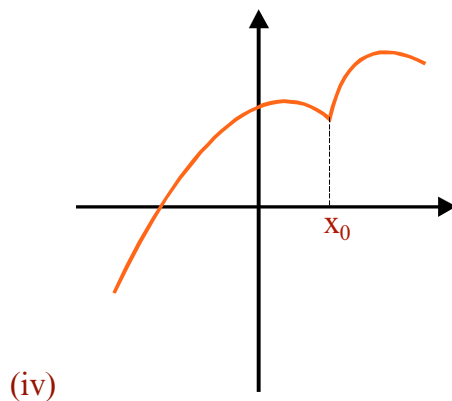
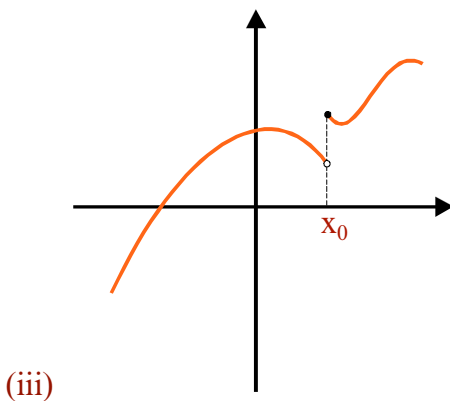
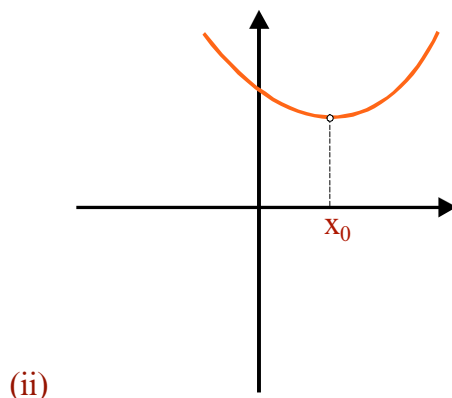
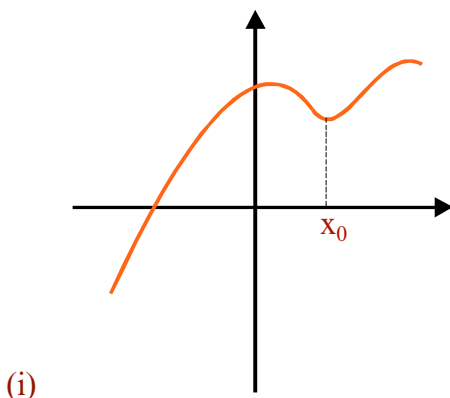
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x_0+h) - P(x_0)}{h} = 0,8$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Στις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις να εξετάσετε:

- (α) Αν η f έχει όριο στο $x = x_0$.
- (β) Αν η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.
- (γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.



Άσκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - x_0|$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Άσκηση 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - x_0}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \gamma x^2 + \delta x & , \text{ αν } x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta x & , \text{ αν } x > 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

- (α) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- (β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Άσκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Άσκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{2|x - 2|}{x^2 - 2x + 4}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Πρακτικές Εφαρμογές**Άσκηση 1**

Ένα αερόστατο αρχίζει να ανεβαίνει κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 1,28 m/sec. Λόγω βλάβης στην τροφοδοσία αρχίζει να χάνει αέρα, έτσι ώστε το ύψος του μετά από t sec να δίνεται από τη συνάρτηση $g(t) = 1,28t - 0,16t^2$ m.

- (α) Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του αερόστατου στα χρονικά διαστήματα $[3, 4]$, $[3, 3,5]$ και $[3, 3,1]$;
- (β) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα του αερόστατου τη χρονική στιγμή $t = 3$ sec;

- (γ) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ sec}$; Εκείνη τη στιγμή το αερόστατο ανεβαίνει ή πέφτει;
- (δ) Πότε το αερόστατο θα πέσει στο έδαφος;

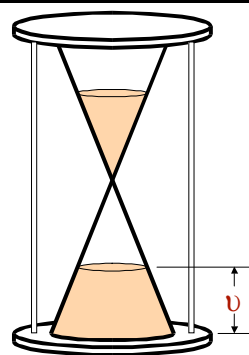
Άσκηση 2

Σε θερμοκρασία 20° C , ο όγκος V (σε lt) $1,33 \text{ gr O}_2$ σχετίζεται με την πίεσή του P (σε atm) με τον τύπο $V = \frac{1}{P}$.

- (α) Ποιός είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής του όγκου V ως συνάρτηση της πίεσης P , όταν η πίεση P αυξάνεται από 2 atm σε 3 atm ;
- (β) Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V όταν η πίεση P γίνεται 2 atm ;

Άσκηση 3

Σε μια κλεψύδρα η άμμος αρχίζει να πέφτει από το πάνω μέρος της στο κάτω με σταθερό ρυθμό $4 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους u της άμμου που μαζεύεται στο κάτω μέρος της κλεψύδρας, αν το ύψος εκφράζεται ως συνάρτηση της ακτίνας από τον τύπο $u = \frac{R}{\pi}$.



Άσκηση 4

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της διαγωνίου ενός κύβου ως συνάρτηση της ακμής του.

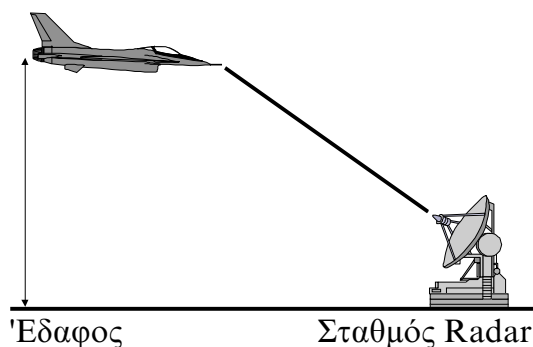
Άσκηση 5

Αν ο όγκος μιας σφαίρας μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειάς της είναι αντιστρόφως ανάλογος της ακτίνας της.

Άσκηση 6

Ένα αεροπλάνο πετάει παράλληλα προς το έδαφος με σταθερή ταχύτητα 600 μίλια/h και πλησιάζει ένα σταθμό Radar.

Αν το ύψος στο οποίο πετάει το αεροπλάνο είναι 2 μίλια, πόσο γρήγορα μειώνεται η απόσταση ανάμεσα στο αεροπλάνο και στο σταθμό, τη χρονική στιγμή που η οριζόντια απόστασή τους είναι 1,5 μίλια;



4.2. Παράγωγος Συνάρτησης

Η παραγωγισιμότητα, όπως η συνέχεια, είναι μια ιδιότητα την οποία μπορεί να έχει μια συνάρτηση σε ορισμένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Ας μελετήσουμε τι γίνεται, όταν η παράγωγος ορίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα

Να μελετηθεί αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2x^2 - 3x$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{2(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - 2x_0^2 + 3x_0}{h} = \\ \frac{2[(x_0 + h)^2 - x_0^2] - 3h}{h} &= \frac{2h(2x_0 + h) - 3h}{h} = 4x_0 + 2h - 3 \end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$f'(x_0) = 4x_0 - 3, \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Έτσι ορίζεται μια νέα συνάρτηση, η $f'(x) = 4x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ονομάζεται **παράγωγος της f** .

Ο ορισμός της παραγώγου συνάρτησης f' είναι απλός όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ανοιχτό διάστημα ή ένωση ανοιχτών διαστημάτων, ενώ γίνεται πιο πολύπλοκος, όταν η f ορίζεται σε κλειστό διάστημα ή ένωση κλειστών διαστημάτων:

Ορισμός 1: Για μια συνάρτηση $f: (α, β) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f': (α, β) \rightarrow \mathbb{R}$, αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $(α, β)$.

Ορισμός 2: Για μια συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f': [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

- (i) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in (α, β)$
- (ii) Υπάρχουν τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(α + h) - f(α)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(β + h) - f(β)}{h}$$

και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παρατήρηση

Η παράγωγος συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους σε οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής του.

4.3. Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

Αποδεικνύεται εύκολα, με τον ορισμό της παραγώγου, ότι οι βασικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και η παράγωγος συνάρτησή τους δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Συνάρτηση f	Παράγωγος f'
c (σταθερά)	0
x	1
$x^a, a \in \mathbb{R}^*, x > 0$	ax^{a-1}
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$
e^x	e^x
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$

Παρατήρηση

Ο τύπος παραγώγισης της συνάρτησης $f(x) = x^a$, $x > 0$ και $a \in \mathbb{R}^*$, καλύπτει ουσιαστικά την παραγώγιση τριών ειδών συναρτήσεων:

- (i) Δυνάμεις του x , π.χ. x^7 , x^4 κ.λπ.
- (ii) Κλάσματα δυνάμεων του x , π.χ. $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^7}$ κ.λπ.
- (iii) Ρίζες του x , π.χ. $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $\sqrt[5]{x^2}$ κ.λπ.

Παραδείγματα

Παράδειγμα (i)

Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^5$.

Λύση

Είναι $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$.

Παράδειγμα (ii)

Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x^6}$.

Λύση

Είναι $f': \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) = \left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$.

Παράδειγμα (iii)

Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Λύση

Είναι $f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4 x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4 \sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{4x}$$

4.4. Κανόνες Παραγωγίσιμης

Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g, cf$ με c σταθερά, $f \cdot g, \frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) είναι παραγωγίσιμες στο A και ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες παραγωγίσιμης:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Επιπλέον, αν ορίζεται η σύνθεση δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε είναι και αυτή παραγωγίσιμη συνάρτηση, σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα, που ονομάζεται «κανόνας της αλυσίδας»:

Θεώρημα (Κανόνας της αλυσίδας)

Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

4.5. Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Όπως είδαμε στην §4.1 η στιγμιαία ταχύτητα v ενός κινητού αποτελούσε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης θέσης S του κινητού, ενώ η επιτάχυνση γ , με τη σειρά της αποτελούσε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του κινητού. Επομένως, ισχύει ότι:

$$S'(t) = v(t) \quad \text{και} \quad v'(t) = \gamma(t)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι το ακόλουθο:

«Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση $\gamma(t)$ ως προς τη συνάρτηση θέσης $S(t)$, παρακάμπτοντας την ταχύτητα $v(t)$;»

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της παραγώγου της συνάρτησης θέσης, δηλαδή:

$$\gamma(t) = (S'(t))'$$

την οποία ονομάζουμε **δεύτερη παράγωγο** της συνάρτησης S και τη συμβολίζουμε με $S''(t)$.

Γενικότερα, έχουμε ότι:

Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και η παράγωγος συνάρτηση $f': A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι και αυτή παραγωγίσιμη στο A , τότε ορίζεται η δεύτερη παράγωγος $f'': A \rightarrow \mathbb{R}$ της συνάρτησης f , ώστε $f''(x) = (f'(x))'$.

Ανάλογα, ορίζονται και μεγαλύτερης τάξης παράγωγοι μιας συνάρτησης f τις οποίες συμβολίζουμε με: $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, ...

Εφαρμογές

Οικονομικά Μαθηματικά

Τα οικονομικά μαθηματικά ασχολούνται κυρίως με το ρυθμό μεταβολής οικονομικών ποσοτήτων. Ένας οικονομολόγος δεν ασχολείται με την τιμή του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος (ΑΕΠ) μιας χώρας, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αλλά με τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής του και ειδικότερα με το αν αυξάνει ή φθίνει.

Ανάλογα, ένας επιχειρηματίας ενδιαφέρεται για το συνολικό κόστος $K(x)$ μιας δεδομένης παραγωγής x προϊόντων, καθώς και για το ρυθμό μεταβολής $K'(x)$ του συνολικού κόστους ως συνάρτηση της παραγωγής x προϊόντων.

Επίσης, ενδιαφέρεται για το μέσο κόστος $K_\mu(x)$ παραγωγής x μονάδων προϊόντος το οποίο ισούται με το λόγο $\frac{K(x)}{x}$, του συνολικού κόστους $K(x)$ με τις x μονάδες προϊόντος που παράγονται.

Εφαρμογή 1

Μια βιομηχανία ψυγείων υπολόγισε ότι το συνολικό κόστος παραγωγής x ψυγείων την εβδομάδα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 2000 + 50x - \frac{x^2}{50} \text{ χιλιάδες δραχμές για } 0 \leq x \leq 400$$

- (α) Πόσο κοστίζει η παραγωγή του 151^{ου} ψυγείου;
- (β) Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κόστους, όταν η βιομηχανία παράγει 150 ψυγεία την εβδομάδα;
- (γ) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των (α) και (β).

Λύση

- (α) Το κόστος του 151^{ου} ψυγείου δίνεται από τη διαφορά:

$$K(151) - K(150) = 9093,98 - 9050 = 43,98 = 43980 \text{ δραχμές}$$

- (β) Για το ρυθμό μεταβολής έχουμε $K'(x) = -\frac{x}{25} + 50$, οπότε:

$$K'(150) = 44 = 44000 \text{ δρχ./εβδομάδα}$$

- (γ) Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής 150 ψυγείων βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή του κόστους παραγωγής του 151^{ου} ψυγείου. Αυτό ισχύει αν δούμε τη διαφορά $K(151) - K(150)$ ως ρυθμό μεταβολής:

$$K(151) - K(150) = \frac{K(151) - K(150)}{151 - 150} = \frac{K(150 + h) - K(150)}{h}$$

όπου $h = 1$. Δηλαδή, η διαφορά $K(151) - K(150)$ είναι ακριβώς ο μέσος ρυθμός μεταβολής στο διάστημα $[150, 151]$.

Έτσι, όταν οι τιμές του h είναι αρκετά μικρές, μπορούμε να έχουμε την εξής προσέγγιση:

$$K(151) - K(150) = \frac{K(151) - K(150)}{1} = \frac{K(150 + h) - K(150)}{h} \approx$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(150 + h) - K(150)}{h} = K'(150)$$

Εφαρμογή 2

Το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 20 + \frac{400}{x} \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

- (α) Να βρεθεί η συνάρτηση μέσου κόστους.
 (β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους.
 (γ) Να συγκρίνετε τους ρυθμούς μεταβολής του συνολικού και του μέσου κόστους όταν $x = 10$.

Λύση

- (α) Το μέσο κόστος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{20}{x} + \frac{400}{x^2}$$

(β) Είναι $K'_\mu(x) = -\frac{20}{x^2} - \frac{800}{x^3}$.

(γ) Είναι $K'(x) = -\frac{400}{x^2}$. Επομένως, $K'(10) = -4$, ενώ $K'_\mu(10) = -1$.

Εφαρμογή 3 (Συνάρτηση Εσόδων)

Μια αυτοκινητοβιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση μεταξύ της τιμής T ενός νέου μοντέλου αυτοκινήτου και της ζητούμενης ποσότητας x αυτοκινήτων του μοντέλου αυτού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$T(x) = -0,2x + 4000 \text{ χιλιάδες δραχμές για } 0 \leq x \leq 10000$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση $E(x)$ των εσόδων της αυτοκινητοβιομηχανίας.

(β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης εσόδων.

(γ) Να υπολογισθεί το $E'(1000)$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση εσόδων δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = xT(x) = -0,2x^2 + 4000x \text{ χιλιάδες δρχ.}$$

(β) Ο ρυθμός μεταβολής της $E(x)$ είναι:

$$E'(x) = -0,4x + 4000$$

(γ) Έχουμε ότι: $E'(1000) = -400 + 4000 = 3600$.

Εφαρμογή 4 (Συνάρτηση Κέρδους)

Ας θεωρήσουμε στην προηγούμενη εφαρμογή ότι το κόστος κάθε αυτοκινήτου, ως συνάρτηση των x μονάδων αυτοκινήτου που παράγονται, δίνεται από τη σχέση:

$$K(x) = 950x + 250000 \text{ χιλιάδες δραχμές για } 0 \leq x \leq 10000$$

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κέρδους P .

(β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους.

(γ) Να υπολογίσετε το $P'(4000)$.

Λύση

(α) Είναι:

$$P(x) = E(x) - K(x) = -0,2x^2 + 4000x - 950x - 250000 = -0,2x^2 + 3050x - 250000 \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

(β) Είναι $P'(x) = -0,4x + 3050$.

(γ) Έχουμε ότι $P'(4000) = -1600 + 3050 = 1450$.

Εφαρμογή 5

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \log_a x$, για $x > 0$ και $0 < a \neq 1$

(ii) $f_2(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, με $a_v \neq 0$

(iii) $f_3(x) = \varepsilon \phi x$, για $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

(iv) $f_4(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$

Λύση

Έχουμε ότι:

(i) $f_1'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}$, για $x > 0$.

(ii) $f_2'(x) = v a_v x^{v-1} + (v-1) a_{v-1} x^{v-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$.

(iii) $f_3'(x) = \left(\frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} \right)' = \frac{(\eta \mu x)' \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x (\sigma \upsilon \nu x)'}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{\sigma \upsilon \nu^2 x + \eta \mu^2 x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$.

(iv) $f_4'(x) = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a$.

Εφαρμογή 6

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = -\frac{1}{g(x)}$, με $g(x) \neq 0$

(ii) $f_2(x) = 2 \sqrt{g(x)}$, με $g(x) > 0$

(iii) $f_3(x) = \ln(g(x))$, με $g(x) > 0$

(iv) $f_4(x) = \frac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, με $g(x) > 0$ και $\alpha \neq -1$

(v) $f_5(x) = e^{g(x)}$

Λύση

Έχουμε ότι:

(i) $f_1'(x) = -\left(-\frac{1}{g^2(x)}\right)g'(x) = \frac{g'(x)}{g^2(x)}$

- (ii) $f_2'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$
- (iii) $f_3'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
- (iv) $f_4'(x) = \frac{(\alpha + 1) g^\alpha(x)}{\alpha + 1} g'(x) = g^\alpha(x) g'(x)$
- (v) $f_5'(x) = e^{g(x)} g'(x)$

Εφαρμογή 7

- (α) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (β) Να βρεθεί η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x} \eta\mu x$.

Λύση

- (α) Είναι $f'(x) = \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}$ και $f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3\alpha^2)}{(x^2 + \alpha^2)^3}$.
- (β) Είναι $f'(x) = e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$, $f''(x) = -2e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$ και $f^{(3)}(x) = 2e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

- (i) $f_1(x) = x^2 \ln x$, για $x > 0$
- (ii) $f_2(x) = x \eta\mu x \ln x$, για $x > 0$
- (iii) $f_3(x) = x^2 \epsilon\phi x$, για $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
- (iv) $f_4(x) = 2^x \log_2 x$, για $x > 0$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

- (i) $f_1(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 3}$, για $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

(ii) $f_2(x) = \sigma\phi x$, για $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \eta\mu(2x + 5)$

(ii) $f_2(x) = \ln(\eta\mu x)$, για $\eta\mu x > 0$

(iii) $f_3(x) = (2x - 3x^2)^3$

Άσκηση 4

(α) Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f_1(x) = xe^x$.

(β) Να υπολογισθεί η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης $f_2(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$, για $x > 2$.

(γ) Να υπολογισθεί η τέταρτη παράγωγος της συνάρτησης $f_3(x) = \frac{x+3}{x-3}$, για $x \neq 3$.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{ax}x^v$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί η 1000-οστή παράγωγος των συναρτήσεων $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$.

Άσκηση 3

(α) Να παραγωγίσετε τη γνωστή ταυτότητα:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^v = \frac{x^{v+1} - 1}{x - 1}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + v \cdot 3^{v-1}$$

Άσκηση 4

Έστω P πραγματικό πολυώνυμο για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$(P'(x))^2 = P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί ο τύπος του πολυωνύμου P .

Πρακτικές Εφαρμογές**Άσκηση 1**

Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση S στα t πρώτα δευτερόλεπτα της εκκίνησής του ίση με:

$$S(t) = t^3 + at^2 + bt \text{ m, } 0 \leq t \leq 10$$

- (α) Να βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , με $0 \leq t \leq 10$.
- (β) Να βρείτε για ποιες τιμές του a το αυτοκίνητο επιβραδύνει μετά από τα 6 πρώτα sec της κίνησής του.

Άσκηση 2

Έστω το γνωστό από τον ηλεκτρισμό δυναμικό (V):

$$V = \frac{q}{r} \text{ (} q = \text{φορτίο, } r = \text{απόσταση)}$$

Να αποδείξετε ότι για το δυναμικό αυτό ισχύει:

$$V''(r) + \frac{2}{r} V'(r) = 0$$

Άσκηση 3

Μια ομάδα βιολόγων σε ένα ωκεανογραφικό ινστιτούτο προτείνει να ληφθούν μια σειρά από προληπτικά μέτρα για τη διάσωση ενός συγκεκριμένου είδους φάλαινας από την εξαφάνιση. Μετά την εφαρμογή των μέτρων αυτών ο αριθμός (N) των φαλαινών εκτιμάται ότι θα μεταβάλλεται με τον χρόνο (t) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600, 0 \leq t \leq 10$$

Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τον 2^ο και 6^ο χρόνο, καθώς και πόσες φάλαινες θα υπάρχουν τον 8^ο χρόνο.

Άσκηση 4

Τα οργανικά απόβλητα που ρίχνονται σε έναν υδάτινο αποδέκτη, π.χ. σε μια λίμνη, ελαττώνουν κατ' αρχήν το οξυγόνο της λίμνης έως ότου

η φύση δράσει έτσι ώστε να υπάρξει πάλι ισορροπία στο οικοσύστημα. Για ένα τέτοιο οικοσύστημα το οξυγόνο μεταβάλλεται ως προς το χρόνο t ως εξής:

$$f(t) = 100 \left(\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + 4} \right), 0 \leq t < 8$$

Πώς αλλάζει το οξυγόνο 1, 2 και 3 ημέρες μετά τη ρίψη ενός φορτίου οργανικών αποβλήτων;

Άσκηση 5

Ο αριθμός των μελών ενός γυμναστηρίου που άνοιξε πριν από μερικά χρόνια δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$N(t) = 100(64 + 4t)^{\frac{2}{3}}, 0 \leq t \leq 52$$

όπου N είναι ο αριθμός των μελών στην αρχή μιας εβδομάδας t . Πώς αυξανόταν ο αριθμός νέων μελών αρχικά ($t = 0$), και πώς στην αρχή της 40^{ης} εβδομάδας; Ποιός ο αριθμός των μελών τις δύο αυτές χρονικές στιγμές;

Άσκηση 6



Η μέση συγκέντρωση του CO (μονοξειδίου του άνθρακα) στην ατμόσφαιρα δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0,881443t^4 - 1,45533t^3 + 0,695876t^2 + 2,87801t + 293, t \geq 0$$

όπου t είναι η μονάδα μέτρησης του χρόνου και παίρνει τιμές $t = 0, 1, 2, \dots$ και κάθε μονάδα χρόνου αντιστοιχεί σε περίοδο 40 ετών ($t = 0$ το 1860) και η f μετριέται σε μέρη στο εκατομμύριο ανά κυβικό εκατοστό (ppm/cm³). Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης στην αρχή του αιώνα ($t = 1$) και στην αρχή του 1990 ($t = 3,5$);

4.6. Παράγουσα Συνάρτηση

Ας θυμηθούμε ξανά το παράδειγμα του ηλεκτρομαγνητικού τρένου, όπου μελετήσαμε το εξής πρόβλημα:

«Αν γνωρίζουμε τη θέση του τρένου σε κάθε χρονική στιγμή t , μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητά του την ίδια χρονική στιγμή;»

Όπως είδαμε στην §4.1, αν συμβολίσουμε με f τη συνάρτηση θέσης του τρένου, τότε η ταχύτητά του σε κάθε χρονική στιγμή t , θα είναι η

$f'(t)$, δηλαδή η παράγωγος συνάρτηση της f . Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή:

«Αν γνωρίζουμε την ταχύτητα ενός τρένου σε κάθε χρονική στιγμή t , μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση θέσης του την ίδια χρονική στιγμή;»

Έστω ότι η συνάρτηση της ταχύτητας ως προς το χρόνο είναι η $v(t) = 8t$, για κάθε $t > 0$. Αφού $v(t) = S'(t)$ θα πρέπει να κάνουμε ακριβώς την αντίστροφη διαδικασία της παραγωγίσιμης, δηλαδή να υπολογίσουμε μια συνάρτηση S , η οποία όταν παραγωγισθεί να μας δώσει τη συνάρτηση της ταχύτητας $v(t) = 8t$. Μια τέτοια συνάρτηση S είναι η:

$$S(t) = 4t^2, \text{ για } t > 0, \text{ αφού } S'(t) = 8t = v(t),$$

η οποία ονομάζεται **παράγουσα** συνάρτηση της v .

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

τότε η F λέγεται παράγουσα συνάρτηση της f στο διάστημα Δ .

Παρατήρηση

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι μια παράγουσα της $v(t) = 8t$ ήταν η $S(t) = 4t^2$. Θα μπορούσε όμως να ήταν και η $S(t) = 4t^2 + 5$ ή $S(t) = 4t^2 - 32$, αφού πάλι:

$$(4t^2 + 5)' = (4t^2 - 32)' = 8t.$$

Γενικότερα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S(t) = 4t^2 + c$ είναι παράγουσα της $v(t)$ για όλες τις τιμές της σταθεράς c .

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχουν και άλλες αρχικές της v . Η απάντηση είναι αρνητική όπως εκφράζει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Δίνεται η συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, με Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f . Τότε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f είναι της μορφής $F + c$, όπου c σταθερά.

Πίνακας Παραγουσών Βασικών Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
0	c
1	$x + c$
$x^a, a \neq -1, x > 0$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$\eta\mu x + c$
$\eta\mu x$	$-\sin x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$\epsilon\phi x + c$
$\frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$-\sigma\phi x + c$

Παρατήρηση

Η αρχική της συνάρτησης $f(x) = x^a$, με $a \neq -1$ και $x > 0$, καλύπτει τρεις κατηγορίες συναρτήσεων:

- (i) Δυνάμεις του x , π.χ. η παράγουσα της $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, είναι $F(x) = \frac{x^4}{4} + c, x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Κλάσματα δυνάμεων του x , π.χ. η παράγουσα της $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι η $F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c, x \in \mathbb{R}^*$.
- (iii) Ρίζες του x , π.χ. η παράγουσα της $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0$ είναι η $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + c = \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + c, x > 0$.

Πίνακας Παραγουσών Σύνθετων Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
$\frac{g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$	$-\frac{1}{g(x)} + c$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}, g(x) > 0$	$2\sqrt{g(x)} + c$
$\frac{g'(x)}{g(x)}, g(x) > 0$	$\ln(g(x)) + c$
$g^a(x) g'(x), a \in \mathbb{R}, a \neq -1, g(x) > 0$	$\frac{(g(x))^{a+1}}{a+1} + c$
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)} + c$

4.7. Διαφορικές Εξισώσεις

Η παράγωγος μιας συνάρτησης, όπως είδαμε, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους. Οι περισσότεροι φυσικοί νόμοι παρουσιάζουν σχέσεις μεταξύ των ρυθμών μεταβολής διαφόρων μεγεθών. Στην πραγματικότητα τα περισσότερα φυσικά μοντέλα εκφράζονται ως εξισώσεις, που περιέχουν τις παραγώγους ενός μεγέθους. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις. Η μελέτη των Διαφορικών Εξισώσεων αποτελεί ένα μεγάλο κεφάλαιο στην Ιστορία των Επιστημών, ενώ αποτελούν τον κλάδο των Μαθηματικών με τις περισσότερες και ίσως σημαντικότερες εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο.

Ορισμός 1: Διαφορική εξίσωση λέγεται μια εξίσωση που περιέχει παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης $y = f(x)$.

Δηλαδή, μια διαφορική εξίσωση μπορεί να περιέχει κάποιες από τις παραγώγους της συνάρτησης: $y', y'', \dots$, μπορεί να περιέχει την ίδια τη συνάρτηση y , καθώς και την ανεξάρτητη μεταβλητή x , όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα:

$$x^2 y'' + 2xy' + y = x^2 + 2 \quad (1)$$

$$[f^{(3)}(x)]^2 + 2 f''(x) f'(x) + x^2 [f'(x)]^3 = 0 \quad (2)$$

$$[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}} = ky \quad (3)$$

Ορισμός 2: Ως τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης ορίζουμε την τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται σε αυτή.

Για παράδειγμα, έχουμε στις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις ότι η διαφορική εξίσωση (1) είναι δευτέρης τάξης, η (2) είναι τρίτης τάξης, ενώ η (3) είναι πρώτης τάξης.

Ορισμός 3: Ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ν-οστής τάξης, θεωρούμε κάθε συνάρτηση που είναι ν-φορές παραγωγίσιμη και την ικανοποιεί.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y = cx^2$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $xy' = 2y$.

• Προβλήματα Αρχικών Τιμών

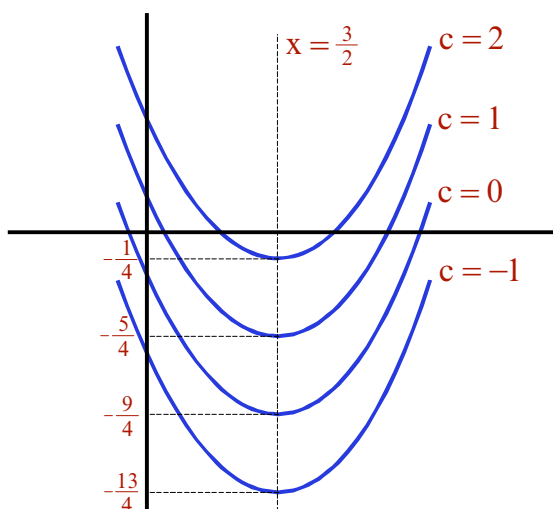
Το βασικό πρόβλημα στην επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ότι ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία της παραγωγίσιμης – χρησιμοποιώντας δηλαδή την παράγουσα συνάρτηση – καταλήγουμε όχι σε μία, αλλά σε άπειρες λύσεις που εξαρτώνται από την τιμή μιας σταθεράς.

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $f'(x) = 2x - 3$.

Λύση

Η παράγουσα της f' είναι η $f(x) = x^2 - 3x + c$ και είναι λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης για όλες τις τιμές της σταθεράς c . Καταλήξαμε λοιπόν σε άπειρες λύσεις της μορφής:



Για να καταλήξουμε σε μοναδική λύση του προβλήματος, δηλαδή σε μοναδική τιμή της σταθεράς c , χρειαζόμαστε για το συγκεκριμένο παράδειγμα, μια επιπλέον τιμή για τη συνάρτηση $y = f(x)$, π.χ. $f(1) = 0$. Τότε θα έχουμε ότι $c = 2$ και η μοναδική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Η τιμή αυτή της f καλείται **αρχική τιμή** και το πρόβλημα που περιέχει μια διαφορική εξίσωση και κάποιες αρχικές τιμές καλείται **πρόβλημα αρχικών τιμών**.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Έστω $F(x)$ μια παράγουσα της $f(x)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η παράγουσα της $f(ax + \beta)$ είναι η $\frac{1}{a} F(ax + \beta) + c$.
- (β) Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων $f(x) = e^{ax+\beta}$ και $g(x) = (ax + \beta)^v$, όπου $v \in \mathbb{N}$.

Λύση

- (α) Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{F(ax + \beta)}{a} + c \right)' = \frac{F'(ax + \beta)}{a} (ax + \beta)' = \frac{aF'(ax + \beta)}{a} = f(ax + \beta)$$

(β) Η παράγουσα της $f(x) = e^{ax+\beta}$ είναι η $F(x) = \frac{e^{ax+\beta}}{a} + c$, ενώ της

$$g(x) = (ax + \beta)^v \text{ είναι η } G(x) = \frac{(ax + \beta)^{v+1}}{(v+1)a} + c.$$

Εφαρμογή 2 (Μοντέλα Απεριόριστης Ανάπτυξης)

Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι η μορφή συγκεκριμένων διαφορικών εξισώσεων χαρακτηρίζουν πολλές εφαρμογές τους από την πραγματικότητα. Ας θεωρήσουμε δύο μεγέθη x, y που συνδέονται από τη θετική συνάρτηση f ώστε $y = f(x)$. Τότε η διαφορική εξίσωση:

$$y' = Ky$$

περιγράφει μαθηματικά μοντέλα απεριόριστης ανάπτυξης. Η θετική σταθερά K ονομάζεται **σταθερά αναλογίας**.

Ας επιλύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση. Έχουμε ότι:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} = K \quad \text{ή} \quad (\ln f(x))' = (Kx)'$$

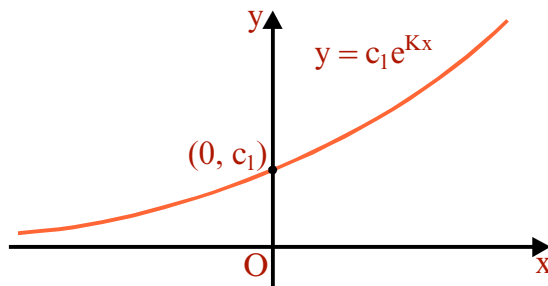
Επομένως:

$$\ln(f(x)) = Kx + c \quad \text{ή} \quad f(x) = e^{Kx+c} = e^c e^{Kx}$$

Η ποσότητα e^c παραμένει θετική σταθερά και τη συμβολίζουμε με c_1 . Επομένως, η λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$y = f(x) = c_1 e^{Kx}$$

και αυξάνεται απεριόριστα.



Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1 , χρειάζεται και μια αρχική συνθήκη.

Εφαρμογή 3 (Μοντέλα Περιορισμένης Ανάπτυξης)

Ας θεωρήσουμε κατόπιν μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y' = K(c - y)$$

όπου K, c θετικές σταθερές και $y = f(x) < c$. Για να επιλύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση, αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = c - f(x) \quad \text{ή} \quad f(x) = c - g(x).$$

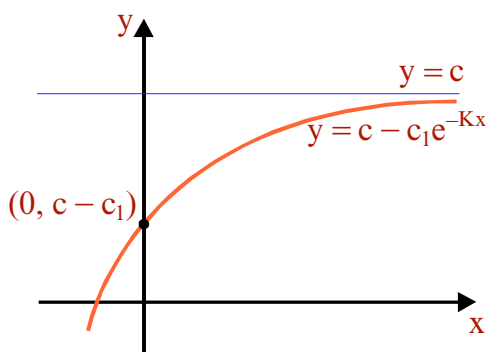
Τότε, αντικαθιστώντας στη δοσμένη διαφορική εξίσωση θα έχουμε ότι:

$$(c - g(x))' = K(c - c + g(x)) \quad \text{ή} \quad g'(x) = -Kg(x).$$

Λύνοντας όπως στο προηγούμενο μοντέλο έχουμε ότι:

$$g(x) = c_1 e^{-Kx} \quad \text{ή} \quad c - f(x) = c_1 e^{-Kx} \quad \text{ή} \quad f(x) = c - c_1 e^{-Kx}$$

η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = c$, όταν $x \rightarrow +\infty$ (βλ. Σχήμα).

**Εφαρμογή 4**

Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού P ως προς το χρόνο έχει περιγραφεί σε πολλά διαφορετικά μοντέλα στη βιβλιογραφία, π.χ. η κλασική εξίσωση του Malthus:

$$P' = KP \tag{M}$$

ή η λογιστική καμπύλη περιορισμένης ανάπτυξης:

$$P' = r(M - P)P \quad (r = \text{σταθερά}, M = \text{μέγιστος πληθυσμός}) \tag{Λ}$$

Επίσης δίνεται ότι για $t = t_0$ ισχύει ότι $P = P_0$. Να εκφράσετε τον πληθυσμό P ως συνάρτηση του χρόνου για τα δύο μοντέλα.

Λύση**Μοντέλο του Malthus**

Είναι (βλ. Εφαρμογή 2): $\ln P = Kt + c$.

Για $t = t_0$, έχουμε ότι $\ln P_0 = Kt_0 + c$ ή $c = \ln P_0 - Kt_0$. Επομένως:

$$\ln P = Kt + \ln P_0 - Kt_0 \quad \text{ή} \quad \ln \frac{P}{P_0} = K(t - t_0) \quad \text{ή} \quad P = P_0 e^{K(t-t_0)}.$$

Λογιστικό Μοντέλο

Έχουμε ότι (βλ. Εφαρμογή 3):

$$\ln \frac{P}{M - P} = rMt + c$$

Για $t = t_0$ ισχύει $P = P_0$ και $c = \ln \frac{P_0}{M - P_0} - rMt_0$, οπότε τελικά έχουμε

(για $P < M$) ότι:

$$\ln \frac{P}{M - P} - \ln \frac{P_0}{M - P_0} = rM(t - t_0) \quad \text{ή} \quad \ln \frac{P(M - P_0)}{P_0(M - P)} = rM(t - t_0) \quad \text{ή}$$

$$P(t) = \frac{P_0 M e^{rM(t-t_0)}}{M - P_0 + P_0 e^{rM(t-t_0)}}$$

Το λογιστικό μοντέλο εκφράζει καλύτερα την πραγματικότητα, όπως προκύπτει από σύγκριση με εκτενή πειραματικά δεδομένα.

Εφαρμογή 5

Να αποδειχθεί ο γνωστός από τη Φυσική τύπος που συνδέει την απόσταση S με την επιτάχυνση γ και το χρόνο t :

$$S = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + S_0$$

όπου v_0 είναι η αρχική ταχύτητα (για $t = 0$) και S_0 η αρχική θέση του κινητού.

Λύση

Η επιτάχυνση δίνεται από τη δεύτερη παράγωγο της απόστασης ως προς το χρόνο:

$$\gamma = S''(t) \tag{1}$$

ενώ η ταχύτητα v είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ως προς το χρόνο: $v(t) = S'(t)$. Άρα, από την (1) έχουμε ότι:

$$S'(t) = \gamma t + c \tag{2}$$

Η σταθερά c μπορεί να υπολογισθεί από την αρχική συνθήκη για $t = 0$, όπου:

$$v(0) = v_0 = c = \text{αρχική ταχύτητα.}$$

Επομένως $S'(t) = \gamma t + v_0$ και έχουμε ότι: $S(t) = \gamma \frac{t^2}{2} + v_0 t + c_1$.

Για $t = 0$ βρίσκουμε ότι: $c_1 = S(0) = S_0 =$ αρχική θέση, οπότε καταλήγουμε ότι:

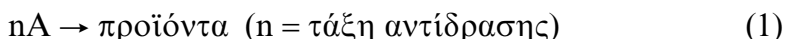
$$S(t) = \frac{\gamma t^2}{2} + v_0 t + S_0$$

Παρατήρηση

Αν $S_0 = v_0 = 0$ το S δίνεται από την απλή σχέση: $S = \frac{1}{2} \gamma t^2$.

Εφαρμογή 6

Ο 20^{ος} αιώνας μπορεί να θεωρηθεί επαναστατικός, ανάμεσα στα άλλα, και από την οπτική γωνία του πλήθους νέων χημικών προϊόντων που παρασκευάστηκαν. Κλειδί για την παρασκευή τους η "χημική αντίδραση" π.χ.



Η μεταβολή της σύστασης x του συστατικού A (ή των συστατικών αν είναι περισσότερα από ένα) με το χρόνο t παρίσταται από μια διαφορική εξίσωση, π.χ. για την (1):

$$x' = K(a - x)^n$$

όπου K η σταθερά ταχύτητας, a η αρχική συγκέντρωση και n η τάξη της αντίδρασης. Να υπολογίσετε τη μεταβολή του x ως προς t για τις εξής περιπτώσεις:

(α) μηδενικής τάξης αντίδραση ($n = 0$)

(β) 1^{ης} τάξης αντίδραση ($n = 1$)

Λύση

(α) Έχουμε ότι $x' = K$ ή $x = Kt + c$.

Για $t = 0$ είναι προφανές ότι $x = 0$ (δεν έχει αντιδράσει καθόλου το συστατικό A) άρα $c = 0$ και $x(t) = Kt$.

(β) Έχουμε ότι:

$$x' = K(a - x) \quad \text{ή} \quad \frac{(a - x)'}{a - x} = -K \quad \text{ή} \quad \ln(a - x) = -Kt + c.$$

Για $t = 0$ έχουμε $x = 0$, οπότε $c = \ln a$. Άρα:

$$\ln(a - x) = -Kt + \ln a \quad \text{ή} \quad \ln \frac{a}{a - x} = Kt \quad \text{ή} \quad \frac{a}{a - x} = e^{Kt} \quad \text{ή}$$

$$x(t) = a(1 - e^{-Kt}).$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε την παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \frac{1}{x+2}$, για $x > -2$

(ii) $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, για $x \neq 0$

(iii) $f_3(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, για $x \neq 0$

(iv) $f_4(x) = \varepsilon\varphi^2 x$, για $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις της δεύτερης στήλης είναι οι παράγουσες των συναρτήσεων της πρώτης:

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
$\sigma\varphi x$, για $\eta\mu x > 0$	$\ln(\eta\mu x)$, για $\eta\mu x > 0$
$\ln x$, για $x > 0$	$x(\ln x - 1)$, για $x > 0$

Άσκηση 3

Να βρεθεί η παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha \neq 1$

(ii) $f_2(x) = \log_a x$, για $x > 0$ και $0 < a \neq 1$

(iii) $f_3(x) = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$, για $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε την παράγουσα συνάρτηση της $f(x) = \frac{1}{1 + \eta\mu x}$,

$x \neq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Άσκηση 2

Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$e^{-x}(y' - y) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $y = f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $y' = 2x^3 - 3$ και ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

Άσκηση 4

Δίνεται συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} f''(x) = 2x + 5 \\ f'(1) = 2 \\ f(1) = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης και μια 2^{ης}, τις οποίες ικανοποιεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Ένας καπετάνιος ιστιοπλοϊκού χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του δρομόμετρου (όργανο που μετράει την ταχύτητα του σκάφους) καταλήγει ότι η ταχύτητα του σκάφους του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$v(t) = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{100} \text{ ναυτικά μίλια/min, για } 0 \leq t \leq 30$$

Να βρεθεί η συνάρτηση θέσης του ιστιοπλοϊκού και να βρεθεί πόσα μίλια διήνυσε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 10 \text{ min}$ έως $t = 20 \text{ min}$.

Άσκηση 2

Η τωρινή κυκλοφορία του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β' της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας είναι 300 αντίγραφα την εβδομάδα. Η ΕΜΕ υπολογίζει ότι το περιοδικό θα αυξήσει την κυκλοφορία του με ρυθμό $\frac{1}{5} \sqrt[5]{t^4} + \frac{2}{9}$ τεύχη ανά εβδομάδα (θεωρώντας πάντα τον κοντινότερο ακέραιο αριθμό τευχών), τα επόμενα τρία χρόνια. Ποιά θα είναι η κυκλοφορία του περιοδικού μετά από 32 εβδομάδες;

Άσκηση 3

Στην Αθήνα μια καλοκαιρινή ημέρα, το μονοξειδίο του άνθρακα είναι 2 μέρη στο εκατομμύριο (ppm). Το Υπουργείο Περιβάλλοντος προβλέπει ότι αν δεν παρθούν αυστηρά μέτρα κατά του νέφους, η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{1}{1000} (t^2 + 20t + 100) \text{ μέρη ανά εκατομμύριο (ppm)}$$

σε t χρόνια από τώρα. Ποιά θα είναι η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα σε 3 χρόνια από σήμερα;

Άσκηση 4

Το γνωστό σύστημα "εκκρεμές – μάζα" περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$mx'' = -kx$$

όπου x η απόσταση ως συνάρτηση του χρόνου t και k σταθερά.

Να αποδείξετε ότι μια λύση που ικανοποιεί αυτή τη διαφορική είναι της μορφής:

$$x = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \eta\mu(\omega t)$$

με $\omega^2 = \frac{k}{m}$ και c_1, c_2 σταθερές.

4.8. Μονοτονία Συνάρτησης

Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές της παραγώγου είναι ο προσδιορισμός της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα (α, β) , αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1 και x_2 στο (α, β) ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$, εφόσον $x_1 < x_2$, ενώ λέγεται γνησίως φθίνουσα αν $f(x_1) > f(x_2)$, εφόσον $x_1 < x_2$. Έχουμε λοιπόν ότι η μονοτονία μιας συνάρτησης εκφράζει αύξηση ή μείωση στις τιμές της, καθώς αυξάνει η ανεξάρτητη μεταβλητή x .

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f με αυστηρά θετικό ρυθμό μεταβολής, καθώς αυξάνουν οι τιμές της μεταβλητής x . Είναι τότε φανερό ότι αντίστοιχα αυξάνουν και οι τιμές της f , δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα αν η παράγωγός της είναι αυστηρά θετική, δηλαδή όταν $f'(x) > 0$.

Αντίστοιχα θα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, αν η παράγωγός της είναι αυστηρά αρνητική, δηλαδή όταν $f'(x) < 0$.

Τέλος, είναι φανερό ότι αν $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερά.

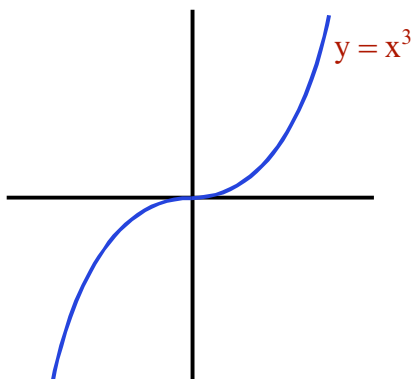
Θεώρημα

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .
- (ii) Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β) .

Παρατήρηση

Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στο ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος. Ως αντιπαράδειγμα έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$. Η f είναι γνησίως αύξουσα αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι αν $x_1 < x_2$ τότε και $x_1^3 < x_2^3$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Όμως η παράγωγος $f'(x) = 3x^2$ δεν είναι αυστηρά θετική, αφού μηδενίζεται για $x = 0$.

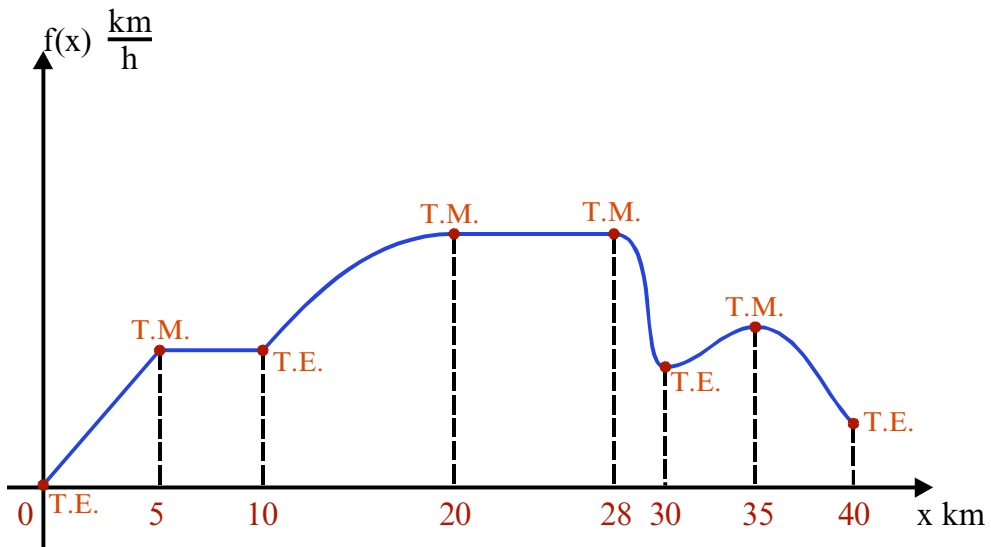


4.9. Ακρότατα Συνάρτησης

Μια δεύτερη πολύ σημαντική εφαρμογή της παραγώγου, είναι ο προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης, δηλαδή των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων της συνάρτησης.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση ταχύτητας f ενός αθλητή που τρέχει στον μαραθώνιο στον οποίο καλύπτει συνολικά 40 km.



Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5)$, δηλαδή ο αθλητής αυξάνει διαρκώς την ταχύτητά του κατά τα 5 πρώτα km, κατόπιν η f είναι σταθερή στο διάστημα $(5, 10)$, δηλαδή ο αθλητής κάνει συντήρηση δυνάμεων διατηρώντας σταθερή την ταχύτητά του στο διάστημα αυτό. Ανάλογα, αυξάνει διαρκώς την ταχύτητά του στο διάστημα $(10, 20)$ και τη διατηρεί σταθερή στο διάστημα $(20, 28)$. Λόγω κόπωσης, η απόδοσή του πέφτει και η ταχύτητά του μειώνεται στο διάστημα $(28, 30)$, κατόπιν όμως ξαναπροσπαθεί αυξάνοντας την ταχύτητά του στο διάστημα $(30, 35)$. Τέλος, η ταχύτητά του είναι γνησίως φθίνουσα έως ότου τερματίσει.

Η προηγούμενη περιγραφή της μονοτονίας της συνάρτησης f δεν περικλείει τα σημεία $x_0 = 0, 5, 10, 20, 28, 30, 35, 40$. Στα σημεία αυτά έχουμε πιθανές θέσεις ακροτάτων καθώς είτε δεν ορίζεται η παράγωγος, είτε όταν ορίζεται είναι ίση με μηδέν, αφού αλλάζει η μονοτονία.

Με απλή λογική μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x_0 = 0, 10, 30, 40$ και τοπικά μέγιστα στα σημεία $x_0 = 5, 20, 28, 35$.

Ορισμός: (α) Μια συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = x_0$, αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0 , τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(β) Μια συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = x_0$, αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0 , τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Επίσης, όπως είδαμε και στο παράδειγμα, ισχύει το εξής γενικό συμπέρασμα για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

Θεώρημα (Fermat)

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

• **Πιθανές Θέσεις Τοπικών Ακροτάτων Συνάρτησης**

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα και το θεώρημα Fermat, καταλήγουμε ότι υπάρχουν τρεις κατηγορίες σημείων για μια συνεχή συνάρτηση f , που μπορεί να θεωρηθούν ως πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων:

- (i) Τα άκρα διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού της f .
- (ii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f . Τα σημεία αυτά καλούνται **γωνιακά σημεία** της f .
- (iii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία υπάρχει η παράγωγος της f και είναι ίση με μηδέν. Τα σημεία αυτά καλούνται **στάσιμα σημεία** της f .

Τα γωνιακά και στάσιμα σημεία λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f .

• **Μελέτη Τοπικών Ακροτάτων Συνάρτησης**

Για να καταλήξουμε ότι ένα πιθανό ακρότατο είναι τελικά ακρότατο και για να προσδιορίσουμε το είδος του (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο) χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα δύο κριτήρια:

Κριτήριο 1^{ης} Παραγώγου

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα κρίσιμο σημείο της.

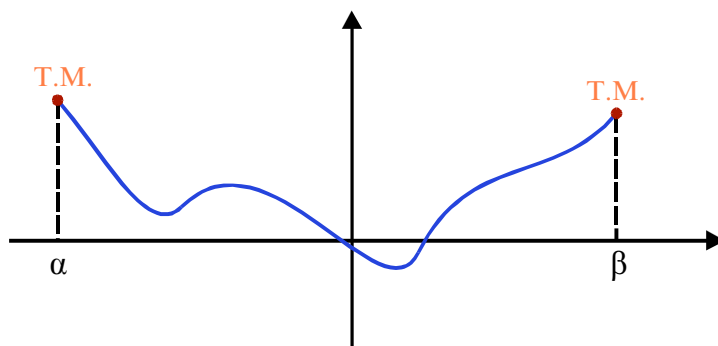
- (i) Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
- (ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- (iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα (a, x_0) και (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

Παρατήρηση

Το κριτήριο της 1^{ης} Παραγώγου μας καλύπτει για τη μελέτη ακροτάτων στα άκρα ενός διαστήματος.

Στο παράδειγμα με το δρομέα είδαμε ότι στο $x_0 = 0$ έχουμε θέση τοπικού ελαχίστου αφού στο διάστημα $(0, 5)$ η f είναι γνησίως αύξουσα ($f' > 0$) και στο $x_0 = 40$ έχουμε πάλι θέση τοπικού ελαχίστου αφού στο διάστημα $(35, 40)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα ($f' < 0$).

Αντίστοιχα, αν η f ξεκινά από αριστερό άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού της και είναι γνησίως φθίνουσα, τότε στο άκρο αυτό παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Αν η f καταλήγει σε δεξιό άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού της και είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάλι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (βλ. Σχήμα).



Το δεύτερο κριτήριο μελέτης τοπικών ακροτάτων είναι περισσότερο εύχρηστο και χρησιμοποιείται για συναρτήσεις που είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες. Συνεπώς, με το κριτήριο αυτό μπορούμε να μελετήσουμε μόνο αν τα στάσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Κριτήριο 2^{ης} Παραγώγου

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f . Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν $f''(x_0) < 0$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν $f''(x_0) > 0$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση κέρδους P , η οποία, όπως είδαμε, δίνεται ως η διαφορά της συνάρτησης εσόδων E και της συνάρτησης κόστους K , δηλαδή:

$$P(x) = E(x) - K(x), \quad x \geq 0$$

όπου x είναι η ποσότητα προϊόντος που παράγεται και πωλείται.

- (α) Ποιά θα είναι η μονοτονία της συνάρτησης κέρδους όταν:
 - (i) Η E είναι γνησίως φθίνουσα και η K γνησίως αύξουσα.
 - (ii) Η E είναι γνησίως αύξουσα και η K γνησίως φθίνουσα.
- (β) Εξάγονται συμπεράσματα για τη μονοτονία της συνάρτησης κέρδους, αν οι συναρτήσεις E και K έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας;
- (γ) Εξηγήστε με οικονομικούς όρους τα (α) και (β).

Λύση

- (α) Είναι $P'(x) = E'(x) - K'(x)$. Επομένως:
 Αν $E'(x) < 0$ και $K'(x) > 0$ θα έχουμε ότι $P'(x) < 0$, δηλαδή η συνάρτηση κέρδους θα είναι γνησίως φθίνουσα.
 Αν είναι $E'(x) > 0$ και $K'(x) < 0$, τότε θα έχουμε ότι $P'(x) > 0$, δηλαδή η P θα είναι γνησίως αύξουσα.
- (β) Δεν εξάγονται συμπεράσματα.
- (γ) Το (α) μας εκφράζει δύο απλά πράγματα:
 - (i) Αν τα έσοδα φθίνουν και το κόστος αυξάνει τότε σίγουρα το κέρδος μικραίνει.
 - (ii) Αν τα έσοδα αυξάνουν και το κόστος μικραίνει τότε σίγουρα το κέρδος αυξάνει.

Εφαρμογή 2

Έστω η συνάρτηση κόστους $K(x)$, κατασκευής x μονάδων προϊόντος και η συνάρτηση μέσου κόστους:

$$K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}, \quad x > 0$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$K'_\mu(x) = \frac{K'(x) - K_\mu(x)}{x}, \quad x > 0$$

(β) Να αποδείξετε ότι η K_μ είναι γνησίως φθίνουσα για όλες τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $K'(x) < K_\mu(x)$.

(γ) Εξηγήστε το αποτέλεσμα του (β) με οικονομικούς όρους.

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$K'_\mu(x) = \frac{x K'(x) - K(x)}{x^2} = \frac{K'(x) - \frac{K(x)}{x}}{x} = \frac{K'(x) - K_\mu(x)}{x}$$

(β) Αν $K'(x) < K_\mu(x)$ τότε και $K'_\mu(x) < 0$, οπότε η K_μ είναι γνησίως φθίνουσα.

(γ) Το αποτέλεσμα του (β) εκφράζει ότι το μέσο κόστος φθίνει, αν καταφέρουμε το οριακό κόστος να διατηρεί τιμές μικρότερες του μέσου κόστους.

Εφαρμογή 3

Να εξετασθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

(α) $f_1(x) = e^x$

(β) $f_2(x) = a^x, 0 < a \neq 1$

(γ) $f_3(x) = \ln x, x > 0$

(δ) $f_4(x) = \log_a x, x > 0$ και $0 < a \neq 1$.

Λύση

(α) Είναι $f'_1(x) = e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f_1 είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

(β) Είναι $f'_2(x) = a^x \ln a$, οπότε αν $a > 1$ η f_2 είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, ενώ αν $0 < a < 1$ η f_2 είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

- (γ) Είναι $f'_3(x) = \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$, οπότε η f_3 είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- (δ) Είναι $f'_4(x) = \frac{1}{x \ln a}$, για $x > 0$, οπότε η f_4 είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ αν $a > 1$, ενώ αν $0 < a < 1$ η f_4 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Εφαρμογή 4

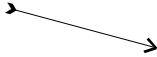
Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα το τριώνυμο:

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{με } a \neq 0$$

Λύση

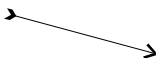
Είναι $f'(x) = 2ax + \beta = 2a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)$. Μοναδική θέση πιθανού ακροτάτου παρουσιάζει στο στάσιμο σημείο $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$.

Αν $a < 0$ έχουμε τον πίνακα τιμών:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$.

Αν $a > 0$ τότε ο πίνακας τιμών γίνεται:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

και η f παρουσιάζει στο $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$ θέση τοπικού ελαχίστου.

Σημείωση: Αν η εφαρμογή ζητούσε μόνο τη μελέτη των ακροτάτων της f , τότε θα χρησιμοποιούσαμε απλούστερα το κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου: $f''(x) = 2a$, οπότε $f''\left(-\frac{\beta}{2a}\right) > 0$ αν $a > 0$ και στο $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$ έχουμε τοπικό ελάχιστο, ενώ $f''\left(-\frac{\beta}{2a}\right) < 0$ αν $a < 0$, οπότε στο $x_0 = -\frac{\beta}{2a}$ έχουμε τοπικό μέγιστο.

Εφαρμογή 5

Έστω ότι μια μεταβλητή ενός πληθυσμού x παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_v$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων της μέτρησης:

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_v)^2$$

γίνεται ελάχιστο στη μέση τιμή, δηλαδή όταν $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v}$.

Λύση

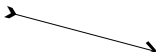
Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_v)^2$$

Τότε έχουμε ότι:

$$f'(x) = 2[(x - x_1) + (x - x_2) + \dots + (x - x_v)] = 2v \left(x - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v} \right)$$

Από τον πίνακα μεταβολών βρίσκουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v}$.

	$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v}$		
x	$-\infty$	v	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f			

Εφαρμογή 6

Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$e^x \geq \kappa x^2, \text{ για κάθε } x > 0$$

Λύση

Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{e^x}{x^2} \geq \kappa, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, η οποία έχει παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^3} (x - 2)$$

Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 2$, οπότε ισχύει ότι:

$$f(x) \geq f(2), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επομένως $\kappa = f(2) = \frac{e^2}{4}$.

Εφαρμογή 7

Να βρείτε όλα τα ζεύγη των αριθμών, που έχουν σταθερό άθροισμα c και δίνουν μέγιστο γινόμενο.

Λύση

Έστω x, z δύο αριθμοί με σταθερό άθροισμα c , δηλαδή:

$$x + z = c \quad \text{ή} \quad z = c - x.$$

Το γινόμενό τους είναι:

$$x \cdot z = x(c - x) = -x^2 + cx.$$

Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = -x^2 + cx$. Έχουμε ότι:

$$f'(x) = -2x + c$$

οπότε η f έχει στάσιμο σημείο στο $x_0 = \frac{c}{2}$. Αφού $f''\left(\frac{c}{2}\right) = -2 < 0$, η f πα-

ρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{c}{2}$. Δηλαδή, τα ζεύγη ίσων αριθμών παρουσιάζουν μέγιστο γινόμενο.

Εφαρμογή 8

Ας θεωρήσουμε τη γνωστή έκφραση της κατανομής Maxwell – Boltzmann για την ταχύτητα C :

$$y = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi K T} \right)^{\frac{3}{2}} C^2 e^{-\frac{mC^2}{2KT}}$$

που μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

$$y = f(C) = K_1 C^2 e^{-K_2 C^2}$$

Η εξίσωση αυτή αναπαριστά την κατανομή της ταχύτητας των μορίων ενός αερίου σε έναν κλειστό χώρο. Να αποδείξετε ότι παρουσιάζει μέγιστο. Το μέγιστο αυτό αντιστοιχεί στην πιο πιθανή ταχύτητα των μορίων.

Λύση

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$y' = f'(C) = 2K_1 C e^{-K_2 C^2} + K_1 C^2 e^{-K_2 C^2} (-2K_2 C) \quad \text{ή}$$

$$f'(C) = 2K_1 C e^{-K_2 C^2} (1 - K_2 C^2)$$

Πιθανό ακρότατο παρουσιάζει στο στάσιμο σημείο $C = \frac{1}{\sqrt{K_2}}$.

Ας υπολογίσουμε κατόπιν τη δεύτερη παράγωγο της f :

$$f''(C) = 2K_1 e^{-K_2 C^2} (2K_2^2 C^4 - 5K_2 C^2 + 1)$$

Στο στάσιμο σημείο $C = \frac{1}{\sqrt{K_2}}$ ή $C^2 K_2 = 1$ έχουμε ότι:

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{K_2}}\right) = -\frac{4K_1}{e} < 0$$

οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι η γραμμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = ax + \beta$ είναι:

- (α) Γνησίως αύξουσα αν $a > 0$.
- (β) Γνησίως φθίνουσα αν $a < 0$.
- (γ) Σταθερή αν $a = 0$.

Άσκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^{ax}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}^*$.

Άσκηση 3

Δίνεται μια συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

- (i) $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$.
- (ii) Υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 0$.

Τι ισχύει για το σημείο $(\gamma, f(\gamma))$; Τι θα ισχύει αν αντί της (i) είχαμε ότι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$;

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η κυβική συνάρτηση

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta, \quad a \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $\beta^2 - 3a\gamma \leq 0$.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \text{όπου } a, \gamma \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $a\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Τι συμβαίνει όταν $a\delta - \beta\gamma = 0$;

Άσκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- (β) Να συγκριθούν οι τιμές $f(\pi)$ και $f(e)$.
- (γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί e^π και π^e .

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \frac{x - e^x}{x + e^x} \quad \text{και} \quad g(x) = x - x \ln x$$

- (i) Να αποδείξετε ότι παρουσιάζουν μέγιστο σε σημείο με κοινή τεμνημένη.
- (ii) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$.

Πρακτικές Εφαρμογές**Άσκηση 1**

Το ύψος ενός πυραύλου (σε m) μετά από t sec πτήσης, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 8t^2 + \frac{33}{2}t + 5, \quad t \geq 0$$

Να εξετάσετε πότε ο πύραυλος αυτός ανεβαίνει και πότε κατεβαίνει.

Άσκηση 2

Το πλήθος των εγκλημάτων τα τελευταία 10 χρόνια σε μία πόλη (1989 – 1999) δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0,03t^3 + \frac{368,64}{t} \text{ δεκάδες εγκλήματα, } 0 < t \leq 10$$

Να εξετάσετε ποια χρονιά είχαμε την ελάχιστη εγκληματικότητα.

Άσκηση 3

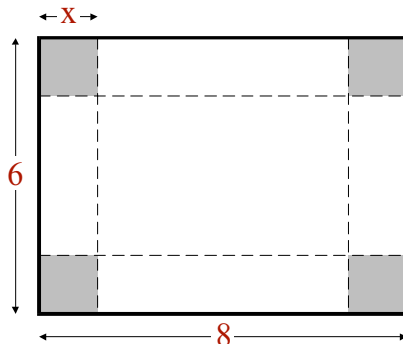
Η πιθανότητα P να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο σε απόσταση r από τον πυρήνα ενός ατόμου υδρογόνου δίνεται από την εξίσωση:

$$P = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}, \quad \text{όπου } a_0 \text{ σταθερά.}$$

Αφού βρείτε την παράγωγο του P ως προς r , υπολογίστε την τιμή του r όταν η πιθανότητα είναι μέγιστη, δηλαδή την πιο πιθανή τιμή του r .

Άσκηση 4

Από ένα κομμάτι χαρτόνι ορθογώνιου σχήματος, με πλευρές 6 cm και 8 cm, να κατασκευασθεί ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοιχτό στο πάνω μέρος, έτσι ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό όγκο.

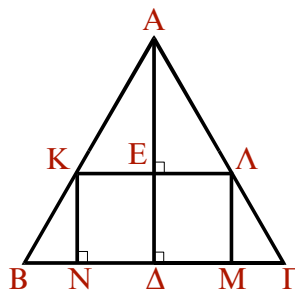
**Άσκηση 5**

Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε τουριστικό λεωφορείο έχει 50 θέσεις. Όταν οι επιβάτες του λεωφορείου είναι ακριβώς 30, τότε η εταιρεία ζητά 5000 δρχ. κατά άτομο. Για να αυξήσει τους επιβάτες, η εταιρεία κάνει την εξής προσφορά: «Κάθε επιπλέον επιβάτης θα μειώνει κατά 100 δρχ. τη χρέωση κάθε άλλου επιβάτη»

Να βρεθεί το πλήθος των επιπλέον επιβατών που πρέπει να έχει κάθε λεωφορείο, ώστε η επιχείρηση να έχει μεγιστοποιήσει τα έσοδά της.

Άσκηση 6

Να προσδιορισθούν οι διαστάσεις ορθογώνιου μέγιστου εμβαδού, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 cm, αν η μια πλευρά του ορθογώνιου περιέχεται σε μια πλευρά του τριγώνου (βλ. Σχήμα).

**Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου****Άσκηση 1**

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0 . Να αποδείξετε ότι:

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 + h) - f^2(x_0)}{h} = 2f(x_0)f'(x_0)$$

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)f(x_0) - x_0f(x_0 + h)}{h} = f(x_0) - x_0f'(x_0)$$

Άσκηση 2

Ο όγκος V του χωρίου μεταξύ δύο ομόκεντρων σφαιρών μεγαλώνει ως προς το χρόνο. Η ακτίνα της εξωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό 2 m/h , ενώ η ακτίνα της εσωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό $\frac{1}{2} \text{ m/h}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V , όταν η εξωτερική ακτίνα γίνει ίση με 3 m και η εσωτερική με 1 m .

Άσκηση 3

Ο αριθμός βακτηρίων $N(t)$ σε μια συγκεκριμένη καλλιέργεια μεταβάλλεται μετά τη χρήση ενός βακτηριοκτόνου ως εξής:

$$N(t) = \frac{10000}{1 + t^2} + 2000$$

όπου ο χρόνος t εκφράζεται σε min . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής και το πλήθος των βακτηρίων 1 και 2 min μετά τη χρήση του βακτηριοκτόνου.

Άσκηση 4

Στη φυσική χρησιμοποιείται ευρέως η έννοια της ειδικής θερμότητας υπό σταθερή πίεση C_p , η οποία ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της θερμότητας q ως προς τη θερμοκρασία T , δηλαδή:

$$C_p = q'(T)$$

Αν από πειραματικά δεδομένα είναι γνωστό ότι $C_p = A + BT$, όπου A, B σταθερές, να υπολογίσετε τη συνάρτηση q ως προς T . Πώς απλοποιείται η συνάρτηση αυτή αν η C_p είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητη της θερμοκρασίας;

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

- (i) $y' + y = k$, όπου k σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^x και τα δύο μέλη της εξίσωσης.
- (ii) $y' - y = k$, όπου k σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

(iii) $y'' = y$, προσθέτοντας την y' στα δύο μέλη της εξίσωσης.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με την f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $xy' = (x + 1)y$, για $x > 0$ και $f(1) = e$.

Άσκηση 7

Να μελετηθεί η κυβική συνάρτηση:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta, \text{ με } a > 0$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, όταν $\beta^2 - 3a\gamma > 0$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τα ζεύγη των θετικών αριθμών που έχουν σταθερό άθροισμα c και μέγιστο γινόμενο της τρίτης δύναμης του ενός και της δεύτερης του άλλου.

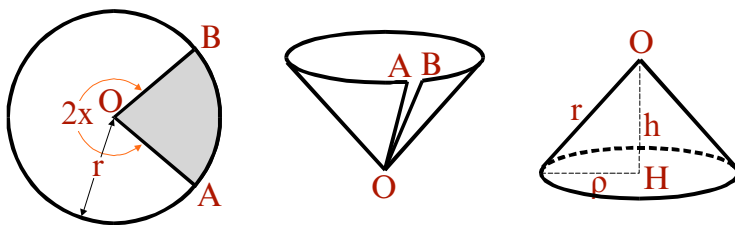
Άσκηση 9

Σε δοσμένη σφαίρα:

- (α) Να εγγραφεί κύλινδρος με μέγιστο όγκο.
- (β) Να εγγραφεί ορθός κώνος με μέγιστο όγκο.

Άσκηση 10

Δίνεται ένας κυκλικός χάρτινος δίσκος και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα φίλτρο καφέ σε σχήμα κώνου, έτσι ώστε να έχει μέγιστο όγκο.



Άσκηση 11

Οι μογιές είναι μίγματα ενός πολυμερούς (όπως τα πλαστικά), ενός διαλύτη (όπως νερό ή αλκοόλη) και μιας χρωστικής ουσίας. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι το πολυμερές να αναμειγνύεται πλήρως με το διαλύτη. Θερμοδυναμικά, το πρόβλημα αυτό μελετάται με συναρτή-

σεις του λεγόμενου συντελεστή ενεργότητας a ως προς τη συγκέντρωση x . Ένα τέτοιο γνωστό και σήμερα κλασικό μοντέλο προτάθηκε το 1940 από τους Flory και Huggins:

$$\ln a_1 = \ln(1 - \varphi_2) + \left(1 - \frac{1}{V}\right)\varphi_2 + \lambda\varphi_2^2$$

όπου ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στον διαλύτη και ο δείκτης 2 στο πολυμερές, ενώ:

$$\varphi_2 = \frac{x_2 V_2}{x_1 V_1 + x_2 V_2}, \quad V_1, V_2 \text{ όγκοι και } V = \frac{V_2}{V_1}$$

και λ η παράμετρος του μοντέλου που υπολογίζεται από πειραματικά δεδομένα. Η θερμοδυναμική ορίζει ότι μια υγρή φάση υπάρχει όταν $\lambda < \lambda_{\text{κρισ.}}$, όπου η κρίσιμη τιμή $\lambda_{\text{κρισ.}}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(\ln[a_1(\varphi_2)])' = (\ln[a_1(\varphi_2)])'' = 0.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια υγρή φάση όταν:

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2.$$

Τι συμβαίνει για πολύ μεγάλου μοριακού βάρους ($V_2 \gg V_1$) πολυμερή;

Ανακεφαλαίωση

- Παράγωγος ως Ρυθμός Μεταβολής:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων:

Συνάρτηση f	Παράγωγος f'
c (σταθερά)	0
x	1
$x^a, a \in \mathbb{R}^*, x > 0$	ax^{a-1}
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$
e^x	e^x
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$

- Κανόνες Παραγώγισης:

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

- Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης:

$$f''(x) = (f'(x))', f^{(3)}(x) = (f''(x))', \dots, \kappa.ο.κ.$$

- Παράγouσα Συνάρτηση – Αντίστροφη διαδικασία Παραγώγισης:

$$F'(x) = f(x)$$

Πίνακας Παραγouσών Βασικών Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγouσα F
0	c
1	x + c
$x^a, a \neq -1, x > 0$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$\eta\mu x + c$
$\eta\mu x$	$-\sin x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$\epsilon\phi x + c$
$\frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$-\sigma\phi x + c$

Πίνακας Παραγouσών Σύνθετων Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγouσα F
$\frac{g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$	$-\frac{1}{g(x)} + c$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}, g(x) > 0$	$2\sqrt{g(x)} + c$
$\frac{g'(x)}{g(x)}, g(x) > 0$	$\ln(g(x)) + c$
$g^a(x) g'(x), a \in \mathbb{R}, a \neq -1, g(x) > 0$	$\frac{(g(x))^{a+1}}{a+1} + c$
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)} + c$

- **Διαφορικές Εξισώσεις:**

Περιέχουν τις παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης $y = f(x)$.

- **Τάξη:**

Η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου στη διαφορική εξίσωση.

- **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:**

Η διαφορική εξίσωση και μια ή περισσότερες αρχικές τιμές για τη συνάρτηση.

- **Μονοτονία Συνάρτησης:**

- Αν $f' > 0$ τότε f γνησίως αύξουσα.
 - Αν $f' < 0$ τότε f γνησίως φθίνουσα.

- **Πιθανές θέσεις Ακροτάτων:**

- Άκρα Διαστήματος.
 - Γωνιακά σημεία
 - Στάσιμα σημεία } Κρίσιμα σημεία.

- **Μελέτη Ακροτάτων:**

- **Κριτήριο 1^{ης} Παραγώγου:**

Μεταβολή προσήμου f' αριστερά και δεξιά του ακροτάτου.

- **Κριτήριο 2^{ης} Παραγώγου** (Μόνο για στάσ. σημείο $f'(x_0)=0$):

- ♦ Αν $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ Τοπικό Μέγιστο
 - ♦ Αν $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ Τοπικό Ελάχιστο

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τι σημαίνει ρυθμός μεταβολής μεγέθους και πώς συνδέεται με την έννοια της παραγώγου;
2. Συμπληρώστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι σωστοί (Σ) ή λανθασμένοι (Λ) και αιτιολογήστε την απάντησή σας:
 - Αν f συνεχής στο x_0 τότε υπάρχει το $f'(x_0)$. Σ Λ
 - Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 . Σ Λ
 - Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν υπάρχει το Σ Λ $f'(x_0)$.
 - Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε δεν είναι συ- Σ Λ νεχής στο x_0 .
3. Πότε μια συνάρτηση έχει παράγωγο σε ανοιχτό και πότε σε κλειστό διάστημα;
4. Ποιούς τύπους συναρτήσεων καλύπτει η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^a$, με $a \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$;
5. Ποιός είναι ο κανόνας της αλυσίδας;
6. Τι απαιτείται για να ορίζεται η τέταρτη παράγωγος μιας συνάρτησης;
7. Πώς ορίζεται το μέσο κόστος ενός προϊόντος και ποιά η σχέση του με το οριακό κόστος;
8. Ποιά είναι η παράγουσα συνάρτηση και ποιά διαδικασία εκφράζει;
9. Πού συναντάμε διαφορικές εξισώσεις;
10. Τι ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών;
11. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα έχει πάντα αυστηρά αρνητική παράγωγο;
12. Ο ορισμός της μονοτονίας μιας συνάρτησης ισχύει για συναρτήσεις οι οποίες απαιτούμε να είναι:
 - (α) Συνεχείς (β) Παραγωγίσιμες
 - (γ) Δύο φορές Παραγωγίσιμες (δ) Τίποτε από τα παραπάνωΚυκλώστε και αιτιολογήστε τη σωστή απάντηση.
13. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης μηδενίζεται σε μερικά σημεία, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή;

14. Τι απαιτήσεις έχει για μια συνάρτηση ο ορισμός των τοπικών ακροτάτων της;
15. Διατυπώστε το θεώρημα του Fermat. Πώς προκύπτουν με βάση το θεώρημα αυτό, οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης;
16. Ποιά σημεία λέγονται γωνιακά;
17. Ποιά σημεία λέγονται στάσιμα;
18. Ποιά σημεία λέγονται κρίσιμα;
19. Να διατυπώσετε το κριτήριο ή τα κριτήρια με τα οποία εξασφαλίζουμε ότι είναι ακρότατα:
 - (α) τα άκρα διαστήματος.
 - (β) τα γωνιακά σημεία.
 - (γ) τα στάσιμα σημεία.

5

Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

Εισαγωγή

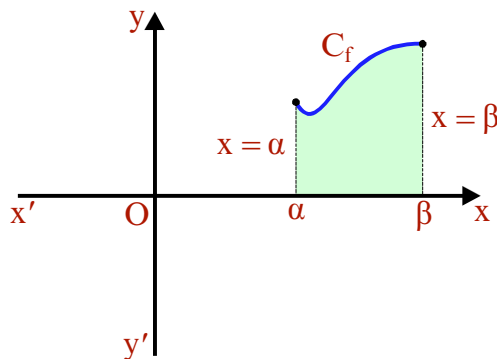
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα, ως έννοια άμεσα συνδεδεμένη με πρακτικά προβλήματα - όπως ο υπολογισμός εμβαδών επιπέδων χωρίων - αλλά και τη μαθηματική του σχέση με την παράγουσα, δηλαδή την αντίστροφη διαδικασία της παραγωγής.

Μελετούνται οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και οι δύο τρόποι υπολογισμού του: με την ανακάλυψη της παράγουσας και με την παραγοντική ολοκλήρωση.

Τέλος, παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού επιπέδων χωρίων.

5.1. Η έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι στενά συνδεδεμένη ιστορικά και μαθηματικά με το πρόβλημα του υπολογισμού εμβαδών επιπέδων χωρίων. Το γενικότερο πρόβλημα που τέθηκε ήταν ο υπολογισμός του εμβαδού ενός χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



Κατά τη σύνδεση των δύο αυτών εννοιών παρουσιάστηκαν αρκετά προβλήματα και δύο κύριες επιλογές:

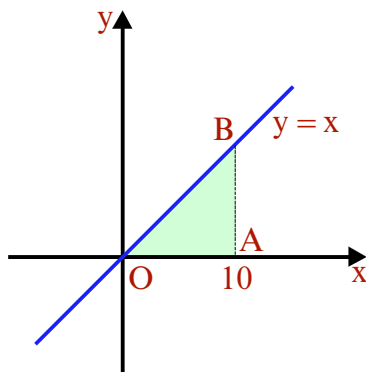
- Η πρώτη επιλογή ήταν να επαναπροσδιορίσουμε την έννοια του εμβαδού, με ακριβέστερο τρόπο, χρησιμοποιώντας την έννοια του ολοκληρώματος.
- Η δεύτερη επιλογή ήταν να δώσουμε έναν ακριβή ορισμό για το ολοκλήρωμα, εκμεταλλευόμενοι την εποπτική ερμηνεία του, με την προοπτική να καταλήξουμε τελικά σε μια έννοια που κατά περίπτωση θα ερμηνεύεται με εμβαδόν.

Ακολουθήσαμε τη δεύτερη επιλογή, για δύο λόγους. Η έννοια του ολοκληρώματος είναι καλά ορισμένη, ακόμα και σε περιπτώσεις που το εμβαδόν δε θα σημαίνει τίποτα. Επίσης, όπως θα δούμε, η έννοια του ολοκληρώματος τελικά είναι απλούστερη από αυτή του εμβαδού.

Για να εξακριβώσουμε τι συμβαίνει, ας εξετάσουμε τα ακόλουθα προβλήματα:

Πρόβλημα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB .



Λύση

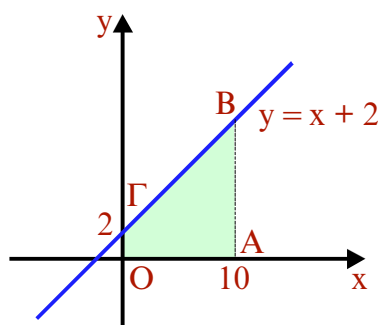
Έχουμε ότι $(AB) = f(10) = 10$, οπότε $E = \frac{(OA)(AB)}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ τ.μ.

Παρατήρηση: Μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Αν θεωρήσουμε τη διαφορά των αριθμητικών τιμών της F

στα σημεία $x = 10$ και $x = 0$ έχουμε ότι: $F(10) - F(0) = \frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 50$ τ.μ.

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + 2$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τραπεζίου (ΟΑΒΓ).

**Λύση**

Έχουμε ότι $(ΟΓ) = 2$, $(ΑΒ) = f(10) = 10 + 2 = 12$, $(ΟΑ) = 10$, οπότε:

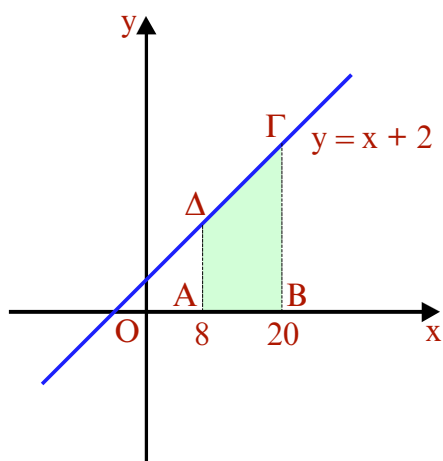
$$E = \frac{(ΟΓ) + (ΑΒ)}{2} (ΟΑ) = \frac{(2 + 12) \cdot 10}{2} = 70 \text{ τ.μ.}$$

Παρατήρηση: Μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = x + 2$ είναι η $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$. Αν θεωρήσουμε τη διαφορά των αριθμητικών τιμών της F στα σημεία $x = 10$ και $x = 0$ έχουμε ότι:

$$F(10) - F(0) = \frac{10^2}{2} + 2 \cdot 10 - \left(\frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right) = 50 + 20 = 70 \text{ τ.μ.}$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται πάλι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + 2$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τραπεζίου (ΑΒΓΔ).



Λύση

Έχουμε ότι $(A\Delta) = f(8) = 8 + 2 = 10$, $(B\Gamma) = f(20) = 20 + 2 = 22$, $(AB) = 20 - 8 = 12$. Επομένως:

$$E = \frac{(A\Delta) + (B\Gamma)}{2} (AB) = \frac{(10 + 22) \cdot 12}{2} = 192 \text{ τ.μ.}$$

Παρατήρηση: Θεωρώντας ξανά τη διαφορά των αριθμητικών τιμών της παράγουσας $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$ της $f(x) = x + 2$ στα σημεία $x = 20$ και $x = 8$, βρίσκουμε: $F(20) - F(8) = \frac{20^2}{2} + 2 \cdot 20 - \left(\frac{8^2}{2} + 2 \cdot 8 \right) = 240 - 48 = 192 \text{ τ.μ.}$

Στα προηγούμενα προβλήματα είχαμε τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f και θέλαμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$, όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Παρατηρήσαμε ότι αν η F είναι η παράγουσα της f , τότε το ζητούμενο εμβαδόν ήταν: $E = F(\beta) - F(a)$.

Γενικότερα, αν έχουμε μια συνεχή και θετική συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα F , ισχύει ότι η διαφορά $F(\beta) - F(a)$ παραμένει σταθερή και εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$.

Αν γενικεύσουμε την προηγούμενη παρατήρηση για συνεχή συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όχι απαραίτητα θετική τότε προκύπτει το ορισμένο ολοκλήρωμα:

Ορισμός: Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τη σταθερή διαφορά $F(\beta) - F(a)$ ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το a έως το β και το συμβολίζουμε με:

$$\int_a^\beta f(x) dx$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\int_a^\beta f(x) dx = [F(x)]_a^\beta = F(\beta) - F(a).$$

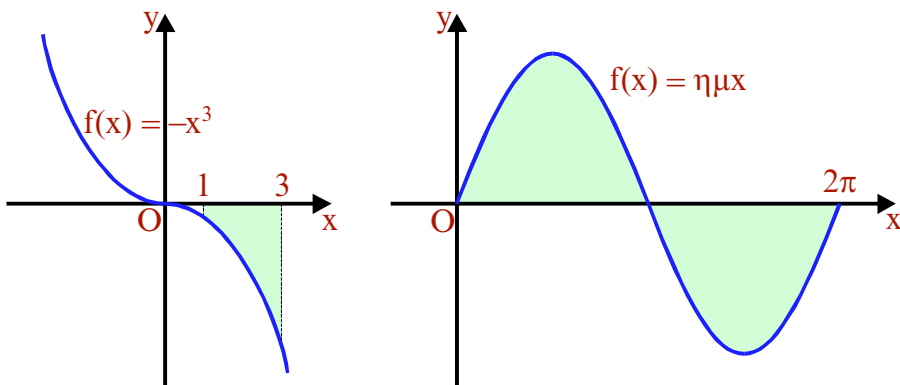
Επίσης, ισχύει ότι μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, \beta]$ αν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

Παρατήρηση: Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, παρατηρούμε ότι η έννοια του ολοκληρώματος είναι γενικότερη από αυτή του εμβαδού. Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί να είναι αρνητικό, π.χ.

$$\int_1^3 (-x^3) dx = \left[-\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = -\frac{81}{4} + \frac{1}{4} = -20$$

ακόμα και ίσο με το μηδέν, π.χ.

$$\int_0^{2\pi} \eta \mu x dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_0^{2\pi} = -\sigma \upsilon \nu 2\pi + \sigma \upsilon \nu 0 = -1 + 1 = 0$$



ενώ το εμβαδόν στην πρώτη περίπτωση είναι ίσο με 20 και στη δεύτερη με 4, όπως θα δούμε παρακάτω.

5.2. Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

(i) $\int_a^\beta c dx = c(\beta - a)$, όπου c σταθερά

(ii) $\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$, όπου $a < \gamma < \beta$

(iii) $\int_a^a f(x) dx = 0$

$$(iv) \int_a^\beta f(x) dx = - \int_\beta^a f(x) dx$$

$$(v) \int_a^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx + \mu \int_a^\beta g(x) dx, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Άμεσα πορίσματα της (v) είναι ότι:

$$\int_a^\beta \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^\beta f(x) dx \text{ και}$$

$$\int_a^\beta [f(x) + g(x)] dx = \int_a^\beta f(x) dx + \int_a^\beta g(x) dx$$

$$(vi) \text{ Αν } f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [a, \beta], \text{ τότε } \int_a^\beta f(x) dx \geq 0$$

$$(vii) \text{ Αν } f(x) \geq g(x), \text{ για κάθε } x \in [a, \beta], \text{ τότε } \int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(α) \int_0^4 2x dx$$

$$(β) \int_0^1 3x^2 dx$$

$$(γ) \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

Λύση

$$(α) \text{ Γνωρίζουμε ότι } (x^2)' = 2x \text{ άρα } \int_0^4 2x dx = [x^2]_0^4 = 16 - 0 = 16.$$

$$(β) \text{ Γνωρίζουμε ότι } (x^3)' = 3x^2 \text{ άρα } \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 8 - 0 = 8.$$

$$(γ) \text{ Γνωρίζουμε ότι } (\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ άρα } \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = [\sqrt{t}]_1^4 = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1.$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \eta\mu u \, du$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u$, άρα $(-\sigma\upsilon\nu u)' = \eta\mu u$, οπότε:

$$\int_0^{\pi} \eta\mu u \, du = [-\sigma\upsilon\nu u]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2$$

Εφαρμογή 3

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)e^x$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 xe^x \, dx$.

Λύση

Είναι: $f'(x) = (x - 1)'e^x + (x - 1)(e^x)' = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$.

Άρα η παράγουσα της xe^x είναι η $f(x)$, επομένως:

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [(x - 1)e^x]_0^1 = (1 - 1)e^1 - (0 - 1)e^0 = 1$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (2x + e^x) \, dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\int_0^1 (2x + e^x) \, dx = \int_0^1 2x \, dx + \int_0^1 e^x \, dx = [x^2]_0^1 + [e^x]_0^1 = (1 - 0) + (e - 1) = e$$

Εφαρμογή 5

Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 (x - 2) \, dx \leq 0$.

Λύση

Αν το x ανήκει στο $[1, 2]$, τότε $1 \leq x \leq 2$, άρα $x - 2 \leq 0$, οπότε:

$$\int_1^2 (x - 2) dx \leq 0$$

Εφαρμογή 6

Να υπολογισθεί το $\int_{-1}^1 |x| dx$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 καθώς και στα διαστήματα $[-1, 0)$, $(0, 1]$ ως πολυωνυμική. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό. Τότε ισχύει:

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Εφαρμογή 7

Ο αριθμός των εντόμων (δάκος) μιας ελαιοπαραγωγικής περιοχής μεταβάλλεται μετά τη ρίψη εντομοκτόνου με ρυθμό $r'(t) = -e^t$ χιλιάδες έντομα ανά ημέρα. Αν ο αρχικός αριθμός των εντόμων είναι 1.000.000, σε τι ποσοστό (%) θα έχει μειωθεί σε 5 ημέρες;

Λύση

Έχουμε ότι: $r(x) - r(0) = -\int_0^x e^t dt$

Αλλά $(e^t)' = e^t$ οπότε παράγουσα της e^t είναι η e^t . Άρα:

$$r(x) - r(0) = -\int_0^x e^t dt = [-e^t]_0^x = -e^x + e^0 = 1 - e^x$$

και εφόσον $r(0) = 1000$ θα έχουμε $r(x) = 1001 - e^x$, άρα τα έντομα που

υπάρχουν την 5^η μέρα είναι $r(5) = 1000 - e^5 \simeq 1001 - 148 = 853$ χιλιάδες έντομα. Το ποσοστό μείωσης θα είναι 148 επί τις χιλιάδες ή 14,8%.

Εφαρμογή 8

Η παραγωγή του εργοστασίου τα "Ωραία νερά" μεταβάλλεται με ρυθμό $g'(t) = \frac{-1}{t^2}$ εκατοντάδες φιάλες ανά ημέρα και η παραγωγή της πρώτης μέρας είναι 2000 φιάλες. Πόσες φιάλες θα έχει παράγει το εργοστάσιο στο τέλος της 5^{ης} ημέρας;

Λύση

Έχουμε ότι: $g(x) - g(1) = \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt$

Αλλά $\left(\frac{1}{t}\right)' = \frac{-1}{t^2}$ οπότε παράγουσα της $\frac{-1}{t^2}$ είναι η $\frac{1}{t}$. Άρα:

$$g(x) - g(1) = \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt = \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = \frac{1}{x} - \frac{1}{1} = \frac{1}{x} - 1$$

Οπότε $g(x) - 20 = \frac{1}{x} - 1$ ή $g(x) = 19 + \frac{1}{x}$ εκατοντάδες φιάλες την ημέρα.

Το σύνολο της παραγωγής της από την 1^η ως την 5^η ημέρα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^5 \left(19 + \frac{1}{x}\right) dx = [19x + \ln x]_1^5 = 19 \cdot 5 + \ln 5 - 19 - \ln 1 = 76 + 1,61 \text{ εκ. φιάλες}$$

ή $7600 + 161 = 7761$ φιάλες.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 4x^3 dx$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 (2x + 1) dx$.

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$.

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \sin 3x dx$.

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 (x-1) dx \leq 0$.

Άσκηση 6

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = -x + x \ln x$, $x > 0$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_1^e \ln x dx$.

Άσκηση 4

Αν $f(x) = xe^{-x}$ και $g(x) = (ax + \beta)e^{-x}$, να βρεθούν τα a, β , έτσι ώστε η g να είναι παράγουσα της f και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 xe^{-x} dx$.

Άσκηση 5

Αν $f'(x) = 2x$ και $f(1) = 0$, να υπολογισθεί το $f(0)$.

Άσκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $\int_a^\beta f'(x) dx = 0$.

5.3. Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος

- Ανακάλυψη της Παράγουσας**

Από την § 5.1 έγινε φανερό ότι για να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα αρκεί να υπολογίσουμε την παράγουσα της ολοκληρωσιμής συνάρτησης. Άμεσα, από την § 4.6, χρησιμοποιώντας τον πίνακα παραγουσών βασικών συναρτήσεων, προκύπτει ότι:

- $\int_a^\beta 1 dx = [x]_a^\beta = \beta - a$
- $\int_a^\beta x^\kappa dx = \left[\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right]_a^\beta = \frac{\beta^{\kappa+1} - a^{\kappa+1}}{\kappa+1}$, με $\kappa \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\beta > a > 0$
- $\int_a^\beta \frac{1}{x} dx = [\ln x]_a^\beta = \ln \beta - \ln a$, $\beta > a > 0$
- $\int_a^\beta e^x dx = [e^x]_a^\beta = e^\beta - e^a$
- $\int_a^\beta \sin x dx = [-\cos x]_a^\beta = -\cos \beta + \cos a$
- $\int_a^\beta \cos x dx = [\sin x]_a^\beta = \sin \beta - \sin a$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τον πίνακα παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων, έχουμε ότι:

- $\int_a^\beta \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx = \left[-\frac{1}{g(x)} \right]_a^\beta = -\frac{1}{g(\beta)} + \frac{1}{g(\alpha)},$
όπου $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
- $\int_a^\beta \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = [2\sqrt{g(x)}]_a^\beta = 2(\sqrt{g(\beta)} - \sqrt{g(\alpha)}),$
όπου $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
- $\int_a^\beta \frac{g'(x)}{g(x)} dx = [\ln(g(x))]_a^\beta = \ln(g(\beta)) - \ln(g(\alpha)),$
όπου $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
- $\int_a^\beta g^\kappa(x) g'(x) dx = \left[\frac{(g(x))^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right]_a^\beta = \frac{(g(\beta))^{\kappa+1} - (g(\alpha))^{\kappa+1}}{\kappa+1},$
όπου $\kappa \in \mathbb{R} - \{-1\}$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
- $\int_a^\beta e^{g(x)} g'(x) dx = [e^{g(x)}]_a^\beta = e^{g(\beta)} - e^{g(\alpha)}$

• Παραγοντική Ολοκλήρωση

Ένας ιδιαίτερα χρήσιμος κανόνας ολοκλήρωσης είναι η παραγοντική ολοκλήρωση ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει εύκολα αν ολοκληρώσουμε τον τύπο της παραγώγου του γινομένου δύο συναρτήσεων.

Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέλη:

$$\int_a^\beta (f(x)g(x))' dx = \int_a^\beta f'(x)g(x) dx + \int_a^\beta f(x)g'(x) dx \quad \text{ή}$$

$$[f(x)g(x)]_a^\beta = \int_a^\beta f'(x)g(x) dx + \int_a^\beta f(x)g'(x) dx \quad \text{ή}$$

$$\int_a^\beta f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x)g'(x) \, dx$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(α) \int_1^2 x^5 \, dx \quad (β) \int_1^8 4x^{\frac{1}{3}} \, dx \quad (γ) \int_1^{27} 2x^{-\frac{1}{3}} \, dx \quad (δ) \int_0^8 \sqrt[3]{x} \, dx$$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$\int_1^2 x^5 \, dx = \left[\frac{x^{5+1}}{5+1} \right]_1^2 = \left[\frac{x^6}{6} \right]_1^2 = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{21}{2}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\int_1^8 4x^{\frac{1}{3}} \, dx = \left[4 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_1^8 = \left[3x^{\frac{4}{3}} \right]_1^8 = [3(\sqrt[3]{x})^4]_1^8 = 45$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$\int_1^{27} 2x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \left[2 \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_1^{27} = \left[3x^{\frac{2}{3}} \right]_1^{27} = [3(\sqrt[3]{x})^2]_1^{27} = 24$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x} \, dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_0^8 = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^8 = \left[\frac{3}{4} (\sqrt[3]{x})^4 \right]_0^8 = 12$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^8 (x + x^{\frac{1}{3}}) \, dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\int_1^8 (x + x^{\frac{1}{3}}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_1^8 = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} (\sqrt[3]{x})^4 \right]_1^8 =$$

$$\frac{64}{2} + \frac{3}{4} (\sqrt[3]{8})^4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} (\sqrt[3]{1})^4 \right) = \frac{171}{4}$$

Εφαρμογή 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} [\ln(x^3 + 1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{3}$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\eta \mu x} dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\eta \mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu x)' e^{\eta \mu x} dx = [e^{\eta \mu x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon \phi x dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\eta\mu x) \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu x)' \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx = - [\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}) + \ln(\sigma\upsilon\nu 0) = \\ &= -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = -\ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

Εφαρμογή 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x \, dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx = [-x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'(-\sigma\upsilon\nu x) \, dx = \\ &= -\frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \, dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\end{aligned}$$

Εφαρμογή 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_1^e x^3 \ln x \, dx &= \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} (\ln x)' \, dx = \\ &= \frac{e^4}{4} \ln e - \frac{1}{4} \ln 1 - \int_1^e \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 \, dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e = \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4e^4 - e^4 + 1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16}\end{aligned}$$

Εφαρμογή 8

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln x \, dx$.

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e (x)' \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' \, dx = \\ &= e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx = e - \int_1^e 1 \, dx = e - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

Εφαρμογή 9

Στην περιοχή τα "Γαλάζια νερά" έχει ξαφνικά διαρροή πετρελαίου ένα δεξαμενόπλοιο και σχηματίζει πετρελαιοκηλίδα που έχει κυκλικό σχήμα. Αν η ακτίνα r της κηλίδας αυξάνει με ρυθμό $r'(t) = \frac{30}{\sqrt{2t+4}}$ μέτρα ανά t λεπτά από τη στιγμή που συνέβη το ατύχημα, να βρεθεί μια συνάρτηση για την ακτίνα της πετρελαιοκηλίδας για κάθε χρονική στιγμή t . Πόσο μεγάλη είναι η κηλίδα μετά από 16 λεπτά; (Υποτίθεται ότι δεν υπάρχει ρύπανση πριν την διαρροή).

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} r(x) - r(0) &= \int_0^x 30(2t+4)^{-\frac{1}{2}} \, dt = 15 \int_0^x (2t+4)'(2t+4)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \\ &= 15 \left[\frac{(2t+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^x = 15 \left[\frac{(2t+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^x = 30[\sqrt{2t+4}]_0^x = 30\sqrt{2x+4} - 60 \end{aligned}$$

Αφού $r(0) = 0$, προκύπτει ότι:

$$r(x) = 30\sqrt{2x+4} - 60 \quad \text{ή} \quad r(t) = 30\sqrt{2t+4} - 60$$

Σε 16 λεπτά η απόσταση θα είναι:

$$s = r(16) = 30\sqrt{2 \cdot 16 + 4} - 60 = 30 \cdot 6 - 60 = 120 \text{ μέτρα}$$

Εφαρμογή 10

Κατά τον πρώτο χρόνο εμφάνισης στην αγορά της μουσικής συλλογής "Αθάνατα Τραγούδια" πουλήθηκαν 2000 CD. Έκτοτε, οι πωλήσεις μεταβάλλονται με ρυθμό $f'(t) = 2000(3 - 2e^{-t})$ CD το χρόνο. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των CD αυτής της μουσικής συλλογής που πωλήθηκαν τα 5 πρώτα χρόνια.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x 2000(3 - 2e^{-t}) dt = 2000 \int_0^x (3 - 2e^{-t}) dt = \\ &= 2000 [3t + 2e^{-t}]_0^x = 2000(3x + 2e^{-x}) - 2000(0 + 2 \cdot 1) = \\ &= 6000x + 4000e^{-x} - 4000 \end{aligned}$$

Όμως $f(0) = 2000$, οπότε:

$$\begin{aligned} f(x) - 2000 &= 6000x + 4000e^{-x} - 4000 \quad \text{ή} \\ f(x) &= 6000x + 4000e^{-x} - 2000 \quad \text{ή} \quad f(x) = 6000x + 4000e^{-x} - 2000 \end{aligned}$$

Τα πέντε πρώτα χρόνια οι πωλήσεις δίνονται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_0^5 (6000t + 4000e^{-t} - 2000) dt &= [3000t^2 - 4000e^{-t} - 2000t]_0^5 = \\ 3000 \cdot 25 - 4000e^{-5} - 10000 + 4000 &= 69000 - 4000e^{-5} \simeq 68973 \text{ CD} \end{aligned}$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης**Άσκηση 1**

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^1 (u + 1) du$$

$$(\beta) \int_{-1}^1 (t^2 - 1) dt$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt$$

$$(\beta) \int_1^9 \frac{x+1}{x} dx$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x} dx$$

$$(\beta) \int_1^2 \frac{2u^2 + u + 1}{u} du$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}} dt$.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x(x^2 + 1)^{1999} dx$.

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$.

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Άσκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x \sin x dx$.

Άσκηση 8

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi e^x \eta \mu x dx$.

Πρακτικές εφαρμογές**Άσκηση 1**

Η γραμματεία σπουδαστών του Βαλκανικού Πανεπιστήμιου υπολογίζει ότι ο αριθμός των εγγραφών των σπουδαστών στις μεταπτυχιακές

σπουδές αυξάνεται με ρυθμό $N'(t) = 2000(1 + 0,2t)^{-\frac{3}{2}}$ σε t χρόνια από σήμερα. Αν ο αριθμός των εγγεγραμμένων φοιτητών είναι 1000, βρείτε ένα τύπο που προσδιορίζει τον αριθμό των εγγραφών σε t χρόνια από σήμερα. Ποιός θα είναι ο συνολικός αριθμός των φοιτητών που θα εγγραφούν στη σχολή σε 5 χρόνια;

Άσκηση 2

Σε μια χώρα, ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής των γυναικών, κατά τη γέννησή τους, αλλάζει με ρυθμό $g'(t) = \frac{5,45218}{(1 + 1,09t)^{0,9}}$ χρόνια ανά έτος,

όπου t είναι τα έτη και το $t = 0$ αντιστοιχεί στο έτος 1900. Βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τον αναμενόμενο μέσο όρο ζωής των γυναικών σε χρόνια κατά τη γέννησή τους, αν ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής κατά το έτος 1900 ήταν 50,02 χρόνια. Ποιός θα είναι ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής μιας γυναίκας που θα γεννηθεί το 2000;

Άσκηση 3

Ο μέσος σπουδαστής που είναι εγγεγραμμένος σε σεμινάριο στενογραφίας διάρκειας 20 εβδομάδων, μαθαίνει με ρυθμό $N'(t) = 6e^{-0,05t}$ ($0 \leq t \leq 20$), όπου $N'(t)$ ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των λέξεων που γράφει ανά λεπτό ο σπουδαστής μετά από t εβδομάδες στο σεμινάριο. Αν υποθέσουμε ότι ο μέσος σπουδαστής ξεκινάει το σεμινάριο με 60 λέξεις το λεπτό, βρείτε τη συνάρτηση $N(t)$ που εκφράζει την ταχύτητα των σπουδαστών μετά από t εβδομάδες.

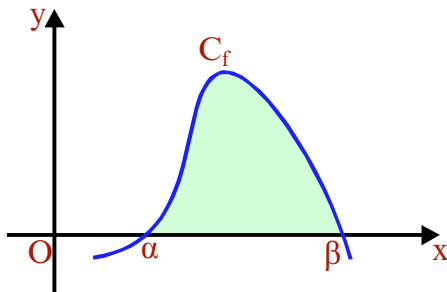
Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας στοιχεία από μία κτηνιατρική κλινική, οι κτηνίατροι υπολογίζουν ότι το μέσο ύψος μιας ράτσας σκυλιών μεταβάλλεται με ρυθμό $h'(t) = \frac{52,8706e^{-0,32277t}}{(1 + 2,449e^{-0,32277t})^2}$ εκατοστά το μήνα, όπου το ύψος του σκυλιού μετريέται σε εκατοστά και η ηλικία t σε μήνες από τη γεννησή του. Βρείτε συνάρτηση $h(t)$ που εκφράζει το μέσο όρο ύψους ενός σκύλου t μηνών, αν το μέσο ύψος της ράτσας αυτής κατά τη γέννηση είναι 19,4 εκατοστά. Πόσο είναι το μέσο ύψος ενός σκύλου 8 μηνών;

5.4. Υπολογισμός Εμβαδού Επιπέδων Χωρίων

- Υπολογισμός του εμβαδού χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και τον άξονα $x'x$

(A) Έστω μια ολοκληρώσιμη θετική συνάρτηση f . Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική της παράσταση C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$, με $a < \beta$, ταυτίζεται όπως είδαμε με το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f , δηλαδή:

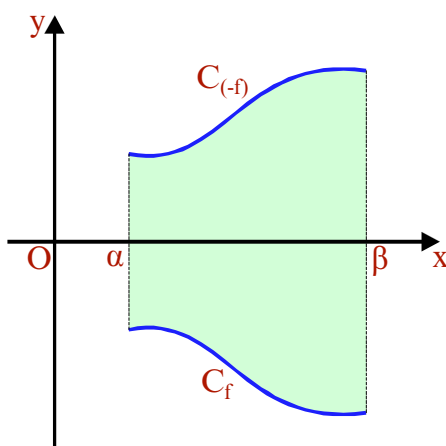


$$E = \int_a^\beta f(x) dx$$

Στην περίπτωση που δε δίνονται οι ευθείες $x = a$ και $x = \beta$, θα εννοείται ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε διάφορα σημεία ανάμεσα στα οποία περικλείεται το δεδομένο χωρίο (βλ. Σχήμα).

- (B) Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση f είναι αρνητική, τότε θεωρούμε τη συμμετρική της συνάρτηση ως προς τον άξονα x : $(-f)$ η οποία είναι θετική. Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου παραμένει αμετάβλητο ως προς τις συμμετρίες, οπότε:

$$E = \int_a^{\beta} [-f(x)] dx = - \int_a^{\beta} f(x) dx$$



- (Γ) Αν τέλος η ολοκληρώσιμη συνάρτηση f αλλάζει πρόσημο, τότε στα υποδιαστήματα του $[a, \beta]$ που είναι θετική παραμένει ως έχει, ενώ στα υποδιαστήματα που είναι αρνητική θεωρούμε την $(-f)$. Επομένως, το εμβαδόν ισούται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

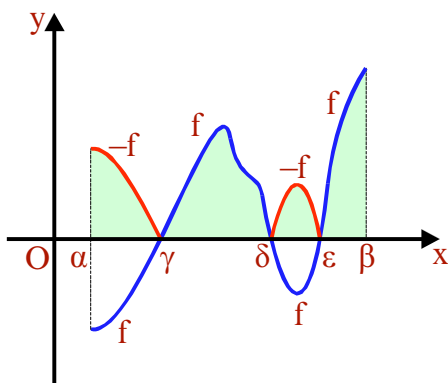
$$g = \begin{cases} f & \text{αν } f \geq 0 \\ -f & \text{αν } f < 0 \end{cases} = |f|.$$

Δηλαδή, ο γενικός τύπος εύρεσης του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας τυχαίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης, τον άξονα x και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ο ακόλουθος:

$$E = \int_a^{\beta} |f(x)| dx$$

Π.χ. το εμβαδόν για τη συνάρτηση f με γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα δίνεται από τον τύπο:

$$E = \int_a^{\gamma} [-f(x)] dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx + \int_{\delta}^{\epsilon} [-f(x)] dx + \int_{\epsilon}^{\beta} f(x) dx$$

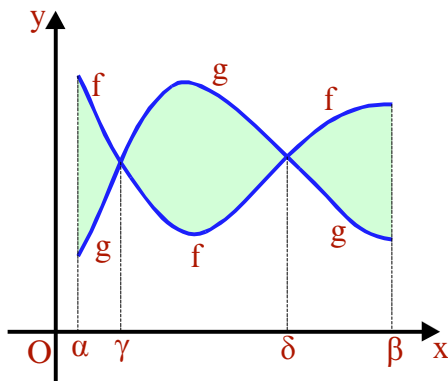


- **Υπολογισμός του εμβαδού χωρίου που περικλείεται από δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων**

Η περίπτωση αυτή είναι η γενική περίπτωση σχηματισμού ενός επιπέδου χωρίου. Αυτό που μας ενδιαφέρει δεν είναι το πρόσημο της καθεμιάς συνάρτησης, αλλά η σχετική τους διάταξη, δηλαδή το πρόσημο της διαφοράς τους. Αν δίνονται λοιπόν δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f, g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ καταλήγουμε όμοια με την προηγούμενη παράγραφο στον τύπο:

$$E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| \, dx$$

Πιο αναλυτικά, έχουμε ότι στα διαστήματα που η f είναι μεγαλύτερη από τη g θεωρούμε το ολοκλήρωμα της $f - g$, ενώ στα διαστήματα όπου η g είναι μεγαλύτερη της f θεωρούμε το ολοκλήρωμα της $g - f$. Για παράδειγμα, στο παρακάτω Σχήμα έχουμε ότι:



$$\begin{aligned}
 E &= \int_a^\beta |f(x) - g(x)| \, dx = \\
 &= \int_a^\gamma [f(x) - g(x)] \, dx + \int_\gamma^\delta [g(x) - f(x)] \, dx + \int_\delta^\beta [f(x) - g(x)] \, dx
 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που δε δίνονται τα άκρα ολοκλήρωσης, δηλαδή οι ευθείες $x = a$ και $x = \beta$, θα εννοείται ότι οι C_f και C_g έχουν κοινά σημεία, τα οποία θα αποτελούν τα άκρα ολοκλήρωσης.

Εφαρμογές

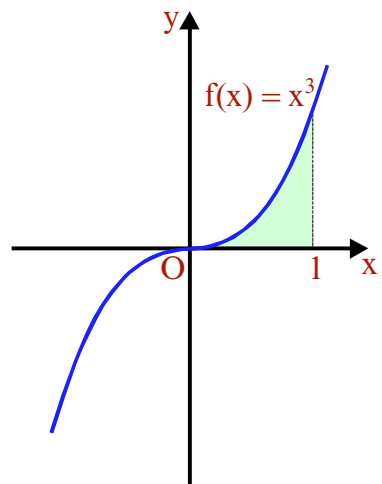
Εφαρμογή 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Αφού είναι $x^3 \geq 0$ για κάθε x στο διάστημα $[0, 1]$, τότε:

$$E = \int_0^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$



Εφαρμογή 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\sin x$, τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ και τον άξονα $x'x$.

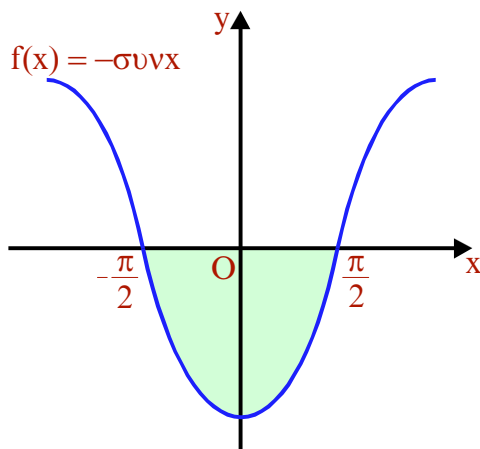
Λύση

Εφόσον $-\sin x \leq 0$ για κάθε x στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, θα έχουμε ότι:

$$E = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx =$$

$$\left[\eta \mu x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu \left(-\frac{\pi}{2} \right) =$$

$$1 - (-1) = 2$$



Εφαρμογή 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$ και τον άξονα x' .

Λύση

Είναι $f(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ και:

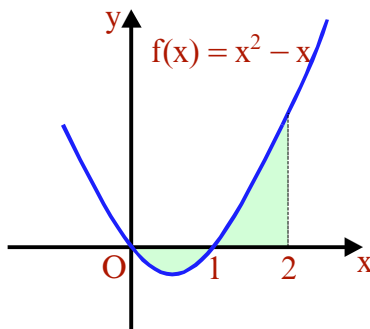
- Αν $0 \leq x \leq 1$ τότε $f(x) \leq 0$.
- Αν $1 \leq x \leq 2$ τότε $f(x) \geq 0$.

Οπότε:

$$E = -\int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx =$$

$$-\int_0^1 (x^2 - x) \, dx + \int_1^2 (x^2 - x) \, dx =$$

$$-\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$



Εφαρμογή 4

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x^2 - 1$.

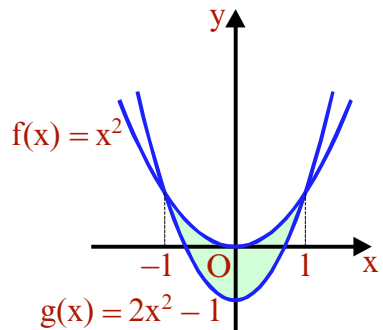
Λύση

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) - f(x) = 2x^2 - 1 - x^2 = \\ x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $h(x) \leq 0$ για κάθε x στο διάστημα $[-1, 1]$, οπότε το εμβαδόν υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E &= -\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^1 = \\ &= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



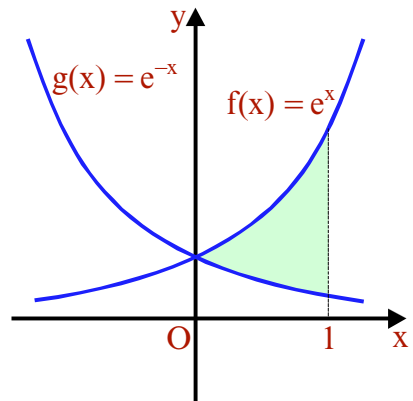
Εφαρμογή 5

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Λύση

Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - e^{-x}$ και προκύπτει ότι $h(x) > 0$ αν και μόνο αν $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Όμοια, $h(x) < 0$ αν και μόνο αν $x < 0$, ενώ $h(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x = 0$ και το εμβαδόν περιορίζεται και από την ευθεία $x = 1$, οπότε έχουμε ότι:



$$E = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |e^x - e^{-x}| dx$$

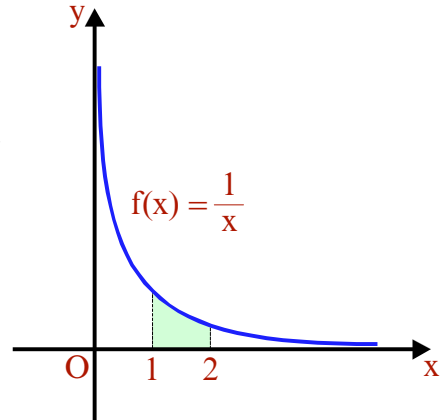
και εφόσον $e^x - e^{-x} \geq 0$ για $x \in [0, 1]$ έχουμε ότι:

$$E = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

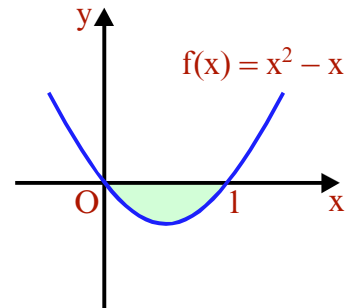
Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περι-
κλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$,
τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και τον άξονα
 $x'x$.



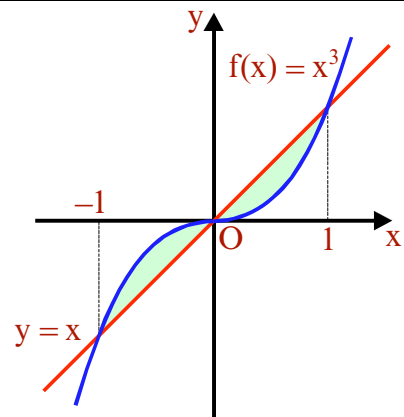
Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλεί-
εται από τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$ και τον
άξονα $x'x$.



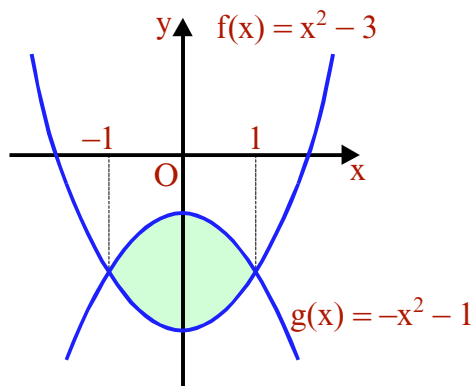
Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περι-
κλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ και
την ευθεία με εξίσωση $y = x$.

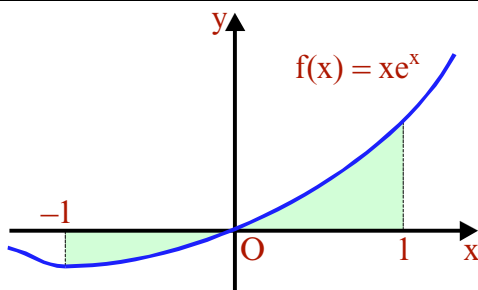


Άσκηση 4

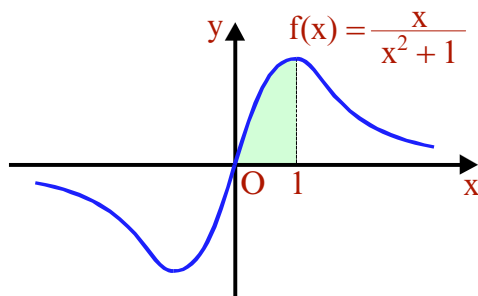
Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$ και $g(x) = -x^2 - 1$.

**Σύνθετες Ασκήσεις****Άσκηση 1**

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = xe^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$, $x = 1$.

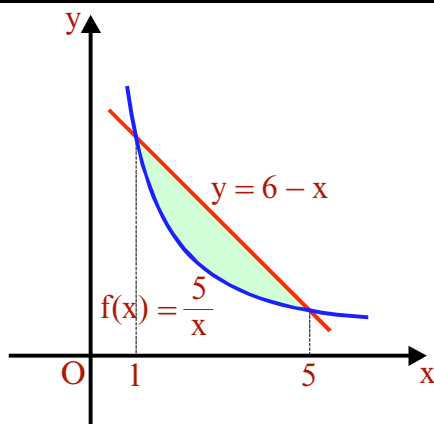
**Άσκηση 2**

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$.

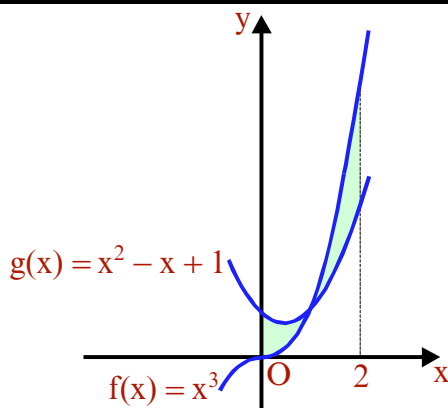


Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{x}$ και την ευθεία με εξίσωση $y = 6 - x$.

**Άσκηση 4**

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - x + 1$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.

**Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου****Άσκηση 1**

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$ και κατόπιν να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^1 (x - 1)^{24} dx$$

$$(\beta) \int_0^1 \frac{1}{(3x - 4)^3} dx$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

$$(\beta) \int_0^1 \frac{x}{2x+1} dx$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^2 (2x-1)^{11} dx$$

$$(\beta) \int_0^1 e^{3x+2} dx$$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}} dx$.

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} dx$.

Άσκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$.

Άσκηση 8

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^e x^2 \ln(5x) dx$$

$$(\beta) \int_0^\pi x \eta\mu(2x) dx$$

Άσκηση 9

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^2 |1 - e^x| dx$$

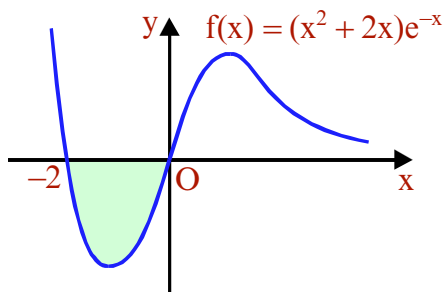
$$(\beta) \int_0^{2\pi} |\sigma\upsilon\nu x| dx$$

Άσκηση 10

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx$ χρησιμοποιώντας τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ ή άλλο τρόπο.

Άσκηση 11

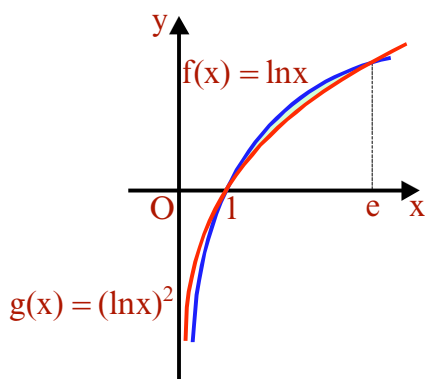
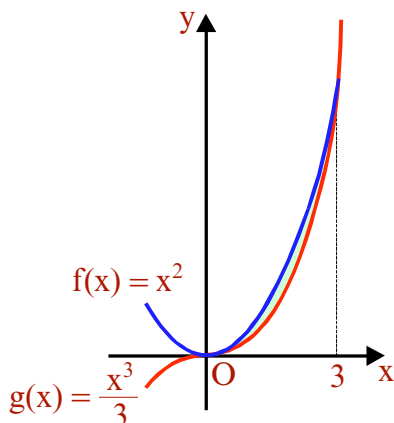
Να υπολογισθεί το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ και τον άξονα x 's.

**Άσκηση 12**

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g :

(α) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^3}{3}$

(β) $f(x) = \ln x$, $g(x) = (\ln x)^2$

**Άσκηση 13**

Για ένα δοχείο με νερό ύψους $h = 3\text{m}$ που αδειάζει μέσω ενός ανοίγματος στον πυθμένα, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση για τη μεταβολή του ύψους h σε σχέση με το χρόνο t :

$$h'(t) = -\frac{\sqrt{h(t)}}{727}$$

Σε πόσο χρόνο το ύψος του νερού θα φτάσει το 1 m;

Άσκηση 14

Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων χαμηλής κατανάλωσης σε ένα εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)$ και ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι $K'(x) = 0,000006x^2 - 0,0006x + 2$ σε χιλιάδες δραχμές όπου x είναι ο αριθμός των λαμπτήρων που παράγονται. Αν το σταθερό εβδομαδιαίο κόστος είναι 100000 δραχμές, να υπολογισθεί το συνολικό κόστος για τη παραγωγή 500 λαμπτήρων.

Άσκηση 15

Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της μονάδας συγκεκριμένου είδους γυναικείου καλλυντικού δίνεται από τη σχέση $P'(x) = \frac{-250x}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ όπου x

είναι η ποσότητα της ημερήσιας ζήτησης του προϊόντος σε εκατοντάδες. Να βρεθεί η συνάρτηση της ζήτησης, αν η τιμή κάθε μονάδος είναι 50 δρχ. όταν η ζήτηση είναι 300 μονάδες προϊόντος.

Ανακεφαλαίωση

- **Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Παράγουσα:**

$$\int_a^\beta f(x) \, dx = [F(x)]_a^\beta = F(\beta) - F(a)$$

- **Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος:**

(i) $\int_a^\beta c \, dx = c(\beta - a)$, όπου c σταθερά

(ii) $\int_a^\beta f(x) \, dx = \int_a^\gamma f(x) \, dx + \int_\gamma^\beta f(x) \, dx$, όπου $a < \gamma < \beta$

(iii) $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

(iv) $\int_a^\beta f(x) \, dx = -\int_\beta^a f(x) \, dx$

(v) $\int_a^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)] \, dx = \lambda \int_a^\beta f(x) \, dx + \mu \int_a^\beta g(x) \, dx$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(vi) Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) \, dx \geq 0$.

(vii) Αν $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) \, dx \geq \int_a^\beta g(x) \, dx$.

- **Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος:**

– **Ανακάλυψη της Παράγουσας:**

- ♦ Πίνακας παραγουσών βασικών συναρτήσεων
- ♦ Πίνακας παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων

– **Παραγοντική Ολοκλήρωση:**

$$\int_a^\beta f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x)g'(x) \, dx$$

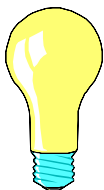
• Υπολογισμός εμβαδού επιπέδων χωρίων:

– $C_f, x'x, x = a, x = \beta: \quad E = \int_a^\beta |f(x)| \, dx$

– $C_f, C_g, x = a, x = \beta: \quad E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| \, dx$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πώς συνδέεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με τον υπολογισμό εμβαδού και πώς με την παράγουσα;
2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι επέκταση του εμβαδού ή το εμβαδον επέκταση του ολοκληρώματος;
3. Μια συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη;
4. Ποιές οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;
5. Σε ποιές περιπτώσεις χρησιμοποιείται η παραγοντική ολοκλήρωση και σε ποιές η ανακάλυψη της παράγουσας;
6. Γιατί ένα χωρίο που περικλείεται από δύο γραφικές παραστάσεις αποτελεί τη γενική περίπτωση σχηματισμού ενός επιπέδου χωρίου;
7. Αν δε δίνονται τα άκρα ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου, πώς είναι δυνατόν να τα προσδιορίσουμε;
8. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης που έχει ορισμένο ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν και δεν είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν.
9. Τι συμπεραίνετε για μια συνάρτηση η οποία έχει ορισμένο ολοκλήρωμα ίσο με το μηδέν και είναι θετική;
10. Πώς αποδεικνύεται η παραγοντική ολοκλήρωση;



Υποδείξεις για τη λύση των Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

§ 1.1 – 1.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. π.χ. $\beta_{23} = \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})$.
2. Όλα τα στοιχεία πάνω απ' την κύρια διαγώνιο είναι 0.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. π.χ. $a_{23} = \min \{2, 3\} = 2$.
Θυμίζουμε ότι το άθροισμα των n -πρώτων όρων Αριθμητικής προόδου είναι $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.
2. (α) Απλό.
(β) Αν εξαιρέσουμε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου τότε είναι τα μισά.
(γ) Όχι (γιατί;)

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Η συμπλήρωση να γίνει με χρήση υπολογιστή. Παρατηρούμε ότι το νερό βράζει σε μικρότερες των 100°C θερμοκρασίες σε μεγάλα υψόμετρα (χαμηλότερης ατμοσφαιρικής πίεσης).
2. (α), (β) Η συμπλήρωση να γίνει με χρήση υπολογιστή. Παρατηρήστε ότι οι διαφορές ανάμεσα στα μοντέλα μέτρησης A και B δεν είναι μεγάλες αν και το A είναι ακριβέστερο. Το Γ μοντέλο οδηγεί σε ανεπαρκούς ακρίβειας αποτελέσματα και είναι το χειρότερο.
3. (α) π.χ. στην τρίτη γραμμή του πίνακα θα απεικονίζεται ο δρόμος γ που ξεκινάει από το A και φθάνει στο Δ:

	A	B	Γ	Δ
γ	-1	0	0	1

- (β), (γ) Οι διανυσματικές σχέσεις που ισχύουν στο σχήμα είναι και οι σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των γραμμών του πίνακα.
4. (α) Φτιάξτε ένα πίνακα όπου οι γραμμές να αντιστοιχούν σε γυναίκες και οι στήλες σε άνδρες.
 (β) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις.
 (γ) Βρείτε εκείνα τα ζευγάρια όπου δε θα υπάρχουν δύο ίδιες γυναίκες ή άνδρες σε δύο διαφορετικούς γάμους.

§ 1.4 – 1.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

3. $x = 2, y = 1$.
 4. Επίλυση εξίσωσης και πράξεις πινάκων.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. (α) (Σ) προσθέστε δύο διαγώνιους πίνακες.
 (β) (Σ) όμοια.
 (γ) (Σ) δεν αναιρείται ο ορισμός επειδή είναι 0 όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου.
3. Λύστε το σύστημα με X, Ψ άγνωστους πίνακες (π.χ. με αντικατάσταση).

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Είναι οι πωλήσεις και των δύο ημερών.
 2. Αν A, B, Γ οι πίνακες των τρίποντων, δίποντων και ελεύθερων βολών τότε $X = 3A + 2B + \Gamma$.
 3. (α) Θεωρήστε A τον πίνακα κατανάλωσης σε κιλοβατώρες κ.λπ.
 (β) Η μείωση 10% θα γίνει μόνο στον πίνακα τιμών κατανάλωσης ρεύματος. Όχι στο πάγιο.

§ 1.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$ και ισχύει $AB = I$ τότε θα ισχύει $BA = I$.

3. Καταλήγουμε στην Πυθαγόρεια σχέση.
4. (α) Πράξεις. Εδώ ισχύει πάντα $AB = BA$.
(β) (i) Ναι (ii) Όχι
6. (α) Πράξεις.
(β) Προφανώς όχι. Δεν ισχύει πάντοτε η ιδιότητα διαγραφής στον πολλαπλασιασμό πινάκων.
7. (α) Σ (β) Λ (γ) Σ

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Θυμηθείτε τι πρέπει να ισχύει για να μπορούν να πολλαπλασιασθούν δύο πίνακες. Επίσης τι σημαίνει ισότητα πινάκων.
2. (α) π.χ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. (α) Πράξεις πινάκων.
(β) Πολλαπλασιάστε την (α) σχέση δεξιά και αριστερά με B.
4. (α) Μετά από πράξεις καταλήγουμε σε σύστημα απ' όπου
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -7 \end{cases}$$
.
(β) $A^3 = A^2 A$ κ.λπ.
5. (α) Από την ισότητα των πινάκων καταλήγουμε στην εξίσωση $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$ απ' όπου $\lambda = -1$ ή $\lambda = -6$.
6. (α) $A^2 = -I$, $A^3 = A^2 A$, $A^4 = A^3 A$ κ.λπ.
(β) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα της διαίρεσης για να αναλύσουμε μεγάλους εκθέτες με διαιρέτη 4, π.χ. $99 = 4 \cdot 24 + 3$ κ.λπ.

§ 1.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Πρέπει $x = 2$, $y = 2$ να επαληθεύουν το σύστημα.
2. Μέθοδος Gauss διαδοχικών απαλοιφών.
(α) Μοναδική λύση.
(β) Άπειρες λύσεις.
(γ) Αδύνατο σύστημα.
3. (α) $A \cdot B = 0$.

- (β) Εκτός της λύσης $B \neq \emptyset$ το ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις μορφής $(x, y, z) = (2t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. Θυμηθείτε πως ορίζεται το άθροισμα $A + B$ και το γινόμενο $A \cdot B$. Καταλήγεται σε σύστημα απ' όπου προσδιορίζετε τα κ, λ .

Σύνθετες Ασκήσεις

- (α) Μέθοδος Gauss.
(β) Μέθοδος Gauss με μικρή διερεύνηση για τις τιμές $\lambda \in \mathbb{R}$.
Αν $\lambda = 1$ υπάρχουν άπειρες λύσεις $(x, y) = (t, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Αν $\lambda \neq 1$ το σύστημα είναι αδύνατο.
- Από την ισότητα των πινάκων καταλήγουμε σε ομογενές σύστημα με άπειρες λύσεις. Για να είναι συμβιβαστό το σύστημα πρέπει να επαληθεύεται και η εξίσωση.
- Καταλήγουμε σε ισοδύναμο σύστημα, το οποίο επιλύουμε με τη μέθοδο Gauss. Μας ενδιαφέρουν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα είναι συμβιβαστό.

Πρακτικές Εφαρμογές

- Αν x, y, ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου (σε μοίρες) τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + \omega = 180 \\ x = y + 10 \\ y = 2\omega \end{array} \right\} \text{ κ.λπ.}$$
- Αν x, y, z η επί τοις % κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C, Ni τότε

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{100} + \frac{z}{100} + \frac{5}{100} = 1 \text{ κ.λπ.}$$
- $$\left\{ \begin{array}{l} x + y + \omega = 18 \\ x + 2y + 3\omega = 33 \\ y = x + \omega \end{array} \right\} \text{ κ.λπ.}$$
- Αν x, y η επί τοις % κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου σε Cu και Sn τότε

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1.$$
 Επίσης $V_{\text{μπρούτζου}} = V_{\text{χαλκού}} + V_{\text{κασσίτερου}}$ κ.λπ. Να γίνει αντικατάσταση όγκων με τη βοήθεια πυκνοτήτων.

Γενικές Ασκήσεις

- Μετά την εξίσωση των αθροισμάτων των στοιχείων της i γραμμής και i στήλης να παρατηρήσετε ότι έχουμε αθροίσματα αριθ-

μητικής προόδου ($S_v = \frac{(a_1 + a_2)v}{2}$).

2. Το άθροισμα των έξι στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης είναι περιττός αριθμός, όταν το πλήθος των περιττών προσθετέων είναι περιττό.
3. Τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0. Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις αυτές και καταλήγουμε:

$$\frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = 0 \dots$$

4. Για να βρούμε το πρώτο στοιχείο του γινομένου AB κάνουμε 3 πολλαπλασιασμούς. Να γενικεύσετε το συλλογισμό αυτό. Επίσης για να βρούμε το πρώτο στοιχείο του AB κάνουμε 2 προσθέσεις. Γενικεύστε.
5. (α) Τι πρέπει να ισχύει για να πολλαπλασιάσουμε πίνακες; Εδώ ο X είναι 2×2 .

(β) Από την εξίσωση πινάκων αν θέσουμε $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα.

6. Το γινόμενο $(AB)X$ εκφράζει τα στοιχεία της πρώτης στήλης του AB (γιατί;)
7. (α) Έχουμε $A = B + 2I$ και πολλαπλασιάζουμε δεξιά και αριστερά με τον πίνακα B , άρα $AB = BA$. Επίσης, αν υψώσουμε στο τετράγωνο τη σχέση $A - B = 2I$ καταλήγουμε στην ισότητα $AB = I$.
- (β) Αφού $AB = BA$ ισχύει η γνωστή ταυτότητα "διαφορά κύβων" κ.λπ.

8. Το πρώτο σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (-\frac{4\lambda^2}{\lambda^2 + 4}, \frac{8}{\lambda^2 + 4})$ και αφού τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα, οφείλει και το δεύτερο να έχει μοναδική λύση.

9. Όμοια με την εφαρμογή στην εισαγωγή της § 1.7 των γραμμικών συστημάτων.

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

§ 2.1 – 2.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας.
2. Προκύπτει αμέσως από τον ορισμό της μέσης τιμής.
3. Όμοια με την 3.
4. Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της διαμέσου.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Προκύπτει από τον ορισμό της τυπικής απόκλισης.
2. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.
3. Κατασκευάστε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων και από τον πίνακα αυτό, απαντήστε στα ερωτήματα.
4. Σχηματίστε τους αντίστοιχους πίνακες.
5. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής.
6. Όμοια με την 5.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Σχηματίστε τους αντίστοιχους πίνακες.
2. Απλή.
3. (α), (β) Απλή.
(γ), (δ) Χρησιμοποιήστε τη σχετική αθροιστική συχνότητα.
4. Απλή.

Γενικές Ασκήσεις

1. Κατασκευάστε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων και από τον πίνακα αυτό, απαντήστε στα ερωτήματα.
2. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.
3. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής.
4. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.
5. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής.

Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης
§ 3.1 – 3.5
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. $-2, 2, 0$, δεν υπάρχει, $1, 1, 2$.
2. (α) $-2, 1$, δεν υπάρχει.
(β) $1, 1, 1$.
(γ) $1, 1, 1$.
3. $\Sigma, \Sigma, \Sigma, \Lambda, \Sigma, \Sigma, \Lambda$.
4. $-1, -1, 0, 1$, δεν υπάρχει, $f(0) = -1, f(1) = 1$.
5. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, δεν υπάρχει, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$, δεν υπάρχει.
6. $20, 8, \frac{3}{2}, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$.
7. $\frac{315}{8}, 1 - 2\sqrt{2}, 3, 0$.
8. (α) $+\infty, -\infty$, δεν υπάρχει.
(β) $-\infty, -\infty, -\infty$.
9. (α) $x = -2$.
(β) $x = 2$.
11. $-\infty$, δεν υπάρχει.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. (α) 12 (β) $\frac{1}{3}$.
2. (α) -4 (β) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (γ) $\frac{3}{8}$ (δ) $\frac{1}{3}$.
3. Να απαλλαγείτε από τα απόλυτα διαλέγοντας κατάλληλες περιοχές του x και στις δύο περιπτώσεις.
4. $a = 3$ ή $a = -3$, πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα.
5. $a = -1$, όμοια πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα.
6. $+\infty, -\infty, +\infty$, δεν υπάρχει, $+\infty, -\infty$.
7. (α) $x = 4$ (β) $x = -1$ (γ) $x = 1$ (δ) $x = 0$ (ε) $x = 1$ (στ) $x = -1$.

Πρακτικές Εφαρμογές

- (β) $f(1) = 450$, $f(3) = 550$, $f(5) = 700$, είναι αντίστοιχα ίδια.
(γ) Δεν υπάρχουν.
- (α) $P(0) = 80$.
(γ) $\lim_{x \rightarrow 9^-} P(t) = +\infty$.
- $x_1 + x_2 = 1$.

§ 3.6 – 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- 0, 3.
- (α) Συνεχής στο $x_0 = 1$.
(β) Ασυνεχής στο $x_0 = 1$.
(γ) Ασυνεχής στο $x_0 = -1$.
(δ) Ασυνεχής στο $x_0 = 2$.
- Στα σημεία 1, 2, 5 η f είναι συνεχής. Στο 0 δεν ορίζεται η f επομένως δεν έχει έννοια να ζητάμε συνέχεια.
- Όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Σύνθετες Ασκήσεις

- (α) $a = -1$ ή $a = 2$ (β) $a = -4$.
- Να εκφράσετε την f ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Απ' αυτή τη σχέση καθορίστε την τιμή $f(0)$.
- (α) $f(x) - f(1) = (x - 1)(2x - 3)$.
(β) -1 .
(γ) Ανάλυση του γινομένου $|f(x) - f(1)| = |x - 1| \cdot |2x - 3| < \frac{1}{10} \cdot \frac{12}{10}$.

Πρακτικές Εφαρμογές

- (β) Το πετρέλαιο μειώνεται και ο διαχειριστής γεμίζει τη δεξαμενή.
(γ) Από 3 έως 18 Φεβρουαρίου.
- (α) $x_0 = 10$ και $x_0 = 60$.

- (β) Υπάρχει αλλαγή κόστους που εξαρτάται από την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

§ 3.10 – 3.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- (i) $0, +\infty$ (ii) $-1, -\infty$.
- (α) 1 (β) 0.
- (α) $+\infty$ (β) 0 (γ) 1.
- (α) 101 (β) -7 (γ) 1.
- π.χ. στην Άσκηση 3: (β) $y = 0$ (γ) $y = 1$.

Σύνθετες Ασκήσεις

- (α) $\lambda = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = -2$.
 (β) Δεν είναι πραγματικός αριθμός.
 (γ) $\lambda = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = 2$.
 (δ) $\lambda = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \frac{1}{2}$.
- (α) 1 (β) $\frac{1}{2}$ (γ) $+\infty$.
- (α) $+\infty$ (β) $-\infty$.

Πρακτικές Εφαρμογές

- (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 0,5$ που σημαίνει ότι το κόστος για έναν δίσκο μειώνεται στις 500 δρχ. όταν η παραγωγή είναι πολύ μεγάλη.
- (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ που σημαίνει ότι η συγκέντρωση του φάρμακου στο αίμα είναι μηδενική ύστερα από μεγάλο χρονικό διάστημα.

Γενικές Ασκήσεις

- (1) Λ (2) Σ (3) Σ (4) Λ (5) Σ (6) Λ.
- Έχουμε μορφή $0(\pm\infty)$ απροσδιοριστίας και διερευνούμε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. (α) Ιδιότητες λογάριθμων και κατόπιν υπολογισμός του ορίου.
 (β) Υπολογισμός του $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ και κατόπιν του ζητούμενου ορίου.
4. (α) $\lim_{v \rightarrow u^+} E(v) = +\infty$ άρα καταναλώνει τεράστια ενέργεια (πρακτικά κολυμπά με την ίδια ταχύτητα κόντρα στο ρυθμό του ποταμού άρα παραμένει στο ίδιο σημείο).
 (β) $\lim_{v \rightarrow u^+} E(v) = +\infty$ άρα πολύ μεγάλη ταχύτητα σημαίνει τεράστια κατανάλωση ενέργειας.
5. (α) Υπολογισμός ορίου με συζυγή παράσταση.
 (β) Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ τότε $\sqrt{1+x} - 1 \simeq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$.
 Άρα $\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = \sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \simeq 3\left(1+\frac{1}{18}\right) \simeq 3,167$.
 Όμοια τα υπόλοιπα.
6. (α)
$$E(x) = \begin{cases} 3x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & , \quad 1 < x < 2 \\ 2x - 1 & , \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & , \quad 3 < x < 4 \\ x + 1 & , \quad 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$
7. (α), (β) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) γνωρίζουμε ότι $\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{AB}$ και $\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{A\Gamma}$.
 (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} AB = \lim_{x \rightarrow 0} 2R \eta\mu \frac{x}{2} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} A\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} R \left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right) = 0$.
 (δ) Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ αφού πολλαπλασιάσετε αριθμητή και παρονομαστή με τις συζυγείς τους παραστάσεις.

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

§ 4.1

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Απλή.
2. Εργασθείτε όπως στις Εφαρμογές.
3. Όμοια με τη 2.
4. Όμοια με τη 2.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Εργασθείτε με πλευρικά όρια.
2. Εργασθείτε με τον ορισμό της παραγώγου.
3. Εργασθείτε με πλευρικά όρια.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Εργασθείτε με το μέσο ρυθμό μεταβολής και το όριό του.
2. Όμοια με την 1.
3. Εκφράστε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ως προς το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας.
4. Εκφράστε τη διαγώνιο ως συνάρτηση της ακμής.
5. Χρησιμοποιήστε το σταθερό ρυθμό μεταβολής του όγκου, για να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας ως προς το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας.
6. Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

§ 4.2 – 4.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Χρησιμοποιήστε τους κανόνες παραγώγισης.
2. Όμοια με την 1.
3. Όμοια με την 1.
4. Όμοια με την 1.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε τους κανόνες παραγώγισης.

2. Όμοια με την 1.
3. Όμοια με την 1.
4. Συγκρίνετε τις τάξεις των πολυωνύμων $(P'(x))^2$ και $P(x)$.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. (α) Χρησιμοποιήστε τον τύπο $\gamma(t) = S''(t)$.
(β) Εξετάστε τότε $\gamma(t) \leq 0$.
2. Υπολογίστε τα $V'(r)$ και $V''(r)$ και αντικαταστήστε στην εξίσωση.
3. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 2, 6$.
4. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 1, 2, 3$.
5. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 0$.
6. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 1$ και $t = 3, 5$.

§ 4.6 – 4.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών βασικών συναρτήσεων.
2. Παραγωγίστε τις συναρτήσεις της δεύτερης στήλης.
3. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών βασικών συναρτήσεων.
4. Πολλαπλασιάστε αριθμητή και παρονομαστή με $(1 - \eta\mu x)$.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 2.
2. Παρατηρήστε ότι $e^{-x}(f'(x) - f(x)) = (e^{-x}f(x))'$.
3. Υπολογίστε την παράγουσα και χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές.
4. Υπολογίστε την παράγουσα και χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές.
5. Παραγωγίστε μία και δύο φορές αντίστοιχα τη συνάρτηση.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Υπολογίστε την παράγουσα της v .
2. Υπολογίστε την παράγουσα.
3. Όμοια με την 3.
4. Βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της x και αντικαταστήστε στην εξίσωση.

§ 4.8 – 4.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Μελετήστε το πρόσημο της f' .
2. Όμοια με την 1.
3. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου.
4. Μελετήστε το πρόσημο της f' .

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Μελετήστε το πρόσημο της f' .
2. Όμοια με την 1.
3. (α) Μελετήστε το πρόσημο της f' .
(β) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του (α).
(γ) Τροποποιήστε τα $f(\pi)$ και $f(e)$.
4. Μελετήστε το πρόσημο των f' , g' και $(f + g)'$.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Μελετήστε το πρόσημο της f' .
2. Όμοια με την 1.
3. Όμοια με την 1.
4. Για να σχηματισθεί το κουτί, κόβουμε τέσσερα τετράγωνα κομμάτια από τις γωνίες του χαρτονιού πλευράς x .
5. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση εσόδων δίνεται από τον τύπο:
$$E(x) = (30 + x)(5000 - 100x)$$

όπου x οι επιπλέον επιβάτες μετά τους 30.
6. Χρησιμοποιήστε την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΛ και ΑΔΓ.

Γενικές Ασκήσεις

1. Μετά από κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου.
2. Εκφράστε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του χωρίου ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της εξωτερικής και εσωτερικής ακτίνας.
3. Υπολογίστε την παράγωγο.
4. Υπολογίστε την παράγουσα.

5. Ακολουθήστε τις υποδείξεις και υπολογίστε την παράγουσα.
6. Κατασκευάστε την παράγωγο πηλίκου $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'$.
7. Μελετήστε το πρόσημο της f' και τα στάσιμα σημεία.
8. Υπολογίστε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = x^3(c - x)^2$.
9. (α) Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
(β) Χρησιμοποιήστε την ομοιότητα των τριγώνων ΑΚΓ και ΑΓΔ και το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΚΓ.
10. Αντικαταστήστε το ύψος στον όγκο ως συνάρτηση του τόξου ΑΒ.
11. Εκμεταλλευθείτε τη σχέση $(\ln[a_1(\varphi_2)])' = (\ln[a_1(\varphi_2)])'' = 0$.

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού**§ 5.1 – 5.2****Ασκήσεις Εμπέδωσης**

1. Απλή εφαρμογή.
2. Απλή εφαρμογή.
3. Βρείτε την παράγωγο της $f(x) = e^{2x}$.
4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x) = \sin 3x$.
5. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα (vi) της § 5.2.
6. Βρείτε την ιδιότητα (vii) της § 5.2.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Απλός υπολογισμός παραγώγου.
2. Όμοια με την 1.
3. Όμοια με την 1.
4. Βρείτε την παράγωγο της g και εξισώστε την με την f .
5. Απλή εφαρμογή.
6. Απλή εφαρμογή.

§ 5.3**Ασκήσεις Εμπέδωσης**

1. Απλή εφαρμογή.
2. Απλή εφαρμογή.
3. Αναλύστε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
4. Όμοια με την 3.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων.
2. Όμοια με την 1.
3. Όμοια με την 1.
4. Όμοια με την 1.
5. Όμοια με την 1.

6. Όμοια με την 1.
7. Απλή παραγοντική ολοκλήρωση.
8. Παραγοντική ολοκλήρωση όπου επανεμφανίζεται το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Απλή εφαρμογή.
2. Απλή εφαρμογή.
3. Απλή εφαρμογή.
4. Απλή εφαρμογή.

§ 5.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι θετική στο $[1, 2]$.
2. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης.
3. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων.
4. Όμοια με την 3.
5. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων στο $[-1, 1]$.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης στο $[-1, 1]$.
2. Παρατηρήστε ότι η f είναι μη αρνητική στο $[0, 1]$.
3. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων.
4. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων στο $[0, 2]$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Απλή εφαρμογή.
2. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων.
3. Όμοια με τη 2.
4. Όμοια με τη 2.
5. Όμοια με τη 2.
6. Όμοια με τη 2.
7. Όμοια με τη 2.

8. Απλές παραγοντικές ολοκληρώσεις.
9. Βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα (v) της § 5.2.
10. Γράψτε το $\sin^3 x = \sin^2 x (\sin x) = \sin^2 x (\eta\mu x)' = (1 - \eta\mu^2 x) (\eta\mu x)'$.
11. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης και χρησιμοποιήστε παραγοντική ολοκλήρωση.
12. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων.
13. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $h(x) - h(0) = \int_0^x h'(t) dt$.
14. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $K(t) - K(0) = \int_0^t K'(x) dx$.
15. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $P(x) - P(0) = \int_0^x P'(t) dt$.

Βιβλιογραφία

1. Bancroft, G., and Fletcher, M., 1998. Improve your maths!, Addison-Wesley.
2. Bentley J. and Turner, G.P.A., 1998, Introduction to Paint Chemistry and principles of paint technology. 4th Ed., Chapman & Hall.
3. Evans, C.W., 1997. Engineering Mathematics, A programmed approach. 3rd Ed., Chapman & Hall.
4. Haberman, R., 1997. Mathematical Models, Prentice-Hall, Inc.
5. Himmelblau, D.M., 1986. Basic principles and calculations in chemical engineering, Prentice-Hall International.
6. Kontogeorgis, G.M., Fredenslund, Aa., and Tassios, D.P., 1993. Simple activity coefficient model for the prediction of solvent activities in polymer solutions, Industrial Engineering Chemistry Research, vol. 32: 362-373.
7. Prausnitz, J.M., Lichtenthaler, R.N., Gomes De Azevedo, E., 1986. Molecular Thermodynamics of Fluid-Phase Equilibria, 2nd Ed. Prentice-Hall International Series.
8. Strang, Gilbert, 1994. Linear Algebra And Its Applications, Massachusetts Institute of Technology.
9. Tassios, D.P., 1993. Applied Chemical Engineering Thermodynamics, Springer-Verlag, Berlin.
10. Tebbutt, P., 1998. Basic Mathematics for Chemists. 2nd Ed., John Wiley & Sons.
11. Valsaraj, K.T., 1995. Elements of Environmental Engineering, CRC Press, Inc.
12. Zar, Jervold, H., 1996. Biostatistical Analysis. 3rd Ed., Prentice-Hall, Inc.
13. Βλάμος, Π.Μ., 1997. 'Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης, Εκδόσεις «V».
14. Βλάμος, Π.Μ., 1998. Παράγωγος Συνάρτησης, Εκδόσεις «V».
15. Βλάμος, Π.Μ., 1999. Ολοκλήρωμα Συνάρτησης, Εκδόσεις «V».
16. Βλάμου, Ε.Μ., 1998. Πίνακες, Εκδόσεις «V».
17. Εξαρχάκος Θ., 1994. Γραμμική Άλγεβρα.
18. Παπαϊωάννου, Α., 1993. Μηχανική των Ρευστών.
19. Περιοδικά Ευκλείδης Γ', Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
20. Φούντας Γρ., Συναρτήσεις, Εκδοτική Εταιρεία Πλαίσιο.

Ευρετήριο Όρων

Fermat 212, 229
 Gauss 38, 41, 45, 48, 49, 56, 58, 267, 268
 Αδύνατο σύστημα 40, 267
 Αθροιστική συχνότητα 65, 81, 91, 92, 103, 270
 Ακρότατα Συνάρτησης 7, 211
 Αντίθετος πίνακας 15
 Αντιμεταθετική ιδιότητα 14, 29, 32
 Απογραφή 61
 Απόλυτη απόκλιση 83, 84, 85, 86
 Απροσδιόριστες Μορφές 6, 112
 Αρχικές Τιμές 201
 Αφαίρεση πινάκων 15
 Γραμμική εξίσωση 39
 Γραμμοπράξεις 43, 56
 Γωνιακά σημεία 212, 229
 Δεύτερη παράγωγος 190, 194, 195, 205, 219, 276
 Διαγώνιος Πίνακας 4
 Διακριτές μεταβλητές 60
 Διακύμανση 86
 Διάμεσος 81, 104
 Διαφορά πινάκων 15
 Διαφορικές Εξισώσεις 7, 200, 228
 Δύναμη πίνακα 30
 Εικονογράμματα 71
 Εμβαδόν χωρίου 250, 252
 Εξίσωσης πινάκων 40
 Επαυξημένος πίνακας 41, 47, 49
 Επιμεριστική ιδιότητα 29
 Επιτρεπτές πράξεις 171
 Εύρος 84, 104

Ιστόγραμμα 73, 74, 76, 93, 94, 101
 Κανόνες Παραγωγίσισης 7, 189, 226
 Κατακόρυφη Ασύμπτωτη 6, 116
 Κατανομή 5, 63, 66, 79, 80, 81, 82, 101, 105, 219
 Κλάση 77
 Κρίσιμα σημεία 212
 Κυκλικό διάγραμμα 67
 Λύση γραμμικού συστήματος 39
 Μεταβλητή 59
 Μηδενικός πίνακας 14
 Μοναδιαίος πίνακας 30
 Ομογενές σύστημα 41, 49, 50, 56, 58, 105, 268
 Οριζόντια Ασύμπτωτη 6, 156
 Ορισμένο Ολοκλήρωμα 7, 231, 234, 235, 241, 250, 261, 262, 263
 Παραγοντική Ολοκλήρωση 242, 262
 Παραγωγή 188
 Παραγωγίσιμη 175, 176, 177, 183, 184, 187, 189, 190, 198, 210, 212, 214, 222, 224, 228, 241
 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης 7, 189, 226
 Παράγωγος 174, 175, 176, 177, 186, 187, 188, 189, 190, 194, 195, 198, 200, 212, 229, 237, 240, 258
 Παράγωγος συνάρτησης 187, 190, 198

Παράμετροι Διασποράς 5, 82
 Παράμετροι Θέσης 5, 76
 Πίνακας 5, 55, 115, 199, 200, 227, 262
 Πίνακας γραμμή 5, 40, 55, 56
 Πλευρικά Όρια 6, 110
 Πληθυσμός 59, 60, 89, 132, 152
 Ποιοτικά χαρακτηριστικά 60
 Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα 19
 Πολλαπλασιασμός πινάκων 27
 Πολυωνυμική συνάρτηση 154
 Ποσοτικά χαρακτηριστικά 60
 Προσεταιριστική ιδιότητα 14, 29, 54
 Ραβδόγραμμα 66, 67, 70, 71, 96, 97
 Ρητές συναρτήσεις 113
 Στάσιμα σημεία 212, 278
 Συμβιβαστό σύστημα 39

Συνέχεια συνάρτησης 134, 169
 Συνεχείς μεταβλητές 60
 Συνεχής Συνάρτηση 133
 Συντελεστής Μεταβλητότητας 6, 88
 Συχνότητα Παρατηρήσεων 5, 62
 Σχετική αθροιστική συχνότητα 81, 270
 Σχετική συχνότητα 64, 90, 93, 99, 105
 Τετραγωνικός Πίνακας 4, 30
 Τοπικό ελάχιστο 212, 213, 214
 Τοπικό μέγιστο 212, 213, 214, 216, 217
 Τριγωνικός άνω 4, 24
 Τριγωνικός κάτω 5, 9, 53
 Τυπική απόκλιση 87, 88, 92, 93, 99, 101, 102, 104, 105

Πρόλογος

Αγαπητοί Μαθητές,

το παρόν εγχειρίδιο δεν αποτελεί μία απλή παράθεση των λύσεων των ασκήσεων του σχολικού σας βιβλίου. Μπορεί να αποτελέσει ουσιαστικό βοήθημα στην προσωπική σας μελέτη, κριτήριο αυτοαξιολόγησης και πολύτιμο βοηθό στην προσπάθειά σας να εξοικειωθείτε με δύσκολες μαθηματικές έννοιες. Επίσης, με σωστή χρήση είναι δυνατόν να σας οδηγήσει σε δημιουργικές εργασίες και μαθηματικές αναζητήσεις.

Η σωστή χρήση είναι συνδεδεμένη με τη σωστή προσωπική σας μελέτη, που πρέπει να έχει ως στόχο την άνοδο του επιπέδου σας στα Μαθηματικά και όχι την ευκαιριακή λύση των ασκήσεων που σας αναθέτει ο καθηγητής σας.

Το πρώτο βασικό στοιχείο είναι να μην ανατρέχετε στη λύση μίας άσκησης με την πρώτη δυσκολία, αλλά να προσπαθείτε να προσδιορίσετε την αιτία που σας δυσκολεύει στην επίλυσή της (έλλειψη διαβάσματος στην αντίστοιχη θεωρία, λάθος προσανατολισμός στην επίλυση, κενά από προηγούμενες γνώσεις, λάθη απροσεξίας, κ.λπ.) και να προσπαθήσετε να τα διορθώσετε.

Όταν δυσκολεύεστε αρκετά σε μία άσκηση, συμβουλευθείτε αρχικά την υπόδειξη λύσης που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Αν πάλι έχετε πρόβλημα διαβάστε την αντίστοιχη θεωρία και προσπαθήστε με διαφορετικούς τρόπους την επίλυση της άσκησης. Αφού εξαντλήσετε όλες τις ιδέες σας χωρίς αποτέλεσμα, τότε μελετήστε τη λύση που προτείνεται. Δεν πρέπει όμως να σταθείτε σε μία απλή αντιγραφή ή ανάγνωση της λύσης αυτής. Πρέπει να σημειώσετε τα κύρια βήματα της λύσης και κατόπιν να προσπαθήσετε να ξαναλύσετε την άσκηση, όχι όμως απομνημονεύοντας την προτεινόμενη λύση.

Τέλος, είναι σημαντικό να εξάγετε συμπεράσματα σχετικά με τις προσωπικές σας ελλείψεις, που σας εμπόδισαν να λύσετε την άσκηση. Μη διστάσετε να συμβουλευθείτε τον καθηγητή σας, ώστε να σας βοηθήσει να καταλάβετε πλήρως την επίλυση της άσκησης και να σας δώσει οδηγίες για την προσωπική σας μελέτη.

Οι λύσεις που προτείνονται είναι ενδεικτικές και σε καμμία περίπτωση οι μοναδικές. Είναι μεγάλη χαρά για κάθε δάσκαλο (και ι-

διαίτερα μαθηματικό) να του παρουσιάζονται πολλές λύσεις από τους μαθητές του για το ίδιο πρόβλημα και πολλές φορές κομψότερες από τις προτεινόμενες. Στο ίδιο αυτό πνεύμα κινείται και η συγγραφική ομάδα, η οποία με μεγάλη χαρά θα δεχόταν να της στείλετε οποιαδήποτε λύση θεωρείτε ότι είναι πιο εύληπτη από αυτές που περιέχονται στο εγχειρίδιο αυτό.

Με εκτίμηση,

Η συγγραφική ομάδα.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

§ 1.1 – 1.3	1
Ασκήσεις Εμπέδωσης	1
Σύνθετες Ασκήσεις	2
Πρακτικές Εφαρμογές	4
§ 1.4 – 1.5	8
Ασκήσεις Εμπέδωσης	8
Σύνθετες Ασκήσεις	11
Πρακτικές Εφαρμογές	13
§ 1.6	16
Ασκήσεις Εμπέδωσης	16
Σύνθετες Ασκήσεις	21
§ 1.7	24
Ασκήσεις Εμπέδωσης	24
Σύνθετες Ασκήσεις	27
Πρακτικές Εφαρμογές	30
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	33

Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

§ 2.1 – 2.6	41
Ασκήσεις Εμπέδωσης	41
Σύνθετες Ασκήσεις	44
Πρακτικές Εφαρμογές	50
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	57

Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

§ 3.1 – 3.5	62
Ασκήσεις Εμπέδωσης	62
Σύνθετες Ασκήσεις	70
Πρακτικές Εφαρμογές	75
§ 3.6 – 3.9	77
Ασκήσεις Εμπέδωσης	77
Σύνθετες Ασκήσεις	80
Πρακτικές Εφαρμογές	82
§ 3.10 – 3.11	84
Ασκήσεις Εμπέδωσης	84

Σύνθετες Ασκήσεις	87
Πρακτικές Εφαρμογές	90
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	91

Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

§ 4.1	98
Ασκήσεις Εμπέδωσης	98
Σύνθετες Ασκήσεις	100
Πρακτικές Εφαρμογές	102
§ 4.2 – 4.5	106
Ασκήσεις Εμπέδωσης	106
Σύνθετες Ασκήσεις	108
Πρακτικές Εφαρμογές	109
§ 4.6 – 4.7	112
Ασκήσεις Εμπέδωσης	112
Σύνθετες Ασκήσεις	114
Πρακτικές Εφαρμογές	117
§ 4.8 – 4.9	120
Ασκήσεις Εμπέδωσης	120
Σύνθετες Ασκήσεις	121
Πρακτικές Εφαρμογές	123
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	128

Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

§ 5.1 – 5.2	136
Ασκήσεις Εμπέδωσης	136
Σύνθετες Ασκήσεις	137
§ 5.3	140
Ασκήσεις Εμπέδωσης	140
Σύνθετες Ασκήσεις	141
Πρακτικές Εφαρμογές	144
§ 5.4	147
Ασκήσεις Εμπέδωσης	147
Σύνθετες Ασκήσεις	149
Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου	152

1

Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

§ 1.1 – 1.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα $B = [\beta_{ij}]$ με $\beta_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji})$, $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη μορφή του πίνακα B;

Λύση

$$\beta_{11} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{11}) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) = \frac{1}{2} (-3 - 1) = -2$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{2} (a_{13} + a_{31}) = \frac{1}{2} (1 + 3) = 2$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2} (a_{21} + a_{12}) = \frac{1}{2} (-1 - 3) = -2$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2} (a_{22} + a_{22}) = \frac{1}{2} (5 + 5) = 5$$

και κατά όμοιο τρόπο υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του B.

Αυτός ο πίνακας είναι:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του που βρίσκονται εκατέρωθεν της διαγωνίου είναι ίσα, δηλαδή $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, όταν $i \neq j$.

Ο Β ονομάζεται **συμμετρικός πίνακας**.

Άσκηση 2

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - y^2 & (x + y)^2 \\ (x + 4)^2 & y^2 & x + 2y - 4 \\ y^2 - x^2 & x + y & (x - y)^2 \end{bmatrix}$$

με $x, y \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

Λύση

Τριγωνικός κάτω σημαίνει ότι τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, άρα:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ (x + y)^2 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = y \text{ ή } x = -y \\ x = -y \\ x + 2y - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -y \\ x + 2y - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 4 \end{array}$$

Με αυτές τις τιμές των x, y ο πίνακας A γράφεται:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

άρα διαγώνιος.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Βρείτε τον πίνακα $A = [a_{ij}]$ τύπου $n \times n$, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι $a_{ij} = \min \{i, j\}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$. Κατόπιν, βρείτε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Λύση

Ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & v \end{bmatrix}$$

Άρα το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου είναι:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + v = \frac{(1+v)v}{2}$$

(Θυμίζουμε ότι το άθροισμα n -όρων αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$).

Άσκηση 2

Θεωρούμε ένα $n \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$.

- (α) Πόσα στοιχεία έχει συνολικά ο πίνακας A ;
- (β) Πόσα στοιχεία υπάρχουν πάνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιο;
- (γ) Μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιο πίνακα με περισσότερα από $n^2 - n$ στοιχεία ίσα με μηδέν, που να έχει όλες τις γραμμές (αντίστοιχα στήλες) διάφορες της μηδενικής;

Λύση

- (α) Ο τετραγωνικός πίνακας τύπου $n \times n$ προφανώς έχει n^2 στοιχεία.
- (β) Η κύρια διαγώνιος $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ έχει n στοιχεία. Άρα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι $n^2 - n$. Αφού είναι τετραγωνικός, τα μισά είναι πάνω απ' τη διαγώνιο, άρα $\frac{n^2 - n}{2}$ στοιχεία και τα άλλα μισά είναι κάτω απ' τη διαγώνιο, επίσης $\frac{n^2 - n}{2}$ στοιχεία.
- (γ) Αν θέσουμε $n^2 - n$ στοιχεία του πίνακα ίσα με μηδέν τότε όλα τα στοιχεία εκτός εκείνα της διαγωνίου είναι 0. Με περισσότερα από $n^2 - n$ στοιχεία ίσα με μηδέν θα έχουμε επιπλέον κάποια στοιχεία της διαγωνίου 0, άρα κάποια γραμμή (ή γραμμές) ή στήλη (ή στήλες) θα είναι μηδενική, θα έχει δηλαδή όλα τα στοιχεία της μηδέν.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Είναι γνωστό ότι το νερό βράζει στους 100°C . Ισχύει όμως πάντοτε αυτό; Η απάντηση μπορεί να δοθεί με χρήση της εξίσωσης Antoine που εκφράζει την «τάση ατμών» (δηλαδή την πίεση στο σημείο βρασμού) ως συνάρτηση της θερμοκρασίας:

$$\ln P^s = 18,3104 - \frac{3826,36}{T - 45,47} = A - \frac{B}{T + C}$$

όπου $A = 18,3104$, $B = 3826,36$, $C = -45,47$, T = θερμοκρασία σε Kelvin, P^s = τάση ατμών σε mm Hg.

Αν είναι γνωστό ότι οι βαθμοί Kelvin προκύπτουν, αν στους βαθμούς Κελσίου προσθέσουμε 273,15, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \text{C} & \text{K} & \frac{B}{C+T} & A - \frac{B}{C+T} & P^s \text{ (mm Hg)} & P^s \text{ (atm)} \\ 100 & & & & & \\ 90 & & & & & \\ 98 & & & & & \end{bmatrix}$$

Σχολιάστε τα αποτελέσματα του πίνακα.

Λύση

Με χρήση υπολογιστή ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \text{C} & \text{K} & \frac{B}{C+T} & A - \frac{B}{C+T} & P^s \text{ (mm Hg)} & P^s \text{ (atm)} \\ 100 & 373,15 & 11,67712 & 6,633 & 760 & 1 \\ 90 & 363,15 & 12,04469 & 6,2657 & 526 & 0,69 \\ 98 & 371,15 & 11,74883 & 6,56156 & 707 & 0,93 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω τρόπος διεξαγωγής υπολογισμών μέσω πίνακα είναι ιδιαίτερα βολικός. Όπως περιμέναμε, το νερό βράζει σε μικρότερες των 100°C θερμοκρασίες σε μεγάλα υψόμετρα (χαμηλότερης ατμοσφαιρικής πίεσης).

Άσκηση 2

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογισμένες, με 3 διαφορετικά μοντέλα μέτρησης, τιμές για τον συντελεστή ενεργότητας μιας σειράς πολυμερών διαλυμάτων. Ο συντελεστής

ενεργότητας είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα στην εφαρμοσμένη Θερμοδυναμική.

Σύστημα	Πειραματική Τιμή	Μοντέλο		
		A	B	Γ
PIB/τολουόλιο	5,30	5,28	6,19	7,01
PIB/τετραχλωράνθρακας	2,53	2,74	2,93	2,10
PVC/ακετόνη	11,80	9,98	10,17	3,64
PVC/κυκλοεξάνιο	16,10	10,96	8,96	5,36
BR/εξάνιο	6,36	5,79	4,97	9,89
BR/ακετόνη	10,40	11,36	9,49	33,63
PS/βενζόλιο	4,27	4,76	3,98	5,78
PS/αιθυλοβενζόλιο	4,96	4,63	4,23	7,02

Να σχηματίσετε έναν πίνακα όπου:

- (α) Στην πρώτη στήλη να εμφανίζονται οι πειραματικές τιμές και
- (β) Στις επόμενες στήλες να εμφανίζονται, αντί των υπολογισμένων τιμών, τα ποσοστιαία σφάλματα, καθώς και το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα του κάθε μοντέλου στην τελευταία γραμμή του πίνακα.

Σημείωση:

- Το ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:

$$Π.Σφ. = \frac{|Πειραματική\ τιμή - Υπολογισμένη\ τιμή|}{Πειραματική\ τιμή} \cdot 100$$
- Το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:

$$Μ.Π.Σφ. = \frac{Αθροισμα\ ποσοστιαίων\ σφαλμάτων\ κάθε\ μοντέλου}{Πλήθος\ μετρήσεων}$$

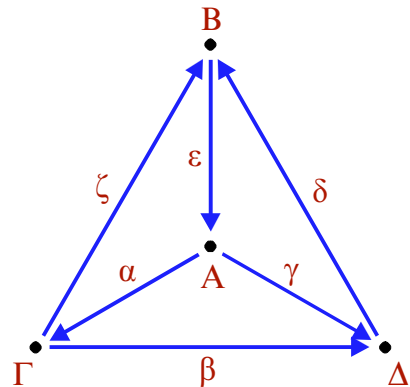
Λύση

Σύστημα	Πειραματική Τιμή	Ποσ. σφάλματα (%)		
		A	B	Γ
PIB/τολουόλιο	5,30	0,4	16,8	32,3
PIB/τετραχλωράνθρακας	2,53	8,3	15,8	17,0
PVC/ακετόνη	11,80	15,4	13,8	69,1
PVC/κυκλοεξάνιο	16,10	32,0	44,3	66,7
BR/εξάνιο	6,36	9,0	21,9	55,5
BR/ακετόνη	10,40	9,2	8,7	223,4
PS/βενζόλιο	4,27	11,5	6,8	35,4
PS/αιθυλοβενζόλιο	4,96	6,6	14,7	41,5
Μέσο ποσοστιαίο σφάλμα		11,55	17,85	67,61

Παρατηρήστε ότι οι διαφορές ανάμεσα στα μοντέλα μέτρησης Α και Β δεν είναι μεγάλες αν και το Α είναι ακριβέστερο. Το Γ μοντέλο οδηγεί σε ανεπαρκούς ακρίβειας αποτελέσματα και είναι το χειρότερο από τα τρία.

Άσκηση 3 (Τοπολογικός ή συνδετικός πίνακας)

Το διπλανό σχήμα μας δείχνει μια κεντρική Α και τρεις περιφεριακές γειτονιές Β, Γ, Δ που συνδέονται με δρόμους μονής κατεύθυνσης. Κάθε ένας απ' αυτούς τους δρόμους θα συμβολίζεται με δύο αριθμούς: -1 από τη γειτονιά που ξεκινάει, 1 σ' αυτή που καταλήγει και 0 σ' αυτή που δεν πάει. (π.χ. ο δρόμος ΑΓ, -1 στη γειτονιά Α, 1 στη γειτονιά Γ και 0 στις υπόλοιπες γειτονιές).



- (α) Φτιάξτε έναν πίνακα που να φανερώνει τον τρόπο που συνδέονται οι γειτονιές με τους μονόδρομους, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι γραμμές θα παριστάνουν τους δρόμους και οι στήλες τις γειτονιές.
- (β) Τι παρατηρείτε στις γραμμές αυτού του πίνακα για τα δίκτυα
- (i) γ, δ, ε (iii) α, β, γ
- (ii) α, ζ, ε (iv) β, δ, ζ
- (γ) Μπορείτε να γενικεύσετε για οποιοδήποτε από τα δίκτυα που συνδέουν τις τέσσερις γειτονιές;

Λύση

- (α) Αν Μ συμβολίσουμε αυτό τον πίνακα τότε:

$$M = \begin{bmatrix} & \text{Α} & \text{Β} & \text{Γ} & \text{Δ} \\ \text{α} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{β} & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \text{γ} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{δ} & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \text{ε} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \text{ζ} & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (β) (i) Το γ, δ, ε ως κλειστό δίκτυο που ξεκινά από το Α και καταλή-

γει στο A (δηλ. $\vec{\gamma} + \vec{\delta} + \vec{\varepsilon} = \vec{0}$) έχει ως άθροισμα στοιχείων των γραμμών τους, **μηδέν**.

(ii) Όμοια.

(iii) Το α, β, γ είναι ένα δίκτυο τέτοιο ώστε μπορεί κάποιος να πάει από το A στο Δ μέσω Γ , μπορεί όμως να πάει απευθείας από το A στο Δ . Άρα το άθροισμα των γραμμών α και β μας δίνει τη γραμμή γ .

(iv) Όμοια.

Άσκηση 4 (Το πρόβλημα του γάμου)

Υποθέστε ότι έχουμε 4 γυναίκες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και 4 άνδρες A, B, Γ, Δ . Κάποια απ' αυτά τα 16 ζευγάρια συμφωνούν να δοκιμάσουν αν μπορούν να παντρευτούν και κάποια δε συμφωνούν για διάφορους λόγους. Αν με $a_{ij} = 0$ συμβολίσουμε ότι η i γυναίκα δε συμφωνεί με τον j άνδρα και $a_{ij} = 1$ ότι η i γυναίκα συμφωνεί με τον j άνδρα τότε:

- (α) Γράψτε έναν πίνακα που να δείχνει ότι:
- Η α γυναίκα συμφωνεί πως μπορεί να παντρευτεί με τον A ή τον Δ άνδρα.
 - Η β γυναίκα με τον B άνδρα.
 - Η γ γυναίκα με τον A ή τον Γ άνδρα
 - Η δ γυναίκα με τον B ή τον Δ ή τον A άνδρα.
- (β) Με δεδομένο ότι μια γυναίκα μπορεί να παντρευτεί έναν άνδρα και αντίστροφα, ποιά είναι τα δυνατά ζευγάρια του (α) ερωτήματος;
- (γ) Βρείτε ένα μέγιστο σύνολο γάμων που παριστάνουν οι επόμενοι πίνακες:

$$M = \begin{array}{ccccc|c} & A & B & \Gamma & \Delta & E \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}, N = \begin{array}{ccccc|c} & A & B & \Gamma & \Delta & E \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

Λύση

- (α) Αν συμβολίσουμε με K το ζητούμενο πίνακα τότε έχουμε στις γραμμές του γυναίκες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και στις στήλες του άνδρες A, B, Γ, Δ :

$$(\alpha) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (\beta) \quad A = [2 \ 1 \ 0], B = [-2 \ -1 \ 0]$$

$$(\gamma) \quad A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\delta) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$(\alpha) \quad A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2-1 \\ 2+2 & 3-2 \\ 3+3 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+1 \\ 2-2 & 3+2 \\ 3-3 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(\beta) \quad A + B = [2-2 \ 1-1 \ 0+0] = [0 \ 0 \ 0]$$

$$A - B = [2+2 \ 1+1 \ 0-0] = [4 \ 2 \ 0]$$

$$(\gamma) \quad A + B = \begin{bmatrix} 2+0 \\ -4+4 \\ 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 2-0 \\ -4-4 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(δ) Δεν ορίζονται τα $A + B$ και $A - B$ γιατί δεν είναι του ίδιου τύπου οι A, B .

Άσκηση 3

Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x^2 & x \\ y^2 & 4 \\ x^2+6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & y \\ 1 & 5y \\ 5x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -y^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$\begin{bmatrix} x^2 & x \\ y^2 & 4 \\ x^2+6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & y \\ 1 & 5y \\ 5x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -y^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 3 & x - y \\ y^2 - 1 & 4 - 5y \\ x^2 + 6 - 5x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -y^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και από την ισότητα των πινάκων παίρνουμε:

- (i) $x^2 = 4$
- (ii) $x - y = 1$
- (iii) $y^2 = 1$
- (iv) $y^2 - 5y + 4 = 0$
- (v) $x^2 - 5x + 6 = 0$

- (α) Από την πρώτη παίρνουμε $x = 2$ ή $x = -2$ και παρατηρούμε ότι η τελευταία αληθεύει μόνο για $x = 2$, η οποία είναι και η ζητούμενη τιμή για το x .
- (β) Από την τρίτη παίρνουμε $y = 1$ ή $y = -1$ και παρατηρούμε ότι η τέταρτη αληθεύει μόνο για $y = 1$, η οποία είναι και η ζητούμενη τιμή για το y .
- (γ) Τέλος, για τις τιμές που υπολογίσαμε επαληθεύεται και η δεύτερη.

Άσκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{(α)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{(β)} X + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(γ)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{(δ)} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Λύση

$$\begin{array}{ll} \text{(α)} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{(β)} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{(γ)} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(δ) \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στους επόμενους ισχυρισμούς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- (α) Το άθροισμα και η διαφορά δύο διαγώνιων πινάκων τύπου $n \times n$ είναι διαγώνιος πίνακας $n \times n$.
- (β) Το άθροισμα και η διαφορά δύο τριγωνικών άνω (ή κάτω) πινάκων είναι τριγωνικός άνω (ή κάτω) πίνακας.
- (γ) Ο μηδενικός είναι διαγώνιος πίνακας.

Λύση

- (α) **Σωστό** γιατί αν:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{vv} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{vv} \end{bmatrix}$$

τότε φανερά:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + \beta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} + \beta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{vv} + \beta_{vv} \end{bmatrix}$$

Όμοια για τη διαφορά $A - B$.

- (β) **Σωστό** γιατί αν:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{vv} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1v} \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{vv} \end{bmatrix}$$

τότε φανερά:

$$A + B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \cdots & \alpha_{1v} + \beta_{1v} \\ 0 & \alpha_{22} + \beta_{22} & \cdots & \alpha_{2v} + \beta_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{vv} + \beta_{vv} \end{bmatrix}$$

Όμοια και για τριγωνικούς κάτω πίνακες.

- (γ) **Σωστό** γιατί ο διαγώνιος πίνακας πρέπει να έχει όλα τα στοιχεία του, που δε βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο, 0. Αυτό δεν αναιρείται επειδή έχει 0 και τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Αν π.χ. αφαιρούσαμε δύο ίσους διαγώνιους πίνακες A και B το αποτέλεσμα θα ήταν ο μηδενικός πίνακας, και όπως αποδείξαμε στο (α) ερώτημα, θα παρέμενε διαγώνιος.

Άσκηση 2

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (α) Να υπολογίσετε τον πίνακα $3A - 2B$.
 (β) Να βρείτε πίνακα X τέτοιο ώστε $3A - 2X = 2B + 5X$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad 3A - 2B &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -7 \\ 6 & -14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (β) Από την εξίσωση $3A - 2X = 2B + 5X$ παίρνουμε:

$$7X = 3A - 2B \Leftrightarrow X = \frac{1}{7}(3A - 2B) \Leftrightarrow$$

$$X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -7 \\ 6 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & -1 \\ \frac{6}{7} & -2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε πίνακες X και Ψ για τους οποίους ισχύουν:

$$\left. \begin{aligned} 2X - A &= \Psi - 2B \\ X - 2B &= A - \Psi \end{aligned} \right\}$$

Λύση

$$\left. \begin{aligned} 2X - A &= \Psi - 2B \\ X - 2B &= A - \Psi \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2X - \Psi &= A - 2B \\ X + \Psi &= A + 2B \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 3X &= 2A \\ X + \Psi &= A + 2B \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{2}{3}A \\ \Psi &= A + 2B - \frac{2}{3}A \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} X &= \frac{2}{3}A \\ \Psi &= \frac{1}{3}A + 2B \end{aligned} \right\}$$

Άρα $X = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ και

$$\Psi = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Πρακτικές Εφαρμογές**Άσκηση 1**

Οι ημερήσιες πωλήσεις εφημεριδών από το περίπτερο μιας συνοικίας αριθμούν σε φύλλα όπως δείχνουν οι επόμενοι πίνακες:

1^η ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	25	20	20
Απόγευμα	5	60	4

2^η ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	20	22	25
Απόγευμα	4	65	8

Αν ονομάσουμε M τον πίνακα πωλήσεων της 1^{ης} ημέρας και N τον πίνακα πωλήσεων της 2^{ης} ημέρας, υπολογίστε τον $M + N$. Ποιά είναι η ερμηνεία που δίνετε για τον πίνακα $M + N$;

Λύση

$$M = \begin{bmatrix} 25 & 20 & 20 \\ 5 & 60 & 4 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 20 & 22 & 25 \\ 4 & 65 & 8 \end{bmatrix}, M + N = \begin{bmatrix} 45 & 42 & 45 \\ 9 & 125 & 12 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $M + N$ εκφράζει τις πωλήσεις σε φύλλα του περιπτέρου τις δύο ημέρες.

Άσκηση 2

Τα τρίποντα, δίποντα και οι ελεύθερες βολές που πέτυχαν, εντός και εκτός έδρας, στις τέσσερις πρώτες αγωνιστικές του πρωταθλήματος μπάσκετ τρεις ομάδες δίνονται παρακάτω:

ΟΜΑΔΕΣ \ ΠΟΝΤΟΙ	ΤΡΙΠΟΝΤΑ		ΔΙΠΟΝΤΑ		ΕΛ. ΒΟΛΕΣ	
	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός
1 ^η Ομάδα	28	16	60	48	40	36
2 ^η Ομάδα	24	20	68	56	52	44
3 ^η Ομάδα	32	12	84	76	44	68

- (α) Να γραφούν τα δεδομένα με μορφή τριών πινάκων A , B , Γ που να περιέχουν αντίστοιχα τα τρίποντα, δίποντα και τις ελεύθερες βολές της κάθε ομάδας.
- (β) Να βρεθεί ένας πίνακας ο οποίος δίνει τους συνολικούς πόντους κάθε ομάδας, εντός και εκτός έδρας.

Λύση

- (α) Ας θεωρήσουμε A , B , Γ τους πίνακες που δίνουν αντίστοιχα τα τρίποντα, δίποντα και τις ελεύθερες βολές. Τότε:

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 16 \\ 24 & 20 \\ 32 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 60 & 48 \\ 68 & 56 \\ 84 & 76 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 40 & 36 \\ 52 & 44 \\ 44 & 68 \end{bmatrix}$$

- (β) Ο πίνακας που θα δίνει τους συνολικούς πόντους κάθε ομάδας είναι:

$$X = 3A + 2B + \Gamma = 3 \begin{bmatrix} 28 & 16 \\ 24 & 20 \\ 32 & 12 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 60 & 48 \\ 68 & 56 \\ 84 & 76 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 36 \\ 52 & 44 \\ 44 & 68 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 244 & 180 \\ 260 & 216 \\ 308 & 256 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Η κατανάλωση ρεύματος σε κιλοβατώρες, δύο οικογενειών ανά τετράμηνο δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	A' TETP.	B' TETP.	Γ' TETP.
1 ^η Οικογένεια	1828	1700	1560
2 ^η Οικογένεια	2230	1920	1870

Αν η κιλοβατώρα κοστίζει 35 δρχ. και το πάγιο κάθε τετράμηνου είναι 4450 δρχ:

- (α) Να παραστήσετε μ' έναν πίνακα X τα ποσά που θα πληρώνει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο.
- (β) Να βρείτε πόσα χρήματα θα πλήρωναν οι ίδιες οικογένειες, αν μείωναν την κατανάλωση ρεύματος κατά 10%.

Λύση

- (α) Ας θεωρήσουμε A τον πίνακα της κατανάλωσης σε κιλοβατώρες κάθε οικογένειας, ανά τετράμηνο:

$$A = \begin{bmatrix} 1828 & 1700 & 1560 \\ 2230 & 1920 & 1870 \end{bmatrix}$$

Τα ποσά που θα πληρώνει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο μας δίνει ο πίνακας:

$$X = 35 \cdot A + 4450 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63980 & 59500 & 54600 \\ 78050 & 67200 & 65450 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4450 & 4450 & 4450 \\ 4450 & 4450 & 4450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68430 & 63950 & 59050 \\ 82500 & 71650 & 69900 \end{bmatrix}$$

- (β) Τα χρήματα που θα πλήρωναν οι οικογένειες ανά τετράμηνο αν μείωναν κατά 10% την κατανάλωση ρεύματος μας δίνει ο πίνακας:

$$\Psi = 35 \cdot (0,90 \cdot A) + 4450 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$35 \begin{bmatrix} 1645,2 & 1530 & 1404 \\ 2007 & 1728 & 1683 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4450 & 4450 & 4450 \\ 4450 & 4450 & 4450 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 62032 & 58000 & 53590 \\ 74695 & 64930 & 63355 \end{bmatrix}$$

§ 1.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων, όπου αυτά ορίζονται:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & (\beta) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ (\gamma) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} & (\delta) [3 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ (\epsilon) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & (\sigma\tau) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Λύση

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ (\beta) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ (\gamma) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\delta) [3 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [8 \ 2] \end{array}$$

$$(ε) \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(στ) Δεν ορίζεται γιατί έχουμε γινόμενο πινάκων 2×2 με 3×3 .

Άσκηση 2

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$. Ποιό γενικότερο συμπέρασμα εξάγεται;

Λύση

$$\begin{aligned} \bullet \quad A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \\ \bullet \quad B \cdot A &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

Όταν $AB = I$ τότε ισχύει και $BA = I$. Δηλαδή $AB = BA = I$.

Άσκηση 3

Αν α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ και για τους πίνακες:

$$L = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \text{ και } M = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & -\beta \end{bmatrix}$$

ισχύει $L^2 = M^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

$$L^2 = M^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^2 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 + \gamma^2 \end{bmatrix}$$

Άρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ και αφού ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τους 3×3 διαγώνιους πίνακες A και B .

(α) Δείξτε ότι:

(i) AB διαγώνιος (ii) $AB = BA$

(β) Ισχύουν τα ίδια αν οι πίνακες είναι 3×3 τριγωνικοί άνω (ή κάτω);

Λύση

(α) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix}$. Τότε:

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}\beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\beta_{33} \end{bmatrix} \text{ και } BA = \begin{bmatrix} \beta_{11}\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22}\alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33}\alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Άρα ο AB είναι διαγώνιος και ισχύει $AB = BA$.

(β) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix}$. Τότε:

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} & \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} \\ 0 & \alpha_{22}\beta_{22} & \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\beta_{33} \end{bmatrix}$$

Άρα τριγωνικός άνω.

Το στοιχείο $1^{\text{ης}}$ γραμμής και $3^{\text{ης}}$ στήλης του πίνακα BA είναι το $\beta_{11}\alpha_{13} + \beta_{12}\alpha_{23} + \beta_{13}\alpha_{33}$ και είναι διάφορο του στοιχείου $1^{\text{ης}}$ γραμμής και $3^{\text{ης}}$ στήλης του πίνακα AB . Άρα **δεν ισχύει** $AB = BA$.

Άσκηση 5

Ποιοί από τους επόμενους πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με τον πίνακα $(A + B)^2$;

(i) $(B + A)^2$

(iii) $A(A + B) + B(A + B)$

(ii) $A^2 + 2AB + B^2$

(iv) $A^2 + AB + BA + B^2$

Για κάθε έναν που νομίζετε ότι είναι ίσος με τον $(A + B)^2$, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

- (α) $(B + A)^2 = (A + B)^2$ αφού ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση.
- (β) $A^2 + 2AB + B^2 \neq (A + B)^2$ αφού δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό των πινάκων.
- (γ) $A(A + B) + B(A + B) = (A + B)(A + B) = (A + B)^2$ αφού ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.
- (δ) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ αφού ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ όπου $\alpha, \beta \neq 0$.

- (α) Δείξτε ότι $A^2 = \alpha \cdot A$.
- (β) Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι από την ισότητα $A^2 = \alpha \cdot A$ προκύπτει η ισότητα $A = \alpha \cdot I$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

$$(α) \quad A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ \alpha\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ \alpha\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } A^2 = \alpha A.$$

- (β) Αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα διαγραφής του πίνακα A τότε από την ισότητα $A^2 = \alpha A$ παίρνουμε:

$$A = \alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

που είναι αδύνατο αφού α και $\beta \neq 0$.

Άσκηση 7

Θεωρούμε δύο πίνακες 3×3 A και B . Σημειώστε ποιους από τους επόμενους ισχυρισμούς θεωρείτε σωστούς (Σ) ή λάθος (Λ). Δικαιολογήστε την απάντησή σας στους σωστούς ισχυρισμούς και δώστε ένα αριθμητικό αντιπαράδειγμα στους λάθος ισχυρισμούς.

- (α) Αν η πρώτη και η τρίτη στήλη του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη στήλη του AB είναι ίδιες.
- (β) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.
- (γ) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του A είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.

Λύση

Έστω ότι $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ με $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$.

(α) **Σωστό** γιατί αν:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \kappa & \beta_{12} & \kappa \\ \lambda & \beta_{22} & \lambda \\ \mu & \beta_{32} & \mu \end{bmatrix}$$

τότε η πρώτη στήλη του AB προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις γραμμές του A με την πρώτη στήλη του B . Δηλαδή:

1^η στήλη AB

$$a_{11}\kappa + a_{12}\lambda + a_{13}\mu$$

$$a_{21}\kappa + a_{22}\lambda + a_{23}\mu$$

$$a_{31}\kappa + a_{32}\lambda + a_{33}\mu$$

Όμοια, η τρίτη στήλη του AB προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις γραμμές του A με την τρίτη στήλη του B . Δηλαδή:

3^η στήλη AB

$$a_{11}\kappa + a_{12}\lambda + a_{13}\mu$$

$$a_{21}\kappa + a_{22}\lambda + a_{23}\mu$$

$$a_{31}\kappa + a_{32}\lambda + a_{33}\mu$$

- (β) **Λάθος**. Π.χ. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε η πρώτη

γραμμή του AB αποτελείται από τα στοιχεία: $-2 \ 4 \ 8$ και η τρίτη γραμμή του AB από τα στοιχεία: $-8 \ 4 \ 4$.

- (γ) **Σωστό**. Η δικαιολογία είναι όμοια με του (α) ερωτήματος.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Αν ο A είναι πίνακας τύπου $\mu \times 1999$, ο B είναι πίνακας τύπου $\kappa \times \lambda$ και ισχύει $AB = BA$, να βρείτε τους κ , λ , μ .

Λύση

- Για να ορίζεται ο πίνακας AB πρέπει $\kappa = 1999$. Τότε ο AB είναι τύπου $\mu \times \lambda$.
- Όμοια, για να ορίζεται ο πίνακας BA πρέπει $\lambda = \mu$. Τότε ο BA είναι τύπου $\kappa \times 1999$.
- Αφού $AB = BA$ πρέπει οι τύποι τους να είναι ίδιοι, άρα $\lambda = 1999$ και $\mu = \kappa$, επομένως $\kappa = \lambda = \mu = 1999$.

Άσκηση 2

Βρείτε, με δοκιμές, πίνακες 2×2 τέτοιους ώστε:

- (α) $A^2 = -I$, με στοιχεία του A πραγματικούς αριθμούς.
 (β) $B^2 = 0$, με κάποια στοιχεία του B διάφορα του μηδενός.
 (γ) $\Gamma\Delta = -\Delta\Gamma$, εκτός της περίπτωσης όπου $\Gamma\Delta = 0$.
 (δ) $EZ = 0$, με όλα τα στοιχεία των E και Z μη μηδενικά.

Λύση

- (α) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
 (β) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 (γ) $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
 (δ) $E = Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 3

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix}$.

- (α) Δείξτε ότι $A^2 + A - (2 + \beta\gamma)I = 0$.
 (β) Ισχύει $AB = BA$ τότε και μόνο τότε αν $A^2B = BA^2$.

Λύση

$$(α) \quad A^2 + A - (2 + \beta\gamma)I = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix} - (2 + \beta\gamma) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta\gamma & -\beta \\ -\gamma & \beta\gamma + 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 + \beta\gamma & 0 \\ 0 & 2 + \beta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε την (α) δεξιά και αριστερά με B, οπότε:

- $A^2B + AB - (2 + \beta\gamma)B = 0$
- $BA^2 + BA - (2 + \beta\gamma)B = 0$

'Αρα $A^2B + AB = BA^2 + BA$ απ' όπου προκύπτει και η ισοδυναμία του ερωτήματος (β).

Άσκηση 4

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε πραγματικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει $A^2 = xA + yI$. Κατόπιν υπολογίστε τον πίνακα A^3 ως συνάρτηση των A και I.

Λύση

$$\bullet \quad A^2 = xA + yI \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + y & x \\ -x & 2x + y \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 8 \\ x = 5 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = -7 \end{array} \right\}$$

'Αρα $A^2 = 5A - 7I$.

$$\bullet \quad A^3 = A^2A = (5A - 7I)A = 5A^2 - 7A = 5(5A - 7I) - 7A = 18A - 35I$$

Άσκηση 5

Αν για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 3 & -\lambda \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ισχύει $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ υπολογίστε τον αριθμό λ. Για ποιές τιμές του λ ισχύει $AB + BA = 0$;

Λύση

- $(A + B)^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2 & \lambda + 2 \\ \lambda^2 + 6 & -(\lambda + 2) \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 3 & -\lambda \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2)^2 + (\lambda + 2)(\lambda^2 + 6) & 0 \\ 0 & (\lambda + 2)(\lambda^2 + 6) + (\lambda + 2)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + (\lambda + 1)(\lambda^2 + 3) & 0 \\ 0 & \lambda^2 + (\lambda + 1)(\lambda^2 + 3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$
 απ' όπου $\lambda = -1$ ή $\lambda = -6$.
- Από τη σχέση $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ παίρνουμε:

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow AB + BA = \mathbb{O}$$
 (Θυμηθείτε ότι δεν ισχύουν οι ταυτότητες στους πίνακες εκτός αν $AB = BA$)
 Άρα για τις ίδιες τιμές του λ που βρήκαμε παραπάνω ισχύει $AB + BA = \mathbb{O}$.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $A^2 = -I$, $A^3 = -A$, $A^4 = I$

(β) $A^{99} + A^{100} + A^{101} = I$

Λύση

(α) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

$$A^3 = A^2 A = (-I)A = -A$$

$$A^4 = A^2 A^2 = (-I)(-I) = I^2 = I$$

- (β) Για τον υπολογισμό των μεγάλων δυνάμεων του A διαιρούμε τους εκθέτες δια 4 αφού $A^4 = I$. Άρα:

$$A^{99} + A^{100} + A^{101} = A^{4 \cdot 24 + 3} + A^{4 \cdot 25} + A^{4 \cdot 25 + 1} = -A + I + A = I$$

§ 1.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{cases} (2\lambda - 1)x + \mu y = 7 \\ (\lambda - 2)x + (\mu - 1)y = 2 \end{cases}$$

Βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει λύση $(x, y) = (2, 2)$.

Λύση

Αφού $x = 2, y = 2$ λύση του συστήματος τότε έχουμε:

$$\begin{cases} 2(2\lambda - 1) + 2\mu = 7 \\ 2(\lambda - 2) + 2(\mu - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda + 2\mu = 9 \\ 2\lambda + 2\mu = 8 \end{cases}$$

απ' όπου εύκολα βρίσκουμε $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{7}{2}$.

Άσκηση 2

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} -y + \omega &= 4 \\ (α) \quad 2x + 2y + 6\omega &= 4 \\ 3x + 6y + 15\omega &= 9 \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} x + 4y - 2\omega &= 4 \\ (β) \quad -x - 4y + 5\omega &= 13 \\ 2x + 8y - 2\omega &= -2 \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} -2x + 2y - 2\omega &= -18 \\ (γ) \quad x - y - \omega &= 1 \\ 2x - 2y + 5\omega &= 33 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{aligned} (α) \quad E &= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 15 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 15 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \frac{1}{3}\gamma_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-1)\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow (-1)\gamma_2 \\ \gamma_3 \rightarrow \frac{1}{3}\gamma_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-3)\gamma_3 \\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + \gamma_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-1)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right]$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y, \omega) = (-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$.

- (β) Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε σε ισοδύναμο σύστημα με εξισώσεις:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y = 2 \\ \omega = 3 \end{array} \right\}$$

και αν θέσουμε $y = t \in \mathbb{R}$ έχουμε άπειρες λύσεις:

$$(x, y, \omega) = (2 - 4t, t, 3) \text{ με } t \in \mathbb{R}$$

- (γ) Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα μορφής:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ \omega = 0 \\ 0 = 1 \end{array} \right\}$$

Άσκηση 3

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (α) Υπολογίστε το γινόμενο $A \cdot B$.

- (β) Αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ γράψτε το σύστημα που εκφράζει η εξίσωση πινάκων $A \cdot X = 0$ και διαπιστώστε ότι ο πίνακας B είναι μια λύση αυτού του συστήματος. Μπορείτε να βρείτε και άλλες λύσεις αυτού του συστήματος;

Λύση

$$(α) A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\beta) \quad A \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

και είναι ένα ομογενές σύστημα.

Ο πίνακας B είναι μια λύση του συστήματος, αφού το επαληθεύει.

$$E = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 3 & -6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-3)\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + 3\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

και αν θέσουμε $z = t \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε άπειρες λύσεις:

$$(x, y, z) = (2t, t, t)$$

με t ελεύθερο άγνωστο.

Άσκηση 4

Δίνεται ο πίνακας A τύπου $(\kappa + \lambda) \times (2\kappa + \lambda - 1)$ και ο πίνακας B τύπου $(2\lambda - \kappa) \times (3\kappa - \lambda + 2)$. Να βρείτε τους ακέραιους κ, λ ώστε να ορίζεται το άθροισμα $A + B$ και το γινόμενο $A \cdot B$.

Λύση

- Για να ορίζεται το άθροισμα $A + B$ πρέπει οι πίνακες A, B να είναι του ίδιου τύπου, άρα:

$$\begin{cases} \kappa + \lambda = 2\lambda - \kappa \\ 2\kappa + \lambda - 1 = 3\kappa - \lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa - \lambda = 0 & (1) \\ -\kappa + 2\lambda = 3 & (2) \end{cases}$$

- Για να ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ πρέπει:

$$2\kappa + \lambda - 1 = 2\lambda - \kappa \Leftrightarrow 3\kappa - \lambda = 1 \quad (3)$$

Αν επιλύσουμε το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\kappa = 1, \lambda = 2$ οι τιμές των οποίων επαληθεύουν και την (3). Τότε οι πίνακες A, B θα είναι τύπου 3×3 .

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) \quad \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -1 \\ 2x + y = 1 \\ 5x + 4y = -5 \end{array} \right\} & (\beta) \quad \left. \begin{array}{l} \lambda x + y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{array} \right\} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

Λύση

(α) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}
 E &= \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \rightarrow \frac{1}{3}\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow[\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-5)\gamma_1]{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-2)\gamma_1} \\
 &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_2 \rightarrow (-1)\gamma_2} \\
 &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-2)\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_2 \rightarrow 3\gamma_2} \\
 &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε μοναδική λύση $(x, y) = (3, -5)$.

(β) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned}
 E &= \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-1)\gamma_1]{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-\lambda)\gamma_1} \\
 &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

- Αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x + y = 1$ και έχει άπειρες λύσεις $(x, y) = (t, 1 - t)$ όπου $x = t \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

που είναι αδύνατο.

Άσκηση 2

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} [x \ y \ \omega] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [y \ -2\omega \ -x] \\ x + y - 3\omega = 2\lambda \end{array} \right\}$$

είναι συμβιβαστό.

Λύση

Από την πρώτη ισότητα παίρνουμε:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 2\omega = y \\ 2x + 2y - \omega = -2\omega \\ y + 2\omega = -x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2\omega = 0 \\ 2x + 2y + \omega = 0 \\ x + y + 2\omega = 0 \end{array} \right\}$$

που είναι ομογενές σύστημα. Για την επίλυσή του παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-2)\gamma_1 \\ \sim \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-1)\gamma_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

απ' όπου εύκολα καταλαβαίνουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$$

Αν θέσουμε $x = t$ τότε έχουμε άπειρες λύσεις $(x, y, \omega) = (t, -t, 0)$.

Για να επαληθεύεται και η εξίσωση $x + y - 3\omega = 2\lambda$ πρέπει:

$$t - t - 3 \cdot 0 = 2\lambda, \text{ άρα } \lambda = 0.$$

Σημείωση: Μπορούμε να πάρουμε και τις τέσσερις εξισώσεις του συστήματος και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο διαδοχικών απαλειφών, οπότε στην τελευταία γραμμή θα παρουσιαστεί: $0 \ 0 \ 0 \mid 2\lambda$. Άρα για να είναι συμβιβαστό το σύστημα, πρέπει $\lambda = 0$.

Άσκηση 3

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

έχει λύση. Γι' αυτές τις τιμές του λ να υπολογίσετε τον πίνακα $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Λύση

Η εξίσωση καταλήγει σε ισοδύναμο σύστημα όπως φαίνεται στα επόμενα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - \lambda y \\ \lambda x - \lambda y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \lambda y = \lambda + 1 \\ \lambda x - \lambda y = \lambda^2 + 1 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda + 1 \\ \lambda & -\lambda & \lambda^2 + 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-\lambda)\gamma_1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & 1 - \lambda \end{array} \right]$$

- Αν $\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, τότε έχουμε:

(i) Για $\lambda = 0$, $E = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ αδύνατο σύστημα

(ii) Για $\lambda = 1$, $E = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x - y = 2$ που έχει άπειρες λύσεις $(x, y) = (t + 2, t)$ με $y = t$ "ελεύθερο άγνωστο" $t \in \mathbb{R}$. Άρα για $\lambda = 1$ ο πίνακας είναι

$$X = \begin{bmatrix} t + 2 \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

- Αν $\lambda^2 - \lambda \neq 0$ δηλαδή $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$, τότε έχουμε:

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & 1 - \lambda \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\lambda^2 - \lambda} \gamma_3} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda + 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \lambda \gamma_2} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} \end{array} \right]$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (\lambda, -\frac{1}{\lambda})$, $\lambda \neq 1, \lambda \neq 0$

και ο πίνακας $X = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$ με $\lambda \neq 1, \lambda \neq 0$.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ μία γωνία του είναι 10° μεγαλύτερη από τη δεύτερη και η δεύτερη διπλάσια από την τρίτη. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου.

Λύση

Αν θεωρήσουμε x, y, ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου (σε μοίρες) τότε:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \omega = 180 \\ x = y + 10 \\ y = 2\omega \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 10 \\ x + y + \omega = 180 \\ y - 2\omega = 0 \end{array} \right\}$$

Αν Ε είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος τότε:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-1)\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 170 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 170 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-2)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 170 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{5}\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 34 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + 2\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 68 \\ 0 & 0 & 1 & 34 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 78 \\ 0 & 1 & 0 & 68 \\ 0 & 0 & 1 & 34 \end{array} \right]$$

Άρα οι γωνίες είναι $x = 78^\circ$, $y = 68^\circ$ και $\omega = 34^\circ$.

Άσκηση 2

Ο ανοξείδωτος χάλυβας περιέχει σίδηρο (Fe), άνθρακα (C), νικέλιο (Ni) και χρώμιο (Cr). Η ανάλυση έδειξε ότι το 80% του χάλυβα απο-

τελείται από σίδηρο και νικέλιο, υπάρχει 5% χρώμιο και η ποσότητα του Fe είναι τετραπλάσια της ποσότητας του C. Να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C, Ni, Cr.

Λύση

Έστω $x\%$, $y\%$, $z\%$ η κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C και Ni αντίστοιχα. Ακόμα γνωρίζουμε ότι 5% είναι η σύσταση κατά βάρος του Cr στο χάλυβα. Τότε:

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{100} + \frac{z}{100} + \frac{5}{100} = 1 \quad \text{ή} \quad x + y + z + 5 = 100 \quad (1)$$

Επίσης:

$$x + z = 80 \quad (2)$$

$$x = 4y \quad (3)$$

Το σύστημα των (1), (2), (3) είναι γραμμικό και η επίλυσή του μας δίνει: $x = 60$, $y = 15$, $z = 20$.

Άσκηση 3

Ένα ξενοδοχείο έχει x μονόκλινα, y δίκλινα και ω τρίκλινα δωμάτια.

- (α) Να εκφράσετε το πλήθος των δωματίων και κλινών με τη βοήθεια των x , y , ω .
- (β) Αν το πλήθος όλων των δωματίων είναι 18, το πλήθος των κλινών 33 και το πλήθος των δίκλινων δωματίων όσο των μονόκλινων και τρίκλινων μαζί, να βρείτε πόσα είναι τα μονόκλινα, δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια.

Λύση

- (α) Πλήθος δωματίων του ξενοδοχείου: $x + y + \omega$
 Πλήθος κλινών του ξενοδοχείου: $x + 2y + 3\omega$

- (β) Έχουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \omega = 18 \\ x + 2y + 3\omega = 33 \\ y = x + \omega \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + \omega = 18 \\ x + 2y + 3\omega = 33 \\ -x + y - \omega = 0 \end{array} \right\}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 2 & 3 & 33 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-1)\gamma_1 \\ \sim \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + \gamma_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \\ 0 & 2 & 0 & 18 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-2)\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{4}\gamma_3} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-1)\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-1)\gamma_2} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Άρα το ξενοδοχείο έχει 6 μονόκλινα, 9 δίκλινα και 3 τρίκλινα δωμάτια.

Άσκηση 4

Ο μπρούτζος είναι κράμα χαλκού (Cu) και κασσίτερου (Sn). Ένα κομμάτι μπρούτζου ζυγίζει 81,877 gr και έχει όγκο 10 cm³. Αν η πυκνότητα του Cu είναι 8,92 gr/cm³ και του Sn είναι 7,29 gr/cm³, να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου σε χαλκό και κασσίτερο. (Θυμίζουμε ότι: πυκνότητα = $\frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}}$, $\rho = \frac{m}{V}$).

Λύση

- Έστω x% σε Cu και y% Sn η κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου. Τότε:

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1 \Leftrightarrow x + y = 100 \quad (1)$$

Η βασική σχέση του μπρούτζου με τα συστατικά του είναι η ισότητα των όγκων τους, δηλ.

$$V_{\text{μπρούτζου}} = V_{\text{χαλκού}} + V_{\text{κασσίτ.}} \Leftrightarrow \frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \quad (2)$$

όπου m, m₁, m₂ είναι οι μάζες και ρ, ρ₁, ρ₂ είναι αντίστοιχα οι πυκνότητες του μπρούτζου, Cu και Sn.

- Όμως m₁ = x%·m και m₂ = y%·m. Άρα η (2) γράφεται:

$$\frac{m}{\rho} = \frac{x\% \cdot m}{\rho_1} + \frac{y\% \cdot m}{\rho_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{x\%}{\rho_1} + \frac{y\%}{\rho_2} \Leftrightarrow \frac{10}{81,877} = \frac{x}{892} + \frac{y}{729}$$

απ' όπου με απαλοιφή παρονομαστών παίρνουμε:

$$729x + 892y = 79420 \text{ περίπου} \quad (3)$$

Το σύστημα (1) και (3):

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 729x + 892y = 79420 \end{cases}$$

δίνει $y = 40$ και $x = 60$.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1

Θεωρούμε ένα $n \times \mu$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ ώστε για το κάθε στοιχείο του πίνακα να ισχύει $a_{ij} = i \cdot j$. Αν το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης, δείξτε ότι ο πίνακας είναι τετραγωνικός.

Λύση

Το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής είναι: $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{i\mu}$.

Το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης είναι: $a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{vi}$.

Έχουμε $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{i\mu} = a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{vi}$, οπότε από τον ορισμό κάθε στοιχείου του πίνακα A η προηγούμενη ισότητα γράφεται:

$$i + 2i + \dots + \mu i = i + 2i + \dots + vi \Leftrightarrow$$

$$(1 + 2 + \dots + \mu)i = (1 + 2 + \dots + v)i \Leftrightarrow \frac{(1 + \mu)\mu}{2} = \frac{(1 + v)v}{2} \Leftrightarrow$$

$$\mu^2 - v^2 + \mu - v = 0 \Leftrightarrow (\mu - v)(\mu + v + 1) = 0$$

Άρα $\mu = v$ αφού $\mu + v + 1 \neq 0$ διότι οι μ, v είναι θετικοί ακέραιοι.

Άσκηση 2

Σ' έναν πίνακα 6×6 τοποθετούμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 36 κατά σειρά, ξεκινώντας από την πρώτη γραμμή και γράφοντας διαδοχικά τους παραπάνω αριθμούς. Μπορείτε να τοποθετήσετε τους αριθμούς αυτούς έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι περιττός αριθμός;

Λύση

Ο πίνακας είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{bmatrix}$$

Το άθροισμα των έξι στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης είναι περιττός αριθμός όταν το πλήθος των περιττών προσθέσεων είναι περιττό. Επομένως σε κάθε γραμμή και στήλη μπορούμε να έχουμε τρεις περιττούς προσθετέους αν για οποιοδήποτε στοιχείο του πίνακα θέσουμε:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{περιττός} & \text{όταν } i+j = \text{περιττός} \\ \text{άρτιος} & \text{όταν } i+j = \text{άρτιος} \end{cases}$$

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 13 & 16 & 15 & 18 & 17 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 26 & 25 & 28 & 27 & 30 & 29 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 - \beta\gamma & \beta^2 - \alpha\gamma \\ \beta^3 - \gamma^2\alpha & \alpha\beta\gamma & \gamma^2 - \alpha\beta \\ \gamma^3 - \alpha^2\beta & \alpha^3 - \beta^2\gamma & \beta\gamma^2 \end{bmatrix}$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

Λύση

Τριγωνικός κάτω σημαίνει ότι τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, άρα $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$, $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, $\gamma^2 - \alpha\beta = 0$. Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \alpha\gamma - \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} (2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = 0$$

$$\text{'Αρα: } \left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \gamma - \alpha = 0 \end{array} \right\} \text{ απ' όπου } \alpha = \beta = \gamma.$$

Τότε για τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο έχουμε:

$$\beta^3 - \gamma^2 \alpha = \beta^3 - \beta^3 = 0$$

$$\gamma^3 - \alpha^2 \beta = \gamma^3 - \gamma^3 = 0$$

$$\alpha^3 - \beta^2 \gamma = \alpha^3 - \alpha^3 = 0$$

'Αρα ο πίνακας A είναι διαγώνιος.

Άσκηση 4

Θεωρούμε έναν πίνακα A τύπου 2×3 και έναν πίνακα B τύπου 3×4 . Πόσους πολλαπλασιασμούς και πόσες προσθέσεις πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο $A \cdot B$;

Λύση

$$\text{'Εστω } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \end{bmatrix}.$$

- Τα 3 στοιχεία της πρώτης γραμμής του A πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα 3 στοιχεία της πρώτης στήλης του B ώστε να πάρουμε το στοιχείο της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης του AB. 'Αρα έχουμε 3 πολλαπλασιασμούς.

Αυτό γίνεται για όλα τα στοιχεία του γινομένου AB, άρα έχουμε $3 \cdot 4$ πολλαπλασιασμούς της πρώτης γραμμής του A με όλες τις στήλες του B και αντίστοιχα άλλους $3 \cdot 4$ πολλαπλασιασμούς της δεύτερης γραμμής του A με όλες τις στήλες του B. Συνολικά, έχουμε $2 \cdot 3 \cdot 4$ πολλαπλασιασμούς.

- Για να βρούμε το στοιχείο της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης του AB προσθέτουμε μεταξύ τους τα 3 γινόμενα που βρήκαμε αρχικά. 'Αρα κάνουμε 2 προσθέσεις.

Επομένως, για όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του AB έχουμε $2 \cdot 4$ προσθέσεις. 'Ομοια, για τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής του AB έχουμε $2 \cdot 4$ προσθέσεις. Συνολικά $2 \cdot 2 \cdot 4$ προσθέσεις.

Μπορείτε να γενικεύσετε για πίνακες $A_{m \times n}$ και $B_{n \times k}$;

Άσκηση 5

Θεωρούμε έναν 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

- (α) Βρείτε τον τύπο του πίνακα X για τον οποίο έχει έννοια η εξίσωση $AX - XA = I$ (1).
 (β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας X για τον οποίο αληθεύει η (1).

Λύση

- (α) Για να ορίζεται ο πίνακας AX πρέπει οι γραμμές του X να είναι 2 και για να ορίζεται ο πίνακας XA πρέπει οι στήλες του X να είναι 2. Άρα ο X είναι 2×2 .

- (β) Έστω ότι υπάρχει τέτοιος πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ για τον οποίο ισχύει: $AX - XA = I \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha x + \gamma y & \beta x + \delta y \\ \alpha z + \gamma \omega & \beta z + \delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{ll} \beta z - \gamma y = 1 & (1) \\ \alpha y + \beta \omega - \beta x - \delta y = 0 & (2) \\ \gamma x + \delta z - \alpha z - \gamma \omega = 0 & (3) \\ \gamma y - \beta z = 1 & (4) \end{array} \right\}$$

απ' όπου με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (4) παίρνουμε $0 = 2$ αδύνατο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας X και η εξίσωση $AX - XA = I$ είναι αδύνατη.

Σημείωση: Γενικά είναι αδύνατη η εξίσωση $AX - XA = I_n$ για κάθε πίνακα A τύπου $n \times n$.

Άσκηση 6

Θεωρούμε δύο $n \times n$ πίνακες A, B και τον τύπου $n \times 1$ πίνακα στήλη:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (α) Ποιά στοιχεία του γινομένου AB είναι αποτέλεσμα της πράξης $(AB)X$;
- (β) Γνωρίζοντας ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων, ποιά στοιχεία του γινομένου AB εκφράζει το γινόμενο $A(BX)$;

Λύση

- (α) Το γινόμενο AB είναι ένας $n \times n$ πίνακας και ο X είναι ένας $n \times 1$ πίνακας με πρώτο στοιχείο 1 και τα υπόλοιπα 0. Άρα $(AB)X$ είναι ένας $n \times 1$ πίνακας και εκφράζει την πρώτη στήλη του AB , αφού μόνο τα στοιχεία της πρώτης στήλης πολλαπλασιάζονται με το 1, ενώ τα υπόλοιπα μηδενίζονται.
- (β) Αφού $A(BX) = (AB)X$, προφανώς πάλι τα στοιχεία της πρώτης στήλης του AB εκφράζει το γινόμενο $A(BX)$.

Άσκηση 7

Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A, B για τους οποίους ισχύει $A - B = 2I$ και $A^2 + B^2 = 6I$.

- (α) Δείξτε ότι $AB = BA = I$.
- (β) Υπολογίστε τον πίνακα $A^3 - B^2 - A^2 - B^2$.

Λύση

- (α) $A - B = 2I \Leftrightarrow A = B + 2I$. Τότε:

$$\left. \begin{aligned} AB &= (B + 2I)B = B^2 + 2B \\ BA &= B(B + 2I) = B^2 + 2B \end{aligned} \right\}$$

Άρα $AB = BA$. Επίσης, αφού $A - B = 2I$, τότε:

$$(A - B)^2 = (2I)^2 \Leftrightarrow A^2 - 2AB + B^2 = 4I \Leftrightarrow 6I - 2AB = 4I \Leftrightarrow AB = I$$

- (β) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) = (2I)(6I + I) = (2I)(7I) = 14I$
 Άρα $A^3 - B^3 - (A^2 + B^2) = 14I - 6I = 8I$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ισοδύναμα τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \quad \left. \begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 2x + \lambda^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\Sigma_2) \quad \left. \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x + \mu y &= \lambda + \mu \end{aligned} \right\}$$

Λύση

- Ο επαυξημένος πίνακας του πρώτου συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda^2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \rightarrow (-1)\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 2 & \lambda^2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-2)\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 0 & \lambda^2 + 4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{\lambda^2 + 4} \gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{8}{\lambda^2 + 4} \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-4\lambda^2}{\lambda^2 + 4} \\ 0 & 1 & \frac{8}{\lambda^2 + 4} \end{array} \right]$$

Άρα το (Σ_1) έχει μοναδική λύση $(x, y) = \left(\frac{-4\lambda^2}{\lambda^2 + 4}, \frac{8}{\lambda^2 + 4} \right)$.

- Ο επαυξημένος πίνακας του δεύτερου συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & \mu & \lambda + \mu \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-1)\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mu - 2 & \lambda + \mu \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{\mu - 2} \gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda + \mu}{\mu - 2} \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-2)\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-2(\lambda + \mu)}{\mu - 2} \\ 0 & 1 & \frac{\lambda + \mu}{\mu - 2} \end{array} \right]$$

Άρα το (Σ_2) έχει μοναδική λύση: $(x, y) = \left(\frac{-2(\lambda + \mu)}{\mu - 2}, \frac{\lambda + \mu}{\mu - 2} \right)$.

Θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-4\lambda^2}{\lambda^2 + 4} = \frac{-2(\lambda + \mu)}{\mu - 2} \\ \frac{8}{\lambda^2 + 4} = \frac{\lambda + \mu}{\mu - 2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{-4\lambda^2}{\lambda^2 + 4} = \frac{-16}{\lambda^2 + 4} \\ \frac{8}{\lambda^2 + 4} = \frac{\lambda + \mu}{\mu - 2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \frac{8}{\lambda^2 + 4} = \frac{\lambda + \mu}{\mu - 2} \end{array} \right\}$$

- Αν $\lambda = 2$ τότε από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $1 = \frac{2 + \mu}{\mu - 2} \Leftrightarrow -2 = 2$ αδύνατο.

(*) Αφού τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι ισοδύναμα τότε κατ' ανάγκη το (Σ_2) έχει μοναδική λύση γι' αυτό $\mu \neq 2$.

- Αν $\lambda = -2$ τότε έχουμε $1 = \frac{-2 + \mu}{\mu - 2} \Leftrightarrow \mu - 2 = \mu - 2$ που αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του $\mu \neq 2$.

Άρα για $\lambda = -2$ και $\mu \in \mathbb{R} - \{2\}$ τα (Σ_1) , (Σ_2) είναι ισοδύναμα.

Άσκηση 9

Μια βιομηχανία, χρησιμοποιεί τρεις μηχανές, με τις οποίες κατασκευάζει τέσσερα βιομηχανικά είδη. Κάθε μηχανή δουλεύει 8 ώρες την ημέρα και ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποιείται κάθε μηχανή για την παραγωγή μιας μονάδας από κάθε είδος δίνεται από τον πίνακα:

Μηχανή \ Είδη	1 ^ο	2 ^ο	3 ^ο	4 ^ο
1 ^η	1	2	1	2
2 ^η	2	0	1	1
3 ^η	1	2	3	0

Να βρείτε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευαστούν μέσα σε μια ημέρα.

Λύση

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 ο αριθμός των μονάδων που παράγονται από κάθε είδος σε μια μέρα. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned} \right\}$$

Ο επανξιημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + (-2)\gamma_1 \\ \sim \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + (-1)\gamma_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{4}\gamma_2 \\ \sim \\ \gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-1)\gamma_3 \\ \sim \\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + \left(-\frac{1}{4}\right)\gamma_3 \end{array} \\
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + (-2)\gamma_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

και αν θέσουμε $x_4 = t$ τότε έχουμε άπειρες λύσεις:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4 - t, 2 - t, t, t)$$

με t ελεύθερο άγνωστο.

Επειδή $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ θα είναι:

$$\left. \begin{array}{l} 4 - t \geq 0 \\ 2 - t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{array} \right\}$$

άρα $0 \leq t \leq 2$.

Αν δεχτούμε ότι παράγονται μόνο ακέραιες μονάδες από κάθε είδος, τότε θα είναι $t = 0$ ή $t = 1$ ή $t = 2$ και οι λύσεις του συστήματος θα είναι:

1^η λύση : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 0, 0)$ για $t = 0$

2^η λύση : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 1, 1, 1)$ για $t = 1$

3^η λύση : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 2, 2)$ για $t = 2$

§ 2.1 – 2.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Οι εισαγωγές – εξαγωγές της χώρας από το 1974 έως το 1993 δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

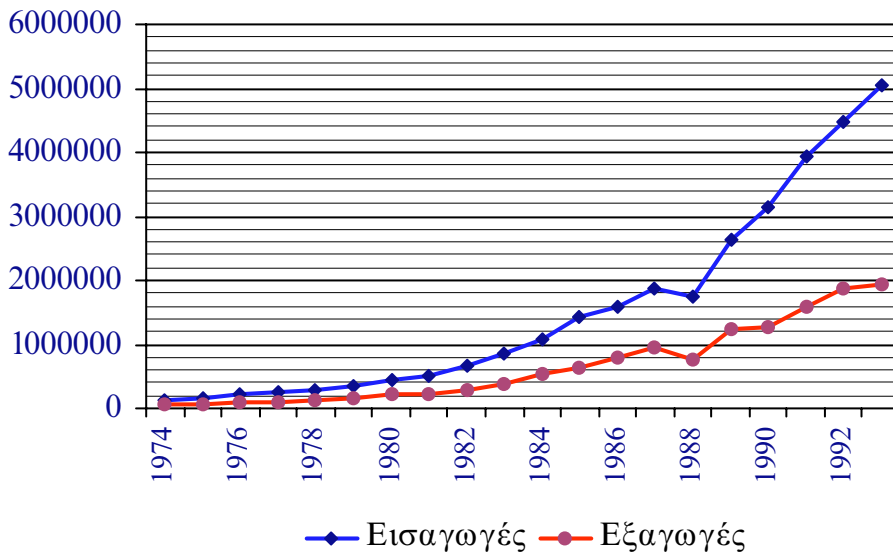
Εισαγωγές και Εξαγωγές 1974 – 1993

Έτος	Εισαγωγές	Εξαγωγές	Έτος	Εισαγωγές	Εξαγωγές
1974	132181	60980	1984	1083880	542676
1975	172041	74441	1985	1412797	629085
1976	223159	93811	1986	1582298	789995
1977	252150	101330	1987	1867354	955070
1978	287729	123727	1988	1756998	776434
1979	356820	144238	1989	2625714	1230942
1980	452881	221108	1990	3137524	1267507
1981	493764	237928	1991	3921522	1579967
1982	665920	286281	1992	4484059	1880763
1983	848295	392652	1993	5050531	1933422

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

Να γίνει η γραφική παράσταση αυτών με πολυγωνικές γραμμές στην ίδια γραφική παράσταση.

Λύση



Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Λύση

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_k x_k}{v} = \frac{v_1 x_1}{v} + \frac{v_2 x_2}{v} + \dots + \frac{v_k x_k}{v} = \\ &= \frac{v_1}{v} x_1 + \frac{v_2}{v} x_2 + \dots + \frac{v_k}{v} x_k = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Το μέσο ύψος των 80 κατοίκων ενός νησιού είναι 172 cm. Στις καλοκαιρινές διακοπές φθάνουν στο νησί 60 τουρίστες με μέσο ύψος 187 cm. Ποιό είναι το μέσο ύψος των ατόμων που βρίσκονται στο νησί στις καλοκαιρινές διακοπές;

Λύση

Για τα ύψη $t_1, t_2, \dots, t_{80}$ των 80 κατοίκων έχουμε ότι:

$$172 = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{80}}{80}$$

'Αρα $t_1 + t_2 + \dots + t_{80} = 80 \cdot 172$.

Για τα ύψη $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{60}$ των 60 τουριστών έχουμε ότι:

$$187 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{60}}{60}$$

'Αρα $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{60} = 60 \cdot 187$.

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{80} + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{60}}{80 + 60} = \frac{80 \cdot 172 + 60 \cdot 187}{140} =$$

$$\frac{24980}{140} = 178,42 \text{ cm}$$

'Ασκηση 4

Σε ένα εργοστάσιο με 100 εργαζόμενους η μέση τιμή των αμοιβών είναι 185000. Το 45% των εργαζομένων στο εργοστάσιο πληρώνονται με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής και οι μισθοί τους έχουν μέση τιμή 165000. Αν οι αποδοχές των εργαζομένων με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής αυξηθούν στη μέση τιμή, ποιά θα είναι η νέα μέση τιμή;

Λύση

Πριν γίνει η αύξηση οι αποδοχές είναι $t_1, t_2, \dots, t_{45}, t_{46}, t_{47}, \dots, t_{100}$ και

θα έχουμε $185000 = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{45} + t_{46} + t_{47} + \dots + t_{100}}{100}$. 'Αρα:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{45} + t_{46} + t_{47} + \dots + t_{100} = 185000 \cdot 100 \quad \text{ή}$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{45} + t_{46} + t_{47} + \dots + t_{100} = 18500000 \quad (1)$$

Επιπλέον $165000 = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{45}}{45}$. 'Αρα:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{45} = 165000 \cdot 45 = 7425000$$

Από την (1) έχουμε $7425000 + t_{46} + t_{47} + \dots + t_{100} = 18500000$, άρα $t_{46} + t_{47} + \dots + t_{100} = 11075000$.

Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\frac{\overbrace{185000 + 185000 + \dots + 185000}^{45 \text{ τιμές}} + t_{46} + t_{47} + \dots + t_{100}}{100} =$$

$$\frac{45 \cdot 185000 + 11075000}{100} = \frac{19400000}{100} = 194000$$

Άσκηση 5

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τη σχετική συχνότητα μιας μεταβλητής με μέση τιμή 2,1. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να βρεθεί η διάμεσος.

X_i	1	2	3	4
$f_i\%$	26		23	

Λύση

Αν $f_2\%$, $f_4\%$ οι δύο άγνωστες σχετικές συχνότητες, θα έχουμε ότι $26 + f_2\% + 23 + f_4\% = 100$. Άρα $f_2\% + f_4\% = 51$ ή $f_2 + f_4 = 0,51$.

Επιπλέον, η μέση τιμή ισούται με:

$$\frac{v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4}{v} = \frac{v_1}{v}x_1 + \frac{v_2}{v}x_2 + \frac{v_3}{v}x_3 + \frac{v_4}{v}x_4 =$$

$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 = 2,1$$

Άρα:

$$0,26 \cdot 1 + 2f_2 + 0,23 \cdot 3 + 4f_4 = 2,1 \quad \text{ή} \quad 2f_2 + 4f_4 = 1,6 \quad \text{ή} \quad f_2 + 2f_4 = 0,8$$

και $f_2 + f_4 = 0,51$. Άρα:

$$f_2 + 2f_4 - f_2 - f_4 = 0,8 - 0,51 \quad \text{ή} \quad f_4 = 0,29 \quad \text{και} \quad f_2 = 0,22$$

Επομένως, ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων είναι:

x_i	f_i	$f_i\%$	Σχετική αθροιστική
1	0,26	26%	26%
2	0,22	22%	48%
3	0,23	23%	71%
4	0,29	29%	100%
Αθροίσματα	1	100%	

Η διάμεσος αντιστοιχεί στην τιμή 50% που ανήκει στο διάστημα (48,71], δηλαδή η διάμεσος είναι 3.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές x , $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, $x + 4\omega$, $x + 5\omega$ με $\omega > 0$. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση.

Λύση

Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{x + (x + \omega) + (x + 2\omega) + (x + 3\omega) + (x + 4\omega)}{5} = \frac{5x + 10\omega}{5} = x + 2\omega$$

οπότε η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{(x - x - 2\omega)^2 + (x - x - \omega)^2 + (x - x)^2 + (x - x + \omega)^2 + (x - x + 2\omega)^2}{5} =$$

$$\frac{4\omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + 4\omega^2}{5} = \frac{6}{5} \omega^2$$

$$\text{'Αρα } s = \omega \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Άσκηση 2

Μετράμε το βάρος των κατοίκων ενός χωριού και έχουμε μέση τιμή 72Kg και τυπική απόκλιση 5Kg. Η μέτρηση του βάρους έγινε με μια ζυγαριά που όπως αποδείχθηκε μετά τις μετρήσεις έδειχνε 2Kg λιγότερο σε κάθε μέτρηση. Ποιά είναι η πραγματική μέση τιμή και ποιιά η πραγματική τυπική απόκλιση;

Λύση

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι $t_1, t_2, \dots, t_v$ και έχουν μέση τιμή

72, τότε έχουμε $72 = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v}$ και η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + 2 + t_2 + 2 + \dots + t_v + 2}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v + 2v}{v} =$$

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} + 2 = 72 + 2 = 74 \text{ Kg}$$

Η διακύμανση για τις τιμές $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι:

$$\frac{(t_1 - 72)^2 + (t_2 - 72)^2 + \dots + (t_v - 72)^2}{v} = 4$$

και η νέα διακύμανση θα είναι:

$$\frac{(t_1 + 2 - 74)^2 + (t_2 + 2 - 74)^2 + \dots + (t_v + 2 - 74)^2}{v} =$$

$$\frac{(t_1 - 72)^2 + (t_2 - 72)^2 + \dots + (t_v - 72)^2}{v} = 4$$

δηλαδή η διακύμανση δε μεταβάλλεται.

Άσκηση 3

Οι απουσίες των μαθητών μιας τάξης Λυκείου κατά τον μήνα Σεπτέμβριο είναι 0, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 7, 2, 1, 0, 5, 6, 7, 4, 5, 2, 1, 0, 6, 7, 8, 9, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 9. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έχουν περισσότερες από 6 απουσίες.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα των σχετικών και σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων:

x_i	n_i	Αθροιστική	f_i	Σχετική αθροιστική	Σχετική αθροιστική %
0	6	6	0,2000	0,2000	20,0000
1	5	11	0,1667	0,3667	36,6667
2	7	18	0,2333	0,6000	60,0000
3	1	19	0,0333	0,6333	63,3333
4	1	20	0,0333	0,6667	66,6667
5	2	22	0,0667	0,7333	73,3333
6	2	24	0,0667	0,8000	80,0000
7	3	27	0,1000	0,9000	90,0000
8	2	29	0,0667	0,9667	96,6667
9	1	30	0,0333	1,0000	100,0000
Αθροίσματα	30				

Απουσίες λιγότερες ή ίσες του 6 έχει το 80% και αυτό προκύπτει από την σχετική αθροιστική συχνότητα του 6. Οι υπόλοιποι, δηλαδή το 20% θα έχουν περισσότερες απουσίες από 6.

Άσκηση 4

Οι απουσίες δύο Λυκείων Α, Β δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Απουσίες	Α' Λύκειο	Β' Λύκειο
[0, 10)	20	25
[10, 20)	16	11
[20, 30)	25	17
[30, 40)	26	22
[40, 50)	7	8
[50, 60)	8	20
[60, 80)	9	13
[80, 100)	12	4
[100, 125)	3	4

- (α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των δύο κατανομών.
 (β) Να σχεδιαστεί το πολύγωνο συχνοτήτων σε κοινό διάγραμμα.
 (γ) Από τα Λύκεια Α, Β ποιο είναι πιο ομοιογενές ως προς τις απουσίες;

Λύση

x	v_i	K_i (Κέντρο)	$v_i K_i$	$v_i(\bar{x} - K_i)^2$
[0, 10)	20	5	100	20637,76
[10, 20)	16	15	240	7830,845
[20, 30)	25	25	625	3674,188
[30, 40)	26	35	910	117,1871
[40, 50)	7	45	315	434,3282
[50, 60)	8	55	440	2556,692
[60, 80)	9	70	630	9728,065
[80, 100)	12	90	1080	33551,71
[100, 125)	3	112,5	337,5	17045,07
Αθροίσματα	126		4677,5	95575,84

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η μέση τιμή είναι:

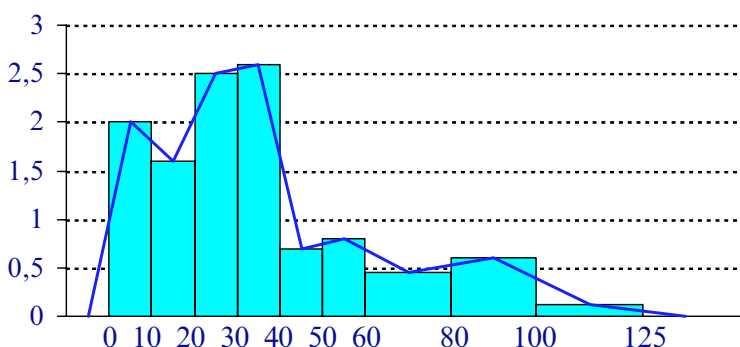
$$\bar{x} = \frac{4677,5}{126} = 37,12$$

ενώ η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{95575,84}{126} = 758,54$$

οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{758,54} = 27,54$.

Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα με ύψη ιστών τα πηλίκια των συχνοτήτων προς το πλάτος κάθε διαστήματος:



Για το Λύκειο Β' έχουμε:

X	v_i	K_i (Κέντρο)	$v_i K_i$	$v_i(\bar{x} - K_i)^2$
[0, 10)	25	5	125	25797,2
[10, 20)	11	15	165	5383,706
[20, 30)	17	25	425	2498,448
[30, 40)	22	35	770	99,15832
[40, 50)	9	45	405	558,4219
[50, 60)	20	55	1100	6391,731
[60, 80)	13	70	910	14051,65
[80, 100)	4	90	360	11183,9
[100, 125)	5	112,5	562,5	28408,45
Αθροίσματα	126		4822,5	94372,67

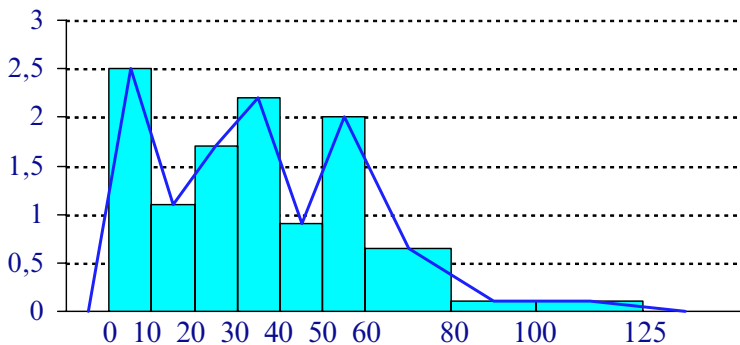
Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{4822,5}{126} = 38,27$$

ενώ η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{94372,67}{126} = 748,99$$

οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{748,99} = 27,37$.



Ο συντελεστής μεταβλητότητας για τις απουσίες στο Α' Λύκειο είναι:

$$CV = \frac{27,54}{37,12} 100\% = 74,19\%$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας για τις απουσίες στο Β' Λύκειο είναι:

$$CV = \frac{27,37}{38,27} 100\% = 71,51\%$$

Δηλαδή και τα δύο Λύκεια εμφανίζουν μεγάλο βαθμό ανομοιογένειας, αλλά πιο ομοιογενές είναι το Β' Λύκειο.

Άσκηση 5

Οι 8 από τους 20 εργαζόμενους σε ένα εργοστάσιο έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 175000 και οι υπόλοιποι 215000. Ποιός είναι ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των εργαζόμενων;

Λύση

Αν $t_1, t_2, \dots, t_8, t_9, t_{10}, \dots, t_{20}$ είναι οι μισθοί των 20 εργαζομένων από τους οποίους οι $t_1, t_2, \dots, t_8$ έχουν μέση τιμή 175000 και οι $t_9, t_{10}, \dots, t_{20}$ 215000, τότε:

$$175000 = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_8}{8}, \text{ άρα } t_1 + t_2 + \dots + t_8 = 8 \cdot 175000 = 1400000$$

$$215000 = \frac{t_9 + t_{10} + \dots + t_{20}}{12}, \text{ άρα } t_9 + t_{10} + \dots + t_{20} = 12 \cdot 215000 = 2580000$$

Η μέση τιμή όλων των εργαζομένων είναι:

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_8 + t_9 + t_{10} + \dots + t_{20}}{20} = \frac{1400000 + 2580000}{20} =$$

$$\frac{3980000}{20} = 199000$$

Άσκηση 6

Η ευστοχία μιας ομάδας Μπάσκετ στις ελεύθερες βολές είναι 70%. Οι 5 βασικοί παίκτες έχουν ευστοχία 75% και οι 3 επιθετικοί αναπληρωματικοί 60%. Πόση ευστοχία έχουν οι 2 αμυντικοί αναπληρωματικοί;

Λύση

Αν t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 είναι η ευστοχία των βασικών παικτών, t_6, t_7, t_8 των επιθετικών αναπληρωματικών και t_9, t_{10} των αμυντικών αναπληρωματικών, τότε:

$$70 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}}{10} \quad (1)$$

$$75 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5}, \text{ άρα } t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 5 \cdot 75 = 375 \quad (2)$$

$$60 = \frac{t_6 + t_7 + t_8}{3}, \text{ άρα } t_6 + t_7 + t_8 = 3 \cdot 60 = 180 \quad (3)$$

Η (1) από τις (2), (3) γίνεται:

$$\frac{375 + 180 + t_9 + t_{10}}{10} = 70 \quad \text{ή} \quad t_9 + t_{10} = 700 - 375 - 180 \quad \text{ή}$$

$$t_9 + t_{10} = 145 \quad \text{ή} \quad \frac{t_9 + t_{10}}{2} = 72,5$$

Άρα η μέση τιμή της ευστοχίας των δύο αμυντικών αναπληρωματικών είναι 72,5%.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων – αθροιστικών – σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της παρακάτω κατανομής:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΠΑΘΟΝΤΩΝ (οδηγοί – επιβάτες – πεζοί)
κατά το 1998 έως 50 ετών

Ηλικία	Άτομα
Μέχρι 5 ετών	354
6 - 12 ετών	704
13 - 17 ετών	2.124
18 - 20 ετών	3.739
21 - 24 ετών	5.043
25 - 29 ετών	4.783
30 - 34 ετών	3.824
35 - 44 ετών	4.654
45 - 50 ετών	2.259

Πηγή: Υπουργείο Δημόσιας Τάξης

Κατόπιν να κατασκευαστεί το διάγραμμα συχνοτήτων.

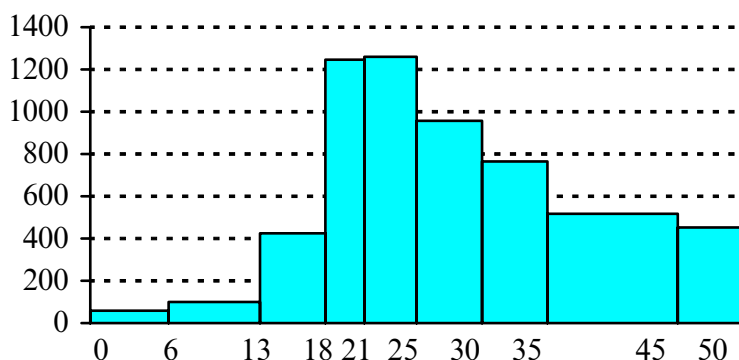
Λύση

Ο πίνακας των συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων – αθροιστικών – σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων είναι:

Ηλικία	Άτομα	f_i	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική α- θροιστική
[0, 6)	354	0,0129	354	0,0129
[6, 13)	704	0,0256	1058	0,0385
[13,18)	2124	0,0773	3182	0,1158
[18,21)	3739	0,1360	6921	0,2518
[21,25)	5043	0,1835	11964	0,4353
[25,30)	4783	0,1740	16747	0,6093
[30,35)	3824	0,1391	20571	0,7485
[35,44)	4654	0,1693	25225	0,9178
[45,50)	2259	0,0822	27484	1,0000
Αθροίσματα	27484	1,0000		

Για τη κατασκευή του διαγράμματος συχνοτήτων κατασκευάζουμε μια στήλη με το πλάτος κάθε κλάσης και μια άλλη με το πηλίκο της συχνότητας προς το πλάτος της κλάσης:

Ηλικία	Άτομα	Πλάτος κλάσης	$\frac{\text{Άτομα}}{\text{Πλάτος}}$
[0, 6)	354	6	59
[6, 13)	704	7	100,5714
[13,18)	2124	5	424,8
[18,21)	3739	3	1246,333
[21,25)	5043	4	1260,75
[25,30)	4783	5	956,6
[30,35)	3824	5	764,8
[35,45)	4654	9	517,1111
[45,50)	2259	5	451,8



Άσκηση 2

Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει την κατανομή των μηχανοκίνητων αλιευτικών σκαφών ως προς την ιπποδύναμη τους:

**Μηχανοκίνητα αλιευτικά σκάφη, κατά κλιμάκια
ιπποδυνάμεως μέχρι 200 HP κατά το έτος 1991**

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	v_i
[0, 10)	10
[10, 20)	52
[20, 30)	1777
[30, 40)	1317
[40, 50)	856
[50, 60)	863
[60, 70)	434
[70, 80)	517
[80, 90)	486
[90, 100)	452
[100, 150)	1243
[150, 200)	410

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

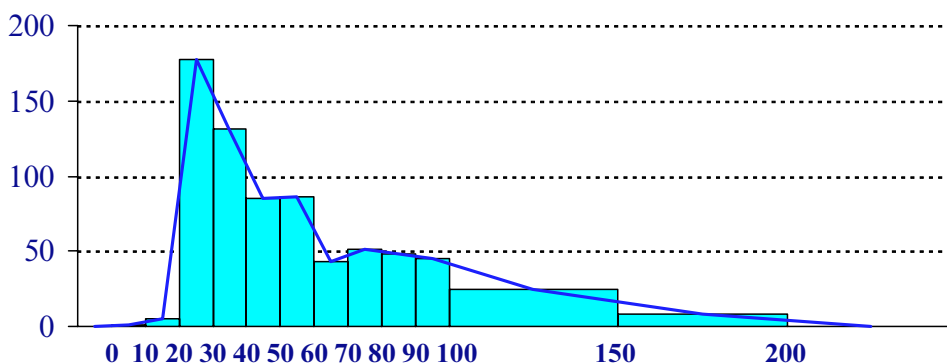
- (α) Να γίνει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
 (β) Να βρεθεί η μέση τιμή.
 (γ) Να βρεθεί η διακύμανση και τυπική απόκλιση.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα:

Κλιμάκια υποδυνάμεως	n_i	Πλάτος κλάσης c_i	$\frac{n_i}{c_i}$
[0, 10)	10	10	1
[10, 20)	52	10	5,2
[20, 30)	1777	10	177,7
[30, 40)	1317	10	131,7
[40, 50)	856	10	85,6
[50, 60)	863	10	86,3
[60, 70)	434	10	43,4
[70, 80)	517	10	51,7
[80, 90)	486	10	48,6
[90, 100)	452	10	45,2
[100, 150)	1243	50	24,86
[150, 200)	410	50	8,2

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι το ακόλουθο:



Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογίζεται από τον παρακάτω πίνακα:

Κλιμάκια ιπποδυνάμεως	v_i	Κέντρο κλάσης	$v_i x_i$	$v_i(\bar{x} - x_i)^2$
[0, 10)	10	5	50	37235,08
[10, 20)	52	15	780	135361
[20, 30)	1777	25	44425	2990133
[30, 40)	1317	35	46095	1267316
[40, 50)	856	45	38520	378235,3
[50, 60)	863	55	47465	104813,6
[60, 70)	434	65	28210	452,0239
[70, 80)	517	75	38775	41685,95
[80, 90)	486	85	41310	175066,6
[90, 100)	452	95	42940	379593,4
[100, 150)	1243	125	155375	4323869
[150, 200)	410	175	71750	4869373
Αθροίσματα	8417		555695	14703133

Η μέση τιμή ισούται με $\frac{555695}{8417} = 66,02$.

Η διακύμανση με $\frac{14703133}{8417} = 1746,84$.

Η τυπική απόκλιση με $\sqrt{1746,84} = 41,8$.

Άσκηση 3

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει την κατανομή των κατοίκων της Ελλάδας ως προς την ηλικία κατά το έτος 1992:

Κατανομή ηλικίας κατοίκων Ελλάδας κατά το 1992

Ηλικία	Άτομα	Ηλικία	Άτομα	Ηλικία	Άτομα
[0, 5)	529501	[30, 35)	731310	[60, 65)	634154
[5, 10)	620540	[35, 40)	698124	[65, 70)	511206
[10, 15)	741210	[40, 45)	666503	[70, 75)	358530
[15, 20)	768765	[45, 50)	624437	[75, 80)	285435
[20, 25)	788764	[50, 55)	609587	[80, 85)	203942
[25, 30)	759301	[55, 60)	659035	85 και άνω	131539

Πηγή: Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος

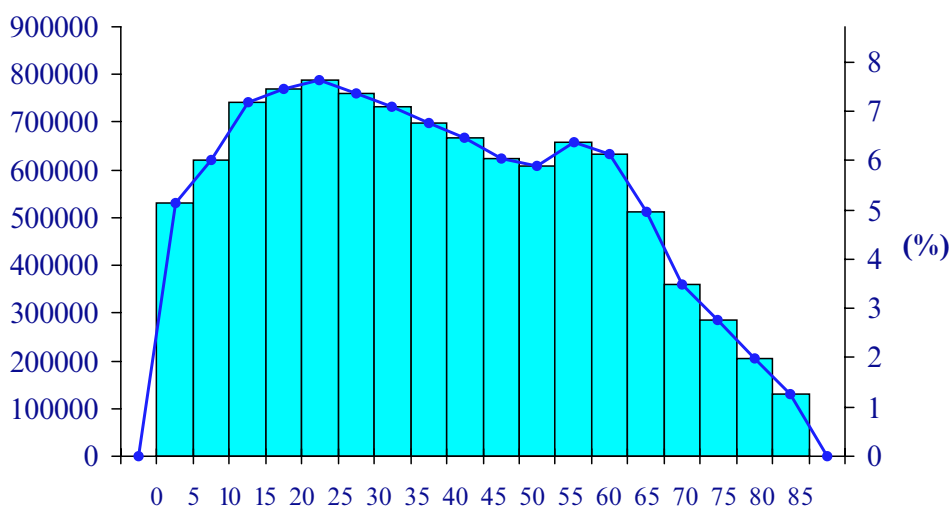
- (α) Να γίνει γραφική παράσταση των συχνοτήτων.
 (β) Να γίνει γραφική παράσταση των σχετικών συχνοτήτων.
 (γ) Να βρεθεί τι ποσοστό του πληθυσμού είχε ηλικία μικρότερη ή ίση των 23 ετών.
 (δ) Να βρεθεί τι ποσοστό του πληθυσμού είχε ηλικία μεγαλύτερη ή ίση των 50 ετών.

Λύση

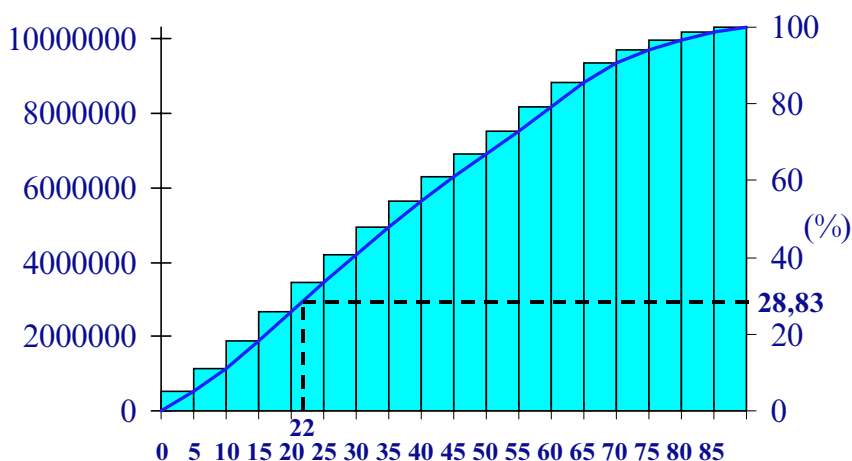
Κατασκευάζουμε τον πίνακα αθροιστικών, σχετικών, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων:

Ηλικία	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική αθροιστική
[0, 5)	529501	0,0513	529501	0,0513
[5, 10)	620540	0,0601	1150041	0,1114
[10, 15)	741210	0,0718	1891251	0,1832
[15, 20)	768765	0,0745	2660016	0,2577
[20, 25)	788764	0,0764	3448780	0,3341
[25, 30)	759301	0,0736	4208081	0,4077
[30, 35)	731310	0,0709	4939391	0,4785
[35, 40)	698124	0,0676	5637515	0,5462
[40, 45)	666503	0,0646	6304018	0,6107
[45, 50)	624437	0,0605	6928455	0,6712
[50, 55)	609587	0,0591	7538042	0,7303
[55, 60)	659035	0,0638	8197077	0,7941
[60, 65)	634154	0,0614	8831231	0,8556
[65, 70)	511206	0,0495	9342437	0,9051
[70, 75)	358530	0,0347	9700967	0,9398
[75, 80)	285435	0,0277	9986402	0,9675
[80, 85)	203942	0,0198	10190344	0,9873
85 και άνω	131539	0,0127	10321883	1,0000
'Αθροισμα	10321883			

Οπότε τα διαγράμματα των συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων είναι:



Το διάγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων είναι:



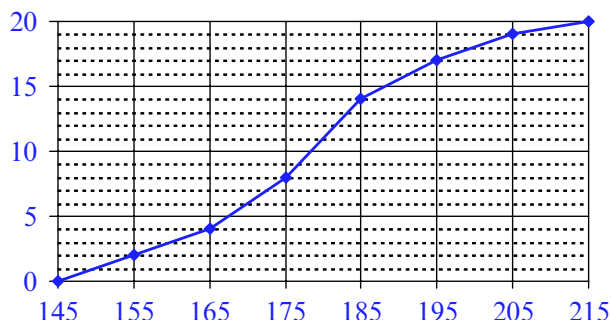
Για τον υπολογισμό του ποσοστού των ατόμων με ηλικία κάτω των 22 ετών από τη γραφική παράσταση των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων βάζουμε το 22 τιμή στον x'x και βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή της τεταγμένης που είναι 28,83%.

Από τον πίνακα των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων έχουμε ότι η σχετική αθροιστική συχνότητα του διαστήματος $[45, 50)$ είναι 67,12%, δηλαδή το 67,12% έχει ηλικία μικρότερη του 50, επομένως το υπόλοιπο $100\% - 67,12\% = 32,88\%$ έχει ηλικία μεγαλύτερη ή ίση του 50.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1

Σε σχολείο πραγματοποιήθηκε έρευνα για το ύψος των μαθητών. Κατόπιν όμως χάθηκαν τα στοιχεία μετρήσεων και βρέθηκε μόνο το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.



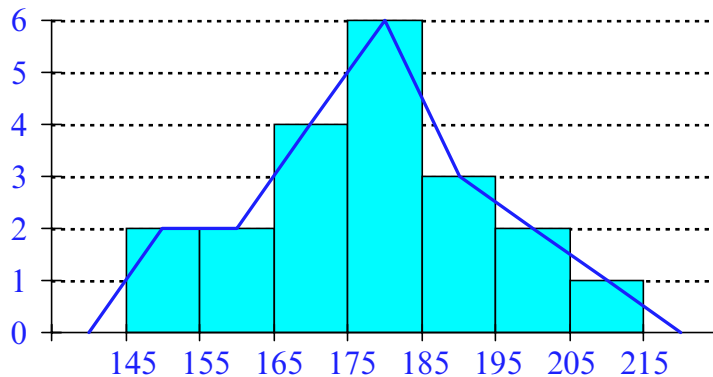
- (α) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.
- (β) Να βρείτε τη μέση τιμή.
- (γ) Να βρείτε τη διάμεσο.
- (δ) Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

Λύση

Αν αφαιρέσουμε δύο διαδοχικές τιμές αθροιστικών συχνοτήτων βρίσκουμε τη συχνότητα που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη αθροιστική συχνότητα. Δηλαδή $f_7 - f_6 = (v_1 + v_2 + \dots + v_7) - (v_1 + v_2 + \dots + v_6) = v_7$, άρα $v_7 = f_7 - f_6 = 20 - 19 = 1$. Γενικότερα έχουμε $f_{k+1} - f_k = v_k$.

x	v_i	Αθροιστική συχνότητα	K_i	$v_i K_i$	$v_i(\bar{x} - K_i)^2$
[145,155)	2	2	150	300	1568
[155,165)	2	4	160	320	648
[165,175)	4	8	170	680	256
[175,185)	6	14	180	1080	24
[185,195)	3	17	190	570	432
[195,205)	2	19	200	400	968
[205,215)	1	20	210	210	1024
	20			3560	4920

- (α) Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20$. Οι κορυφές του πολυγώνου είναι τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων που ορίζονται από το ιστόγραμμα συχνοτήτων. Άρα θα έχουμε το εξής πολύγωνο συχνοτήτων:



- (β) Η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των στοιχείων της στήλης $v_i K_i$ και παρανομαστή το πλήθος των στοιχείων, άρα $\bar{x} = \frac{3560}{20} = 178$ cm.
- (γ) Η διάμεσος υπολογίζεται από το διάγραμμα της αθροιστικής συχνότητας. Με τιμή στον y' 10 βρίσκουμε τη τιμή του άξονα των x που είναι 179 cm.
- (δ) Η διακύμανση s^2 ισούται με το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των στοιχείων της στήλης $v_i (\bar{x} - K_i)^2$ και παρανομαστή το πλήθος των στοιχείων, άρα $s^2 = \frac{4920}{25} = 246$, οπότε τυπική απόκλιση $s = \sqrt{246} = 15,68$.

Άσκηση 2

Αν οι τιμές μιας μεταβλητής αυξηθούν κατά L ναδειχθεί ότι η μέση τιμή αυξάνεται κατά L ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει σταθερή.

Λύση

Αν η μεταβλητή παρουσιάζει $x_1, x_2, \dots, x_k$ τιμές με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ όπου $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$, τότε έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_k x_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_k x_k}{n}$$

Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{v_1(x_1 + L) + v_2(x_2 + L) + \dots + v_k(x_k + L)}{v} = \\ &= \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_kx_k + v_1L + v_2L + \dots + v_kL}{v} = \\ &= \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_kx_k + (v_1 + v_2 + \dots + v_k)L}{v} = \\ &= \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_kx_k + vL}{v} = \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_kx_k}{v} + \frac{vL}{v} = \bar{x} + L\end{aligned}$$

'Αρα $\bar{y} = \bar{x} + L$. Για τη διακύμανση έχουμε:

$$s^2 = \frac{v_1(\bar{x} - x_1)^2 + v_2(\bar{x} - x_2)^2 + \dots + v_k(\bar{x} - x_k)^2}{v}$$

Για τη νέα διακύμανση έχουμε:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{v_1(\bar{y} - x_1 - L)^2 + v_2(\bar{y} - x_2 - L)^2 + \dots + v_k(\bar{y} - x_k - L)^2}{v} = \\ &= \frac{v_1(\bar{x} + L - x_1 - L)^2 + v_2(\bar{x} + L - x_2 - L)^2 + \dots + v_k(\bar{x} + L - x_k - L)^2}{v} = \\ &= \frac{v_1(\bar{x} - x_1)^2 + v_2(\bar{x} - x_2)^2 + \dots + v_k(\bar{x} - x_k)^2}{v} = s^2\end{aligned}$$

'Αρα $\sigma^2 = s^2$ και αφού σ, s μη αρνητικοί έχουμε $\sigma = s$.

Άσκηση 3

- (α) Ποιά είναι η μέση τιμή των γωνιών ενός τριγώνου;
(β) Ποιά είναι η μέση τιμή των γωνιών ενός ν-γωνου;

Λύση

- (α) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° , άρα η μέση τιμή θα είναι $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.
(β) Το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου είναι $(n - 2)180^\circ$, άρα η μέση τιμή είναι $\frac{(n - 2)180^\circ}{n}$.

Για το τετράπλευρο η μέση τιμή θα είναι $\frac{(4 - 2)180^\circ}{4} = 90^\circ$.

Για το πεντάπλευρο η μέση τιμή θα είναι $\frac{(5 - 2)180^\circ}{5} = 108^\circ$.

Άσκηση 4

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων μεταβλητής x πολλαπλασιασθούν με έναν αριθμό $a > 0$, πώς μεταβάλλεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση;

Λύση

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι $t_1, t_2, \dots, t_v$ τότε έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v}$$

Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{y} = \frac{at_1 + at_2 + \dots + at_v}{v} = a \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} = a\bar{x}$$

δηλαδή και η μέση τιμή πολλαπλασιάζεται με a .

Η διακύμανση για τις τιμές $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι:

$$s^2 = \frac{(\bar{x} - t_1)^2 + (\bar{x} - t_2)^2 + \dots + (\bar{x} - t_v)^2}{v}$$

και η νέα διακύμανση θα είναι:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(a\bar{x} - at_1)^2 + (a\bar{x} - at_2)^2 + \dots + (a\bar{x} - at_v)^2}{v} = \\ &= \frac{a^2(\bar{x} - t_1)^2 + a^2(\bar{x} - t_2)^2 + \dots + a^2(\bar{x} - t_v)^2}{v} = \\ &= a^2 \frac{(\bar{x} - t_1)^2 + (\bar{x} - t_2)^2 + \dots + (\bar{x} - t_v)^2}{v} = a^2 s^2 \end{aligned}$$

Άρα $\sigma^2 = a^2 s^2$ και επομένως $\sigma = as$.

Δηλαδή και η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται με a .

Άσκηση 5

Οι οκτώ εργαζόμενοι μιας επιχείρησης έχουν μέσο μισθό 125000 και ο μέσος μισθός των υπολοίπων είναι 145000. Αν ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση είναι 137000, να βρεθεί πόσοι εργάζονται στην επιχείρηση.

Λύση

Αν το πλήθος των υπαλλήλων είναι v και $t_1, t_2, \dots, t_8, t_9, t_{10}, \dots, t_v$ είναι

οι μισθοί τους τότε $\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_8 + t_9 + t_{10} + \dots + t_v}{v} = 137000$, άρα:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_8 + t_9 + t_{10} + \cdots + t_v = 137000v \quad (1)$$

Οι οκτώ των υπάλληλοι με μισθούς $t_1, t_2, \dots, t_8$ έχουν μέσο μισθό 125000, άρα $\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_8}{8} = 125000$, οπότε:

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_8 = 1000000 \quad (2)$$

Οι υπόλοιποι $v - 8$ υπάλληλοι έχουν μέσο μισθό 145000, άρα $\frac{t_9 + t_{10} + \cdots + t_v}{v - 8} = 145000$, άρα:

$$t_9 + t_{10} + \cdots + t_v = (v - 8)145000 \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στην (1), οπότε:

$$1000000 + (v - 8)145000 = 137000v \quad \text{ή}$$

$$1000000 + 145000v - 1160000 = 137000v \quad \text{ή}$$

$$145000v - 137000v = 160000 \quad \text{ή} \quad 8000v = 160000 \quad \text{ή} \quad v = 20$$



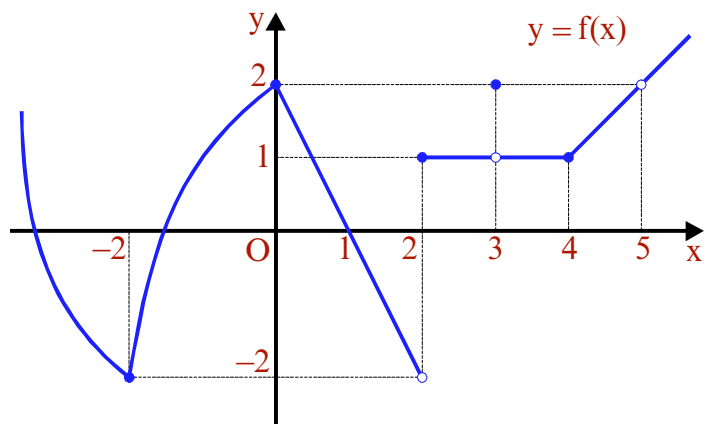
Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

§ 3.1 – 3.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , που φαίνεται στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αν φυσικά υπάρχει, για $x_0 = -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



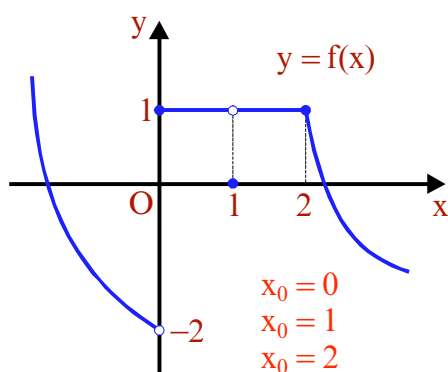
Λύση

- (α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -2$
- (γ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
- (ε) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$
- (ζ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$

- (β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$
- (δ) Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- (στ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$

Άσκηση 2

Χρησιμοποιήστε την παρακάτω γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε (υπολογίσετε) τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ στα δοσμένα σημεία.



Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

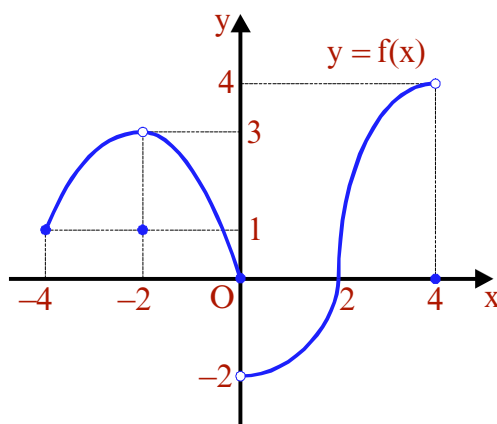
$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$.

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

Άσκηση 3

Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $[-4, 4]$ και γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ). Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 1$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 4$$

$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$$

Λύση

- (α) Σωστό (Σ) (β) Σωστό (Σ)
 (γ) Σωστό (Σ) (δ) Λάθος (Λ)
 (ε) Σωστό (Σ) (στ) Σωστό (Σ)
 (ζ) Λάθος (Λ)

Άσκηση 4

Αφού χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \leq 0 \\ x - 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$

να εκτιμήσετε τα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, αν αυτά υπάρχουν. Επίσης, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές $f(0)$, $f(1)$.

Λύση

(α) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

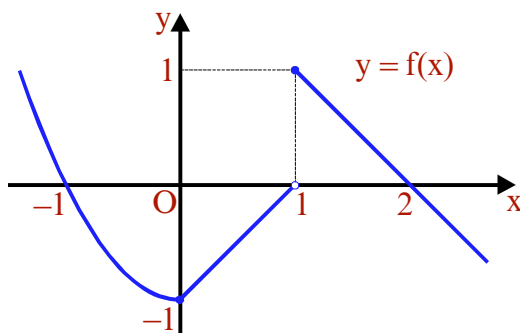
(β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(ε) $f(0) = -1$ και $f(1) = 1$



Άσκηση 5



Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f . Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f , αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = x^2 - 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$						

$$(\beta) f(x) = \frac{|x|}{x} + 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

x	0,1	0,01	0,001	-0,001	-0,01	-0,1
f(x)	2					0

$$(\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)		0,5012				0,4880

$$(\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , x > 1 \\ -x^2 + 1 & , x \leq 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)						

Λύση

$$(\alpha)$$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)	2,6100	2,9601	2,9960	3,0040	3,0401	3,4100

Φαίνεται από τις τιμές ότι η f προσεγγίζει τον αριθμό 3 καθώς το x προσεγγίζει το 2. Άρα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

$$(\beta)$$

x	0,1	0,01	0,001	-0,001	-0,01	-0,1
f(x)	2	2	2	0	0	0

Καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 0 παίρνοντας θετικές τιμές, οι τιμές της f είναι σταθερές και ίσες με 2.

Όταν το x προσεγγίζει τον αριθμό 0 παίρνοντας αρνητικές τιμές, οι τιμές της f είναι σταθερές και ίσες με 0.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$(\gamma)$$

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)	0,5132	0,5012	0,5001	0,4999	0,4988	0,4880

Η f προσεγγίζει τον αριθμό $\frac{1}{2}$ καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 0.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} (x^{-3} - 3x^{-2} + 5x^3)$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} [(1 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})]$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 4}{x^2 - 3x + 4}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x+1}$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^3} - 3 \frac{1}{x^2} + 5x^3 \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^3} - 3 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} + 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = \frac{1}{8} - 3 \frac{1}{4} + 5 \cdot 8 = \frac{315}{8}$$

$$(\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} (1 - \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{2}, \lim_{x \rightarrow 2} (3 + \sqrt{x}) = 3 + \sqrt{2}.$$

'Αρα υπάρχει το όριο του γινομένου:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(1 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})] = (1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$$

$$(\gamma) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 4) = 6, \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 4) = 2.$$

'Αρα υπάρχει το όριο του πηλίκου:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 4}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{2} = 3$$

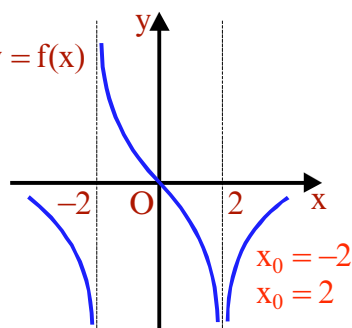
$$(\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1.$$

'Αρα υπάρχει το όριο του πηλίκου:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Άσκηση 8

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f . Να εκτιμήσετε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. (μαντέψετε)



Λύση

- (α) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
 (β) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$

Άσκηση 9

Σε ποιές από τις προηγούμενες περιπτώσεις της άσκησης 8 παρουσιάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; Ποιά είναι η εξίσωση της ασύμπτωτης, όπου υπάρχει αυτή;

Λύση

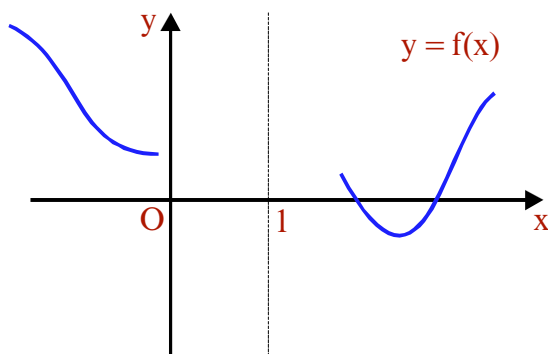
Και στις δύο:

- (α) $x = -2$
 (β) $x = 2$

Άσκηση 10

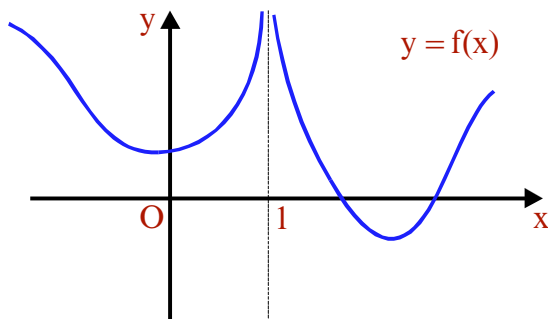
Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διπλανό σχήμα, ώστε να ισχύει:

- (α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$
 (β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$
 (γ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

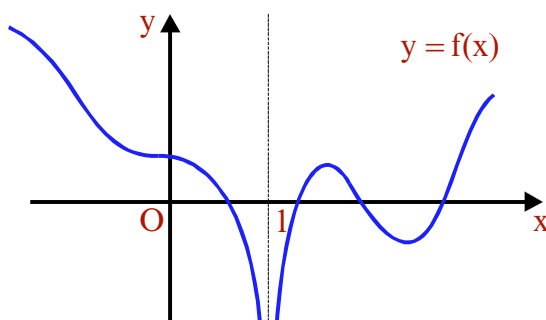


Λύση

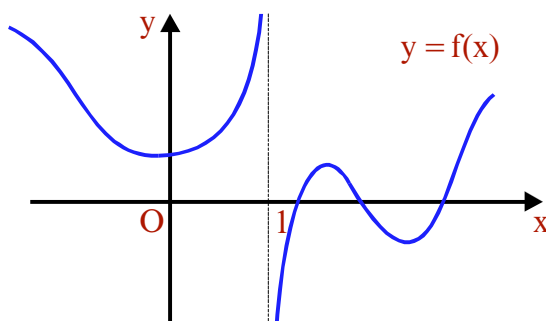
- (α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. Άρα μια εικόνα της f θα μπορούσε να ήταν:



(β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$. 'Αρα μια εικόνα της f θα μπορούσε να ήταν:



(γ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$. 'Αρα μια εικόνα της f θα μπορούσε να ήταν:



Άσκηση 11



Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f . Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f , αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = -\frac{10}{|x|}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	-100		-10000		-1000	

(β) $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	-119			12001		

Λύση

(α)

x	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)	-100	-1000	-10000	-10000	-1000	-100

Καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 0 οι τιμές της συνάρτησης γίνονται όλο και περισσότερο μικρότερες άρα προσεγγίζουν το $-\infty$ ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$).

(β)

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)	-119	-1199	-11999	12001	1201	121

Καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 2 από μικρότερες τιμές (αριστερά του 2) οι τιμές της συνάρτησης είναι αρνητικές και γίνονται όλο και περισσότερο μικρότερες, δηλαδή προσεγγίζουν το $-\infty$ ($\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$).

Όταν όμως το x προσεγγίζει τον αριθμό 2 από μεγαλύτερες τιμές (δεξιά του 2) οι τιμές της συνάρτησης είναι θετικές και γίνονται όλο και περισσότερο μεγαλύτερες, δηλαδή προσεγγίζουν το $+\infty$ ($\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$).

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}$

Λύση

(α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$. Άρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

(β) Όμοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x^2+x-2)} = \frac{x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

Λύση

(α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 4} (2-\sqrt{x}) = 0$. Άρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{4-x} = -(2+\sqrt{x}).$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 4} (2+\sqrt{x}) = -4.$$

(β) Όμοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} =$$

$$\frac{(x+2)-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(γ) Όμοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$= \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{6}{4 \cdot 4} = \frac{3}{8}.$$

(δ) Όμοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)[(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1]}{x[(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1]} =$$

$$\frac{x}{x[(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1]} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2x+1|-3}{x-3}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + |x|}{(x+1)|x|}$

Λύση

(α) Αφού $x \rightarrow 1$ τότε το x βρίσκεται σε μια περιοχή του 1, $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Τότε $|2x+1| = 2x+1$, αφού $2x+1 > 0$.

$$\text{Αν } f(x) = \frac{|2x+1|-3}{x-3} = \frac{2x+1-3}{x-3} = \frac{2x-2}{x-3} \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

(β) Αφού $x \rightarrow 0$ τότε το x βρίσκεται σε μια περιοχή του 0, $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Τότε $|x| = x$ αν $x \in (0, 1)$ ή $|x| = -x$ αν $x \in (-1, 0)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x \in (0, 1)$ έστω $f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{(x+1)|x|} = \frac{2x^2 + x}{(x+1)x} = \frac{(2x+1)x}{(x+1)x} = \frac{2x+1}{x+1}.$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

- Αν $x \in (-1, 0)$ έστω $f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{(x+1)|x|} = \frac{2x^2 - x}{(x+1)(-x)} = \frac{(2x-1)x}{-(x+1)x} = -\frac{2x-1}{x+1}.$ Τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1.$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + 2 & , \quad x \leq a \\ x^2 - 1 & , \quad x > a \end{cases}$$

Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2|a| + 2$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a^2 - 1$.

Αφού υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα. Άρα:

$$2|a| + 2 = a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 - 2|a| - 3 = 0 \xLeftrightarrow{a^2 = |a|^2} |a|^2 - 2|a| - 3 = 0 \text{ απ' όπου } |a| = 3 \Leftrightarrow \mathbf{a = 3 \text{ ή } a = -3}.$$

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + a + 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

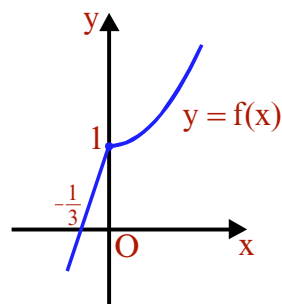
Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Κατόπιν να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + 2$.

Αφού υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα. Άρα $-a = a + 2 \Leftrightarrow \mathbf{a = -1}$.

Τότε $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Άσκηση 6

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{\sqrt{x-4}}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^3+2x}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{|1-x|}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{x^3-3x-2}$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{\sqrt{x-4}} = +\infty$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^3} = -\infty$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^3+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x(x^2+2)}$$

$$\text{Για } x > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x(x^2+1)} = +\infty \text{ και για } x < 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x(x^2+1)} = -\infty.$$

'Αρα δεν υπάρχει όριο όταν $x \rightarrow 0$.

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{|1-x|} = +\infty$$

($\sigma\tau$) Δε γνωρίζουμε το πρόσημο του παρονομαστή ο οποίος τείνει στο 0. Έχουμε $x^3-3x-2 = (x+1)^2(x-2)$.

(Η παραγοντοποίηση μπορεί να προκύψει με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή κατά ομάδες: $x^3 - x - 2x - 2 = x(x^2 - 1) - 2(x + 1)$ κ.λπ.)

$$\text{'Αρα } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{(x+1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{x-2} = (+\infty)(-1) = -\infty.$$

Άσκηση 7

Βρείτε τις περιπτώσεις όπου υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και γράψτε την εξίσωσή της στις συναρτήσεις της άσκησης 6.

Λύση

$$(\alpha) x = 4$$

$$(\beta) x = -1$$

$$(\gamma) x = 1$$

$$(\delta) x = 0$$

$$(\epsilon) x = 1$$

$$(\sigma\tau) x = -1$$

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Τα τέλη αποστολής μεμονωμένων δεμάτων όταν πρόκειται για δέματα εσωτερικού που αποστέλλονται από τα Ελληνικά Ταχυδρομεία δίνονται από το γράφημα της "ταχυδρομικής συνάρτησης":

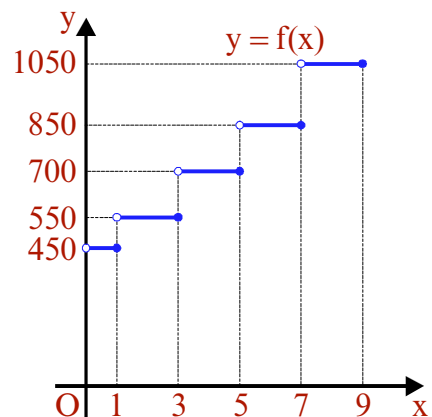
$$f(x) = \begin{cases} 450 & 0 < x \leq 1 \\ 550 & 1 < x \leq 3 \\ 700 & 3 < x \leq 5 \\ 850 & 5 < x \leq 7 \\ 1050 & 7 < x \leq 9 \end{cases}$$

όπου x είναι το βάρος ενός πακέτου σε Kgr (κιλά) και $f(x)$ η αξία σε δραχμές.

- (α) Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε σύστημα αξόνων xOy όπου στον άξονα Ox η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε κιλό και στο Oy η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε εκατοντάδα δρχ.
- (β) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ και να τις συγκρίνετε με τα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$.
- (γ) Υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$;

Λύση

- (α) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- (β) $f(1) = 450$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 450$
 $f(3) = 550$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 550$
 $f(5) = 700$ $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 700$
- (γ) Δεν υπάρχουν αφού τα δεξιόπλευρα όρια είναι διαφορετικά από τα αριστερόπλευρα.



Άσκηση 2

Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου είδους τρωκτικών που αναπαράγονται σ' ένα απομονωμένο νησί δίνεται από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{720}{9-t}$,

$0 \leq t < 9$ όπου ο χρόνος t μετριέται σε μήνες.

- (α) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών στο νησί σε χρόνο $t = 0$, δηλαδή από τότε που αρχίζουμε να παρατηρούμε την αναπαραγωγή τους. Τι εκφράζει αυτός ο αριθμός;
- (β) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών μετά 1, 3, 5, 8 μήνες.
- (γ) Δείξτε ότι ο πληθυσμός των τρωκτικών αυξάνεται απεριόριστα καθώς ο χρόνος πλησιάζει στους 9 μήνες.

Λύση

- (α) Για $t = 0$ έχουμε $P(0) = \frac{720}{9} = 80$ που σημαίνει ότι όταν αρχίζουμε την παρατήρηση της αναπαραγωγής τα τρωκτικά είναι 80.

- (β)

t	1	3	5	8
P(t)	90	120	180	720

- (γ) $\lim_{t \rightarrow 9} P(t) = \lim_{t \rightarrow 9} \frac{720}{9-t} = 720 \lim_{t \rightarrow 9} \frac{1}{9-t} = 720(+\infty) = +\infty$

που σημαίνει ότι ο αριθμός των τρωκτικών αυξάνεται πάρα πολύ.

Άσκηση 3

Στην περιβαλλοντική επιστήμη συχνά μελετάμε τη διασπορά διαφόρων ρύπων σε οικοσυστήματα. Αρκετά απ' αυτά τα μοντέλα είναι μοντέλα "άπειρης αραίωσης" όπως π.χ. ίχνη SO_2 στην ατμόσφαιρα. Για να μελετήσουμε τη διασπορά αυτή χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συνάρτηση (συντελεστής ενεργότητας α) της συγκέντρωσης x_1 , x_2 των συστατικών ρύπου – ατμόσφαιρας αντίστοιχα:

$$\ln \alpha = \ln \frac{\varphi_1}{x_1} + 1 - \frac{\varphi_1}{x_1}$$

όπου $\varphi_1 = \frac{x_1 V_1}{x_1 V_1 + x_2 V_2}$ και V_1 , V_2 ο όγκος των δύο συστατικών, δηλαδή

του ρύπου και της ατμόσφαιρας αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή α σε άπειρη αραίωση, δηλαδή το $\lim_{x_1 \rightarrow 0} (\ln \alpha)$, αν γνωρίζετε ότι $x_1 + x_2 = 1$.

Λύση

Έχουμε $x_1 + x_2 = 1$, άρα όταν $x_1 \rightarrow 0$ τότε $x_2 \rightarrow 1$. Οπότε:

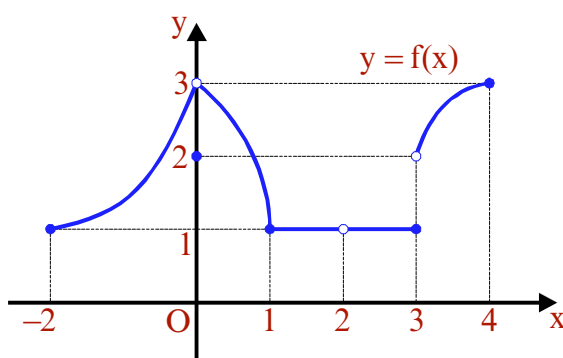
$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} (\ln a) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \left(\ln \frac{V_1}{x_1 V_1 + x_2 V_2} + 1 - \frac{V_1}{x_1 V_1 + x_2 V_2} \right) = \ln \frac{V_1}{V_2} + 1 - \frac{V_1}{V_2}$$

§ 3.6 – 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Λύση

Παρατηρήστε ότι η f ορίζεται στο διάστημα $[-2, 2) \cup (2, 4]$.

- (α) Στο $x_0 = -2$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$ και $f(-2) = 1$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.
- (β) Στο $x_1 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ και $f(0) = 2$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = 0$.
- (γ) Στο $x_2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ και $f(1) = 1$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_2 = 1$.
- (δ) Στο $x_3 = 2$ δεν ορίζεται η f , άρα δεν έχει έννοια να αναφερόμαστε σε συνέχεια.
- (ε) Στο $x_4 = 3$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ και $f(3) = 1$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_4 = 3$, είναι απλά συνεχής αριστερά του $x_4 = 3$.

(στ) Στο $x_5 = 4$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$ και $f(4) = 3$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_5 = 4$.

Άσκηση 2

Στις επόμενες συναρτήσεις να ελέγξετε τη συνέχεια στην τιμή του x που αλλάζει τύπο η συνάρτηση. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας να σημειώσετε **ποιές προϋποθέσεις** του ορισμού συνέχειας παραβιάζονται.

$$(\alpha) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , \quad x \leq 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

$$(\beta) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & , \quad x \geq 1 \\ 2 + \sqrt{x} & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$(\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , \quad x \neq -1 \\ 1 & , \quad x = -1 \end{cases}$$

$$(\delta) f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 2 \\ \frac{1}{|x - 2|} & , \quad x \neq 2 \end{cases}$$

Λύση

(α) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ και $f(1) = 0$. Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(β) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ και $f(1) = 2$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$ γιατί τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(γ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$ και $f(-1) = 1$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = -1$ γιατί παρόλο που υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ δεν ισούται με την αριθμητική τιμή $f(-1) = 1$.

(δ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 2$ αφού δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad 0 < x < 2 \\ x^3 - 3 & , \quad 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- (α) Υπάρχουν τα όρια της f στα σημεία με τετμημένη $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ και $x_2 = 5$;
- (β) Σε ποιά από τα προηγούμενα σημεία είναι συνεχής η f ;

Λύση

- (α) • $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$
 • $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 3) = 5 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$
 • $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (x^3 - 3) = 122$.
 Εδώ η συνάρτηση ορίζεται μόνο αριστερά του 5 και επομένως έχει έννοια η αναζήτηση του ορίου μόνο όταν $x < 5$.
- (β) • $f(1) = 2$ Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
 • $f(2) = 5$ Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.
 • $f(5) = 122$ Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Άσκηση 4

Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι επόμενες συναρτήσεις. Για αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

(α) $f(x) = 5x^2 - x + 4$

(β) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

(γ) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$

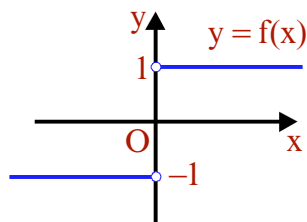
(δ) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & , \quad x < 0 \\ e^x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

Λύση

- (α) Είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.
 (β) Είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών.

- (γ) Είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών.

Σχόλιο: Άλλο συνεχείς γραμμές και άλλο συνεχείς συναρτήσεις. Προσοχή!! Πολλά εξαρτώνται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.



- (δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + 1) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $f(0) = 1$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
- Όταν $x < 0$ η $f(x) = -x + 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
 - Όταν $x > 0$ η $f(x) = e^x$ είναι συνεχής ως εκθετική.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Βρείτε τις τιμές του a που κάνουν την f συνεχή στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της.

$$(α) f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \quad x \leq 1 \\ ax^2 - a^2 & , \quad x > 1 \end{cases} \quad (β) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & , \quad x \neq -2 \\ a & , \quad x = -2 \end{cases}$$

Λύση

- (α) Θέλουμε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Άρα:
- $$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -2 = a - a^2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0.$$
- Άρα $a = -1$ ή $a = 2$.

- (β) Όμοια, πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0 = -2$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = a. \text{ Άρα } a = -4.$$

Άσκηση 2

Να δικαιολογήσετε γιατί οι επόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

$$(α) f(x) = \eta\mu \frac{1}{x^2} \quad (β) f(x) = e^{x^2-1}$$

Λύση

- (α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y = \eta\mu x$ και $y = \frac{1}{x^2}$.
- (β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y = e^x$ και $y = x^2 - 1$.

Άσκηση 3

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ είναι ορισμένη για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και σ' αυτό το σύνολο είναι συνεχής. Μπορείτε να την ορίσετε κατάλληλα στο σημείο $x_0 = 0$ ώστε να είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$;

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι $f(0) = a \in \mathbb{R}$. Για να είναι συνεχής η f σε όλο το $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{x} = a \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x) = a \Leftrightarrow 2 = a$$

$$\text{Άρα η } f \text{ γράφεται } f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

- (α) Υπολογίστε την τιμή $f(1)$ και μετά παραγοντοποιήστε τη διαφορά $f(x) - f(1)$.
- (β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, αν βέβαια αυτό υπάρχει.
- (γ) Αν πάρουμε τιμές του x πολύ κοντά στο 1, όπως:

$$x \in \left(1 - \frac{1}{10}, 1\right) \cup \left(1, 1 + \frac{1}{10}\right) \quad \text{ή αλλιώς} \quad \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}, \quad x \neq 1$$

τότε να αποδείξετε ότι $|f(x) - f(1)| < \frac{12}{100}$.

Λύση

$$(α) f(1) = 2 - 5 - 3 = -6,$$

$$f(x) - f(1) = 2x^2 - 5x - 3 + 6 = 2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$$

$$(β) \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x - 1)(2x - 3)}{x - 1} = 2x - 3, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1.$$

$$(γ) \text{ Είναι } |f(x) - f(1)| = |(x - 1)(2x - 3)| = |x - 1| \cdot |2x - 3| \quad (1)$$

$$\text{'Όμως } \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{10} - 1 < x - 1 < \frac{11}{10} - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{10} < x - 1 < \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$|x - 1| < \frac{1}{10} \quad (2)$$

$$\text{Επίσης } \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10} \Leftrightarrow \frac{18}{10} < 2x < \frac{22}{10} \Leftrightarrow \frac{18}{10} - 3 < 2x - 3 < \frac{22}{10} - 3 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{12}{10} < 2x - 3 < -\frac{8}{10} \text{ και επειδή είναι αρνητικοί και οι τρεις όροι}$$

της ανισότητας, αν αλλάξουμε πρόσημα (πολλαπλασιάσουμε επί -1), αλλάζει και η φορά της ανισότητας. Άρα $\frac{12}{10} > |2x - 3| > \frac{8}{10}$, ε-

$$\text{πομένως } |2x - 3| < \frac{12}{10} \quad (3)$$

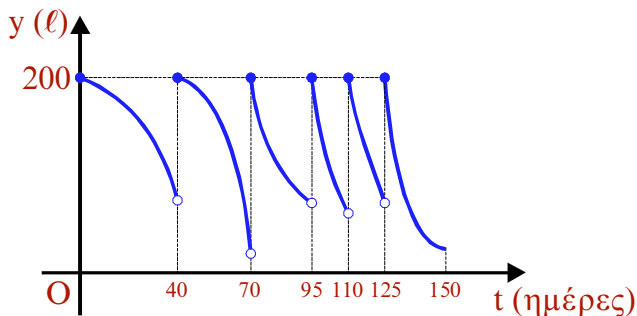
Αν χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες (2) και (3) στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$|f(x) - f(1)| = |x - 1| \cdot |2x - 3| < \frac{1}{10} \cdot \frac{12}{10} = \frac{12}{100}$$

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1 (Πρόβλημα Κατανάλωσης)

Η διπλανή γραφική παράσταση δείχνει την ποσότητα πετρελαίου θέρμανσης σε μια δεξαμενή 200 λίτρων (ℓ) που υπάρχει σε μια πολυκατοικία για μια περίοδο 150 ημερών. Αν θεωρήσουμε ότι $t = 0$ αντιστοιχεί στην αρχή Νοεμβρίου.



- (α) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.
 - (β) Εξηγείστε γιατί η συνάρτηση είναι ασυνεχής στις θέσεις $t = 40$, $t = 70$, $t = 95$, $t = 110$, $t = 125$.
 - (γ) Ποιός μήνας νομίζετε ότι ήταν περισσότερο κρύος;
-

Λύση

- (α) Η γραφική παράσταση δίνει πληροφορίες για την ποσότητα πετρελαίου που υπάρχει στη δεξαμενή των 200 ℓ για 150 ημέρες. Αφού υποθέσαμε ότι ο χρόνος $t = 0$ αντιστοιχεί στην αρχή Νοεμβρίου, τότε η γραφική παράσταση παρουσιάζει την ποσότητα του πετρελαίου μέχρι τέλος Μαρτίου περίπου.
- (β) Απλά σ' εκείνες τις χρονικές στιγμές ο διαχειριστής γεμίζει τη δεξαμενή με πετρέλαιο.
- (γ) Από την 95^η ημέρα μέχρι την 110^η, δηλαδή σε 15 ημέρες, χρειάστηκε να ξαναγεμίσει η δεξαμενή με πετρέλαιο, άρα από 3 έως 18 Φεβρουαρίου ο καιρός ήταν περισσότερο κρύος. Αντίστοιχα βλέπουμε το ίδιο φαινόμενο από την 110^η έως την 125^η ημέρα, δηλαδή από 18 Φεβρουαρίου έως αρχές Μαρτίου, μόνο που σ' αυτό το 15νήμερο η ποσότητα πετρελαίου είναι λίγο περισσότερη.

Άσκηση 2 (Πρόβλημα Τιμών Εμπορεύματος)

Η συνάρτηση που δίνει το κόστος ενός συγκεκριμένου εμπορεύματος δίνεται από τη συνάρτηση K με τύπο:

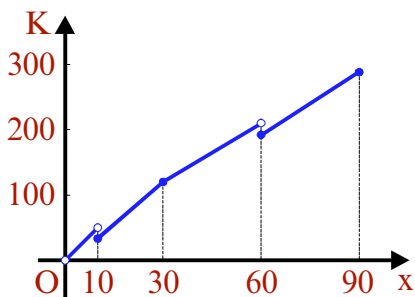
$$K(x) = \begin{cases} 5x & , \quad 0 < x < 10 \\ 4x & , \quad 10 \leq x < 30 \\ 3x + 30 & , \quad 30 \leq x < 60 \\ 3,2x & , \quad 60 \leq x \leq 90 \end{cases}$$

όπου x είναι ο αριθμός των γραμμαρίων του παραγόμενου εμπορεύματος και $K(x)$ το κόστος σε χιλιάδες δραχμές.

- (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $K(x)$ και βρείτε τις τιμές του x που είναι αυτή ασυνεχής.
 - (β) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.
-

Λύση

- (α) Στις τιμές $x = 10$ και $x = 60$ η συνάρτηση $K(x)$ είναι ασυνεχής, αφού $\lim_{x \rightarrow 10^-} K(x) = 50$ και $\lim_{x \rightarrow 10^+} K(x) = 40$. Είναι δεξιά συνεχής αφού $K(10) = 40$. Όμοια όταν $x = 60$.



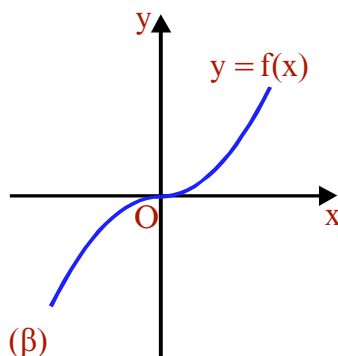
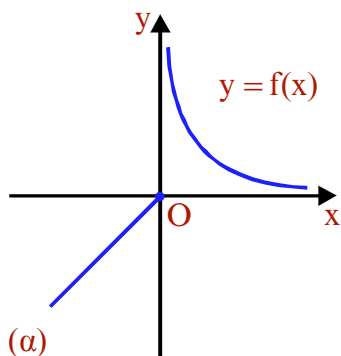
- (β) Το κόστος μέχρι τα πρώτα 10 gr είναι **συγκριτικά** μεγαλύτερο, στα επόμενα 10 gr έως 30 gr μειώνεται λίγο διατηρώντας τις αυξητικές του τάσεις και το ίδιο συμβαίνει από 30 gr έως 60 gr όπου εμφανίζεται και η καλύτερη τιμή κόστους. Από τα 60 gr έως 90 gr πάλι το κόστος αυξάνεται λίγο συγκριτικά με το προηγούμενο διάστημα. Αυτά φαίνονται και από τους **συντελεστές διεύθυνσης** των ευθύγραμμων τμημάτων που αποτελούν τη γραφική παράσταση του κόστους.

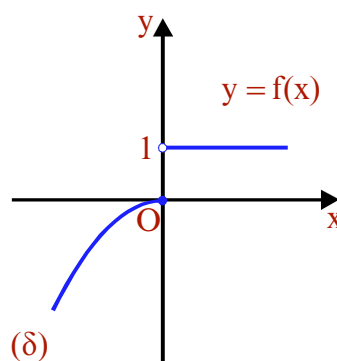
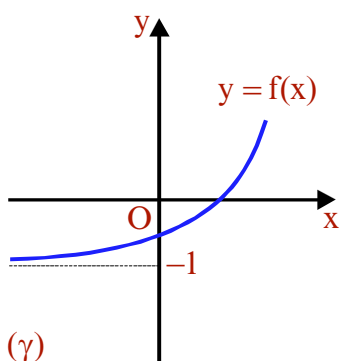
§ 3.10 – 3.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (α), (β) και το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (γ), (δ), αν υπάρχει:





Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Άσκηση 2



Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f . Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f , αν αυτό υπάρχει.

$$(\alpha) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

x	10	50	100	1000	1500
f(x)	1,01			1,000001	

$$(\beta) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

x	-10	-50	-100	-1000	-1500
f(x)	0,0498			0,0004	

Λύση

(α)	x	10	50	100	1000	1500
	f(x)	1,01	1,0004	1,0001	1,000001	1,0000004

Όσο αυξάνουν οι τιμές του x οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν το 1. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

(β)

x	-10	-50	-100	-1000	-1500
f(x)	0,0498	0,009999	0,0049	0,0004	0,00033

Όσο μειώνονται οι τιμές του x οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν το 0. Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Άσκηση 3

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - x + 1)$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^3 + 1}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{2x - 1}$

Λύση

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = -3 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-3)(-\infty) = +\infty$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

(γ) Έχει έννοια η αναζήτηση του ορίου όταν $x \rightarrow +\infty$ αφού $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x|}{2x} = 1 \text{ αφού } x > 0.$$

Άσκηση 4

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[101 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]$ (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2 - x} + \frac{2x^2}{2x + 10} \right)$ (γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{2x + 1}$

Λύση

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[101 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] = 101 \cdot 1 = 101$

(β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2 - x} + \frac{2x^2}{2x + 10} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2 - x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{2x + 10} =$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = (+\infty) + (-\infty)$ που είναι απροσδιοριστία.

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{x^2}{2-x} + \frac{2x^2}{2x+10} = \frac{2x^3+10x^2+4x^2-2x^3}{-2x^2-6x+20} = \frac{14x^2}{-2x^2-6x+20}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{14x^2}{-2x^2} = -7.$$

(γ) Έχει έννοια η αναζήτηση του ορίου όταν $x \rightarrow +\infty$, αφού $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ απροσδιοριστία.}$$

$$\text{'Εστω } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x+1} = \frac{x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1 \right)}{x \left(2+\frac{1}{x} \right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{2+\frac{1}{x}}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Άσκηση 5

Στις ασκήσεις 3 και 4 να βρείτε τις εξισώσεις των οριζόντιων ασυμπτώτων των συναρτήσεων, όπου αυτές υπάρχουν.

Λύση

- Στην άσκηση 3 έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες στις περιπτώσεις:
 - (β) Την ευθεία $y = 0$.
 - (γ) Την ευθεία $y = 1$.
- Στην άσκηση 4 έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες στις περιπτώσεις:
 - (α) Την ευθεία $y = 101$.
 - (β) Την ευθεία $y = -7$.
 - (γ) Την ευθεία $y = 1$.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Για τις επόμενες συναρτήσεις υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε επίσης το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$.

$$(\alpha) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x}$$

$$(\beta) \quad f(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$(\gamma) \quad f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$(\delta) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$$

Λύση

$$(\alpha) \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\text{Τότε } f(x) - \lambda x = f(x) - x = \frac{x^2 - 2x + 5}{x} - x = \frac{x^2 - 2x + 5 - x^2}{x} = \frac{-2x + 5}{x}$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2.$$

$$(\beta) \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 - x + 3}{x}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = +\infty.$$

$$(\gamma) \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x - 1}{x + 1}}{x} = \frac{2x - 1}{x^2 + x}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 = \lambda$$

Τότε $f(x) - \lambda x = f(x)$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

$$(\delta) \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{x}. \text{ Η αναζήτηση του ορίου στο } +\infty \text{ έχει έννοια α-}$$

$$\text{φού } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty). \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1 = \lambda.$$

$$\text{Τότε } f(x) - \lambda x = \sqrt{x^2 + x + 2} - x = \frac{x^2 + x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} =$$

$$\frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα επόμενα όρια εκθετικών μορφών, αν υπάρχουν.

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-4x} + 1) \quad (β) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x}$$

Λύση

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-4x} + 1) = e^{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Αλλιώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-4x} + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{4x}} + 1 \right) = \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ απροσδιοριστία.}$$

$$\text{Θεωρούμε την } f(x) = \frac{e^x + 1}{2e^x} = \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)}{2e^x} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{2},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(γ) \text{ Γνωρίζοντας ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0 \text{ και ότι } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2e^x} = 1(+\infty) = +\infty.$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x \ln x) \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0^+} (2^{\frac{1}{x}} \ln x)$$

Λύση

$$(α) \text{ Γνωρίζουμε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$\text{'Αρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x \ln x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

$$(β) \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

$$\text{'Αρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} (2^{\frac{1}{x}} \ln x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Το κόστος κατασκευής ενός DVD δίσκου εξαρτάται από το πλήθος x των κατασκευαζομένων DVD από μια εταιρεία, με βάση τη συνάρτηση κόστους $K(x) = 0,5 + \frac{2500}{x}$ σε χιλιάδες δρχ.

- (α) Υπολογίστε το κόστος ενός DVD δίσκου αν η εταιρεία κατασκευάζει 1000, 1500, 2500, 5000, 50000 δίσκους.
- (β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Λύση

(α)	x	1000	1500	2500	5000	50000
	K(x) (χιλ. δρχ.)	3	2,166	1,5	1	0,55

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(0,5 + \frac{2500}{x} \right) = 0,5 + 0 = 0,5$

που σημαίνει ότι όταν η παραγωγή DVD γίνεται πολύ μεγάλη, το κόστος για καθένα δίσκο μειώνεται περίπου στις 500 δραχμές.

Άσκηση 2

Η συγκέντρωση ενός συγκεκριμένου φάρμακου στην κυκλοφορία του αίματος ενός ασθενή, t ώρες μετά την ένεση, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \frac{0,2t}{t^2 + 1}$ όπου οι τιμές της συνάρτησης υπολογίζονται σε mg/cm^3 .

- (α) Υπολογίστε τη συγκέντρωση για $t = 1, 2, 4, 5, 10$ ώρες.
- (β) Υπολογίστε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Λύση

(α)	t (ώρες)	1	2	4	5	10
	f(t) (mg/cm^3)	0,1	0,08	0,047	0,038	0,0198

(β) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,2t}{t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,2t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,2}{t} = 0$

που σημαίνει ότι ύστερα από μεγάλο χρονικό διάστημα η συγκέντρωση του φάρμακου στο αίμα είναι μηδενική.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1

Βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ) και αιτιολογήστε την άποψή σας.

1. Για κάθε συνάρτηση f που ορίζεται σε σύνολο μορφής (α, β) με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L - \ell$.
3. Αν για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.
4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ τότε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$.

Λύση

1. **Λάθος** γιατί αυτό ισχύει μόνο σε συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο x_0 .
2. **Σωστό** γιατί αν θέσουμε $f(x) + g(x) = h(x)$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ τότε $g(x) = h(x) - f(x)$, επομένως υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L - \ell$.
3. **Σωστό**. Είναι ίσες συναρτήσεις για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, άρα αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$. Δε μας ενδιαφέρει εδώ η αριθμητική τιμή $f(x_0)$ ή $g(x_0)$.
4. **Λάθος** αφού για παράδειγμα αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, αυτό όμως δε σημαίνει ότι για $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ έχουμε $f(x) = g(x)$.
5. **Σωστό** γιατί $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(\pm\infty)} = 0$.

6. **Λάθος** γιατί αν θέσουμε $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$ τότε $f(x) = \frac{1}{h(x)}$ και μπορεί να μην υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Π.χ. αν $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ τότε $h(x) = (x-1)^3$ με $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$. Όμως $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, άρα η f δεν έχει όριο όταν $x \rightarrow 1$.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\lambda}{(x-1)^2}, \lambda \neq 0, 0 \leq x \neq 1$$

- (α) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, αν υπάρχουν.
 (β) Ποιάς μορφής απροσδιοριστία βρίσκουμε όταν αναζητούμε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$;
 (γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

Λύση

- (α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda}{(x-1)^2} = \lambda \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \begin{cases} +\infty & , \text{ αν } \lambda > 0 \\ -\infty & , \text{ αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

 (β) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \begin{cases} 0(+\infty) & , \text{ αν } \lambda > 0 \\ 0(-\infty) & , \text{ αν } \lambda < 0 \end{cases}$
 απροσδιοριστίες.
 (γ) $f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{x} - 1) \frac{\lambda}{(x-1)^2} = \frac{\lambda(x-1)}{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)} = \frac{\lambda}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$
 (i) Αν $\lambda < 0$ τότε:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lambda}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = -\infty \end{aligned} \right\}$$

 Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$.
 (ii) Αν $\lambda > 0$, όμοια δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

Άσκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν.

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\ln x - \ln(x^2 + 1)] \quad (β) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

Λύση

$$(α) \text{ Έστω } f(x) = 2\ln x - \ln(x^2 + 1) = \ln x^2 - \ln(x^2 + 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 1 = 0.$$

$$(β) \text{ Έστω } g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

$$\text{Τότε } \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) = -\infty.$$

Άσκηση 4

Ένα ψάρι κολυμπά μια απόσταση ℓ μέτρων με ταχύτητα v m/sec αντίθετα προς το ρεύμα ενός ποταμού, του οποίου η ταχύτητα του νερού είναι u m/sec ($u < v$). Η ενέργεια που ξοδεύει το ψάρι δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(v) = \frac{a \ell v^3}{v - u}$$

όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά και η ενέργεια E μετριέται σε Joule.

$$(α) \text{ Υπολογίστε το } \lim_{v \rightarrow u^+} E(v) \text{ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.}$$

$$(β) \text{ Υπολογίστε το } \lim_{v \rightarrow +\infty} E(v) \text{ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.}$$

Λύση

$$(α) \lim_{v \rightarrow u^+} E(v) = \lim_{v \rightarrow u^+} \frac{a \ell v^3}{v - u} = a \ell \lim_{v \rightarrow u^+} \frac{v^3}{v - u} = a \ell(+\infty) = +\infty$$

που σημαίνει ότι όταν η ταχύτητα του ψαριού κόντρα στο ρεύμα του ποταμού, είναι όση περίπου και η ταχύτητα του νερού, τότε θα καταναλώσει πολύ μεγάλη ενέργεια για να διανύσει μια απόσταση ℓ μέτρων (πρακτικά, θα κολυμπά και θα βρίσκεται στο ίδιο μέρος συνεχώς).

$$(\beta) \lim_{v \rightarrow +\infty} E(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{av^3}{v-u} = av \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v^3}{v} = av \lim_{v \rightarrow +\infty} v^2 = +\infty$$

που σημαίνει ότι όταν η ταχύτητα του ψαριού είναι πολύ μεγάλη, η κατανάλωση ενέργειας για την επίτευξη αυτής της ταχύτητας είναι τεράστια.

Άσκηση 5

Αν για τις συναρτήσεις f και g που ορίζονται σε ένα διάστημα μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ τότε για τιμές του x πολύ κοντά στο x_0 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $f(x) \simeq g(x)$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ και $g(x) = \frac{x}{2}$.

$$(\alpha) \text{ Δείξτε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$(\beta) \text{ Υπολογίστε προσεγγιστικά τη } \sqrt{10}, \sqrt{105}, \sqrt{0,3}, \sqrt{0,002}.$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{x}{2}} = \frac{0}{0} \text{ απροσδιοριστία.}$$

$$\text{'Αρα } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1}$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$(\beta) \text{ Για τιμές του } x \text{ πολύ κοντά στο } 0 \text{ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι } \sqrt{1+x} - 1 \simeq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}.$$

(i) Για τον υπολογισμό της $\sqrt{10}$ δε μπορούμε φυσικά να θέσουμε $x = 9$ αφού όπως προαναφέρουμε το x πρέπει να παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 0. Ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = \sqrt{9\left(\frac{1}{9} + 1\right)} = 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \simeq 3\left(1 + \frac{\frac{1}{9}}{2}\right) \simeq 3,167$$

Σημείωση: $\sqrt{10} \simeq 3,1623$ υπολογιζόμενη με computer.

(ii) Όμοια για τον υπολογισμό της $\sqrt{105}$.

$$(iii) \sqrt{0,3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

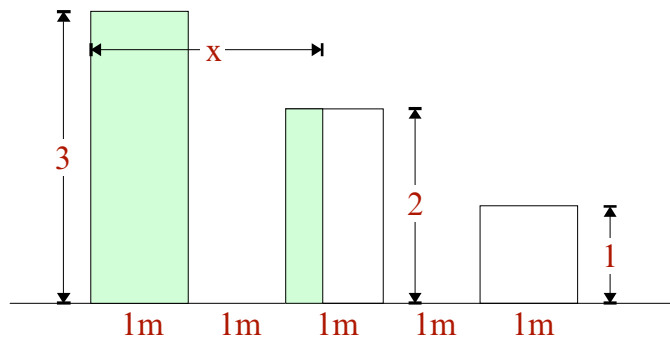
$$\text{όπου } \sqrt{3} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{4 \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \approx 2 \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1,75.$$

$$\text{'Αρα } \sqrt{0,3} \approx \frac{1,75}{3,167} \approx 0,5525.$$

Σημείωση: $\sqrt{3} \approx 0,5477$ υπολογιζόμενη με computer.

Άσκηση 6 (Πρόβλημα Εμβαδού)

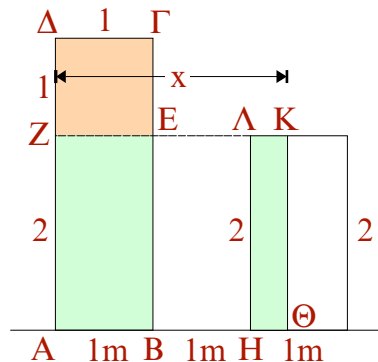
Τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν ίδια βάση 1 m, ύψη 3 m, 2 m, 1 m αντίστοιχα, και απέχουν μεταξύ τους κατά 1 m, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



- (α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδό του σχήματος.
 (β) Αν $E(x)$ η συνάρτηση του εμβαδού, να ελέγξετε αν είναι συνεχής και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

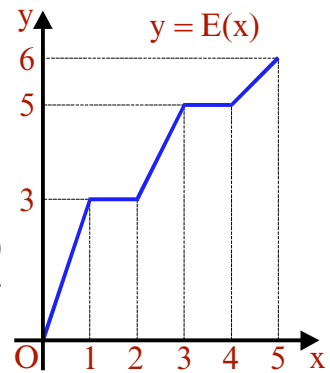
- (α) (i) Όταν $0 \leq x \leq 1$ τότε το εμβαδό του σχήματος εξαρτάται μόνο από το πρώτο παραλληλόγραμμα και είναι $E(x) = 3x$.
 (ii) Όταν $1 < x < 2$ το εμβαδό του σχήματος περιλαμβάνει όλο το πρώτο παραλληλόγραμμα και τίποτα άλλο, άρα $E(x) = 3$.
 (iii) Όταν $2 \leq x \leq 3$ τότε όπως φαίνεται στο σχήμα έχουμε: $E(x) = [(ABEZ) + (HΘΚΛ) - (BHΛE)] + (ZΕΓΔ) = (2x - 2) + 1$ δηλαδή $E(x) = 2x - 1$.
 (iv) Όταν $3 < x < 4$ το εμβαδό του σχήματος περιλαμβάνει όλο το πρώτο και όλο το δεύτερο παραλληλόγραμμα, άρα $E(x) = 5$.



(v) Όμοια με το (iii) υπολογίζεται ότι $E(x) = x + 1$ όταν $4 \leq x \leq 5$.

Άρα η συνάρτηση εμβαδού είναι:

$$E = \begin{cases} 3x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & , 1 < x < 2 \\ 2x - 1 & , 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & , 3 < x < 4 \\ x + 1 & , 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



(β) Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η $E(x)$ είναι για κάθε $x \in [0, 5]$ συνεχής. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Άσκηση 7

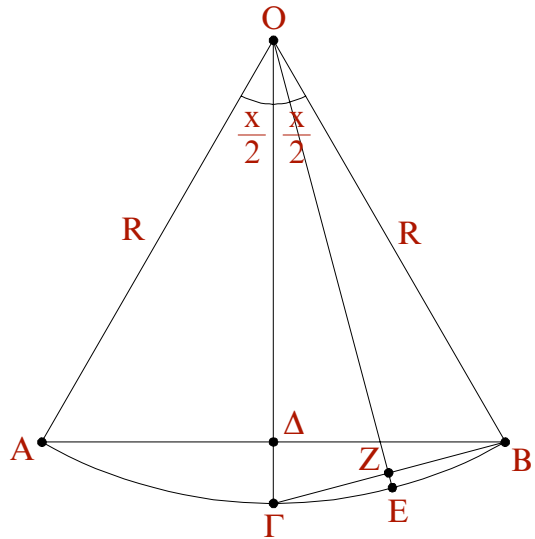
Θεωρούμε έναν κυκλικό τομέα AOB ακτίνας R με επίκεντρο γωνία x όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB και το μήκος του "βέλους" $\Delta\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας x , όπου Γ είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής $B\Gamma$ και το μήκος του "βέλους" ZE ως συνάρτηση της γωνίας x , όπου E είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$.

(γ) Να βρείτε τα όρια της χορδής AB και του "βέλους" $\Delta\Gamma$ όταν $x \rightarrow 0$.

(δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{ZE} = 4$.



Λύση

(α) Υπολογίζουμε το ΔB από το ορθογώνιο τρίγωνο $O\Delta B$:

$$\eta\mu \frac{x}{2} = \frac{\Delta B}{OB} \Leftrightarrow \Delta B = R \eta\mu \frac{x}{2}. \text{ Άρα } AB = 2\Delta B = 2R \eta\mu \frac{x}{2}.$$

Για το βέλος $\Delta\Gamma$ έχουμε: $\Delta\Gamma = O\Gamma - O\Delta = R - O\Delta$ όπου $O\Delta = R \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ πάλι από το τρίγωνο $O\Delta B$. Άρα $\Delta\Gamma = R \left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)$.

(β) Όμοια με το (α) υπολογίζεται ότι:

$$B\Gamma = 2R \eta\mu \frac{x}{4} \text{ και } ZE = R \left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} AB = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2R \eta\mu \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \left[R \left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)\right] = 0$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{ZE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R \left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)}{R \left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)} = \frac{0}{0} \text{ απροσδιοριστία.}$$

$$\text{Τότε } \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}}{1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}} = \frac{\left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)}{\left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)} =$$

$$\frac{\eta\mu^2 \frac{x}{2} \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)}{\eta\mu^2 \frac{x}{4} \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)} = \frac{4 \eta\mu^2 \frac{x}{4} \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{4} \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)}{\eta\mu^2 \frac{x}{4} \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)}$$

(χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$).

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{ZE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{4} \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4}\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{2} = 4.$$

4

Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

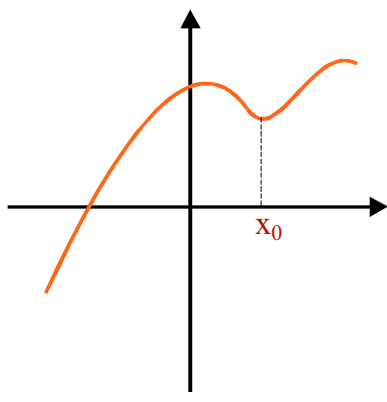
§ 4.1

Ασκήσεις Εμπέδωσης

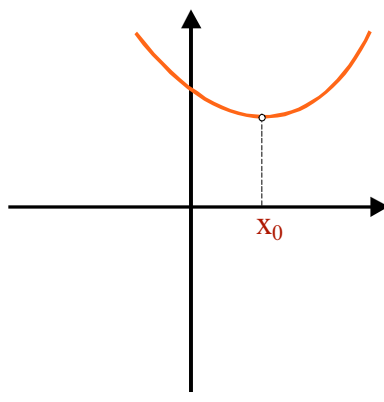
Άσκηση 1

Στις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις να εξετάσετε:

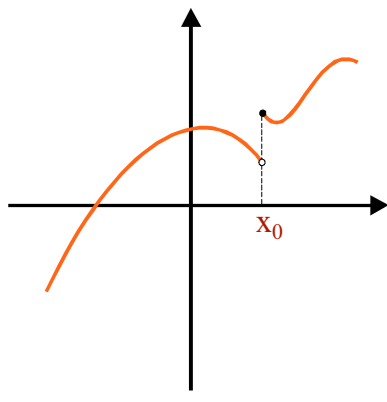
- (α) Αν η f έχει όριο στο $x = x_0$.
- (β) Αν η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.
- (γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.



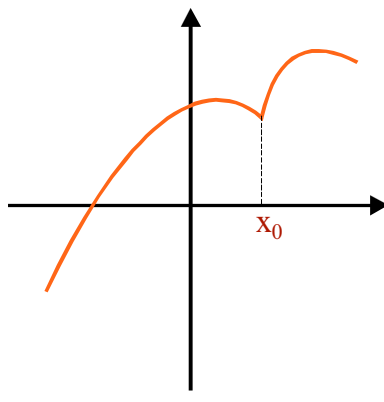
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Λύση

- (i) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.
- (ii) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αλλά η f δεν ορίζεται στο x_0 , οπότε δεν εξετάζουμε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.
- (iii) Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, η f είναι ασυνεχής στο $x = x_0$ και συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμη.
- (iv) Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, η f είναι συνεχής στο $x = x_0$, αλλά η C_f σχηματίζει γωνιακό σημείο, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Θεωρούμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$$

Αφού $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$ έχουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - x_0|$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $x = x_0$ ως απόλυτη τιμή πολυωνυμικής συνάρτησης. Για την παραγωγισιμότητα εξετάζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $x = x_0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - x_0}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Λύση

Εξετάζουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

και αφού $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο $x = x_0$.

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \gamma x^2 + \delta x & , \text{ αν } x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta x & , \text{ αν } x > 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

(α) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \gamma + \delta \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \alpha + \beta \quad f(1) = \gamma + \delta$$

Επομένως, για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ θα πρέπει:

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \quad (1)$$

(β) Έχουμε ότι για $x \leq 1$ ή $h \leq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\gamma(1+h)^2 + \delta(1+h) - \gamma - \delta}{h} = \gamma h + (2\gamma + \delta).$$

$$\text{Οπότε } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2\gamma + \delta.$$

Για $x > 1$ ή $h > 0$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\alpha(1+h)^2 + \beta(1+h) - \gamma - \delta}{h} =$$

$$\alpha h + (2\alpha + \beta) + \frac{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)}{h} = \alpha h + (2\alpha + \beta)$$

αφού λόγω της συνέχειας της f στο $x_0 = 1$ ισχύει ότι $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

$$\text{Επομένως } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2\alpha + \beta.$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ θα πρέπει:

$$2\gamma + \delta = 2\alpha + \beta \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\gamma = \alpha$ και $\beta = \delta$.

Άσκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|h|^3}{h} = \frac{h^2|h|}{h} = h|h|.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \text{ και άρα } f'(1) = 0.$$

Άσκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{2|x-2|}{x^2 - 2x + 4}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{2|h|}{(2+h)^2 - 2(2+h) + 4}}{h} = \frac{2|h|}{h(h^2 + 2h + 4)}$$

Επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{2}$$

και άρα δεν υπάρχει το $f'(2)$.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Ένα αερόστατο αρχίζει να ανεβαίνει κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 1,28 m/sec. Λόγω βλάβης στην τροφοδοσία αρχίζει να χάνει αέρα, έτσι ώστε το ύψος του μετά από t sec να δίνεται από τη συνάρτηση $g(t) = 1,28t - 0,16t^2$ m.

- (α) Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του αερόστατου στα χρονικά διαστήματα $[3, 4]$, $[3, 3,5]$ και $[3, 3,1]$;
- (β) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα του αερόστατου τη χρονική στιγμή $t = 3$ sec;
- (γ) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 5$ sec; Εκείνη τη στιγμή το αερόστατο ανεβαίνει ή πέφτει;
- (δ) Πότε το αερόστατο θα πέσει στο έδαφος;

Λύση

- (α) Θα είναι:

$$\frac{g(4) - g(3)}{4 - 3} = 0,16$$

$$\frac{g(3,5) - g(3)}{3,5 - 3} = 4,92$$

$$\frac{g(3,1) - g(3)}{3,1 - 3} = 4,83$$

- (β) Θα είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = 0,32 \text{ m/sec}$$

(γ) Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(5+h) - g(5)}{h} = -0,32 \text{ m/sec}$ και το αερόστατο πέφτει.

(δ) Όταν $g(t) = 0$, αλλά όχι για $t = 0$, αλλά για $t = 8 \text{ sec}$.

Άσκηση 2

Σε θερμοκρασία 20° C , ο όγκος V (σε lt) $1,33 \text{ gr O}_2$ σχετίζεται με την πίεσή του P (σε atm) με τον τύπο $V = \frac{1}{P}$.

(α) Ποιός είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής του όγκου V ως συνάρτηση της πίεσης P , όταν η πίεση P αυξάνεται από 2 atm σε 3 atm ;

(β) Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V όταν η πίεση P γίνεται 2 atm ;

Λύση

(α) Ο μέσος ρυθμός του όγκου δίνεται από το πηλίκιο:

$$\frac{V(3) - V(2)}{3 - 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \text{ lt}$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ελάττωση του όγκου με την αύξηση της πίεσης.

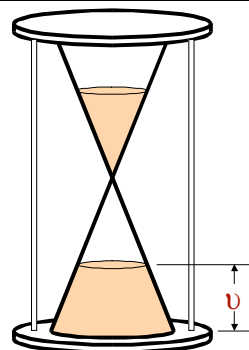
(β) Ο ρυθμός μεταβολής δίνεται από το όριο του πηλίκου:

$$\frac{V(2+h) - V(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = -\frac{1}{2(2+h)}$$

$$\text{και } V'(2) = -\frac{1}{4} \text{ lt/atm.}$$

Άσκηση 3

Σε μια κλεψύδρα η άμμος αρχίζει να πέφτει από το πάνω μέρος της στο κάτω με σταθερό ρυθμό $4 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους u της άμμου που μαζεύεται στο κάτω μέρος της κλεψύδρας, αν το ύψος εκφράζεται ως συνάρτηση της ακτίνας από τον τύπο $u = \frac{R}{\pi}$.



Λύση

Έχουμε ότι $V = \frac{1}{3} \pi R^2 v = \frac{R^3}{3}$, οπότε:

$$\frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = \frac{R^3(t_0 + h) - R^3(t_0)}{3h} =$$

$$\frac{R(t_0 + h) - R(t_0)}{h} \cdot \frac{R^2(t_0 + h) + R(t_0)R(t_0 + h) + R^2(t_0)}{3}$$

Οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t_0 + h) - R(t_0)}{h} = \frac{1}{R^2(t_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h}$ δηλαδή:

$$R'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{R^2(t_0)}.$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της διαγωνίου ενός κύβου ως συνάρτηση της ακμής του.

Λύση

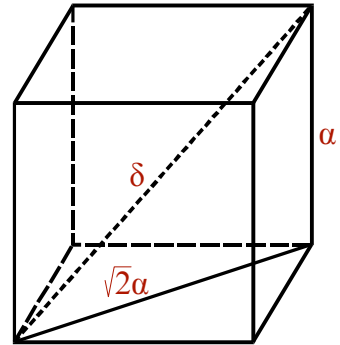
Η διαγώνιος ενός κύβου είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές a και $\sqrt{2}a$. Επομένως

$$\delta^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \quad \text{ή} \quad \delta = \sqrt{3}a.$$

Τότε έχουμε ότι $\frac{\delta(a + h) - \delta(a)}{h} = \sqrt{3}$.

Επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$\delta'(a) = \sqrt{3}.$$

**Άσκηση 5**

Αν ο όγκος μιας σφαίρας μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειάς της είναι αντιστρόφως ανάλογος της ακτίνας της.

Λύση

Έχουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = c$. Όμως $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, οπότε:

$$\frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3(t_0 + h) - R^3(t_0)}{h} =$$

$$\frac{4}{3} \pi \frac{R(t_0 + h) - R(t_0)}{h} [R^2(t_0 + h) + R(t_0)R(t_0 + h) + R^2(t_0)].$$

Επομένως έχουμε ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t_0 + h) - R(t_0)}{h} = \frac{3c}{4\pi} \cdot \frac{1}{3R^2(t_0)} = \frac{c}{4\pi R^2(t_0)}.$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E = 4\pi R^2$ της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι:

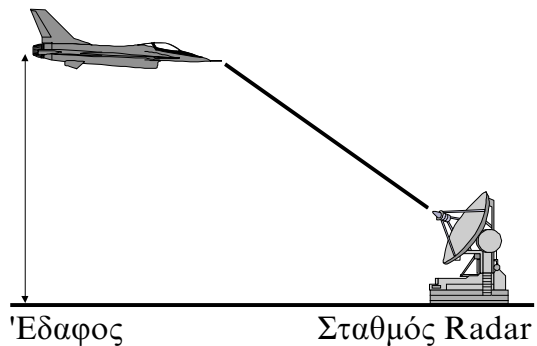
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(t_0 + h) - E(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(4\pi \frac{R^2(t_0 + h) - R^2(t_0)}{h} \right) =$$

$$8\pi R(t_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(t_0 + h) - R(t_0)}{h}.$$

Άρα έχουμε ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(t_0 + h) - E(t_0)}{h} = 8\pi R(t_0) \frac{c}{4\pi R^2(t_0)} = \frac{2c}{R(t_0)}.$

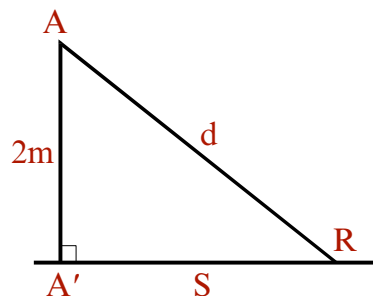
Άσκηση 6

Ένα αεροπλάνο πετάει παράλληλα προς το έδαφος με σταθερή ταχύτητα 600 μίλια/h και πλησιάζει ένα σταθμό Radar. Αν το ύψος στο οποίο πετάει το αεροπλάνο είναι 2 μίλια, πόσο γρήγορα μειώνεται η απόσταση ανάμεσα στο αεροπλάνο και στο σταθμό, τη χρονική στιγμή που η οριζόντια απόστασή τους είναι 1,5 μίλια;



Λύση

Έστω $S(t)$ η οριζόντια απόσταση και t_0 η χρονική στιγμή, όπου $S(t_0) = 1,5$ μίλια. Η απόσταση του αεροπλάνου από το σταθμό Radar δίνεται από τον τύπο: $d = \sqrt{S^2 + 4}$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του d τη χρονική στιγμή $t = t_0$ δίνεται από το όριο ($h \rightarrow 0$) του πηλίκου:



$$\frac{\sqrt{S^2(t_0 + h) + 4} - \sqrt{S^2(t_0) + 4}}{h} = \frac{S^2(t_0 + h) - S^2(t_0)}{h[\sqrt{S^2(t_0 + h) + 4} + \sqrt{S^2(t_0) + 4}]} =$$

$$\frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} \cdot \frac{S(t_0 + h) + S(t_0)}{\sqrt{S^2(t_0 + h) + 4} + \sqrt{S^2(t_0) + 4}}$$

Όμως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = 600 \text{ μίλια/h}$, οπότε:

$$d'(t_0) = S'(t_0) \cdot \frac{2S(t_0)}{2\sqrt{S^2(t_0) + 4}} = \frac{600 \cdot 1,5}{2,5} = 360 \text{ μίλια/h}.$$

§ 4.2 – 4.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

- (i) $f_1(x) = x^2 \ln x$, για $x > 0$
- (ii) $f_2(x) = x \eta \mu x \ln x$, για $x > 0$
- (iii) $f_3(x) = x^2 \varepsilon \varphi x$, για $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
- (iv) $f_4(x) = 2^x \log_2 x$, για $x > 0$

Λύση

Έχουμε ότι:

- (i) $f_1'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = x(2 \ln x + 1)$
- (ii) $f_2'(x) = (x)' \eta \mu x \ln x + x (\eta \mu x)' \ln x + x \eta \mu x (\ln x)' =$
 $\eta \mu x \ln x + x \sigma \upsilon \nu x \ln x + \eta \mu x$
- (iii) $f_3'(x) = 2x \varepsilon \varphi x + x^2 \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} (x + \eta \mu 2x)$
- (iv) $f_4'(x) = 2^x \ln 2 \frac{\ln x}{\ln 2} + 2^x \frac{1}{x \ln 2} = 2^x \left(\ln x + \frac{1}{x \ln 2} \right)$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

- (i) $f_1(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 3}$, για $x \in \mathbb{R} - \{3\}$
 (ii) $f_2(x) = \sigma\phi x$, για $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

Λύση

Έχουμε ότι:

- (i) $f'_1(x) = \frac{2x(x-3) - (x^2+3)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 3}{(x-3)^2}$
 (ii) $f'_2(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

- (i) $f_1(x) = \eta\mu(2x + 5)$
 (ii) $f_2(x) = \ln(\eta\mu x)$, για $x > 0$
 (iii) $f_3(x) = (2x - 3x^2)^3$

Λύση

Έχουμε ότι:

- (i) $f'_1(x) = \sigma\upsilon\nu(2x + 5) \cdot (2x + 5)' = 2\sigma\upsilon\nu(2x + 5)$
 (ii) $f'_2(x) = \frac{1}{\eta\mu x} (\eta\mu x)' = \sigma\phi x$
 (iii) $f'_3(x) = 3(2x - 3x^2)^2 \cdot (2x - 3x^2)' = 3(2 - 6x)(2x - 3x^2)^2$

Άσκηση 4

- (α) Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f_1(x) = xe^x$.
 (β) Να υπολογισθεί η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης $f_2(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ για $x > 2$.
 (γ) Να υπολογισθεί η τέταρτη παράγωγος της συνάρτησης $f_3(x) = \frac{x+3}{x-3}$, για $x \neq 3$.

Λύση

- (α) Είναι $f'_1(x) = e^x(x+1)$ και $f''_1(x) = e^x(x+2)$

$$(\beta) \text{ Είναι } f_2'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{4}{4-x^2}, f_2''(x) = -\frac{4}{(4-x^2)^2}(-2x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2}$$

$$\text{και } f_2^{(3)}(x) = \frac{8(3x^2-4)}{(4-x^2)^3}$$

$$(\gamma) \text{ Είναι } f_3^{(4)}(x) = \frac{144}{(x-3)^5}$$

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{ax}x^v$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

Είναι:

$$f'(x) = e^{ax}x^{v-1}(ax+v)$$

$$f''(x) = e^{ax}x^{v-2}[a^2x^2 + v(a+1)x + (v-1)]$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί η 1000-οστή παράγωγος των συναρτήσεων $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$.

Λύση

Είναι: $f_1'(x) = f_1''(x) = \dots = f_1^{(1000)}(x) = e^x$ ενώ ισχύει ότι:

$$f_2'(x) = a^x \ln a$$

$$f_2''(x) = a^x \ln^2 a$$

$\vdots$

$$f_2^{(1000)}(x) = a^x \ln^{1000} a$$

Άσκηση 3

(α) Να παραγωγίσετε τη γνωστή ταυτότητα:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^v = \frac{x^{v+1} - 1}{x - 1}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + v \cdot 3^{v-1}$$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + vx^{v-1} = \frac{vx^{v+1} - (v+1)x^v + 1}{(x-1)^2}$$

(β) Θέτοντας $x = 3$ βρίσκουμε ότι:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + v \cdot 3^{v-1} = \frac{v \cdot 3^{v+1} - (v+1)3^v + 1}{4} = \frac{3^v(2v-1) + 1}{4}$$

Άσκηση 4

Έστω P πραγματικό πολυώνυμο για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$(P'(x))^2 = P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί ο τύπος του πολυωνύμου P .

Λύση

Αν $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, τότε

$$P'(x) = v a_v x^{v-1} + (v-1) a_{v-1} x^{v-2} + \dots + a_1.$$

Επομένως οι τάξεις των δύο πολυωνύμων $(P'(x))^2$ και $P(x)$ θα είναι ίσες, δηλαδή:

$$2(v-1) = v \quad \text{ή} \quad v = 2.$$

Συνεπώς, $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ και $P'(x) = 2ax + \beta$ ενώ προκύπτει ότι:

$$4a^2 x^2 + 4a\beta x + \beta^2 = ax^2 + \beta x + \gamma$$

οπότε:

$$4a^2 = a, \quad 4a\beta = \beta, \quad \beta^2 = \gamma \quad \text{και}$$

$$(a, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{1}{4}, \beta, \beta^2\right), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι είτε $P \equiv 0$, είτε $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \beta x + \beta^2$.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση S στα t πρώτα δευτερόλεπτα της εκκίνησής του ίση με:

$$S(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t \text{ m}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

- (α) Να βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , με $0 \leq t \leq 10$.
- (β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το αυτοκίνητο επιβραδύνει μετά από τα 6 πρώτα sec της κίνησής του.

Λύση

- (α) Είναι $\gamma(t) = S''(t) = 6t + 2\alpha \text{ m/sec}^2$.
- (β) Θα πρέπει $\gamma(t) \leq 0$ για $6 \leq t \leq 10$, δηλαδή $\alpha \leq -3t$, για $6 \leq t \leq 10$, επομένως $\alpha \leq -30$.

Άσκηση 2

Έστω το γνωστό από τον ηλεκτρισμό δυναμικό (V):

$$V = \frac{q}{r} \quad (q = \text{φορτίο}, r = \text{απόσταση})$$

Να αποδείξετε ότι για το δυναμικό αυτό ισχύει:

$$V''(r) + \frac{2}{r} V'(r) = 0$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$V'(r) = -\frac{q}{r^2} \quad \text{και} \quad V''(r) = \frac{2q}{r^3}$$

Επομένως:

$$V''(r) + \frac{2}{r} V'(r) = \frac{2q}{r^3} + \frac{2}{r} \left(-\frac{q}{r^2} \right) = 0$$

Άσκηση 3

Μια ομάδα βιολόγων σε ένα ωκεανογραφικό ινστιτούτο προτείνει να ληφθούν μια σειρά από προληπτικά μέτρα για τη διάσωση ενός συγκεκριμένου είδους φάλαινας από την εξαφάνιση. Μετά την εφαρμογή των μέτρων αυτών ο αριθμός (N) των φαλαινών εκτιμάται ότι θα μεταβάλλεται με τον χρόνο (t) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600, \quad 0 \leq t \leq 10$$

Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τον 2^ο και 6^ο χρόνο, καθώς και πόσες φάλαινες θα υπάρχουν τον 8^ο χρόνο.

Λύση

Ο ρυθμός αύξησης είναι:

$$N'(t) = 9t^2 + 4t - 10$$

οπότε $N'(2) = 34$, $N'(6) = 338$ φάλαινες το χρόνο.

Ο συνολικός πληθυσμός μετά από 8 χρόνια θα είναι

$$N(8) = 3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 - 10 \cdot 8 + 600 = 2184 \text{ φάλαινες.}$$

Άσκηση 4

Τα οργανικά απόβλητα που ρίχνονται σε έναν υδάτινο αποδέκτη, π.χ. σε μια λίμνη, ελαττώνουν κατ' αρχήν το οξυγόνο της λίμνης έως ότου η φύση δράσει έτσι ώστε να υπάρξει πάλι ισορροπία στο οικοσύστημα. Για ένα τέτοιο οικοσύστημα το οξυγόνο μεταβάλλεται ως προς το χρόνο t ως εξής:

$$f(t) = 100 \left(\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + 4} \right), 0 \leq t < 8$$

Πώς αλλάζει το οξυγόνο 1, 2 και 3 ημέρες μετά τη ρίψη ενός φορτίου οργανικών αποβλήτων;

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής του οξυγόνου είναι:

$$f'(t) = \frac{400(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2}$$

Άρα $f'(1) = -48$, $f'(2) = 0$ και $f'(3) = 11,8$, δηλαδή την πρώτη ημέρα υπάρχει ελάττωση του οξυγόνου κατά 48%, μετά από 2 ημέρες δεν υπάρχει ούτε ελάττωση ούτε αύξηση, ενώ μετά από 3 ημέρες υπάρχει 11,8% αύξηση.

Άσκηση 5

Ο αριθμός των μελών ενός γυμναστηρίου που άνοιξε πριν από μερικά χρόνια δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$N(t) = 100(64 + 4t)^{\frac{2}{3}}, 0 \leq t \leq 52$$

όπου N είναι ο αριθμός των μελών στην αρχή μιας εβδομάδας t . Πώς αυξανόταν ο αριθμός νέων μελών αρχικά ($t = 0$), και πώς στην αρχή της 40^{ης} εβδομάδας; Ποιός ο αριθμός των μελών τις δύο αυτές χρονικές στιγμές;

Λύση

Ο ρυθμός αύξησης των μελών είναι:

$$N'(t) = \frac{800}{3(64 + 4t)^{\frac{1}{3}}}$$

Άρα $N'(0) = 66,7$ δηλαδή περίπου 66 ή 67 άνθρωποι την εβδομάδα και $N(0) = 1600$ μέλη στην αρχή.

Μετά την 40^η εβδομάδα έχουμε:

$$N'(40) = 43,9 \text{ και } N(40) = 3688 \text{ μέλη}$$

Άσκηση 6

Η μέση συγκέντρωση του CO (μονοξειδίου του άνθρακα) στην ατμόσφαιρα δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0,881443t^4 - 1,45533t^3 + 0,695876t^2 + 2,87801t + 293, \quad t \geq 0$$

όπου t είναι η μονάδα μέτρησης του χρόνου και παίρνει τιμές $t = 0, 1, 2, \dots$ και κάθε μονάδα χρόνου αντιστοιχεί σε περίοδο 40 ετών ($t = 0$ το 1860) και η f μετριέται σε μέρη στο εκατομμύριο ανά κυβικό εκατοστό (ppm/cm^3). Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης στην αρχή του αιώνα ($t = 1$) και στην αρχή του 1990 ($t = 3,5$);

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης είναι:

$$f'(t) = 3,525772t^3 - 4,36599t^2 + 1,391752t + 2,87801$$

Άρα $f'(1) = 3,429 \text{ ppm}/\text{cm}^3$ και $f'(3,5) = 105,43 \text{ ppm}/\text{cm}^3$.

§ 4.6 – 4.7
Ασκήσεις Εμπέδωσης**Άσκηση 1**

Να υπολογίσετε την παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \frac{1}{x+2}$, για $x > -2$

(ii) $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, για $x \neq 0$

$$(iii) f_3(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \text{ για } x \neq 0$$

$$(iv) f_4(x) = \varepsilon\varphi^2 x, \text{ για } x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$(i) F_1(x) = \ln(x+2) + c$$

$$(ii) F_2(x) = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$$

$$(iii) \text{ Αφού } f_3(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ θα είναι } F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + c$$

$$(iv) \text{ Αφού } f_4(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 \text{ θα είναι}$$

$$F_4(x) = \varepsilon\varphi x - x + c$$

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις της δεύτερης στήλης είναι οι παράγουσες των συναρτήσεων της πρώτης:

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
$\sigma\varphi x$, για $\eta\mu x > 0$	$\ln(\eta\mu x)$, για $\eta\mu x > 0$
$\ln x$, για $x > 0$	$x(\ln x - 1)$, για $x > 0$

Λύση

Αρκεί να παραγωγίσουμε τις παράγουσες συναρτήσεις.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$(i) f_1(x) = a^x, \text{ με } 0 < a \neq 1$$

$$(ii) f_2(x) = \log_a x, \text{ για } x > 0 \text{ και } 0 < a \neq 1$$

$$(iii) f_3(x) = 1 + \varepsilon\varphi^2 x, \text{ για } x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$(i) \quad F_1(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$(ii) \quad F_2(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c$$

$$(iii) \quad F_3(x) = \varepsilon \phi x + c$$

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε την παράγουσα συνάρτηση της $f(x) = \frac{1}{1 + \eta \mu x}$,
 $x \neq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $(1 - \eta \mu x)$. Τότε:

$$f(x) = \frac{1 - \eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} - \frac{\varepsilon \phi x}{\sigma \upsilon \nu x}$$

οπότε:

$$F(x) = \varepsilon \phi x - \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} + c$$

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{array} \right\}$$

Λύση

Από την εφαρμογή 2 έχουμε ότι:

$$\frac{y'}{y} = 1 \quad \text{ή} \quad (\ln y)' = 1 \quad \text{ή} \quad \ln y = x + c \quad \text{ή} \quad y = e^{x+c} \quad \text{ή} \quad y = c_1 e^x.$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c_1 θέτουμε $x = 0$, οπότε $y(0) = y_0 = c_1$

και $y = y_0 e^x$.

Άσκηση 2

Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$e^{-x} (y' - y) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$e^{-x} (f'(x) - f(x)) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ή} \quad e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ή}$$

$$(e^{-x} f(x))' = (\ln(e^x + 1))'$$

Επομένως έχουμε:

$$e^{-x} f(x) = \ln(e^x + 1) + c \quad \text{ή} \quad f(x) = e^x \ln(e^x + 1) + ce^x$$

Για $x = 0$ βρίσκουμε $c = 0$, οπότε:

$$y = f(x) = e^x \ln(e^x + 1).$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $y = f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$y' = 2x^3 - 3$$

και ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$y = f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x + c$$

Για $x = 0$ είναι $c = 2$, επομένως:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x + 2$$

Άσκηση 4

Δίνεται συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λυθεί το πρόβλημα αρ-

χικών τιμών:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) = 2x + 5 \\ f'(1) = 2 \\ f(1) = \frac{5}{6} \end{array} \right\}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = x^2 + 5x + c.$$

Για $x = 1$ είναι $c = -4$, οπότε:

$$f'(x) = x^2 + 5x - 4.$$

Κατόπιν προκύπτει ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + c_1.$$

Για $x = 1$ έχουμε ότι $c_1 = 2$, οπότε:

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + 2.$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί μια διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης και μια 2^{ης}, τις οποίες ικανοποιεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Λύση

Παραγωγίζουμε την f και βρίσκουμε ότι:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \quad \text{ή} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

που είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης.

Αν ξαναπαραγωγίσουμε την εξίσωση αυτή:

$$y'(\sqrt{x^2 + 1}) = 1$$

έχουμε ότι:

$$y''(\sqrt{x^2 + 1}) + y' \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \quad \text{ή} \quad (x^2 + 1) y'' + x y' = 0$$

που είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Ένας καπετάνιος ιστιοπλοϊκού χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του δρομόμετρου (όργανο που μετράει την ταχύτητα του σκάφους) καταλήγει ότι η ταχύτητα του σκάφους του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$v(t) = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{100} \text{ ναυτικά μίλια/min, για } 0 \leq t \leq 30$$

Να βρεθεί η συνάρτηση θέσης του ιστιοπλοϊκού και να βρεθεί πόσα μίλια διήνυσε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 10 \text{ min}$ έως $t = 20 \text{ min}$.

Λύση

Αφού $v(t) = S'(t)$ έχουμε ότι: $S'(t) = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{100}$.

Η παράγουσα της $e^{\frac{t}{10}}$ είναι η $10e^{\frac{t}{10}} + c$, οπότε:

$$S(t) = \frac{1}{100} 10e^{\frac{t}{10}} + c = \frac{1}{10} e^{\frac{t}{10}} + c.$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μια αρχική τιμή της S , ότι $S(0) = 0$, οπότε:

$$S(0) = \frac{1}{10} + c \quad \text{ή} \quad c = -\frac{1}{10}.$$

Άρα:

$$S(t) = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} - \frac{1}{10} = \frac{e^{\frac{t}{10}} - 1}{10}, \text{ για } 0 \leq t \leq 30.$$

Για να βρούμε την απόσταση που διήνυσε το ιστιοπλοϊκό από $t = 10 \text{ min}$ έως $t = 20 \text{ min}$, θεωρούμε τη διαφορά:

$$S(20) - S(10) = \frac{e^{\frac{20}{10}}}{10} - \frac{1}{10} - \frac{e^{\frac{10}{10}}}{10} + \frac{1}{10} = \frac{e^2 - e}{10} \approx 0,46 \text{ ναυτικά μίλια.}$$

Άσκηση 2

Η τωρινή κυκλοφορία του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β' της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας είναι 300 αντίγραφα την εβδομάδα. Η

ΕΜΕ υπολογίζει ότι το περιοδικό θα αυξήσει την κυκλοφορία του με ρυθμό $\frac{1}{5} \sqrt[5]{t^4} + \frac{2}{9}$ τεύχη ανά εβδομάδα (θεωρώντας πάντα τον κοντινότερο ακέραιο αριθμό τευχών), τα επόμενα τρία χρόνια. Ποιά θα είναι η κυκλοφορία του περιοδικού μετά από 32 εβδομάδες;

Λύση

Αν η συνάρτηση $f(t)$ εκφράζει την κυκλοφορία του περιοδικού, τότε έχουμε ότι:

$$f'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[5]{t^4} + \frac{2}{9}.$$

Η παράγουσα της συνάρτησης $\sqrt[5]{t^4} = t^{\frac{4}{5}}$ είναι η:

$$\frac{t^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} + c = \frac{5}{9} t^{\frac{9}{5}} + c = \frac{5t \sqrt[5]{t^4}}{9} + c.$$

Επομένως:

$$f(t) = \frac{2t}{9} + \frac{t \sqrt[5]{t^4}}{9} + c = \frac{t}{9} (2 + \sqrt[5]{t^4}) + c.$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c , χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $f(0) = 300$, οπότε $c = 300$. Άρα η κυκλοφορία του ΕΥΚΛΕΙΔΗ Β' δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \frac{t}{9} (2 + \sqrt[5]{t^4}) + 300$$

οπότε η κυκλοφορία μετά από 32 εβδομάδες θα είναι:

$$f(32) = \frac{32}{9} \cdot 18 + 300 = 364 \text{ τεύχη.}$$

Άσκηση 3

Στην Αθήνα μια καλοκαιρινή ημέρα, το μονοξειδίο του άνθρακα είναι 2 μέρη στο εκατομμύριο (ppm). Το Υπουργείο Περιβάλλοντος προβλέπει ότι αν δεν παρθούν αυστηρά μέτρα κατά του νέφους, η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{1}{1000} (t^2 + 20t + 100) \text{ μέρη ανά εκατομμύριο (ppm)}$$

σε t χρόνια από τώρα. Ποιά θα είναι η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα σε 3 χρόνια από σήμερα;

Λύση

Ας συμβολίσουμε με $f(t)$ τη συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα, οπότε έχουμε:

$$f'(t) = \frac{1}{1000} (t^2 + 20t + 100).$$

Οπότε:

$$f(t) = \frac{1}{1000} \left(\frac{t^3}{3} + 10t^2 + 100t \right) + c.$$

Όμως $f(0) = 2$ οπότε $c = 2$, άρα:

$$f(t) = \frac{1}{1000} \left(\frac{t^3}{3} + 10t^2 + 100t + 2000 \right).$$

Επομένως, σε 3 χρόνια από σήμερα, η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα θα είναι:

$$f(3) = \frac{1}{1000} (9 + 90 + 900 + 2000) = 2,999 \text{ ppm}.$$

Άσκηση 4

Το γνωστό σύστημα "εκκρεμές – μάζα" περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$mx'' = -kx$$

όπου x η απόσταση ως συνάρτηση του χρόνου t και k σταθερά.

Να αποδείξετε ότι μια λύση που ικανοποιεί αυτή τη διαφορική είναι της μορφής:

$$x = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \eta\mu(\omega t)$$

με $\omega^2 = \frac{k}{m}$ και c_1, c_2 σταθερές.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$x'(t) = -c_1 \omega \eta\mu(\omega t) + \omega c_2 \sin(\omega t)$$

$$x''(t) = -c_1 \omega^2 \sin(\omega t) - \omega^2 c_2 \eta\mu(\omega t)$$

Επομένως:

$$mx'' = -m\omega^2(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \eta\mu(\omega t)) = -kx.$$

§ 4.8 – 4.9**Ασκήσεις Εμπέδωσης****Άσκηση 1**

Να αποδείξετε ότι η γραμμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = ax + \beta$ είναι:

- (α) Γνησίως αύξουσα αν $a > 0$.
- (β) Γνησίως φθίνουσα αν $a < 0$.
- (γ) Σταθερή αν $a = 0$.

Λύση

Προφανώς ισχύουν τα ζητούμενα αφού $f'(x) = a$.

Άσκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^{ax}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}^*$.

Λύση

Είναι $f'(x) = ae^{ax}$, οπότε αν $a > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ αν $a < 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Δίνεται μια συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

- (i) $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$.
- (ii) Υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 0$.

Τι ισχύει για το σημείο $(\gamma, f(\gamma))$; Τι θα ισχύει αν αντί της (i) είχαμε ότι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$;

Λύση

Στην πρώτη περίπτωση το σημείο $(\gamma, f(\gamma))$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου, ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι θέση τοπικού μεγίστου.

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η κυβική συνάρτηση:

$$f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad a \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $\beta^2 - 3a\gamma \leq 0$.

Λύση

Είναι $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$.

Η διακρίνουσα της f' είναι $\Delta = 4(\beta^2 - 3a\gamma) \leq 0$, οπότε είτε η f' δεν έχει ρίζα, άρα δεν υπάρχουν πιθανά ακρότατα, είτε έχει μοναδική ρίζα αλλά διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε πάλι δεν έχει ακρότατα.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$, με

$$f(x) = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \text{όπου } a, \gamma \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $a\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Τι συμβαίνει όταν $a\delta - \beta\gamma = 0$;

Λύση

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{a(\gamma x + \delta) - \gamma(ax + \beta)}{(\gamma x + \delta)^2} = \frac{a\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

Επομένως, είτε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$, όταν $a\delta - \beta\gamma > 0$, είτε $f'(x) < 0$ όταν $a\delta - \beta\gamma < 0$. Οπότε η f δεν έχει τοπικά ακρότατα όταν $a\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Αν $a\delta - \beta\gamma = 0$, τότε $f'(x) = 0$, οπότε η f είναι σταθερά.

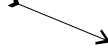
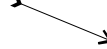
Άσκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2(x - 3)$$

Λύση

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο ακόλουθος:

x	0	1	2	3	5
f'	+	0	-	0	+
f					

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$, τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = 3$ και τοπικό μέγιστο στο $x_4 = 5$. Στο $x_2 = 2$ η f παρουσιάζει στάσιμο σημείο, το οποίο δεν είναι ακρότατο.

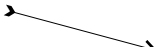
Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 (β) Να συγκριθούν οι τιμές $f(\pi)$ και $f(e)$.
 (γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί e^π και π^e .

Λύση

(α) Έχουμε ότι $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ και τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	0	e	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

T.M.

- (β) Αφού $\pi > e$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \geq e$, έχουμε ότι $f(\pi) < f(e)$.
 (γ) Είναι:

$$f(\pi) < f(e) \quad \text{ή} \quad \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \quad \text{ή} \quad e \ln \pi < \pi \ln e \quad \text{ή} \quad \ln(\pi^e) < \ln(e^\pi) \quad \text{ή} \quad \pi^e < e^\pi.$$

Άσκηση 4

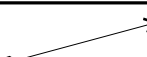
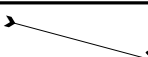
Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \frac{x - e^x}{x + e^x} \quad \text{και} \quad g(x) = x - x \ln x$$

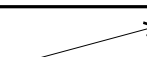
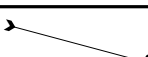
- (i) Να αποδείξετε ότι παρουσιάζουν μέγιστο σε σημείο με κοινή τετμημένη.
 (ii) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$.

Λύση

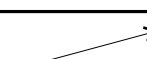
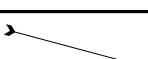
- (i) Έχουμε ότι $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$ και τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

Για τη g έχουμε ότι $g'(x) = -\ln x$ και τον αντίστοιχο πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
g'	+	0	-
g			

- (ii) Η h έχει ακριβώς την ίδια μεταβολή με τις f και g , δηλαδή:

x	0	1	$+\infty$
h'	+	0	-
h			

Πρακτικές Εφαρμογές**Άσκηση 1**

Το ύψος ενός πυραύλου (σε m) μετά από t sec πτήσης, δίνεται από τη

συνάρτηση:

$$f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 8t^2 + \frac{33}{2}t + 5, \quad t \geq 0.$$

Να εξετάσετε τότε ο πύραυλος αυτός ανεβαίνει και τότε κατεβαίνει.

Λύση

Αρκεί να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f , δηλαδή:

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 16t + \frac{33}{2}$$

Η f' έχει ρίζες -1 και 33 . Η πρώτη απορρίπτεται αφού $t \geq 0$, οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

t	0	33	$+\infty$
f'	+		-
f	↗		↘

Επομένως στο χρονικό διάστημα $[0, 33]$ ο πύραυλος αυξάνει διαρκώς το ύψος του, ενώ για $t > 33$ αρχίζει και πέφτει.

Άσκηση 2



Το πλήθος των εγκλημάτων τα τελευταία 10 χρόνια σε μία πόλη (1989 – 1999) δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0,03t^3 + \frac{368,64}{t} \text{ δεκάδες εγκλήματα, } 0 < t \leq 10$$

Να εξετάσετε ποια χρονιά είχαμε την ελάχιστη εγκληματικότητα.

Λύση

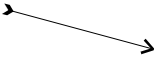
Αρκεί να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f , δηλαδή:

$$f'(t) = 0,09t^2 - \frac{368,64}{t^2} = \frac{0,09}{t^2}(t^4 - 4096).$$

Έχουμε:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^4 = 4096 \Leftrightarrow t = -8 \text{ ή } t = 8.$$

Η $t = -8$ απορρίπτεται αφού $t > 0$, οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	0	8	$+\infty$
f'		0	
	-		+
f			

Επομένως το 1997 είχαμε τη μικρότερη εγκληματικότητα.

Άσκηση 3

Η πιθανότητα P να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο σε απόσταση r από τον πυρήνα ενός ατόμου υδρογόνου δίνεται από την εξίσωση:

$$P = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}, \text{ όπου } a_0 \text{ σταθερά.}$$

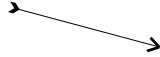
Αφού βρείτε την παράγωγο του P ως προς r , υπολογίστε την τιμή του r όταν η πιθανότητα είναι μέγιστη, δηλαδή την πιο πιθανή τιμή του r .

Λύση

Έχουμε ότι:

$$P'(r) = \frac{4}{a_0^3} \left[2re^{-\frac{2r}{a_0}} + r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \left(-\frac{2}{a_0} \right) \right] = \frac{8re^{-\frac{2r}{a_0}}}{a_0^4} (a_0 - r).$$

Επομένως έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

r	0	a_0	$+\infty$
P'		0	
	+		-
P			

Οπότε η P παρουσιάζει μέγιστο για $r = a_0$.

Άσκηση 4

Από ένα κομμάτι χαρτόνι ορθογώνιου σχήματος, με πλευρές 6 cm και 8 cm, να κατασκευασθεί ένα κουτί σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, ανοιχτό στο πάνω μέρος, έτσι ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό όγκο.

Λύση

Κόβουμε τέσσερα τετράγωνα κομμάτια από τις γωνίες του χαρτονιού πλευράς x και σχηματίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όγκου:

$$V(x) = x(6 - 2x)(8 - 2x) = 4x(3 - x)(4 - x), \quad \text{για } 0 < x < 3.$$

Τότε έχουμε ότι:

$$V'(x) = 4(3x^2 - 14x + 12)$$

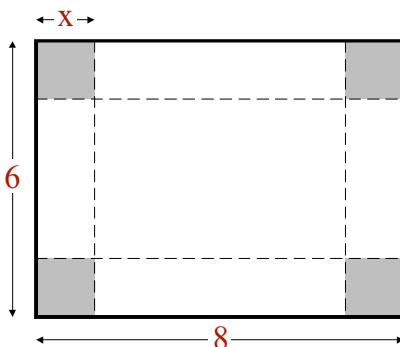
και η V παρουσιάζει δύο στάσιμα σημεία:

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{3} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{13}}{3}.$$

Αφού $x_2 > 3$, απορρίπτεται. Επίσης:

$$f''\left(\frac{7 - \sqrt{13}}{3}\right) = 4\left(6 \cdot \frac{7 - \sqrt{13}}{3} - 14\right) = -8\sqrt{13} < 0$$

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{3}$.

**Άσκηση 5**

Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε τουριστικό λεωφορείο έχει 50 θέσεις. Όταν οι επιβάτες του λεωφορείου είναι ακριβώς 30, τότε η εταιρεία ζητά 5000 δρχ. κατά άτομο. Για να αυξήσει τους επιβάτες, η εταιρεία κάνει την εξής προσφορά:

«Κάθε επιπλέον επιβάτης θα μειώνει κατά 100 δρχ. τη χρέωση κάθε άλλου επιβάτη»

Να βρεθεί το πλήθος των επιπλέον επιβατών που πρέπει να έχει κάθε λεωφορείο, ώστε η επιχείρηση να έχει μεγιστοποιήσει τα έσοδά της.

Λύση

Η συνάρτηση εσόδων για x επιπλέον επιβάτες από τους 30 είναι η εξής:

$$E(x) = (30 + x)(5000 - 100x) = -100x^2 + 2000x + 150000 \text{ δραχμές.}$$

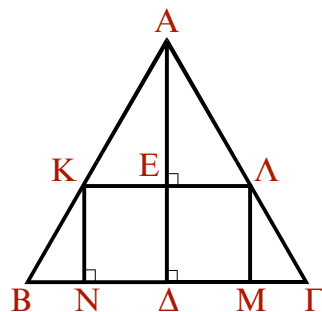
Έχουμε τότε ότι:

$$E'(x) = -200x + 2000$$

οπότε η E έχει μέγιστο στο $x_0 = 10$ αφού $E''(10) = -200 < 0$. Άρα η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα έσοδά της αν σε κάθε λεωφορείο έχει 40 άτομα.

Άσκηση 6

Να προσδιορισθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου μέγιστου εμβαδού, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 cm, αν η μια πλευρά του ορθογωνίου περιέχεται σε μια πλευρά του τριγώνου (βλ. Σχήμα).



Λύση

Έστω $x = \Lambda M$ και $y = K\Lambda$. Αν θεωρήσουμε το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε τα τρίγωνα $AE\Lambda$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{AE}{A\Delta} = \frac{E\Lambda}{\Delta\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A\Delta - x}{A\Delta} = \frac{\frac{K\Lambda}{2}}{\frac{B\Gamma}{2}} \quad \text{ή} \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y}{1} \quad \text{ή} \quad y = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

με τους περιορισμούς $0 < y < B\Gamma = 1$ και $0 < x < A\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου δίνεται από το γινόμενο:

$$xy = x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}x \right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + x.$$

Η συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + x$$

έχει παράγωγο:

$$f'(x) = -\frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = -\frac{4}{\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

και στάσιμο σημείο στο $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Αφού $f''\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}} < 0$ έχουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ οπότε το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm και $\frac{1}{2}$ cm και εμβαδόν $\frac{\sqrt{3}}{8}$ cm².

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0 . Να αποδείξετε ότι:

- (i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 + h) - f^2(x_0)}{h} = 2f(x_0)f'(x_0)$
- (ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)f(x_0) - x_0f(x_0 + h)}{h} = f(x_0) - x_0f'(x_0)$

Λύση

- (i) Έχουμε ότι:

$$\frac{f^2(x_0 + h) - f^2(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} (f(x_0 + h) + f(x_0))$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

- (ii) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{(x_0 + h)f(x_0) - x_0f(x_0 + h)}{h} &= \frac{x_0f(x_0) - x_0f(x_0 + h)}{h} + f(x_0) = \\ &= (-x_0) \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0) \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα για $h \rightarrow 0$.

Άσκηση 2

Ο όγκος V του χωρίου μεταξύ δύο ομόκεντρων σφαιρών μεγαλώνει ως προς το χρόνο. Η ακτίνα της εξωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό 2 m/h, ενώ η ακτίνα της εσωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό $\frac{1}{2}$ m/h. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V , όταν η εξωτερική ακτίνα γίνει ίση με 3 m και η εσωτερική με 1 m.

Λύση

Ο όγκος V θα δίνεται από τη διαφορά των όγκων των δύο σφαιρών:

$$V = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$$

όπου R_2 η ακτίνα της μεγάλης σφαίρας και R_1 η ακτίνα της μικρής. Έχουμε τότε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} &= \frac{4}{3} \pi \left[\frac{R_2^3(t_0 + h) - R_2^3(t_0)}{h} - \frac{R_1^3(t_0 + h) - R_1^3(t_0)}{h} \right] = \\ &= \frac{4}{3} \pi \left[\frac{R_2(t_0 + h) - R_2(t_0)}{h} (R_2^2(t_0 + h) + R_2(t_0)R_2(t_0 + h) + R_2^2(t_0)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_1(t_0 + h) - R_1(t_0)}{h} (R_1^2(t_0 + h) + R_1(t_0)R_1(t_0 + h) + R_1^2(t_0)) \right] \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} &= \frac{4}{3} \pi [R_2'(t_0) \cdot 3R_2^2(t_0) - R_1'(t_0) \cdot 3R_1^2(t_0)] = \\ &= \frac{4}{3} \pi (2 \cdot 3 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1^2) = 70\pi \text{ m}^3/\text{h}. \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ο αριθμός βακτηρίων $N(t)$ σε μια συγκεκριμένη καλλιέργεια μεταβάλλεται μετά τη χρήση ενός βακτηριοκτόνου ως εξής:

$$N(t) = \frac{10000}{1 + t^2} + 2000$$

όπου ο χρόνος t εκφράζεται σε min. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής και το πλήθος των βακτηρίων 1 και 2 min μετά τη χρήση του βακτηριοκτόνου.

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής είναι: $N'(t) = -\frac{20000t}{(1 + t^2)^2}$. Επομένως:

$$N'(1) = -5000 \quad \text{και} \quad N'(2) = -1600.$$

Άσκηση 4

Στη φυσική χρησιμοποιείται ευρέως η έννοια της ειδικής θερμότητας υπό σταθερή πίεση C_p , η οποία ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής

της θερμότητας q ως προς τη θερμοκρασία T , δηλαδή:

$$C_p = q'(T)$$

Αν από πειραματικά δεδομένα είναι γνωστό ότι $C_p = A + BT$, όπου A, B σταθερές, να υπολογίσετε τη συνάρτηση q ως προς T . Πώς απλοποιείται η συνάρτηση αυτή αν η C_p είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητη της θερμοκρασίας;

Λύση

Έχουμε ότι $q'(T) = A + BT$, οπότε:

$$q(T) = \frac{B}{2} T^2 + AT + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

Αν η C_p ήταν σταθερά, τότε:

$$q'(T) = C_p \quad \text{ή} \quad q'(T) = C_p T + C_1, \text{ όπου } C_1 \text{ σταθερά.}$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

- (i) $y' + y = \kappa$, όπου κ σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^x και τα δύο μέλη της εξίσωσης.
- (ii) $y' - y = \kappa$, όπου κ σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} και τα δύο μέλη της εξίσωσης.
- (iii) $y'' = y$, προσθέτοντας την y' στα δύο μέλη της εξίσωσης.

Λύση

- (i) Είναι $e^x(f'(x) + f(x)) = \kappa e^x$ ή $(f(x)e^x)' = \kappa e^x$. Οπότε:

$$f(x)e^x = \kappa e^x + c \quad \text{ή} \quad f(x) = \kappa + ce^{-x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Είναι $e^{-x}(f'(x) - f(x)) = \kappa e^{-x}$ ή $(f(x)e^{-x})' = \kappa e^{-x}$. Επομένως:

$$f(x) = \kappa + c_1 e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (iii) Είναι $f''(x) + f'(x) = f(x)$.

Πολλαπλασιάζοντας με e^x βρίσκουμε:

$$(e^x f'(x))' = (e^x f(x))' \quad \text{ή} \quad e^x f'(x) = e^x f(x) + c_2 \quad \text{ή} \quad f'(x) - f(x) = c_2 e^{-x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} βρίσκουμε:

$$(e^{-x} f(x))' = c_2 e^{-2x} \quad \text{ή} \quad e^{-x} f(x) = c_2 \frac{e^{-2x}}{-2} + c_3 \quad \text{ή} \quad f(x) = c_4 e^{-x} + c_3 e^x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με την f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$xy' = (x + 1)y,$$

για $x > 0$ και $f(1) = e$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$xf'(x) - f(x) = xf(x) \quad \text{ή} \quad \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$$

Επομένως:

$$\frac{f(x)}{x} = ce^x \quad \text{ή} \quad f(x) = cxe^x.$$

Αφού $f(1) = e$ έχουμε ότι $c = 1$, οπότε:

$$f(x) = xe^x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άσκηση 7

Να μελετηθεί η κυβική συνάρτηση:

$$f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \text{ με } a > 0$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, όταν $\beta^2 - 3a\gamma > 0$.

Λύση

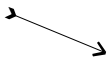
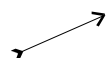
Έχουμε ότι:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$$

Όταν $\beta^2 - 3a\gamma > 0$, η f' έχει δύο ρίζες:

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 3a\gamma}}{a} \quad x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 3a\gamma}}{a}$$

και η f έχει πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f'	+	0	0	+
f				

οπότε παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_1 και τοπικό μέγιστο στο x_2 .

Άσκηση 8

Να βρείτε τα ζεύγη των θετικών αριθμών που έχουν σταθερό άθροισμα c και μέγιστο γινόμενο της τρίτης δύναμης του ενός και της δεύτερης του άλλου.

Λύση

Έστω x, z οι αριθμοί με $x + z = c$ ή $z = c - x$. Θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3(c - x)^2, \text{ για } 0 < x < c.$$

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = 3x^2(c - x)^2 - 2x^3(c - x) = x^2(c - x)(3c - 5x)$$

η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{3c}{5}$.

Άσκηση 9

Σε δοσμένη σφαίρα:

(α) Να εγγραφεί κύλινδρος με μέγιστο όγκο.

(β) Να εγγραφεί ορθός κώνος με μέγιστο όγκο.

Λύση

(α) Έστω x το ύψος του εγγεγραμμένου κυλίνδρου και y η διάμετρος της βάσης του. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι:

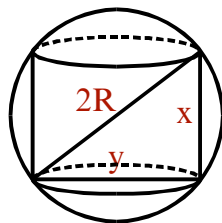
$$V = \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 x$$

και $y^2 = 4R^2 - x^2$, οπότε:

$$V(x) = \frac{\pi}{4} (4R^2 - x^2) x$$

με θέση πιθανού ακροτάτου στο $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Είναι $V''\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = -\pi R\sqrt{3} < 0$, οπότε το ολικό μέγιστο επιτυγχάνεται στο σημείο $\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{6}}{3}\right)$.



(β) Ο όγκος του κώνου δίνεται από τον τύπο:

$$V = \frac{1}{3} \pi y^2 x$$

όπου x είναι το ύψος AK του κώνου και y η ακτίνα $K\Gamma$ της βάσης του. Τα τρίγωνα $AK\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια, οπότε:

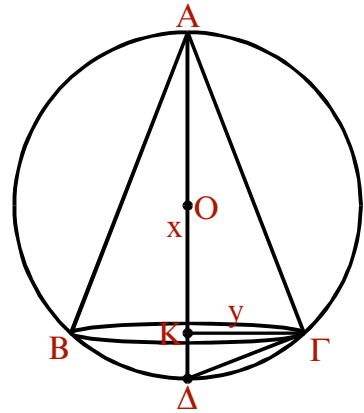
$$\frac{AK}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = AK \cdot A\Delta \quad \text{ή}$$

$$x^2 + y^2 = x \cdot 2R \quad \text{ή} \quad y^2 = x(2R - x).$$

Οπότε ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο:

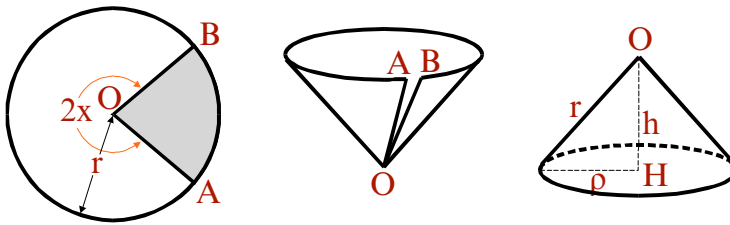
$$V(x) = \frac{1}{3} \pi x^2 (2R - x), \text{ για } 0 < x < 2R$$

με μέγιστη τιμή για $x = \frac{4}{3} R$.



Άσκηση 10

Δίνεται ένας κυκλικός χάρτινος δίσκος και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα φίλτρο καφέ σε σχήμα κώνου, έτσι ώστε να έχει μέγιστο όγκο.



Λύση

Έστω r η ακτίνα του κυκλικού δίσκου, από τον οποίο κόβουμε έναν κυκλικό τομέα OAB με $AB = 2x$. Η ακτίνα ρ της βάσης του κώνου που κατασκευάζεται ισούται με:

$$\rho = \frac{2xr}{2\pi} = \frac{r}{\pi} x$$

ενώ το ύψος h ισούται με:

$$h^2 = r^2 - \rho^2 \quad \text{ή} \quad h = \frac{r}{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2}.$$

Συνεπώς, ο όγκος V του φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$V(x) = \pi r^2 \frac{h}{3} = \frac{r^3}{3\pi^2} \sqrt{x^4(\pi^2 - x^2)}, \text{ για } 0 < x < \pi$$

που παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = \frac{\sqrt{6}\pi}{3}$ με $V(x_1) = \frac{2\pi}{3} (3 - \sqrt{6})$ και $h \simeq 0,574r < \frac{1}{3}$ (διαμέτρου της βάσης).

Άσκηση 11

Οι μογιές είναι μίγματα ενός πολυμερούς (όπως τα πλαστικά), ενός διαλύτη (όπως νερό ή αλκοόλη) και μιας χρωστικής ουσίας. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι το πολυμερές να αναμειγνύεται πλήρως με το διαλύτη. Θερμοδυναμικά, το πρόβλημα αυτό μελετάται με συναρτήσεις του λεγόμενου συντελεστή ενεργότητας a ως προς τη συγκέντρωση x . Ένα τέτοιο γνωστό και σήμερα κλασικό μοντέλο προτάθηκε το 1940 από τους Flory και Huggins:

$$\ln a_1 = \ln(1 - \phi_2) + \left(1 - \frac{1}{V}\right)\phi_2 + \lambda\phi_2^2$$

όπου ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στον διαλύτη και ο δείκτης 2 στο πολυμερές, ενώ:

$$\phi_2 = \frac{x_2 V_2}{x_1 V_1 + x_2 V_2}, \quad V_1, V_2 \text{ όγκοι και } V = \frac{V_2}{V_1}$$

και λ η παράμετρος του μοντέλου που υπολογίζεται από πειραματικά δεδομένα. Η θερμοδυναμική ορίζει ότι μια υγρή φάση υπάρχει όταν $\lambda < \lambda_{\text{κρισ.}}$, όπου η κρίσιμη τιμή $\lambda_{\text{κρισ.}}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(\ln[a_1(\phi_2)])' = (\ln[a_1(\phi_2)])'' = 0.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια υγρή φάση όταν:

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2.$$

Τι συμβαίνει για πολύ μεγάλου μοριακού βάρους ($V_2 \gg V_1$) πολυμερή;

Λύση

Ισχύει ότι:

$$(\ln[a_1(\varphi_2)])' = -\frac{1}{1-\varphi_2} + \left(1 - \frac{1}{V}\right) + 2\lambda\varphi_2 = 0 \quad (1)$$

$$(\ln[a_1(\varphi_2)])'' = -\frac{1}{(1-\varphi_2)^2} + 2\lambda = 0 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων ως προς φ_2 και λ βρίσκουμε:

$$\lambda = \lambda_{\text{κρισ.}} = \frac{1}{2(1-\varphi_2)^2}$$

και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι:

$$(V-1)\varphi_2^2 + 2\varphi_2 - 1 = 0$$

οπότε η αποδεκτή τιμή είναι:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2(\sqrt{V}+1)} \quad \text{και} \quad \lambda_{\text{κρισ.}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2.$$

Για πολύ "βαριά" πολυμερή ($V_2 \gg V_1$) έχουμε ότι το $\frac{1}{\sqrt{V}}$ τείνει στο 0,

οπότε $\lambda \leq \frac{1}{2}$, τιμή που για χρόνια χρησιμοποιήθηκε στη Βιομηχανία ως ένδειξη αναμειξιμότητας ενός πολυμερούς και ενός διαλύτη.

5

Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

§ 5.1 – 5.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 4x^3 \, dx$.

Λύση

$$\int_0^1 4x^3 \, dx = \int_0^1 (x^4)' \, dx = [x^4]_0^1 = 1$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 (2x + 1) \, dx$.

Λύση

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x + 1) \, dx &= \int_1^2 2x \, dx + \int_1^2 1 \, dx = \int_1^2 (x^2)' \, dx + \int_1^2 (x)' \, dx = [x^2]_1^2 + [x]_1^2 = \\ &4 - 1 + 2 - 1 = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 e^{2x} \, dx$.

Λύση

$$\int_{-1}^1 e^{2x} \, dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} (e^2 - e^{-2})$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \sin 3x \, dx$.

Λύση

$$\int_0^{2\pi} \sin 3x \, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\eta\mu 3x}{3} \right)' dx = \left[\frac{\eta\mu 3x}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{\eta\mu 6\pi}{3} - \frac{\eta\mu 0}{3} = 0$$

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 (x - 1) \, dx \leq 0$.

Λύση

Αν $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow (x - 1) \leq 0$, οπότε $\int_0^1 (x - 1) \, dx \leq 0$.

Άσκηση 6

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 x^2 \, dx \geq \int_0^1 x^3 \, dx$.

Λύση

Θεωρούμε $x^2 - x^3 = x^2(1 - x) = -x^2(x - 1) \geq 0$, για $x \in [0, 1]$, άρα $x^2 - x^3 \geq 0$ ή $x^2 \geq x^3$, για $x \in [0, 1]$.

Άρα $\int_0^1 x^2 \, dx \geq \int_0^1 x^3 \, dx$.

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ και κατόπιν να

υπολογισθεί το $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx$.

Λύση

$$f'(x) = \frac{(x+1)'e^x - (x+1)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x-1)}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$$

$$\text{'Αρα } \int_0^1 \frac{x}{e^x} dx = - \int_0^1 \frac{-x}{e^x} dx = - \int_0^1 f'(x) dx = -f(1) + f(0) = -\frac{2}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

'Ασκηση 2

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Λύση

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} (\sqrt{x^2+1} + x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{'Αρα } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 [f(x)]' dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

'Ασκηση 3

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = -x + x \ln x$, $x > 0$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_1^e \ln x dx$.

Λύση

$$f'(x) = -1 + (x)' \ln x + x(\ln x)' = -1 + \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x$$

$$\text{'Αρα } \int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e f'(x) \, dx = f(e) - f(1) = -e + e \ln e + 1 - 1 \ln 1 = 1.$$

'Ασκηση 4

Αν $f(x) = xe^{-x}$ και $g(x) = (ax + \beta)e^{-x}$, να βρεθούν τα a, β , έτσι ώστε η g να είναι παράγουσα της f και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 xe^{-x} \, dx$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (ax + \beta)'e^{-x} + (ax + \beta)(e^{-x})' = ae^{-x} - (ax + \beta)e^{-x} = \\ &= (a - ax - \beta)e^{-x} = [-ax + (a - \beta)]e^{-x} \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} f(x) = g'(x) &\Leftrightarrow xe^{-x} = [-ax + (a - \beta)]e^{-x} \Leftrightarrow x = -ax + (a - \beta) \Leftrightarrow -a = 1 \\ \text{και } a - \beta &= 0 \Leftrightarrow a = -1, \beta = -1, \text{ άρα } g(x) = (-x - 1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-x} \, dx &= \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 g'(x) \, dx = g(1) - g(0) = \\ &= (-1 - 1)e^{-1} - (0 - 1)e^0 = \frac{-2}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

'Ασκηση 5

Αν $f'(x) = 2x$ και $f(1) = 0$, να υπολογισθεί το $f(0)$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x) \, dx &= f(1) - f(0) \quad \text{ή} \quad \int_0^1 2x \, dx = 0 - f(0) \quad \text{ή} \quad [x^2]_0^1 = -f(0) \quad \text{ή} \\ f(0) &= -1. \end{aligned}$$

'Ασκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $\int_a^\beta f'(x) \, dx = 0$.

Λύση

Είναι $\int_a^\beta f'(x) dx = f(\beta) - f(a)$, αλλά $f(\beta) = f(a)$, οπότε $\int_a^\beta f'(x) dx = 0$.

§ 5.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^1 (u+1) du$$

$$(\beta) \int_{-1}^1 (t^2 - 1) dt$$

Λύση

$$(\alpha) \int_0^1 (u+1) du = \left[\frac{u^2}{2} + u \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$(\beta) \int_{-1}^1 (t^2 - 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt$$

$$(\beta) \int_1^9 \frac{x+1}{x} dx$$

Λύση

$$(\alpha) \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + t^{-2} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \ln t + \frac{t^{-1}}{-1} \right]_1^2 =$$

$$\frac{4}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln 1 + 1 = 2 + \ln 2$$

$$(\beta) \int_1^9 \frac{x+1}{x} dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^9 \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = [x + \ln x]_1^9 =$$

$$9 + \ln 9 - 1 - \ln 1 = 8 + \ln 9$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x} dx$$

$$(\beta) \int_1^2 \frac{2u^2 + u + 1}{u} du$$

Λύση

$$(\alpha) \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^2 = \frac{4}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2} + \ln 2$$

$$(\beta) \int_1^2 \frac{2u^2 + u + 1}{u} du = \int_1^2 \left(\frac{2u^2}{u} + \frac{u}{u} + \frac{1}{u} \right) du = \int_1^2 \left(2u + 1 + \frac{1}{u} \right) du =$$

$$\left[\frac{2u^2}{2} + u + \ln|u| \right]_1^2 = \frac{8}{2} + 2 + \ln 2 - \frac{2}{2} - 1 - \ln 1 = 4 + \ln 2$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}} dt$.

Λύση

$$\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}} dt = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{(\sqrt{t})^2}{\sqrt{t}} \right) dt = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) dt = \int_1^4 \left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} \right) dt =$$

$$\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{t \cdot t^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[2\sqrt{t} + \frac{2t\sqrt{t}}{3} \right]_1^4 =$$

$$2\sqrt{4} + \frac{2}{3} 4\sqrt{4} - 2 - \frac{2}{3} = 4 + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$$

Σύνθετες Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Λύση

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x(x^2+1)^{1999} dx$.

Λύση

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(x^2+1)^{1999} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x)(x^2+1)^{1999} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2+1)'(x^2+1)^{1999} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2000}}{2000} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2000}}{2000} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1^{2000}}{2000} = \frac{2^{2000} - 1}{4000} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Λύση

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} dx = [\sqrt{x^2+1}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$.

Λύση

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx &= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-\eta\mu x) \sigma\upsilon\nu^{-2} x dx = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sigma\upsilon\nu x)' \sigma\upsilon\nu^{-2} x dx = \\ &= - \left[\frac{\sigma\upsilon\nu^{-1} x}{-1} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Λύση

$$\int_e^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^4} \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^4} = \ln(\ln e^4) - \ln(\ln e) = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Λύση

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int_e^{e^2} (\ln x)' \ln^3 x dx = \left[\frac{\ln^4 x}{4} \right]_e^{e^2} = \frac{\ln^4 e^2}{4} - \frac{\ln^4 e}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Άσκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x \sin x dx$.

Λύση

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \int_0^\pi x (\eta \mu x)' dx = [x \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \eta \mu x dx = - \int_0^\pi \eta \mu x dx =$$

$$[\sigma \upsilon \nu x]_0^\pi = \sigma \upsilon \nu \pi - \sigma \upsilon \nu 0 = -1 - 1 = -2$$

Άσκηση 8

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi e^x \eta \mu x dx$.

Λύση

$$\int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = \int_0^\pi (e^x)' \eta \mu x dx = [e^x \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (\eta \mu x)' dx =$$

$$\begin{aligned}
&= e^\pi \eta \mu \pi - e^0 \eta \mu 0 - \int_0^\pi e^x \sigma \upsilon \nu x \, dx = - \int_0^\pi (e^x)' \sigma \upsilon \nu x \, dx = \\
&-[e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x (\sigma \upsilon \nu x)' \, dx = -e^\pi \sigma \upsilon \nu \pi + e^0 \sigma \upsilon \nu 0 - \int_0^\pi e^x \eta \mu x \, dx = \\
&1 + e^\pi - \int_0^\pi e^x \eta \mu x \, dx \\
&\text{'Αρα, } \int_0^\pi e^x \eta \mu x \, dx = 1 + e^\pi - \int_0^\pi e^x \eta \mu x \, dx \Leftrightarrow 2 \int_0^\pi e^x \eta \mu x \, dx = 1 + e^\pi \Leftrightarrow \\
&\int_0^\pi e^x \eta \mu x \, dx = \frac{1 + e^\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Η γραμματεία σπουδαστών του Βαλκανικού Πανεπιστημίου υπολογίζει ότι ο αριθμός των εγγραφών των σπουδαστών στις μεταπτυχιακές σπουδές αυξάνεται με ρυθμό $N'(t) = 200(1 + 0,2t)^{-\frac{1}{2}}$ σε t χρόνια από σήμερα. Αν ο αριθμός των εγγεγραμμένων φοιτητών είναι 1000, βρείτε ένα τύπο που προσδιορίζει τον αριθμό των εγγραφών σε t χρόνια από σήμερα. Ποιός θα είναι ο συνολικός αριθμός των φοιτητών που θα εγγραφούν στη σχολή σε 5 χρόνια;

Λύση

$$\begin{aligned}
&\text{Είναι } N'(t) = 200(1 + 0,2t)^{-\frac{1}{2}}, \text{ άρα} \\
&N(x) - N(0) = \int_0^x 200(1 + 0,2t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{200}{0,2} \int_0^x 0,2(1 + 0,2t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = \\
&1000 \int_0^x (1 + 0,2t)'(1 + 0,2t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = 1000 \left[\frac{(1 + 0,2t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^x =
\end{aligned}$$

$$= 1000 \left[\frac{(1 + 0,2t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^x = 2000 [\sqrt{1 + 0,2t}]_0^x = 2000(\sqrt{1 + 0,2x} - 1).$$

Το $N(0) = 1000$, άρα:

$$N(x) - 1000 = 2000\sqrt{1 + 0,2x} - 2000 \quad \text{ή} \quad N(x) = 2000\sqrt{1 + 0,2x} - 1000.$$

Οι συνολικές εγγραφές τα 5 πρώτα χρόνια δίνονται από:

$$\int_0^5 N(x) dx = \int_0^5 2000(1 + 0,2x)^{\frac{1}{2}} - 1000 dx =$$

$$2000 \int_0^5 (1 + 0,2x)^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^5 1000 dx =$$

$$\frac{2000}{0,2} \int_0^5 (1 + 0,2x)'(1 + 0,2x)^{\frac{1}{2}} dx - 1000 [x]_0^5 =$$

$$10000 \left[\frac{(1 + 0,2x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^5 - 1000(5 - 0) =$$

$$\frac{20000}{3} [(1 + 0,2x)\sqrt{1 + 0,2x}]_0^5 - 5000 = \frac{20000}{3} (2\sqrt{2} - 1) - 5000 \simeq$$

$$12190 - 5000 = 7190$$

Άσκηση 2

Σε μια χώρα, ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής των γυναικών, κατά τη γέννησή τους, αλλάζει με ρυθμό $g'(t) = \frac{5,45218}{(1 + 1,09t)^{0,9}}$ χρόνια ανά έτος,

όπου t είναι τα έτη και το $t = 0$ αντιστοιχεί στο έτος 1900. Βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τον αναμενόμενο μέσο όρο ζωής των γυναικών σε χρόνια κατά τη γέννησή τους, αν ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής κατά το έτος 1900 ήταν 50,02 χρόνια. Ποιός θα είναι ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής μιας γυναίκας που θα γεννηθεί το 2000;

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 g(t) - g(0) &= \int_0^t \frac{5,45218}{(1 + 1,09x)^{0,9}} dx = \\
 &= \int_0^t \frac{5,45218}{1,09} (1 + 1,09x)' (1 + 1,09x)^{-0,9} dx = 5,002 \left[\frac{(1 + 1,09x)^{0,1}}{0,1} \right]_0^t = \\
 &= 5,002 \left(\frac{(1 + 1,09t)^{0,1}}{0,1} - \frac{1}{0,1} \right) = \frac{5,002}{0,1} [(1 + 1,09t)^{0,1} - 1] = \\
 &= 50,02(1 + 1,09t)^{0,1} - 50,02
 \end{aligned}$$

Άρα $g(t) - 50,02 = 50,02(1 + 1,09t)^{0,1} - 50,02 \Leftrightarrow g(t) = 50,02(1 + 1,09t)^{0,1}$

Ο μέσος όρος ζωής το έτος 2000 θα είναι:

$$g(100) = 50,02(1 + 1,09 \cdot 100)^{0,1} = 50,02(110)^{0,1} = 50,02 \cdot 1,60 = 80,03 \text{ χρόνια}$$

Άσκηση 3

Ο μέσος σπουδαστής που είναι εγγεγραμμένος σε σεμινάριο στενογραφίας διάρκειας 20 εβδομάδων, μαθαίνει με ρυθμό $N'(t) = 6e^{-0,05t}$ ($0 \leq t \leq 20$), όπου $N'(t)$ ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των λέξεων που γράφει ανά λεπτό ο σπουδαστής μετά από t εβδομάδες στο σεμινάριο. Αν υποθέσουμε ότι ο μέσος σπουδαστής ξεκινάει το σεμινάριο με 60 λέξεις το λεπτό, βρείτε τη συνάρτηση $N(t)$ που εκφράζει την ταχύτητα των σπουδαστών μετά από t εβδομάδες.

Λύση

Είναι $N'(t) = 6e^{-0,05t}$, άρα και

$$\begin{aligned}
 N(t) - N(0) &= \int_0^t N'(x) dx = \int_0^t 6e^{-0,05x} dx = \frac{6}{-0,05} \int_0^t (-0,05x)' e^{-0,05x} dx = \\
 &= -120 [e^{-0,05x}]_0^t = -120(e^{-0,05t} - 1) = 120 - 120e^{-0,05t}
 \end{aligned}$$

Για $N(0) = 60$, έχουμε:

$$N(t) - 60 = 120 - 120e^{-0,05t} \Leftrightarrow N(t) = 180 - 120e^{-0,05t}$$

Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας στοιχεία από μία κτηνιατρική κλινική, οι κτηνίατροι υπολογίζουν ότι το μέσο ύψος μιας ράτσας σκυλιών μεταβάλλε-

ται με ρυθμό $h'(t) = \frac{52,8706e^{-0,32277t}}{(1 + 2,449e^{-0,32277t})^2}$ εκατοστά το μήνα, όπου το ύ-

ψος του σκυλιού μετριέται σε εκατοστά και η ηλικία t σε μήνες από τη γεννησή του. Βρείτε συνάρτηση $h(t)$ που εκφράζει το μέσο όρο ύ-

ψους ενός σκύλου t μηνών, αν το μέσο ύψος της ράτσας αυτής κατά τη γέννηση είναι 19,4 εκατοστά. Πόσο είναι το μέσο ύψος ενός σκύλου 8 μηνών;

Λύση

Είναι:

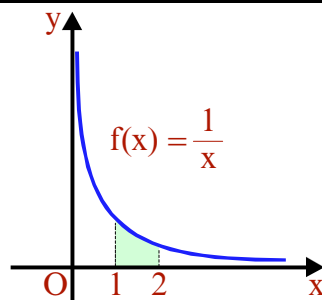
$$\begin{aligned} h(x) - h(0) &= \int_0^x h'(t) dt = \int_0^x \frac{52,8706e^{-0,3277t}}{(1 + 2,449e^{-0,3277t})^2} dt = \\ &= -\frac{52,8706}{2,449 \cdot 0,3277} \int_0^x \frac{-2,449 \cdot 0,3277 e^{-0,3277t}}{(1 + 2,449e^{-0,3277t})^2} dt = \\ &= -\frac{52,8706}{0,8025} \int_0^x (1 + 2,449e^{-0,3277t})' (1 + 2,449e^{-0,3277t})^{-2} dt = \\ &= -65,8824 \left[\frac{(1 + 2,449e^{-0,3277t})^{-1}}{-1} \right]_0^x = 65,8824 \left[\frac{1}{1 + 2,449e^{-0,3277t}} \right]_0^x = \\ &= \frac{65,8824}{1 + 2,449e^{-0,3277x}} - 19,1 \\ \text{'Αρα } h(x) - 19,1 &= \frac{65,8824}{1 + 2,449e^{-0,3277x}} - 19,1 \text{ οπότε } h(x) = \frac{65,8824}{1 + 2,449e^{-0,3277x}}. \\ \text{Για } x = 8 \text{ έχουμε } h(8) &= \frac{65,8824}{1 + 2,449e^{-0,3277 \cdot 8}} = 55,93 \text{ cm.} \end{aligned}$$

§ 5.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και τον άξονα $x'x$.

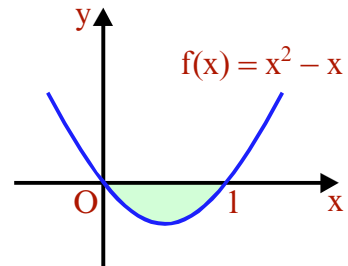


Λύση

$$E = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$ και τον άξονα $x'x$.

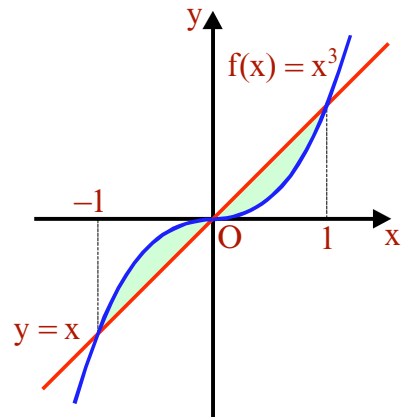


Λύση

$$E = -\int_1^0 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ και την ευθεία με εξίσωση $y = x$.



Λύση

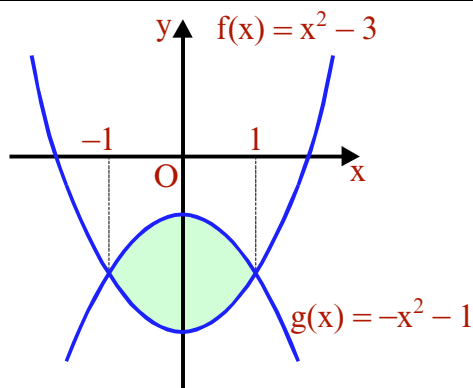
$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Άρα:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
h	-	0	+	0	+

$$\begin{aligned}\text{Οπότε: } E &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$ και $g(x) = -x^2 - 1$.



Λύση

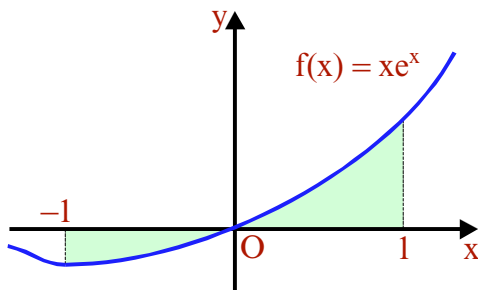
Η $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3 + x^2 + 1 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x + 1)(x - 1)$ και στο διάστημα $[-1, 1]$ η $h(x) \leq 0$. Άρα:

$$\begin{aligned}E &= -\int_{-1}^1 h(x) dx = -\int_{-1}^1 2(x^2 - 1) dx = -2 \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 = \\ &= -2 \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + 2 \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Σύνθετες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = xe^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$, $x = 1$.



Λύση

$f(x) = xe^x$ και $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα:

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \leq 0$$

οπότε $E = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$. Αλλά:

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta x(e^x)' dx = [xe^x]_a^\beta - \int_a^\beta (x)' e^x dx = [xe^x]_a^\beta - \int_a^\beta e^x dx =$$

$$[xe^x]_a^\beta - [e^x]_a^\beta = [(x-1)e^x]_a^\beta$$

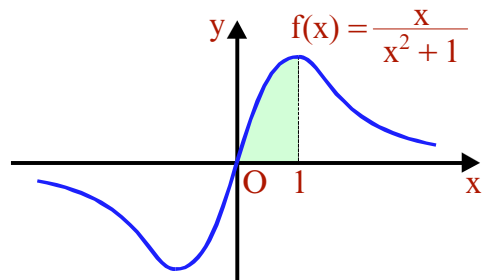
$$\text{Οπότε } E = -[(x-1)e^x]_{-1}^0 + [(x-1)e^x]_0^1 = 1 - 2e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ και τις ευθείες με εξι-}$$

σώσεις $x = 0$, $x = 1$.

**Λύση**

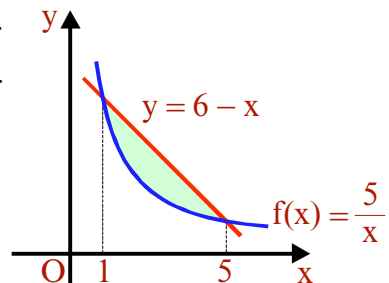
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ και } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

$$\text{Οπότε } E = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} [\ln|x^2 + 1|]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλεί-

εται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{5}{x}$ και την ευ-
θεία με εξίσωση $y = 6 - x$.



Λύση

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{5}{x} - 6 + x = \frac{5 - 6x + x^2}{x} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{(x-5)(x-1)}{x}$$

Άρα:

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$	
h	-	0	+	0	-	+

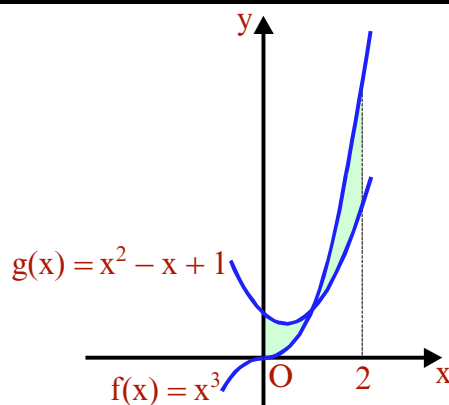
Οπότε:

$$E = - \int_1^5 \frac{x^2 - 6x + 5}{x} dx = - \int_1^5 \left(x - 6 + \frac{5}{x} \right) dx = - \left[\frac{x^2}{2} - 6x + 5 \ln|x| \right]_1^5 =$$

$$- \frac{25}{2} + 30 - 5 \ln 5 + \frac{1}{2} - 6 + 5 \ln 1 = 12 - 5 \ln 5$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - x + 1$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.



Λύση

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + x - 1 = (x-1)(x^2 + 1).$$

Το $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h	-	$\emptyset$	+

Οπότε:

$$E = - \int_0^1 h(x) dx + \int_1^2 h(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
& -\int_0^1 (x^3 - x^2 + x - 1) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2 + x - 1) dx = \\
& -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = \\
& -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) + \left(4 - \frac{8}{3} + 2 - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 1

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$ και κατόπιν να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

Λύση

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} (\sqrt{x^2 - 1} + x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} + 1 \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_2^3 f'(x) dx = f(3) - f(2) = \ln(\sqrt{8} + 3) - \ln(\sqrt{3} + 2).$$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^1 (x - 1)^{24} dx$$

$$(\beta) \int_0^1 \frac{1}{(3x - 4)^3} dx$$

Λύση

$$(\alpha) \int_0^1 (x - 1)^{24} dx = \int_0^1 (x - 1)'(x - 1)^{24} dx = \left[\frac{(x - 1)^{25}}{25} \right]_0^1 = \frac{1}{25}$$

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad \int_0^1 \frac{1}{(3x-4)^3} dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 (3x-4)'(3x-4)^{-3} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{(3x-4)^{-2}}{-2} \right]_0^1 = \\
 &= -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{(3x-4)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{16} \right) = -\frac{15}{96} = -\frac{5}{32}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \quad \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \qquad (\beta) \quad \int_0^1 \frac{x}{2x+1} dx$$

Λύση

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
 &= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = 1 - \int_0^1 \frac{(x+1)'}{x+1} dx = 1 - [\ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln 2 \\
 (\beta) \quad \int_0^1 \frac{x}{2x+1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x+1)'}{2x+1} dx = \frac{1}{2} [\ln|2x+1|]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3
 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \quad \int_1^2 (2x-1)^{11} dx \qquad (\beta) \quad \int_0^1 e^{3x+2} dx$$

Λύση

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad \int_1^2 (2x-1)^{11} dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 (2x-1)'(2x-1)^{11} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x-1)^{12}}{12} \right]_1^2 = \\
 &= \frac{1}{24} (1^{12} - 1^{12}) = 0 \\
 (\beta) \quad \int_0^1 e^{3x+2} dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 (3x+2)'e^{3x+2} dx = \frac{1}{3} [e^{3x+2}]_0^1 = \frac{1}{3} (e^5 - e^2)
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x + 1}} dx$.

Λύση

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x + 1}} dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2 + 3}{\sqrt{x^3 + 3x + 1}} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 3x + 1)'}{2\sqrt{x^3 + 3x + 1}} dx = \\ &= \frac{2}{3} [\sqrt{x^3 + 3x + 1}]_0^1 = \frac{2}{3} (\sqrt{5} - 1) = \frac{2\sqrt{5} - 2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} dx$.

Λύση

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \eta\mu x)'}{1 + \eta\mu x} dx = [\ln|1 + \eta\mu x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Άσκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$.

Λύση

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \varepsilon\varphi x)' e^{1+\varepsilon\varphi x} dx = [e^{1+\varepsilon\varphi x}]_0^{\frac{\pi}{4}} = e^2 - e$$

Άσκηση 8

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^e x^2 \ln(5x) dx$

(β) $\int_0^\pi x \eta\mu(2x) dx$

Λύση

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad \int_1^e x^2 \ln(5x) \, dx &= \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln(5x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(5x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} [\ln(5x)]' \, dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(5x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 \, dx = \frac{e^3}{3} \ln(5e) - \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \, dx = \\
 &= \frac{e^3}{3} \ln(5e) - \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} \ln(5e) - \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{9} (e^3 - 1) \\
 (\beta) \quad \int_0^\pi x \eta\mu(2x) \, dx &= \int_0^\pi x \left(\frac{-\sigma\upsilon\nu(2x)}{2} \right)' \, dx = \\
 &= \left[-\frac{x\sigma\upsilon\nu(2x)}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi (x)' \frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{2} \, dx = \\
 &= \frac{-\pi\sigma\upsilon\nu(2\pi)}{2} + \frac{0\sigma\upsilon\nu 0}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{\eta\mu(2x)}{2} \right)' \, dx = \\
 &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\eta\mu(2x)}{2} \right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} [\eta\mu(2\pi) - \eta\mu 0] = -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 9

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \quad \int_0^2 |1 - e^x| \, dx \qquad (\beta) \quad \int_0^{2\pi} |\sigma\upsilon\nu x| \, dx$$

Λύση

(α) Το $1 - e^x > 0$ αν και μόνο αν $1 > e^x$ ή $e^0 > e^x$ ή $0 > x$.

Όμοια, $1 - e^x < 0$ αν και μόνο αν $0 < x$

και $1 - e^x = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

Έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	+	0	-

Άρα $|1 - e^x| = 1 - e^x$ για $x < 0$ και $|1 - e^x| = -(1 - e^x)$ για $x \geq 0$.

Η $f(x) = |1 - e^x|$ είναι συνεχής, οπότε:

$$\int_0^2 |1 - e^x| dx = -\int_0^2 (1 - e^x) dx = -[x - e^x]_0^2 = e^2 - 2 - 1 = e^2 - 3$$

(β) Είναι:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$\sigma_{\cup \vee \times}$	+	0	-	0	+

Άρα:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x dx =$$

$$[\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\eta\mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + [\eta\mu x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 4$$

Άσκηση 10

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$ χρησιμοποιώντας τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sin^2 x = 1$ ή άλλο τρόπο.

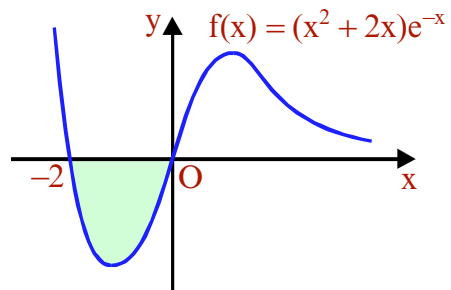
Λύση

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin x dx = \int_0^{\pi} (1 - \eta\mu^2 x)(\eta\mu x)' dx =$$

$$\int_0^{\pi} (\eta\mu x)' dx - \int_0^{\pi} \eta\mu^2 x (\eta\mu x)' dx = [\eta\mu x]_0^{\pi} - \left[\frac{\eta\mu^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3} (\eta\mu^3 \pi - \eta\mu^3 0) = 0$$

Άσκηση 11

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ και τον άξονα x'x.



Λύση

Είναι $f(x) = x(x+2)e^{-x}$ και το $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f	+	0	0	+

$$E = -\int_{-2}^0 f(x) dx = -\int_{-2}^0 (x^2 + 2x)e^{-x} dx = \int_{-2}^0 (x^2 + 2x)(e^{-x})' dx =$$

$$[(x^2 + 2x)e^{-x}]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (x^2 + 2x)' e^{-x} dx = 0 - \int_{-2}^0 (2x + 2)e^{-x} dx =$$

$$\int_{-2}^0 (2x + 2)(e^{-x})' dx = [(2x + 2)e^{-x}]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (2x + 2)' e^{-x} dx =$$

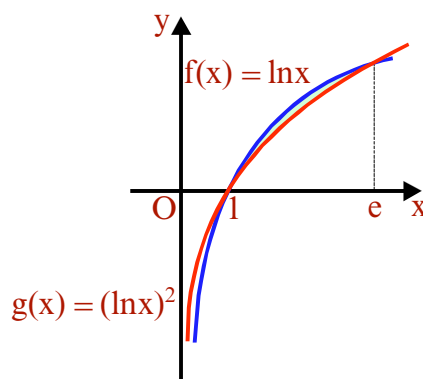
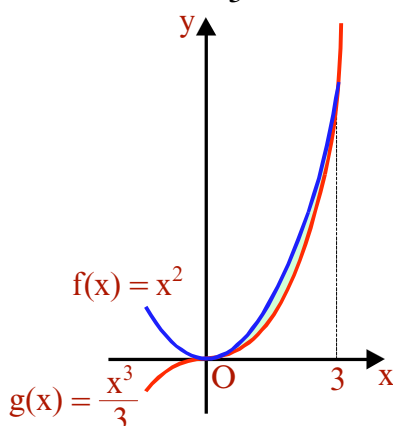
$$2 + 2e^2 - \int_{-2}^0 2e^{-x} dx = 2 + 2e^2 + 2[e^{-x}]_{-2}^0 = 2 + 2e^2 + 2 - 2e^2 = 4$$

Άσκηση 12

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g :

(α) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^3}{3}$

(β) $f(x) = \ln x$, $g(x) = (\ln x)^2$



Λύση

(α) $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \frac{x^3}{3} = \frac{3x^2 - x^3}{3} = \frac{x^2(3-x)}{3} = -\frac{x^2(x-3)}{3}$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
h		+	+	-

$$\text{Οπότε } E = \int_0^3 h(x) dx = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right]_0^3 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$$

$$(\beta) \quad h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \ln^2 x = -\ln x(\ln x - 1)$$

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$
h		-	+	-

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } E &= \int_1^e h(x) dx = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx = \\ &= \int_1^e \ln x dx - \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = \int_1^e \ln x dx - [x \ln^2 x]_1^e + \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \int_1^e \ln x dx - e + 2 \int_1^e \ln x dx = 3 \int_1^e \ln x dx - e = 3 \int_1^e (x)' \ln x dx - e = \\ &= 3[x \ln x]_1^e - 3 \int_1^e x (\ln x)' dx - e = 3e - 3 \int_1^e 1 dx - e = 2e - 3[x]_1^e = \\ &= 2e - 3e + 3 = 3 - e \end{aligned}$$

Άσκηση 13

Για ένα δοχείο με νερό ύψους $h = 3\text{m}$ που αδειάζει μέσω ενός ανοίγματος στον πυθμένα, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση για τη μεταβολή του ύψους h σε σχέση με το χρόνο t :

$$h'(t) = -\frac{\sqrt{h(t)}}{727}$$

Σε πόσο χρόνο το ύψος του νερού θα φτάσει το 1 m ;

Λύση

$$\text{Έχουμε ότι } h'(t) = -\frac{\sqrt{h(t)}}{727} \quad \text{ή} \quad \frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{1}{727}, \text{ οπότε:}$$

$$\int_0^t \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}} dx = -\frac{1}{727} \int_0^t 1 dx \quad \text{ή} \quad 2 \int_0^t \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} dx = -\frac{1}{727} (t-0) \quad \text{ή}$$

$$2[\sqrt{h(x)}]_0^t = -\frac{1}{727} t \quad \text{ή} \quad 2\sqrt{h(t)} - 2\sqrt{h(0)} = -\frac{1}{727} t$$

και αφού $h(0) = 3$ είναι:

$$2\sqrt{h(t)} = -\frac{1}{727} t + 2\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \sqrt{h(t)} = -\frac{1}{1454} t + \sqrt{3}$$

Αν $h(t) = 1$ τότε:

$$\sqrt{1} = -\frac{1}{1454} t + \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad t = 1454(\sqrt{3} - \sqrt{1}) \simeq 1064 \text{ sec}$$

Άσκηση 14

Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων χαμηλής κατανάλωσης σε ένα εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)$ και ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι $K'(x) = 0,000006x^2 - 0,0006x + 2$ σε χιλιάδες δραχμές όπου x είναι ο αριθμός των λαμπτήρων που παράγονται. Αν το σταθερό εβδομαδιαίο κόστος είναι 100000 δραχμές, να υπολογισθεί το συνολικό κόστος για τη παραγωγή 500 λαμπτήρων.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$K(t) - K(0) = \int_0^t K'(x) dx \quad \text{ή}$$

$$K(t) - K(0) = \left[\frac{0,000006x^3}{3} - \frac{0,0006x^2}{2} + 2x \right]_0^t \quad \text{ή}$$

$$K(t) - K(0) = 0,000002t^3 - 0,0003t^2 + 2t$$

Το $K(0) = 100$, άρα:

$$K(t) = 0,000002t^3 - 0,0003t^2 + 2t + 100$$

Το ζητούμενο κόστος είναι το:

$$\begin{aligned} K(500) &= 0,000002 \cdot 500^3 - 0,0003 \cdot 500^2 + 2 \cdot 500 + 100 = \\ &= 75 \cdot 1000000 - 0,000002 - 25 \cdot 10000 \cdot 0,0003 + 1000 + 100 = \\ &= 150 - 75 + 1000 + 100 = 1175 \text{ χιλιάδες δραχμές} \end{aligned}$$

Άσκηση 15

Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της μονάδας συγκεκριμένου είδους γυ-

ναικείου καλλυντικού δίνεται από τη σχέση $P'(x) = \frac{-250x}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ όπου x

είναι η ποσότητα της ημερήσιας ζήτησης του προϊόντος σε εκατοντάδες. Να βρεθεί η συνάρτηση της ζήτησης, αν η τιμή κάθε μονάδος είναι 50 δρχ. όταν η ζήτηση είναι 300 μονάδες προϊόντος.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$P(x) - P(0) = \int_0^x P'(t) dt \quad \text{ή} \quad P(x) - P(0) = \int_0^x \frac{-250t}{(16+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt \quad \text{ή}$$

$$P(x) - P(0) = -125 \int_0^x 2t (16+t^2)^{-\frac{3}{2}} dt \quad \text{ή}$$

$$P(x) - P(0) = -125 \int_0^x (16+t^2)' (16+t^2)^{-\frac{3}{2}} dt \quad \text{ή}$$

$$-125 \left[\frac{(16+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^x \quad \text{ή} \quad P(x) - P(0) = \frac{250}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{250}{4}$$

$$\text{Επομένως } P(x) = \frac{250}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{250}{4} + P(0).$$

Το $P(3) = 50$, άρα:

$$50 = \frac{250}{\sqrt{16+9}} - \frac{250}{4} + P(0) \quad \text{ή} \quad P(0) = 50 - \frac{250}{5} + \frac{250}{4} \quad \text{ή} \quad P(0) = \frac{250}{4}$$

οπότε:

$$P(x) = \frac{250}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{250}{4} + \frac{250}{4} \quad \text{ή} \quad P(x) = \frac{250}{\sqrt{16+x^2}}$$

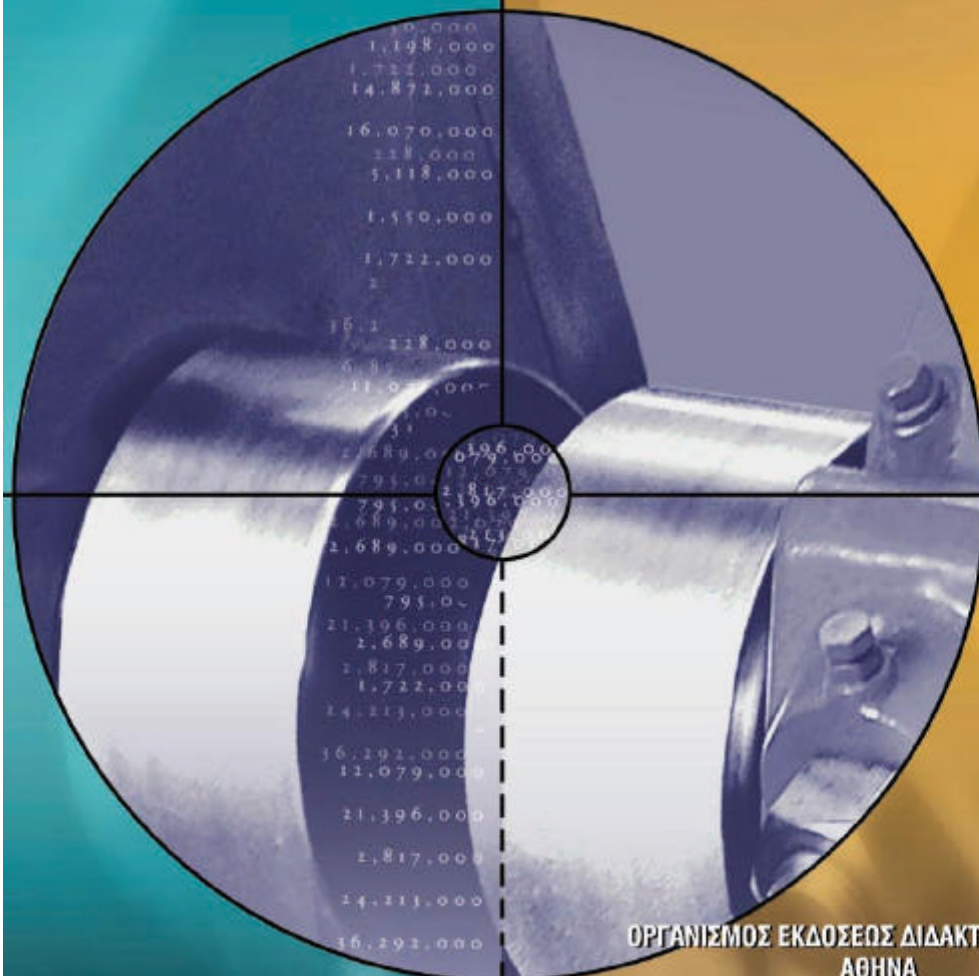
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΤΕΧΝΙΚΑ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Λύσεις Ασκήσεων

Α' Τάξη 2ου Κύκλου



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ