

ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(2010-2011)

ΑΛΓΕΒΡΑ
Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(2010-2011)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 1.1. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

$$(i) A = \frac{(xy^3)^4}{(x^2y^3)^2} : \left(\frac{y^{-1}}{x^3}\right)^3 = \frac{x^4y^{12}}{x^4y^6} \cdot \frac{x^9}{y^{-3}} = y^6 \cdot \frac{x^9}{y^{-3}} = y^9 \cdot x^9 = (xy)^9$$

(ii) Για $x = 2010$ και $y = \frac{1}{2010}$ έχουμε $xy = 1$ οπότε

$$A = 1^9 = 1.$$

2. Έχουμε $A = \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 : \frac{1}{x^3y^7}\right]^2 = \left[\frac{x^2}{y^2} \cdot x^3y^7\right]^2 = (x^5 \cdot y^5)^2 = (xy)^{10}$

Για $x = 0,4$ και $y = -2,5$ είναι $xy = -1$ οπότε $A = (-1)^{10} = 1$.

3. i) $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4.000$.

ii) $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1 = 10000 - 1 = 9.999$.

iii) $\frac{(7,23)^2 - (4,23)^2}{11,46} = \frac{(7,23 + 4,23)(7,23 - 4,23)}{11,46} = \frac{11,46 \cdot 3}{11,46} = 3$

4. i) Έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta\end{aligned}$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i):

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2 = 4 \cdot \frac{999}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = 4$$

5. i) Έχουμε

$$\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^2 - (\alpha^2 - 1) = \alpha^2 - \alpha^2 + 1 = 1$$

ii) Αν εφαρμόσουμε το ερώτημα (i) για $\alpha = 1,3265$ η τιμή που προκύπτει για την παράσταση είναι 1.

6. Έστω n και $n + 1$ δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί:

Τότε έχουμε

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = (n + 1) + n$$

7. Ισχύει

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n (1 + 2 + 2^2) = 2^n \cdot 7$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή
Έχουμε

$$i) \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 1} = \alpha - 1$$

$$ii) \frac{\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

2. Έχουμε

$$i) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3} \\ = \frac{(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2$$

$$ii) \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)} = 1$$

3. Έχουμε

$$i) (x + y)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-2} = (x + y)^2 \left(\frac{y + x}{xy}\right)^{-2} = (x + y)^2 \left(\frac{xy}{x + y}\right)^2 = (xy)^2 = x^2 y^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}} &= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \\
 &= \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{1}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{xy}{x+y} = \frac{xy}{x-y}
 \end{aligned}$$

4. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x-y}-y\right) &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} : \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} \\
 &= \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} \cdot \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} = 1
 \end{aligned}$$

5. i) α' τρόπος: Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. 26) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\beta + \gamma + \alpha} = 1,$$

οπότε $\alpha = \beta = \gamma$.

β' τρόπος: Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} = k$, οπότε έχουμε

$$\alpha = k\beta, \quad \beta = k\gamma \quad \text{και} \quad \gamma = k\alpha \quad (1)$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), βρίσκουμε

$$\alpha + \beta + \gamma = k(\alpha + \beta + \gamma)$$

οπότε έχουμε $k = 1$ (αφού $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, διότι τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου).

Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha = \beta = \gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ' τρόπος: Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αποδειχθεί, μετά τη διδασκαλία της § 1.3, ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), οπότε έχουμε

$$\alpha\beta\gamma = k^3(\alpha\beta\gamma) \text{ και, επειδή } \alpha\beta\gamma \neq 0, \text{ θα είναι } k^3 = 1 \text{ και άρα } k = 1.$$

Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

Σχόλιο: Ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα α, β, γ είναι οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, ενώ για τους δύο πρώτους τρόπους απαιτείται στην περίπτωση αυτή να αποδειχτεί ότι $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

ii) α' τρόπος: Έχουμε $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ (1) και $\alpha - \beta = \gamma - \alpha$ (2), οπότε, αν προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$2\alpha - 2\beta = \beta - \alpha \Rightarrow 3\alpha = 3\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Έτσι, από την ισότητα (1) βρίσκουμε ότι και $\beta = \gamma$. Άρα $\alpha = \beta = \gamma$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

β' τρόπος: Θέτουμε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = k$, οπότε έχουμε

$$\alpha - \beta = k, \quad \beta - \gamma = k \text{ και } \gamma - \alpha = k \quad (2)$$

Αν τώρα προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (2), βρίσκουμε ότι $k = 0$, οπότε, λόγω των ισοτήτων αυτών, είναι $\alpha = \beta = \gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

6. Αν x και y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε θα ισχύει

$$L = 2x + 2y \quad \text{και} \quad E = xy$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης, θα έχουμε

$$2x + 2y = 4a \quad \text{και} \quad xy = a^2$$

και άρα

$$y = 2a - x \quad (1) \quad \text{και} \quad xy = a^2 \quad (2)$$

Λόγω της (1), η (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} x(2a - x) &= a^2 \Leftrightarrow 2ax - x^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a \end{aligned}$$

Έτσι από την (1) έχουμε ότι και $y = a$ και άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

7. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

i) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha + \beta = \gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta = \gamma - \alpha \in \mathbb{Q}$ (ως διαφορά ρητών), που είναι άτοπο.

ii) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha\beta = \gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta = \frac{\gamma}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ (ως πηλίκο ρητών), που είναι άτοπο.

§ 1.2. Διάταξη πραγματικών αριθμών

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0$ που ισχύει.

$$\begin{aligned} \text{ii) Είναι } 2(\alpha^2 + \beta^2) &\geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \\ &\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

$$2. \text{ Έχουμε } \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

$$3. \text{ i) Ισχύει } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ και } y + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ και } y = -1.$$

$$\text{ii) Έχουμε } x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ και } y + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = -2.$$

$$4. \text{ i) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες} \\ 4,5 < x < 4,6 \text{ και } 5,3 < y < 5,4$$

οπότε έχουμε

$$4,5 + 5,3 < x + y < 4,6 + 5,4$$

δηλαδή $9,8 < x + y < 10$.

ii) Από τη δεύτερη ανισότητα προκύπτει

$$-5,4 < -y < -5,3$$

και προσθέτουμε κατά μέλη με την $4,5 < x < 4,6$

οπότε έχουμε

$$4,5 - 5,4 < x - y < 4,6 - 5,3 \Leftrightarrow -0,9 < x - y < -0,7.$$

iii) Ισχύει $5,3 < y < 5,4$ οπότε

$$\frac{1}{5,3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5,4} \Leftrightarrow \frac{1}{5,4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5,3}$$

$$\text{και άρα } 4,5 \cdot \frac{1}{5,4} < x \cdot \frac{1}{y} < 4,6 \cdot \frac{1}{5,3} \Leftrightarrow \frac{45}{54} < \frac{x}{y} < \frac{46}{53}$$

iv) Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο οπότε έχουμε

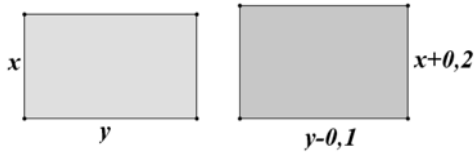
$$(4,5)^2 < x^2 < (4,6)^2 \Leftrightarrow 20,25 < x^2 < 21,16 \text{ και}$$

$$(5,3)^2 < y^2 < (5,4)^2 \Leftrightarrow 28,09 < y^2 < 29,16$$

προσθέτουμε κατά μέλη οπότε

$$20,25 + 28,09 < x^2 + y^2 < 21,16 + 29,16 \Leftrightarrow 48,34 < x^2 + y^2 < 50,32.$$

5.

Για το x έχουμε:

$$2 + 0,2 < x + 0,2 < 3 + 0,2 \Leftrightarrow 2,2 < x + 0,2 < 3,2, \quad (1)$$

Για το y έχουμε:

$$3 - 0,1 < y - 0,1 < 5 - 0,1 \Leftrightarrow 2,9 < y - 0,1 < 4,9, \quad (2)$$

(i) Η Περίμετρος τότε γίνεται

$$\Pi = 2(x + 0,2) + 2(y - 0,1) = 2(x + y + 0,1)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε $5,1 < x + y + 0,1 < 8,1$
 οπότε

$$2 \cdot 5,1 < 2(x + y + 0,1) < 2 \cdot 8,1 \Leftrightarrow 10,2 < \Pi < 16,2.$$

(ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται

$$E = (x + 0,2)(y - 0,1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε έχουμε

$$2,2 \cdot 2,9 < (x + 0,2)(y - 0,1) < 3,2 \cdot 4,9 \Leftrightarrow 6,38 < E < 15,68.$$

6. Επειδή $(1 + \alpha)(1 + \beta) > 0$ έχουμε

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} < \frac{\beta}{1 + \beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1 + \alpha} (1 + \alpha)(1 + \beta) < \frac{\beta}{1 + \beta} (1 + \alpha)(1 + \beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1 + \beta) < \beta(1 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta, \text{ που ισχύει.}$$

7. Ισχύει $5 - x < 0$ οπότε κατά την απλοποίησή του η ανισότητα αλλάζει φορά. Έτσι το σωστό είναι

$$x(5 - x) > (5 + x)(5 - x) \Leftrightarrow x < 5 + x \Leftrightarrow 0 < 5, \text{ που ισχύει.}$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ1. i) Επειδή οι α, β, γ είναι θετικοί, έχουμε

$$\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta > \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma > \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma > \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta > \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1, \text{ που ισχύει.}$$

ii) Ομοίως

$$\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta < \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma < \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma < \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta < \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 1, \text{ που ισχύει.}$$

2. Ισχύει $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - \alpha\beta - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow \alpha(1 - \beta) - (1 - \beta) > 0$
 $\Leftrightarrow (\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, που ισχύει, αφού $\alpha > 1$ και $\beta < 1$.

3. Έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \geq 4 &\Leftrightarrow (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \right) \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta \cdot \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

4. i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, που ισχύει.

ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, που ισχύει.

§ 1.3. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $|\pi - 3| = \pi - 3$, αφού $\pi > 3$.
 ii) $|\pi - 4| = 4 - \pi$, αφού $\pi < 4$.
 iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi| = \pi - 3 + 4 - \pi = 1$.
 iv) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0$
2. Είναι $|x - 3| = x - 3$, αφού $x > 3$ και $|x - 4| = 4 - x$, αφού $x < 4$
 οπότε $|x - 3| + |x - 4| = x - 3 + 4 - x = 1$.
3. i) Αν $x < 3$, τότε ισχύει και $x < 4$, οπότε $x - 3 < 0$ και $4 - x > 0$.
 Άρα είναι $|x - 3| - |4 - x| = (3 - x) - (4 - x) = 3 - x - 4 + x = -1$.
- ii) Αν $x > 4$, τότε είναι και $x > 3$, οπότε $x - 4 > 0$ και $x - 3 > 0$.
 Άρα έχουμε $|x - 3| - |4 - x| = x - 3 + (4 - x) = 1$.
4. Είναι $\frac{|\alpha - \beta|}{|\beta - \alpha|} = \frac{|\beta - \alpha|}{|\beta - \alpha|} = 1$.

5. • Αν $x > 0$ και $y > 0$, τότε $A = \frac{x}{x} + \frac{y}{y} = 1 + 1 = 2$

• Αν $x > 0$ και $y < 0$, τότε $A = \frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 1 - 1 = 0$

• Αν $x < 0$ και $y < 0$, τότε $A = \frac{-x}{x} - \frac{y}{y} = -1 - 1 = -2$

• Αν $x < 0$ και $y > 0$, τότε $A = \frac{-x}{x} + \frac{y}{y} = -1 + 1 = 0$.

6. i) Ισχύει $d(2,37, D) \leq 0,005$ (1)

ii) Ισχύει $(1) \Leftrightarrow |2,37 - D| \leq 0,005 \Leftrightarrow 2,37 - 0,005 \leq D \leq 2,37 + 0,005$
 $\Leftrightarrow 2,365 \leq D \leq 2,375$.

7.

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x - 4 \leq 2$	$d(x, 4) \leq 2$	$[2, 6]$
$ x + 3 < 4$	$d(x, -3) < 4$	$(-7, 1)$
$ x - 4 > 2$	$d(x, 4) > 2$	$(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
$ x + 3 \geq 4$	$d(x, -3) \geq 4$	$(-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x - 5 < 1$	$d(x, 5) < 1$	$(4, 6)$
$ x + 1 > 2$	$d(x, -1) > 2$	$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
$ x - 5 \geq 1$	$d(x, 5) \geq 1$	$(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$
$ x + 1 \leq 2$	$d(x, -1) \leq 2$	$[-3, 1]$

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x < 2$	$d(x, 0) < 2$	$(-2, 2)$
$ x + 2 \leq 3$	$d(x, -2) \leq 3$	$[-5, 1]$
$ x \geq 2$	$d(x, 0) \geq 2$	$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
$ x + 2 > 3$	$d(x, -2) > 3$	$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας έχουμε

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha - \gamma) + (\gamma - \beta)| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|.$$

2. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και άρα $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ οπότε έχουμε:

$$\text{i)} \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha \quad \text{και}$$

$$\text{ii)} \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta.$$

3. Επειδή $|x| \geq 0$ και $|y| \geq 0$, έχουμε:

$$|x| + |y| \geq 0$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει $|x| = 0$ και $|y| = 0$, δηλαδή $x = 0$ και $y = 0$.

Διαφορετικά ισχύει η ανισότητα. Επομένως:

$$\text{i)} |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad y = 0.$$

$$\text{ii)} |x| + |y| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{ή} \quad y \neq 0.$$

4. i) Από $0 < \alpha < \beta$ προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ και $\frac{\beta}{\alpha} > 1$. Είναι δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}$.

$$\text{ii)} \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι } \left| 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right| < \left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| \text{ ή, ισοδύναμα, ότι } 1 - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha} - 1.$$

Επειδή $\alpha\beta > 0$ η ανισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα

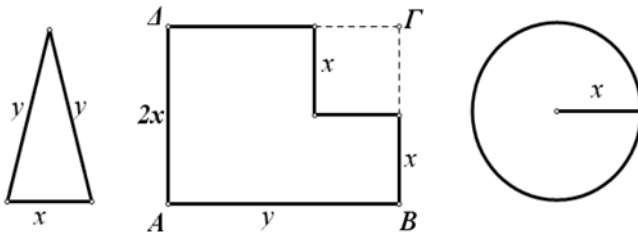
$$\alpha\beta - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \alpha\beta < \frac{\beta}{\alpha} \alpha\beta - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha^2 < \beta^2 - \alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow 0 < \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 > 0, \text{ που ισχύει αφού } \alpha \neq \beta.$$

5. Είναι $|x - 2| < 0,1 \Leftrightarrow 1,9 < x < 2,1$ (1) και

$$|y - 4| < 0,2 \Leftrightarrow 3,8 < y < 4,2$$
 (2)



- i) Η περίμετρος P_1 του τριγώνου είναι $P_1 = x + 2y$. Από την ανισότητα (2) προκύπτει ότι

$$7,6 < 2y < 8,4 \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3), έχουμε:

$$1,9 + 7,6 < x + 2y < 2,1 + 8,4 \Leftrightarrow 9,5 < P_1 < 10,5.$$

- ii) Η περίμετρος P_2 του σχήματος είναι ίση με την περίμετρο του ορθογώνιου ΑΒΓΔ, οπότε είναι $P_2 = 4x + 2y$. Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι

$$7,6 < 4x < 8,4 \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (3), έχουμε:

$$7,6 + 7,6 < 4x + 2y < 8,4 + 8,4 \Leftrightarrow 15,2 < P_2 < 16,8.$$

- iii) Η περίμετρος L του κύκλου είναι $L = 2\pi x$. Από την (1) προκύπτει

$$2\pi \cdot 1,9 < 2\pi x < 2\pi \cdot 2,1 \Leftrightarrow 3,8\pi < L < 4,2\pi.$$

§ 1.4. Ρίζες πραγματικών αριθμών Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$,

$$\sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10, \quad \sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10.$$

$$\text{ii) } \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \quad \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2, \quad \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2, \quad \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2.$$

$$\text{iii) } \sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}, \quad \sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10},$$

$$\sqrt[4]{0,0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{10}, \quad \sqrt[5]{0,00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}.$$

2. i) $\sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| = 4 - \pi$.

$$\text{ii) } \sqrt{(-20)^2} = |-20| = 20.$$

$$\text{iii) } \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|.$$

$$\text{iv) } \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{|x|}{2}.$$

3. Έχουμε

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad (\sqrt{x-5} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3}) &= (\sqrt{x-5})^2 - (\sqrt{x+3})^2 \\
 &= (x-5) - (x+3) \\
 &= x-5-x-3 = -8,
 \end{aligned}$$

με την προϋπόθεση ότι $x-5 \geq 0$ και $x+3 \geq 0$, δηλαδή για $x \geq 5$.

$$\begin{aligned}
 5. \quad \text{i)} \quad &(\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32}) \\
 &= (\sqrt{2 \cdot 4} - \sqrt{2 \cdot 9})(\sqrt{2 \cdot 25} + \sqrt{2 \cdot 36} - \sqrt{2 \cdot 16}) \\
 &= (2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})(5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) \\
 &= (-\sqrt{2})(7\sqrt{2}) = -7(\sqrt{2})^2 = -14. \\
 \text{ii)} \quad &(\sqrt{28} + \sqrt{7} + \sqrt{32})(\sqrt{63} - \sqrt{32}) \\
 &= (\sqrt{4 \cdot 7} + \sqrt{7} + \sqrt{2 \cdot 16})(\sqrt{7 \cdot 9} - \sqrt{2 \cdot 16}) \\
 &= (2\sqrt{7} + \sqrt{7} + 4\sqrt{2})(3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}) = (3\sqrt{7} + 4\sqrt{2})(3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}) \\
 &= (3\sqrt{7})^2 - (4\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 7 - 16 \cdot 2 = 63 - 32 = 31.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad \text{i)} \quad &\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \\
 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad &\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\
 &= \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9-5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2.
 \end{aligned}$$

7. i) 1ος τρόπος:

$$\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}.$$

2ος τρόπος:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\sqrt{2} \sqrt[3]{2}} &= \sqrt{\sqrt{2} \cdot 2^{1/3}} = \sqrt{\sqrt[4]{2^{4/3}}} \\
 &= \sqrt{(2^{4/3})^{1/2}} = \sqrt{2^{2/3}} = (2^{2/3})^{1/2} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}.
 \end{aligned}$$

ii) 1ος τρόπος:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[5]{2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}} &= \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2^4}} \\
 &= \sqrt[5]{2^6 \sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^6 \cdot 2^4}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}} = \sqrt[30]{2^{10}} = \sqrt[3]{2}.
 \end{aligned}$$

ii) 2ος τρόπος:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}} &= \sqrt[5]{2\sqrt{2} \cdot 2^{1/3}} = \sqrt[5]{2\sqrt[4]{2^{4/3}}} = \sqrt[5]{2 \cdot (2^{4/3})^{1/2}} \\ &= \sqrt[5]{2 \cdot 2^{2/3}} = \sqrt[5]{2^{5/3}} = (2^{5/3})^{1/5} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$

8. i) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{9}{12} + \frac{4}{12}} = 3^{\frac{13}{12}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{12}} = 3 \sqrt[12]{3}.$

ii) $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{8}{9}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{8}{9} + \frac{5}{6}} = 2^{\frac{16}{18} + \frac{15}{18}} = 2^{\frac{31}{18}} = 2 \cdot 2^{\frac{13}{18}} = 2 \sqrt[18]{2^{13}}.$

iii) $\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4} = 5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{6}} = 5^{\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{6}} = 5^{\frac{9}{6} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6}} = 5^{\frac{15}{6}} = 5^{\frac{5}{2}}.$
 $= \sqrt{5^5} = 5^2 \cdot \sqrt{5} = 25\sqrt{5}.$

9. i) $\frac{25 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{75}} = \frac{25 \cdot \sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \frac{25 \cdot 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 10.$

ii) Με ανάλυση του 216 σε πρώτους παράγοντες βρίσκουμε $216 = 2^3 \cdot 3^3$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{216} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{50}} &= \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^3} \cdot \sqrt{25 \cdot 3}}{\sqrt{2 \cdot 25}} = \frac{5\sqrt{2^3 \cdot 3^4}}{5\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2^3 \cdot 3^4}{2}} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3^2 = 18.\end{aligned}$$

10. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα με τη συζηγή παράσταση του παρονομαστή του έχουμε:

i) $\frac{4}{5 - \sqrt{3}} = \frac{4(5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{4(5 + \sqrt{3})}{25 - 3} = \frac{4(5 + \sqrt{3})}{22} = \frac{10 + 2\sqrt{3}}{11}.$

ii) $\frac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{8(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = 4(\sqrt{7} + \sqrt{5}).$

iii) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{7 - 6} = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2$
 $= 7 + 6 + 2\sqrt{42} = 13 + 2\sqrt{42}.$

11. i) Αν αναλύσουμε τους 162 και 98 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων βρίσκουμε $162 = 2 \cdot 3^4$ και $98 = 2 \cdot 7^2$ οπότε είναι

$$\frac{\sqrt{162} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} - \sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^4} + \sqrt{2 \cdot 7^2}}{\sqrt{2 \cdot 25} - \sqrt{2 \cdot 16}} = \frac{9\sqrt{2} + 7\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 16.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) Είναι } 9^{12} + 3^{20} &= 9^{12} + (3^2)^{10} = 9^{12} + 9^{10} = 9^{10} \cdot (9^2 + 1) = 82 \cdot 9^{10}. \\ \text{και } 9^{11} + 27^6 &= 9^{11} + (3 \cdot 9)^6 = 9^{11} + 3^6 \cdot 9^6 = 9^{11} + (3^2)^3 \cdot 9^6 \\ &= 9^{11} + 9^9 = 9^9(9^2 + 1) = 82 \cdot 9^9 \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$\sqrt[3]{\frac{9^{12} + 3^{20}}{9^{11} + 27^6}} = \sqrt[3]{\frac{82 \cdot 9^{10}}{82 \cdot 9^9}} = \sqrt[3]{9} = 3.$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

$$1. \text{ i) } \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{9 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 4}{3 - 2} = 5 + \sqrt{6}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} &= \frac{(\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})} = \frac{\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha\beta} - \beta\sqrt{\alpha\beta} - \beta^2}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta}(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta + \sqrt{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

2. i) Αξιοποιώντας γνωστές ταυτότητες έχουμε:

$$(3 + 2\sqrt{7})^2 = 9 + 4 \cdot 7 + 12\sqrt{7} = 37 + 12\sqrt{7} \text{ και}$$

$$(3 - 2\sqrt{7})^2 = 9 + 4 \cdot 7 - 12\sqrt{7} = 37 - 12\sqrt{7}.$$

- ii) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\sqrt{37 + 12\sqrt{7}} - \sqrt{37 - 12\sqrt{7}} \\ &= \sqrt{(3 + 2\sqrt{7})^2} - \sqrt{(3 - 2\sqrt{7})^2} \\ &= |3 + 2\sqrt{7}| - |3 - 2\sqrt{7}| = 3 + 2\sqrt{7} - (2\sqrt{7} - 3) = 6. \end{aligned}$$

3. i) Είναι

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{3}}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{3}} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + 2 = \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{12}{6} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

που είναι ρητός αριθμός.

ii) Είναι

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 &= (\sqrt{\alpha})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ &= \alpha + \frac{1}{\alpha} + 2 = \frac{\alpha^2 + 1 + 2\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha}\end{aligned}$$

που είναι ρητός αριθμός.

4. i) Μετατρέποντας τους παρονομαστές σε ρητούς έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{5} + 3 + 5 - \sqrt{5}\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{2} = 4.\end{aligned}$$

ii) Είναι

$$\begin{aligned}\bullet (2 - \sqrt{3})^2 &= 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \text{ και} \\ \bullet (2 + \sqrt{3})^2 &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} \text{ οπότε}\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2 - \sqrt{3})^2} - \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} &= \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} - \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{7 + 4\sqrt{3}}{49 - 48} - \frac{7 - 4\sqrt{3}}{49 - 48} = 7 + 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.\end{aligned}$$

5. i) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = \alpha + \beta, \text{ οπότε } B\Gamma = \sqrt{\alpha + \beta}.$$

ii) Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει $B\Gamma < AB + A\Gamma$

που σημαίνει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

iii) Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$\sqrt{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{\alpha + \beta})^2 \leq (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta \leq \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{\alpha\beta}, \text{ που ισχύει.}$$

Το “=” ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 2.1. Εξισώσεις 1ου βαθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42$
 $\Leftrightarrow 4x - 6x - 7x = -42 - 3 \Leftrightarrow -9x = -45 \Leftrightarrow x = 5.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 5$.

ii) $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$
 $\Leftrightarrow 20 \frac{1-4x}{5} - 20 \frac{x+1}{4} = 20 \frac{x-4}{20} + 20 \frac{5}{4}$
 $\Leftrightarrow 4(1-4x) - 5(x+1) = x-4 + 25 \Leftrightarrow 4 - 16x - 5x - 5 = x + 21$
 $\Leftrightarrow -21x - x = 21 + 1 \Leftrightarrow -22x = 22 \Leftrightarrow x = -1.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -1$.

iii) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60} \Leftrightarrow 60 \cdot \frac{x}{2} - 60 \cdot \frac{x}{3} = 60 \cdot \frac{x}{4} - 60 \cdot \frac{x}{5} - 60 \cdot \frac{49}{60}$
 $\Leftrightarrow 30x - 20x = 15x - 12x - 49 \Leftrightarrow 30x - 20x - 15x + 12x = -49$
 $\Leftrightarrow 7x = -49 \Leftrightarrow x = -7.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -7$.

iv) $1,2(x+1) - 2,5 + 1,5x = 8,6 \Leftrightarrow 12(x+1) - 25 + 15x = 86$
 $\Leftrightarrow 12x + 12 - 25 + 15x = 86 \Leftrightarrow 27x = 99 \Leftrightarrow x = \frac{99}{27} = \frac{11}{3}.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \frac{11}{3}$.

2. i) $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 0x = 3.$

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 2x - 3 \cdot \frac{5-x}{3} = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 \cdot \frac{7x}{3}$
 $\Leftrightarrow 6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 0x = 0.$

Άρα, η εξίσωση είναι ταυτότητα.

3. i) • Αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = 1.$$

- Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

- ii) • Αν $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}.$$

- Αν $\lambda = 2$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

- iii) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

- Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda}.$$

- Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση γίνεται $0x = -1$ και είναι αδύνατη.

- Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

- iv) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)x = \lambda(\lambda + 1)$.

- Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$$

- Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

- Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

4. Έστω $AM = x$, τότε $DM = 5 - x$, οπότε

$$E_1 = \frac{3(5 - x)}{2} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{x \cdot 5}{2}.$$

- i) Η ισότητα $E_1 + E_2 = E_3$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$E_1 + E_2 = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} \quad \text{από την οποία προκύπτει η εξίσωση}$$

$$\frac{3(5 - x)}{2} + \frac{5x}{2} = \frac{(5 + 3)5}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{15 - 3x}{2} + 4 \cdot \frac{5x}{2} = 4 \cdot \frac{40}{4}$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6x + 10x = 40 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM = 2,5$, είναι δηλαδή το μέσο του ΑΔ.

ii) Η ισότητα $E_1 = E_2$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{3(5-x)}{2} = \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 15 - 3x = 5x \Leftrightarrow 15 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM = \frac{15}{8}$.

5. Αν το ποσό των x ευρώ κατατέθηκε προς 5%, τότε το υπόλοιπο ποσό των $(4000 - x)$ ευρώ κατατέθηκε προς 3%.

– Το ποσό των x ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{5}{100}x$ ευρώ

– Το ποσό των $(4000 - x)$ ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{3}{100}(4000 - x)$ ευρώ.

Η εξίσωση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα είναι

$$\frac{5}{100}x + \frac{3}{100}(4000 - x) = 175 \Leftrightarrow 5x + 3(4000 - x) = 100 \cdot 175$$

$$\Leftrightarrow 5x + 12.000 - 3x = 17.500 \Leftrightarrow 2x = 17.500 - 12.000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5.500 \Leftrightarrow x = 2.750 \text{ ευρώ.}$$

Επομένως τα 2.750 ευρώ τοκίστηκαν προς 5% και τα υπόλοιπα 1.250 ευρώ τοκίστηκαν προς 3%.

6. i) $v = v_0 + at \Leftrightarrow at = v - v_0 \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$, αφού $a \neq 0$.

$$\text{ii) } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{R_2 - R}{R_1 R_2}$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $R_2 - R \neq 0$, αφού το $\frac{1}{R_1} \neq 0$.

$$\text{Επομένως έχουμε } R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}.$$

7. i) $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και -1.

$$\text{ii) } (x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (x - 2)(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[(x - 2) + (x + 4)] = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και -1.

8. i) $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - x^3 + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 1.

ii) $(x + 1)^2 + x^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 1) \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 0.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και 0.

9. i) $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$$\Leftrightarrow x(x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και 1.

ii) $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 1) - (x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)[(x + 2) - (x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

10. i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2, 1 και -1.

ii) $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

$$11. \text{ i) } \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow x^2(x-1) = x-1 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (αφού } x \neq 1).$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -1$.

$$\text{ii) } \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0.$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1+2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1, \end{aligned}$$

που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

Επομένως και η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

12. i) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς του περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{2}{x^2-1} \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \frac{1}{x-1} + (x-1)(x+1) \frac{1}{x+1} &= (x-1)(x+1) \frac{2}{x^2-1} \\ \Leftrightarrow x+1+x-1 &= 2 \\ \Leftrightarrow 2x &= 2 \Leftrightarrow x=1, \text{ που απορρίπτεται, αφού } x \neq 1. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} &= \frac{x-4}{x^2+2x} \\ \Leftrightarrow x(x+2) \frac{3}{x+2} - x(x+2) \frac{2}{x} &= x(x+2) \frac{x-4}{x(x+2)} \\ \Leftrightarrow 3x-2x-4 &= x-4 \Leftrightarrow 0x=0. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ταυτότητα. Αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς αυτό σημαίνει ότι η αρχική εξίσωση έχει ως λύση κάθε πραγματικό εκτός από τους αριθμούς 0 και -2 .

- iii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} &= \frac{x}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} \\ \Leftrightarrow x-2 &= x \Leftrightarrow 0x = 2, \text{ που είναι αδύνατη.}\end{aligned}$$

- iv) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq -1$ και $x \neq 1$. Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x}{x^2-1} &= \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} &= \frac{x}{x+1},\end{aligned}$$

που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , με $x \neq \pm 1$.

13. Έστω $x-1$, x , $x+1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Ζητούμε ακέραιο x τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned}(x-1) + x + (x+1) &= (x-1)x(x+1) \\ \Leftrightarrow 3x &= x(x^2-1) \\ \Leftrightarrow x(3-x^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(4-x^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x &=-2.\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν τρεις τριάδες τέτοιων διαδοχικών αριθμών, οι εξής:

$$(-1, 0, 1), \quad (1, 2, 3) \quad \text{και} \quad (-3, -2, -1).$$

14. i) $|2x-3|=5 \Leftrightarrow 2x-3=5 \text{ ή } 2x-3=-5$

$$\Leftrightarrow 2x=8 \text{ ή } 2x=-2 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=-1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και -1 .

- ii) $|2x-4|=|x-1| \Leftrightarrow 2x-4=x-1 \text{ ή } 2x-4=-x+1$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } 3x=5 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=\frac{5}{3}.$$

- iii) Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης $|x-2|=2x-1$ είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή, πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει

$$2x - 1 \geq 0 \quad (1)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} |x - 2| = 2x - 1 &\Leftrightarrow x - 2 = 2x - 1 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 1 - 2x \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$ που ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

iv) Ομοίως, για την εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$, πρέπει

$$x - 2 \geq 0 \quad (2)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} |2x - 1| = x - 2 &\Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2 \quad \text{ή} \quad 2x - 1 = 2 - x \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις καμία δεν είναι δεκτή, αφού καμία δεν επαληθεύει τον περιορισμό (2). Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

15. i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{|x| + 4}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 15 \cdot \frac{|x| + 4}{3} - 15 \cdot \frac{|x| + 4}{5} = 15 \cdot \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow 5|x| + 20 - 3|x| - 12 = 10 \\ &\Leftrightarrow 2|x| = 2 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1. \end{aligned}$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και 1 .

$$\text{ii) } \frac{2|x| + 1}{3} - \frac{|x| - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{2|x| + 1}{3} - 6 \cdot \frac{|x| - 1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4|x| + 2 - 3|x| + 3 = 3 \Leftrightarrow |x| = -2, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

16. i) Η εξίσωση $\left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4$ ορίζεται για $x \neq -3$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4 &\Leftrightarrow |3-x| = 4 \cdot |3+x| \\ &\Leftrightarrow 3-x = 4(x+3) \quad \text{ή} \quad 3-x = -4(x+3) \\ &\Leftrightarrow 3-x = 4x+12 \quad \text{ή} \quad 3-x = -4x-12 \\ &\Leftrightarrow 5x = -9 \quad \text{ή} \quad 3x = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad x = -5. \end{aligned}$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -5 και $-\frac{9}{5}$.

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & |x-1| |x-2| = |x-1| \Leftrightarrow |x-1| (|x-2| - 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow |x-1| = 0 \quad \text{ή} \quad |x-2| = 1 \\
 & \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 1 \quad \text{ή} \quad x - 2 = -1 \\
 & \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1.
 \end{aligned}$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 3.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{i)} \quad & (x + \alpha)^2 - (x - \beta)^2 = 2\alpha(\alpha + \beta) \\
 & \Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - (x^2 - 2\beta x + \beta^2) = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta \\
 & \Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - x^2 + 2\beta x - \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta \\
 & \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta)x = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\
 & \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta)^2.
 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Αν } \alpha + \beta \neq 0 \text{ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την } x = \frac{(\alpha + \beta)^2}{2(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

• Αν $\alpha + \beta = 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ii) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{x - \alpha}{\beta} = \frac{x - \beta}{\alpha} & \Leftrightarrow \alpha(x - \alpha) = \beta(x - \beta) \Leftrightarrow \alpha x - \alpha^2 = \beta x - \beta^2 \\
 & \Leftrightarrow \alpha x - \beta x = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)x = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta).
 \end{aligned}$$

• Αν $\alpha - \beta \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta.$$

• Αν $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$, οπότε είναι ταυτότητα.

2. i) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta x - \alpha x}{\alpha\beta} = 1 \Leftrightarrow (\beta - \alpha)x = \alpha\beta.$$

$$\bullet \text{ Αν } \beta - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \alpha, \text{ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την } x = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}.$$

• Αν $\beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \alpha^2$ και είναι αδύνατη γιατί $\alpha \neq 0$.

Επομένως η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$.

3. i) Στα 200 ml διάλυμα περιέχονται 30 ml καθαρό οινόπνευμα. Αν προσθέσουμε x ml καθαρό οινόπνευμα τότε το διάλυμα που θα προκύψει θα είναι $(200 + x)$ ml και θα περιέχει $(30 + x)$ ml καθαρό οινόπνευμα οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{30 + x}{200 + x} = \frac{32}{100} \Leftrightarrow 100(30 + x) = 32(200 + x) \cdot$$

$$\Leftrightarrow 3000 + 100x = 6400 + 32x \Leftrightarrow 68x = 3400$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3400}{68} \Leftrightarrow x = 50.$$

Επομένως ο φαρμακοποιός πρέπει να προσθέσει 50 ml καθαρό οινόπνευμα.

4. Έστω ότι x ώρες μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν μεταξύ τους 1 km. Το διάστημα που διανύει το Α στις x ώρες είναι $100x$ ενώ το αντίστοιχο διάστημα για το Β είναι $120x$. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$120x - 100x = 1 \Leftrightarrow 20x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{20} \text{ ώρες, οπότε } x = \frac{1}{20} \cdot 60 = 3 \text{ λεπτά.}$$

Οπότε τα αυτοκίνητα θα απέχουν 1km τρία λεπτά μετά την προσπέραση.

5. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq a$ και $x \neq -a$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x + a}{x - a} = \frac{x^2}{x^2 - a^2} \Leftrightarrow \frac{x + a}{x - a} = \frac{x^2}{(x + a)(x - a)}$$

$$\Leftrightarrow (x + a)^2 = x^2 \Leftrightarrow x + a = x \quad \text{ή} \quad x + a = -x$$

$$\Leftrightarrow 0x = a \quad \text{ή} \quad 2x = -a.$$

• Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση έχει ως λύση κάθε αριθμό $x \neq 0$.

• Αν $a \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = \frac{-a}{2}$.

6. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq 2$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 4 \Leftrightarrow \cancel{x^3} - \cancel{8} = \cancel{x^3} - 2x^2 + 4x - \cancel{8}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Από τις τιμές αυτές δεκτή είναι μόνο η $x = 0$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τον αριθμό $x = 0$.

$$7. \quad |2|x| - 1| = 3 \Leftrightarrow 2|x| - 1 = 3 \quad \text{ή} \quad 2|x| - 1 = -3 \\ \Leftrightarrow 2|x| = 4 \quad \text{ή} \quad 2|x| = -2.$$

Η δεύτερη είναι αδύνατη οπότε έχουμε

$$2|x| = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -2 και 2 .

$$8. \quad \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = |3x - 5| \\ \Leftrightarrow |x - 1| = |3x - 5| \\ \Leftrightarrow x - 1 = 3x - 5 \quad \text{ή} \quad x - 1 = -3x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x = 4 \quad \text{ή} \quad 4x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{3}{2}.$$

§ 2.2. Η εξίσωση $x^n = a$ Α' ΟΜΑΔΑΣ

$$1. \quad \text{i)} \quad x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5.$$

$$\text{ii)} \quad x^5 - 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 3^5 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{iii)} \quad x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$2. \quad \text{i)} \quad x^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = (-5)^3 \Leftrightarrow x = -5.$$

$$\text{ii)} \quad x^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = (-3)^5 \Leftrightarrow x = -3.$$

$$\text{iii)} \quad x^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = (-1)^7 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$3. \quad \text{i)} \quad x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8^2 \Leftrightarrow x = -8 \quad \text{ή} \quad x = 8.$$

$$\text{ii)} \quad x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{81} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3.$$

$$\text{iii)} \quad x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{64} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2.$$

$$4. \quad \text{i)} \quad x^5 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και 2 .

$$\text{ii)} \quad x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και -1 .

$$\text{iii) } x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^4 = -16 \Leftrightarrow x = 0$$

αφού η $x^4 = -16$ είναι αδύνατη.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

5. Για το x έχουμε την εξίσωση

$$x \cdot x \cdot 3x = 81, \text{ με } x > 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 81 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3.$$

Άρα, οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου είναι 3m, 3m και 9m.

$$6. \text{ i) } (x + 1)^3 = 64 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{ii) } 1 + 125x^3 = 0 \Leftrightarrow (5x)^3 = -1 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } (x - 1)^4 - 27(x - 1) &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1)^3 - 27] = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad (x - 1)^3 = 27 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 4. \end{aligned}$$

§ 2.3. Εξισώσεις 2ου βαθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x_1 = \frac{5+1}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{5-1}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{ii) } \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0, \text{ οπότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την } x = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\text{iii) } \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0, \text{ οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.}$$

$$2. \text{ i) } x^2 - 1,69 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1,69 \Leftrightarrow x = 1,3 \quad \text{ή} \quad x = -1,3$$

$$\text{ii) } 0,5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(0,5x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad 0,5x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

$$\text{iii) } 3x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

3. i) Έχουμε $\Delta = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Έχουμε $\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ για όλα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

4. Επειδή

$$\Delta = 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1,$$

οι τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει διπλή ρίζα είναι οι αριθμοί 1 και -1.

5. Έχουμε $\Delta = 4(\alpha + \beta)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + \beta^2) = 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 8\alpha\beta - 8\alpha^2 - 8\beta^2$
 $= -4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8\alpha\beta = -4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$
 $= -4(\alpha - \beta)^2 < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha = \beta \neq 0$, ισχύει $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

Αν είναι $\alpha = \beta = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $2 = 0$ και είναι αδύνατη.

6. i) $S = 2 + 3 = 5$ και $P = 2 \cdot 3 = 6$, οπότε η εξίσωση είναι η $x^2 - 5x + 6 = 0$.

ii) $S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ και $P = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση είναι η:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

iii) $S = (5 - 2\sqrt{6}) + (5 + 2\sqrt{6}) = 10$ και

$$P = (5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6}) = 25 - 4 \cdot 6 = 1 \text{ οπότε η εξίσωση είναι η:}$$

$$x^2 - 10x + 1 = 0.$$

7. i) Είναι $S = 2$ και $P = -15$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 15 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 4 - 4(-15) = 64$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

ii) Είναι $S = 9$ και $P = 10$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 9x + 10 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 81 - 4 \cdot 10 = 41$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{9 - \sqrt{41}}{2}.$$

8. 1ος τρόπος:

i) Για να λύσουμε την εξίσωση αρκεί να βρούμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ και γινόμενο $\sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$. Οι αριθμοί αυτοί είναι προφανώς οι $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}$ που είναι και οι ζητούμενες ρίζες της εξίσωσης.

2ος τρόπος:

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \Delta &= (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{15} = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} : \\ &= (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 > 0.\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{5} \text{ και} \\ x_2 &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

ii) Είναι $\Delta = (\sqrt{2} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 > 0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2} = -\sqrt{2}.$$

9. 1ος τρόπος:

$$\begin{aligned}x^2 + \alpha^2 &= \beta^2 - 2\alpha x \Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \alpha)^2 - \beta^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + \alpha + \beta)(x + \alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow x = -\alpha - \beta \quad \text{ή} \quad x = \beta - \alpha.\end{aligned}$$

2ος τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$.

Είναι $\Delta = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - \beta^2) = 4\beta^2$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

$$x_1 = \frac{-2\alpha - 2\beta}{2} = -(\alpha + \beta) \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-2\alpha + 2\beta}{2} = \beta - \alpha.$$

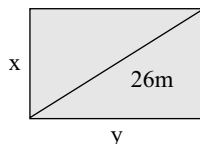
10. Έστω x και y οι πλευρές του ορθογωνίου. Τότε έχουμε

$$2x + 2y = 68 \Leftrightarrow x + y = 34 \Leftrightarrow y = 34 - x \quad (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι

$$x^2 + y^2 = 26^2, \text{ οπότε λόγω της (1) έχουμε}$$

$$\begin{aligned}x^2 + (34 - x)^2 &= 26^2 \Leftrightarrow x^2 + 34^2 - 68x + x^2 = 26^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 34^2 - 26^2 = 0\end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + (34 - 26)(34 + 26) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 8 \cdot 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 34x + 4 \cdot 60 = 0.$$

Είναι $\Delta = 34^2 - 4 \cdot 4 \cdot 60 = 196$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{34 + 14}{2} = 24 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{34 - 14}{2} = 10.$$

Οι ρίζες αυτές λόγω και της (1) είναι οι ζητούμενες πλευρές του ορθογώνιου.

11. i) Η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$. Θέτουμε $|x| = \omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$ και έχει ρίζες $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = 4$ που είναι δεκτές και οι δύο, οπότε έχουμε $|x| = 3$ ή $|x| = 4$, που σημαίνει ότι $x = 3$ ή $x = -3$ ή $x = 4$ ή $x = -4$. Επομένως η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 3, -3, 4 και -4.

ii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε

$$x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - 35 = 0.$$

Είναι $\Delta = 144$.

Η εξίσωση έχει ρίζες 5 και -7. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 5$, που σημαίνει $x = 5$ ή $x = -5$.

- iii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε $x^2 - 8|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 8\omega + 12 = 0$, αφού $x^2 = |x|^2$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 6 και 2, που είναι δεκτές και οι δύο. Επομένως $|x| = 6$ ή $|x| = 2$ που σημαίνει ότι $x = 6$ ή $x = -6$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

12. Θέτουμε $|x - 1| = \omega$, οπότε έχουμε

$$(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 4\omega - 5 = 0, \text{ αφού } (x - 1)^2 = |x - 1|^2.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς -5 και 1. Δεκτή είναι μόνο η θετική $\omega = 1$ αφού $\omega = |x - 1| \geq 0$. Επομένως,

$$|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \quad \text{ή} \quad x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 0.$$

Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και 2.

13. Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = \omega$ οπότε η εξίσωση γράφεται $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες του αριθμούς 2 και 3, οπότε έχουμε

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{ή} \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

και έχει το 1 διπλή ρίζα.

Η δεύτερη γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

και έχει ως ρίζες του αριθμούς

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς

$$1, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

14. i) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq -1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x(x+1) \frac{x}{x+1} + 6x(x+1) \frac{x+1}{x} = 6x(x+1) \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6(x+1)^2 = 13x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6x^2 + 12x + 6 = 13x^2 + 13x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -3.

- ii) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$ και $x \neq 2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) \frac{2}{x} + x(x-2) \frac{2x-3}{x-2} + x(x-2) \frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 + 2x^2 - 3x + 2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -1, οπότε λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x = -1$.

15. i) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $y^2 + 6y - 40 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -10$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$, οπότε έχουμε $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί -2 και 2.

ii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $4y^2 + 11y - 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = \frac{1}{4}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ δεκτή είναι μόνο η $y_2 = \frac{1}{4}$, οπότε έχουμε $x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$.

iii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $2y^2 + 7y + 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ καμία από αυτές δεν είναι δεκτή. Επομένως η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

Σχόλιο: Είναι προφανές ότι η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $2x^4 + 7x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-2\alpha^3)^2 - 4\alpha^2(\alpha^4 - 1) = 4\alpha^6 - 4\alpha^6 + 4\alpha^2 = 4\alpha^2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{2\alpha^3 + 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}.$$

2. i) Είναι

$$\begin{aligned} \Delta &= (5 - \sqrt{2})^2 - 4(6 - 3\sqrt{2}) = 25 - 10\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 24 + 12\sqrt{2} = \\ &= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2. \end{aligned}$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}}{2} = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 3 \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

3. i) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \Delta &= (\alpha - 9)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + 3\alpha + 4) = \alpha^2 - 18\alpha + 81 - 8\alpha^2 - 24\alpha - 32 \\ &= -7\alpha^2 - 42\alpha + 49, \text{ οπότε} \end{aligned}$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 42\alpha - 49 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -7 \quad \text{ή} \quad \alpha = 1.$$

Επομένως για $\alpha = -7$ ή $\alpha = 1$ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

4. Αν το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ισχύει $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.

Είναι $\rho \neq 0$, αφού $\gamma \neq 0$, οπότε έχουμε

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta \frac{1}{\rho} + \gamma \frac{1}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \gamma \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0.$$

που σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. i) 1ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{\alpha} &= \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \alpha + \frac{x - \alpha}{\alpha x} = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha) \left(1 + \frac{1}{\alpha x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \alpha) \left(\frac{\alpha x + 1}{\alpha x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

2ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{\alpha} &= \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + \left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha}\right)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha x^2 - \alpha + (1 - \alpha^2)x = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \Delta = (\alpha^2 - 1)^2 - 4\alpha(-\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha}.$$

ii) 1ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$ Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} (x - \beta) = \alpha \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} (x - \beta) = \alpha \left(\frac{x - \beta}{\beta x}\right) \Leftrightarrow (x - \beta) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta x}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta x} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

2ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha \beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha \beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha \beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2 \beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - \beta^2 x + \alpha^2 \beta - \alpha^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta x(x - \beta) + \alpha^2(\beta - x) = 0 \Leftrightarrow (x - \beta)(\beta x - \alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

3ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha \beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha \beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha \beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2 \beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2 \beta = 0.$$

Είναι

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

• Αν $\alpha \neq \pm\beta$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\beta^2}{2\beta} = \beta.$$

• Αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ τότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, την

$$x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{(\pm\beta)^2}{\beta} = \beta.$$

6. i) Έχουμε

$\Delta = 4\lambda^2 - 4(-8) = 4\lambda^2 + 32 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_2 = x_1^2$. Από τους τύπους Vieta έχουμε

$$\bullet x_1 + x_2 = -2\lambda \Leftrightarrow x_1 + x_1^2 = -2\lambda \quad \text{και}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1^3 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -2, \text{ οπότε } x_2 = (-2)^2 = 4.$$

Τότε έχουμε

$$-2 + 4 = -2\lambda \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

7. Έστω $x - 1, x, x + 1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4, \text{ αφού } x \neq 0 \text{ ως πλευρά τριγώνου.}$$

Η λύση $x = 4$ της εξίσωσης είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μία μόνο τριάδα διαδοχικών ακεραίων που είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Οι ακέραιοι αυτοί είναι οι 3, 4 και 5.

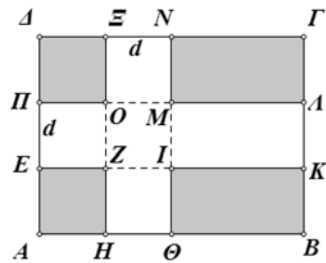
8. Το εμβαδόν E_1 του σταυρού προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των δύο λευκών λωρίδων της σημαίας από το οποίο όμως πρέπει να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κοινού τετραγώνου (OMIZ) πλευράς d . Είναι δηλαδή

$$E_1 = 3 \cdot d + 4 \cdot d - d^2 = 7d - d^2$$

Έστω E_2 το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας. Θα ισχύει $E_1 = E_2$ αν και μόνο αν το E_1 είναι ίσο με το μισό του εμβαδού ολόκληρης της σημαίας. Επομένως έχουμε

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow 7d - d^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow d^2 - 7d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = 1 \quad \text{ή} \quad d = 6.$$

Όμως για το d έχουμε τον περιορισμό $0 < d < 3$, οπότε $d = 1$.



9. Αν το μηχάνημα Α χρειάζεται x ώρες για να τελειώσει το έργο, όταν εργάζεται μόνο του, τότε το Β θα χρειάζεται $x + 12$ ώρες για το ίδιο έργο. Σε μία ώρα το Α εκτελεί τότε το $\frac{1}{x}$ μέρος του έργου ενώ το Β εκτελεί το $\frac{1}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν τα δύο μηχανήματα εργαστούν μαζί για 8 ώρες, τότε το Α εκτελεί το $8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ μέρος του έργου, ενώ το Β εκτελεί το $8 \cdot \frac{1}{x + 12} = \frac{8}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν προσθέσουμε τα δύο αυτά μέρη

του έργου θα έχουμε ολόκληρο το έργο δηλαδή το 1 έργο. Έτσι έχουμε την εξίσωση του προβλήματος

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{x+12} = 1 \Leftrightarrow 8(x+12) + 8x = x(x+12)$$

$$\Leftrightarrow 8x + 96 + 8x = x^2 + 12x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0.$$

Είναι $\Delta = 16 - 4(-96) = 400$, οπότε

$$x = \frac{4+20}{2} = 12 \quad \text{ή} \quad x = \frac{4-20}{2} = -8.$$

Είναι δηλαδή $x = 12$, αφού $x > 0$. Επομένως το μηχάνημα Α χρειάζεται 12 ώρες για να τελειώσει το έργο μόνο του, ενώ το Β χρειάζεται 24 ώρες.

- 10.** Ο αριθμός 1 είναι ρίζα αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωση δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$$1^4 - 10 \cdot 1^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

Για $\alpha = 9$ η εξίσωση γίνεται

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται

$$y^2 - 10y + 9 = 0.$$

Αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 9 και 1 οπότε έχουμε

$$x^2 = 9 \quad \text{ή} \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3, -3, 1, -1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§ 3.1. Ανισώσεις 1ου βαθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1) + 3(2x+3) < 2x$

$$\Leftrightarrow 6x - 6 + 6x + 9 < 2x \Leftrightarrow 6x + 6x - 2x < 6 - 9$$
$$\Leftrightarrow 10x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{10}.$$

ii) $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x \Leftrightarrow 2(x-12) + 2x + 3 > 4x$

$$\Leftrightarrow 2x - 24 + 2x + 3 > 4x$$
$$\Leftrightarrow 2x + 2x - 4x > 24 - 3 \Leftrightarrow 0x > 21 \text{ αδύνατη.}$$

iii) $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5x - 10 + 2 - 4x < x - 4$

$$\Leftrightarrow 5x - 4x - x < 10 - 2 - 4$$
$$\Leftrightarrow 0x < 4 \text{ που αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. • $3x - 1 < x + 5 \Leftrightarrow 3x - x < 1 + 5 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3.$

• $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1.$



Άρα $1 \leq x < 3.$

3. • $x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > x + 2 \Leftrightarrow 2x - x > 1 + 2 \Leftrightarrow x > 3.$

• $x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq x - 3 \Leftrightarrow 3x - x \leq 1 - 3 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1.$



Άρα δεν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις.

$$4. \bullet 2x - \frac{x-1}{8} > x \Leftrightarrow 16x - x + 1 > 8x \Leftrightarrow 16x - x - 8x > -1$$

$$\Leftrightarrow 7x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}.$$

$$\bullet x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + x + 1 < 0.$$

$$\Leftrightarrow 2x + x < 8 - 1 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}.$$



Οι ανισώσεις συναλθεύουν για $x \in (-\frac{1}{7}, \frac{7}{3})$. Οι ακέραιες τιμές του x στο διάστημα αυτό είναι οι 0, 1, 2.

$$5. \text{ i) } |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3. \text{ Άρα } x \in (-3, 3).$$

$$\text{ ii) } |x-1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Leftrightarrow 1-4 \leq x \leq 1+4$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5. \text{ Άρα } x \in [-3, 5].$$

$$\text{ iii) } |2x+1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x+1 < 5 \Leftrightarrow -5-1 < 2x < 5-1$$

$$\Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2. \text{ Άρα } x \in (-3, 2).$$

$$6. \text{ i) } |x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 3. \text{ Άρα } x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty).$$

$$\text{ ii) } |x-1| > 4 \Leftrightarrow x-1 < -4 \text{ ή } x-1 > 4 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > 5.$$

$$\text{ Άρα } x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty).$$

$$\text{ iii) } |2x+1| \geq 5 \Leftrightarrow 2x+1 \leq -5 \text{ ή } 2x+1 \geq 5 \Leftrightarrow 2x \leq -6 \text{ ή } 2x \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 2. \text{ Άρα } x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty).$$

$$7. \text{ i) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε } |a| = a \Leftrightarrow a \geq 0.$$

$$\text{ Επομένως } |2x-6| = 2x-6 \Leftrightarrow 2x-6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

$$\text{ ii) } |3x-1| = 1-3x \Leftrightarrow 3x-1 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}.$$

$$8. \text{ i) } \frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3} \Leftrightarrow 3(|x-1|-4) + 10 < 2|x-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|x-1| - 12 + 10 < 2|x-1| \Leftrightarrow |x-1| < 2$$

$$\Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3. \text{ Άρα } x \in (-1, 3).$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} &> \frac{1-|x|}{3} \Leftrightarrow 3(|x|+1) - 4|x| > 2(1-|x|) \\
 &\Leftrightarrow 3|x|+3-4|x| > 2-2|x| \\
 &\Leftrightarrow 3|x|-4|x|+2|x| > 2-3 \\
 &\Leftrightarrow |x| > -1 \text{ που αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} \leq 5 \Leftrightarrow |x-3| \leq 5 \\
 &\Leftrightarrow -5 \leq x-3 \leq 5 \Leftrightarrow 3-5 \leq x \leq 5+3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8.
 \end{aligned}$$

Άρα $x \in [-2, 8]$.

$$\begin{aligned}
 10. \text{ Το κέντρο του διαστήματος } (-7, 3) &\text{ είναι το } \frac{-7+3}{2} = -2. \\
 \text{Έχουμε } x \in (-7, 3) &\Leftrightarrow -7 < x < 3 \Leftrightarrow -7 - (-2) < x - (-2) < 3 - (-2) \\
 &\Leftrightarrow -7 + 2 < x + 2 < 3 + 2 \\
 &\Leftrightarrow -5 < x + 2 < 5 \Leftrightarrow |x+2| < 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. 41 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 50 &\Leftrightarrow 41 - 32 \leq \frac{9}{5}C \leq 50 - 32 \\
 &\Leftrightarrow 9 \leq \frac{9}{5}C \leq 18 \Leftrightarrow 5 \leq C \leq 10.
 \end{aligned}$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $3 \leq 4x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow 3 \leq 4x - 1$ και $4x - 1 \leq 6$. Ζητάμε επομένως τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $3 \leq 4x - 1$ και $4x - 1 \leq 6$.
- $3 \leq 4x - 1 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \Leftrightarrow 4x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 1$.
 - $4x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow 4x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4}$.



Άρα $x \in [1, \frac{7}{4}]$.

- ii) $-4 \leq 2 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -4 \leq 2 - 3x$ και $2 - 3x \leq -2$.
- $-4 \leq 2 - 3x \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$.
 - $2 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -3x \leq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$.

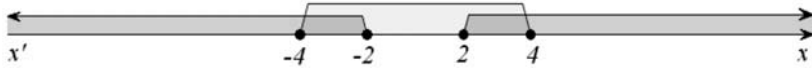


Άρα $x \in [\frac{4}{3}, 2]$.

2. i) $2 \leq |x| \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq |x|$ και $|x| \leq 4$.

$$\bullet 2 \leq |x| \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2.$$

$$\bullet |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$$



Άρα $x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$.

- ii) $2 \leq |x - 5| \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq |x - 5|$ και $|x - 5| \leq 4$.

$$\bullet 2 \leq |x - 5| \Leftrightarrow |x - 5| \geq 2 \Leftrightarrow x - 5 \leq -2 \text{ ή } x - 5 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 3 \text{ ή } x \geq 7.$$

$$\bullet |x - 5| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 5 - 4 \leq x \leq 5 + 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 9.$$



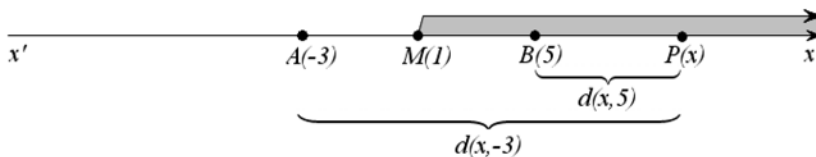
Άρα $x \in [1, 3] \cup [7, 9]$.

3. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο M του AB είναι ο:

$$x_0 = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

- ii) Αν P είναι το σημείο του x' που αντιστοιχεί σε λύση της ανίσωσης, τότε:

$$|x - 5| \leq |x + 3| \Leftrightarrow d(x, 5) \leq d(x, -3) \Leftrightarrow PA \leq PB.$$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο P βρίσκεται προς τα δεξιά του μέσου M του AB. Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in [1, +\infty)$.

- iii) Έχουμε:

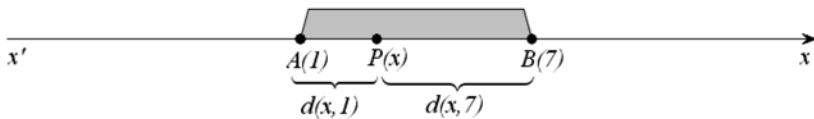
$$\begin{aligned} |x - 5| \leq |x + 3| &\Leftrightarrow |x - 5|^2 \leq |x + 3|^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \leq x^2 + 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow -16x \leq -16 \Leftrightarrow x \geq 1. \end{aligned}$$

4. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο M του AB είναι ο:

$$x_0 = \frac{1 + 7}{2} = 4$$

- ii) Αν P είναι το σημείο του x' που αντιστοιχεί στη λύση x της εξίσωσης, τότε έχουμε

$$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow d(x, 1) + d(x, 7) = 6 \Leftrightarrow PA + PB = AB.$$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο P είναι σημείο του τμήματος AB. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα $x \in [1, 7]$.

iii) Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x - 1$ και $x - 7$.

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$x - 7$	-	-	0	+

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Αν $x \in (-\infty, 1)$, τότε:

$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (1 - x) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow x = 1$, που απορρίπτεται διότι $1 \notin (-\infty, 1)$.

• Αν $x \in [1, 7]$, τότε:

$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow 0x = 0$, που ισχύει για κάθε $x \in [1, 7]$.

• Αν $x \in [7, +\infty)$, τότε:

$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (x - 7) = 6 \Leftrightarrow x = 7$, που είναι δεκτή διότι $7 \in [7, +\infty)$. Επομένως, η εξίσωση αληθεύει για $x \in [1, 7]$.

§ 3.2. Ανισώσεις 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$$\text{Έχουμε: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

$$\text{Άρα } x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

- ii) Έχουμε: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2.$

Επομένως

$$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2).$$

2. i) Είναι: $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(2x + 1)(x - 2)} = \frac{x - 1}{2x + 1}, \quad x \neq 2, x \neq -\frac{1}{2}$

ii) Έχουμε: $2x^2 + 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$

Επειδή $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-21) = 100$, θα είναι

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -7 \end{matrix}$$

Επομένως $2x^2 + 8x - 42 = 2(x+7)(x-3)$.

Άρα: $\frac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49} = \frac{2(x+7)(x-3)}{(x+7)(x-7)} = \frac{2(x-3)}{x-7}$, $x \neq \pm 7$.

iii) • Για την εξίσωση $4x^2 - 12x + 9 = 0$, έχουμε

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0, x_{1,2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ (διπλή)}.$$

Επομένως $4x^2 - 12x + 9 = 4(x - \frac{3}{2})^2 = (2x - 3)^2$.

• Για την $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{3}{2} \end{matrix}$

Επομένως $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - \frac{3}{2})(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$.

Άρα $\frac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{(2x - 3)^2}{(2x - 3)(x - 1)} = \frac{2x - 3}{x - 1}$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{3}{2}$

3. i) $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta = 64$, $x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$		
$x^2-2x-15$		+	0	-	0	+

ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$4x^2-4x+1$	$+$	0	$+$

iii) $x^2 - 4x + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 < 0$, $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$		+

4. i) Το τριώνυμο $-x^2 + 4x - 3$ έχει $\alpha = -1$ και ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$-x^2+4x-3$	-	0	+	0	-

ii) Έχουμε $-9x^2 + 6x - 1 = -(9x^2 - 6x + 1) = -(3x - 1)^2$. Επομένως

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
$-9x^2+6x-1$	$-$	0	$-$

iii) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x - 2$ έχει $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$ και $\alpha = -1 < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2 + 2x - 2$		-

5. i) Είναι: $5x^2 \leq 20x \Leftrightarrow 5x^2 - 20x \leq 0 \Leftrightarrow 5x(x - 4) \leq 0$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 20x$ έχει $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $x_1 = 0, x_2 = 4$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
$5x^2 - 20x$		+	0	-	0	+

Άρα $x \in [0, 4]$.

ii) Είναι: $x^2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 4$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1, x_2 = -4$.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$		
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in [-4, 1]$.

6. i) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2, x_2 = -1$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 5$ έχει $\alpha = 2 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$		
$2x^2-3x-5$		+	0	-	0	+

Άρα $x \in (-1, \frac{5}{2})$.

7. i) Είναι: $x^2 + 4 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 > 0$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2$.

ii) Είναι: $x^2 + 9 \leq 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$.

8. i) Το τριώνυμο $x^2 + 3x + 5$ έχει $a = 1 > 0$ και $\Delta = -11 < 0$. Άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ανίσωση $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ είναι αδύνατη.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 20$ έχει $a = 2 > 0$ και $\Delta = -151 < 0$. Άρα η ανίσωση $2x^2 - 3x + 20 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Έχουμε $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1, x_2 = 3$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
x^2-4x+3		+	0	-	0	+

Άρα $x \in (1, 3)$.

10. Έχουμε $2x - 1 < x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow 2x - 1 < x^2 - 4$ και $x^2 - 4 < 12$.

• Είναι: $2x - 1 < x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3, x_2 = -1$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

• Είναι: $x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 16$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 4, x_2 = -4$.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$		
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως $x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$.



Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-4, -1) \cup (3, 4)$.

11. Έχουμε $x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$ και

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$



Άρα $x \in (1, 2) \cup (3, 5)$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παράσταση $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = \alpha^2 + \beta \cdot \alpha - 2\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α . Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-2\beta^2) = 9\beta^2 \geq 0 \text{ και ρίζες } \alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm 3\beta}{2} \begin{matrix} \nearrow \beta \\ \searrow -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)$.

- Ομοίως η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha - 6\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α . Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-6\beta^2) = 25\beta^2 \text{ και ρίζες } \alpha_{3,4} = \frac{\beta \pm 5\beta}{2} \begin{matrix} \nearrow 3\beta \\ \searrow -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)$.

$$\text{ii) } \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2} = \frac{(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)}{(\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 3\beta}, \alpha \neq 3\beta, \alpha \neq -2\beta.$$

2. $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\beta - \alpha)^2 - 4 \cdot 2(-\alpha\beta) = 4\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2 + 8\alpha\beta \\ &= 4\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2 = (2\beta + \alpha)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Οι ρίζες της εξίσωσης είναι } x_{1,2} = \frac{-(2\beta - \alpha) \pm (2\beta + \alpha)}{4} \begin{matrix} \nearrow \frac{\alpha}{2} \\ \searrow -\frac{\alpha}{2} \end{matrix}$$

$$\text{Άρα } 2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 2(x - \frac{\alpha}{2})(x + \beta) = (2x - \alpha)(x + \beta).$$

3. • Έχουμε $x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta = x(x - \alpha) + \beta(x - \alpha) = (x - \alpha)(x + \beta)$.

- Το τριώνυμο $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$ έχει ρίζες $x_1 = \alpha$ και $x_2 = 2\alpha$ οπότε $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = (x - \alpha)(x - 2\alpha)$. Επομένως

$$\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2} = \frac{(x - \alpha)(x + \beta)}{(x - \alpha)(x - 2\alpha)} = \frac{x + \beta}{x - 2\alpha}, \text{ με } x \neq \alpha, x \neq 2\alpha.$$

4. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 9\lambda^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda + 5) = 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 5\lambda^2 - 20\lambda.$$

Η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή λ , $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 4$.

λ	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$5\lambda^2 - 20\lambda$	+	0	-	0	+

Επομένως η δοθείσα εξίσωση

i) έχει ρίζες ίσες, αν $\lambda = 4$, διότι $\lambda \neq 0$.

ii) έχει ρίζες άνισες αν $\lambda \neq -2$ με $\lambda < 0$ ή $\lambda > 4$.

iii) είναι αδύνατη αν $0 < \lambda < 4$.

5. Το τριώνυμο $x^2 + 3\lambda x + \lambda$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 9\lambda^2 - 4\lambda$.

Για να είναι $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$.

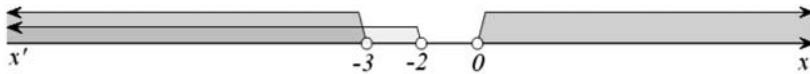
$$\text{Έχουμε } \Delta < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 4) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, \frac{4}{9}).$$

6. i) $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 3\lambda \cdot (\lambda + 2) = 4\lambda^2 - 12\lambda^2 - 24\lambda = -8\lambda^2 - 24\lambda$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 24\lambda < 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 + 24\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda > 0$$

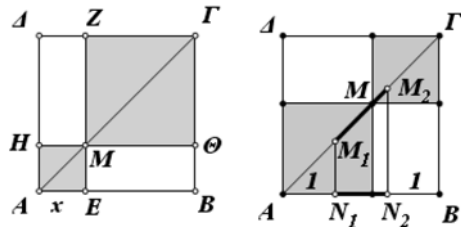
$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -3 \text{ ή } \lambda > 0.$$

ii) Η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\Delta < 0$ και $\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$ και $\lambda < -2$.



Άρα $\lambda < -3$.

7. Αν x είναι η πλευρά του ενός τετραγώνου, τότε η πλευρά του άλλου θα είναι $3 - x$ και άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων θα είναι ίσο με $x^2 + (3 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$.



Επομένως, για να είναι το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων μικρότερο από 5 θα πρέπει να ισχύει:

$$2x^2 - 6x + 9 < 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Άρα το Μ θα πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία M_1 και M_2 , τα οποία χωρίζουν τη διαγώνιο ΑΓ σε τρία ίσα μέρη.

8. i) Η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α . Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta = (-\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2 \leq 0$. Ο συντελεστής του α^2 είναι $1 > 0$. Άρα

$$\alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2 \geq 0, \text{ για όλα τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta}$. Επομένως

- Αν α, β ομόσημοι, τότε $A > 0$.
- Αν α, β ετερόσημοι, τότε $A < 0$.

§ 3.3. Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

- $2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 3x \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.
- $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2$.
- $x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$).

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$		
$2-3x$	+	+	0	-	-		
x^2-x-2	+	0	-	-	0	+	
x^2-x+1	+	+		+	+		
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

2. Έχουμε:

- $-x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
- $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2$.
- $x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = -3 < 0$).

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
$-x^2+4$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	
x^2-3x+2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

3. Έστω $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9)$. Έχουμε:

- $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ή} \quad x \geq 3$.

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$			
$x-1$		$-$	$-$	0	$+$	$+$		
x^2+2		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		
x^2-9		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$.

4. Έστω $P(x) = (3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3)$. Έχουμε:

- $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.
- $2x^2 + 6x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ή} \quad x \geq 0$.
- $x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
$3-x$		+	+	+	0	-		
$2x^2+6x$		+	0	-	0	+	+	
x^2+3		+		+		+	+	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Άρα $(3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty)$.

5. Έστω $P(x) = (2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1)$. Έχουμε:

- $2 - x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$.
- $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0$,
οπότε $(x + 1)^2 > 0$, για $x \neq -1$ και $(x + 1)^2 = 0$ για $x = -1$.

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$	
$2-x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$
x^2+2x+1		$+$	$+$	0	$+$	$+$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα $(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [1, +\infty)$.

6. Έστω $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0$. Έχουμε:

- $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
- $2x^2 + x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$ ή $x \geq 1$.
- $x - 1 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x - 1 \geq 0$, που είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -7 < 0$, $\alpha = -2 < 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	3	$+\infty$			
$x-3$		-	-	-	0	+		
$2x^2+x-3$		+	0	-	0	+	+	
$x-1-2x^2$		-	-	-	-	-		
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Άρα $(x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, 3)$.

7. i) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \leq 0$, με $x \neq 3$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 3$.

8. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) \leq 0$, με $x^2 + x - 2 \neq 0$.

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2)$. Έχουμε:

- $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.

$$\bullet x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 1.$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$		
x^2-x-2		+	+	0	-	0	+	
x^2+x-2		+	0	-	-	0	+	+
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	+

$$\text{Άρα } \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1] \cup (1, 2].$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

$$\begin{aligned} 1. \text{ i) } \frac{2x+3}{x-1} > 4 &\Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-4x+4}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-7}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x-7)(x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{x-2}{3x+5} \leq 4 &\Leftrightarrow \frac{x-2}{3x+5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-12x-20}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-11x-22}{3x+5} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{11x+22}{3x+5} \geq 0 \Leftrightarrow 11(x+2)(3x+5) \geq 0, \text{ με } x \neq -\frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x > -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x \in (-\infty, -2] \cup (-\frac{5}{3}, +\infty).$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{x^2 - 3x - 10}{x-1} + 2 \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 10 + 2x - 2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x-1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x - 12)(x-1) \leq 0, \text{ με } x \neq 1. \end{aligned}$$

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 12)(x-1)$. Έχουμε:

$$\bullet x^2 - x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 4.$$

$$\bullet x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$	
x^2-x-12		$+$	0	$-$	0	$+$
$x-1$		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

$$\text{Άρα } x \in (-\infty, -3] \cup (1, 4].$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ i) } \frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} &\Leftrightarrow \frac{x}{3x-5} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \leq 0, \text{ με } x \neq 1, x \neq \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

Έστω $P(x) = (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)$. Έχουμε:

- $3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$.
- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $x^2-7x+10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ ή } x \geq 5$.

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	2	5	$+\infty$		
$3x-5$	-	-	0	+	+	+		
$x-1$	-	0	+	+	+	+		
$x^2-7x+10$	+	+	+	0	-	0	+	
$P(x)$	+	0	-	0	+	-	0	+

$$\text{Άρα } \frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \leq 0,$$

$$x \neq 1, x \neq \frac{5}{3} \Leftrightarrow x \in (1, \frac{5}{3}) \cup [2, 5].$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{x}{2x-1} - \frac{3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0. \\
 &\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2) \geq 0, \text{ με } x \neq -2, x \neq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Έστω $P(x) = (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	3	$+\infty$		
x^2-4x+3	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

$$\text{Άρα } x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, 1] \cup [3, +\infty).$$

4. Έχουμε: $\left| \frac{x+1}{x} \right| > 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < -2 \quad \text{ή} \quad \frac{x+1}{x} > 2, x \neq 0.$

$$\bullet \frac{x+1}{x} < -2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x} < 0.$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 0.$$

$$\bullet \frac{x+1}{x} > 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Άρα $x \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, 1).$

5. Για να έχει η εταιρεία κέρδος πρέπει να έσοδα να είναι περισσότερα από το κόστος:

$$E > K \Leftrightarrow 5x - x^2 > 7 - x \Leftrightarrow 5x - x^2 - 7 + x > 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 7 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 < 0.$$

Οι ρίζες του τριωνόμου είναι $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ και $x_2 = 3 + \sqrt{2}$. Επομένως

$$x^2 - 6x + 7 < 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}.$$

ή, προσεγγιστικά, $1,59 < x < 4,41$.

6. Έχουμε: $\frac{20t}{t^2+4} > 4 \Leftrightarrow \frac{20t}{t^2+4} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{20t - 4t^2 - 16}{t^2+4} > 0.$

$$\Leftrightarrow \frac{-4t^2 + 20t - 16}{t^2+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 20t + 16}{t^2+4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4(t^2 - 5t + 4)(t^2 + 4) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 4.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 4.1. Η έννοια της συνάρτησης

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Πρέπει $x - 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το: $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
ii) Πρέπει $x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 4$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το:
 $\mathbb{R} - \{0, 4\} = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$.
iii) Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει πάντοτε. Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathbb{R}$.
iv) Πρέπει $|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(0, +\infty)$.
2. i) Πρέπει: $x - 1 \geq 0$ και $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1, 2]$.
ii) Πρέπει $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$
αφού οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4$ είναι οι αριθμοί -2 και 2 .
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
iii) Ομοίως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1, 3]$ αφού οι ρίζες του τριωνύμου και οι αριθμοί 1 και 3 .
iv) Πρέπει $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ και $x \neq 1$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο
 $[0, +\infty) - \{1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.
3. Είναι
 $f(-5) = (-5)^3 = -125$.
 $f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
 $f(6) = 2 \cdot 6 + 3 = 15$.
4. i) Έστω x ο ζητούμενος φυσικός αριθμός. Τότε, ο τύπος της συνάρτησης θα προκύψει ως εξής:

$$x \xrightarrow{+1} x+1 \xrightarrow{\cdot 4} (x+1) \cdot 4 \xrightarrow{+x^2} (x+1)4 + x^2.$$

Επομένως, θα είναι $f(x) = (x+1)4 + x^2 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

δηλαδή $f(x) = (x+2)^2$, $x \in \mathbb{N}$. (1)

Έτσι θα έχουμε $f(0) = 2^2 = 4$, $f(1) = 3^2 = 9$, $f(2) = 4^2 = 16$ και $f(3) = 5^2 = 25$.

ii) Επειδή $x > 0$, έχουμε:

$$\checkmark f(x) = 36 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x+2 = 6 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\checkmark f(x) = 49 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = 5.$$

$$\checkmark f(x) = 100 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 8.$$

$$\checkmark f(x) = 144 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 12^2 \Leftrightarrow x = 10.$$

5. i) Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} + 5 = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

ii) Για $x \neq 0, 4$ έχουμε:

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2, \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} = 2$$

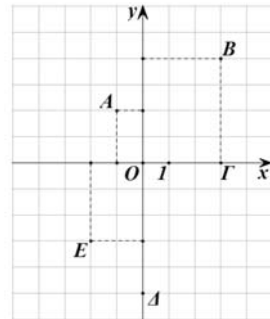
$$\Leftrightarrow x+4 = 2x \Leftrightarrow x = 4, \text{ αδύνατη.}$$

iii) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2.$$

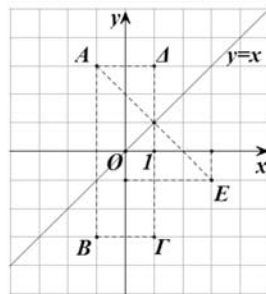
§ 4.2. Γραφική παράσταση συνάρτησης Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα σημεία είναι αποτυπωμένα στο διπλανό σχήμα.



2. Πρέπει $2 < x < 5$ και $1 < y < 6$.

3. Το συμμετρικό του $A(-1, 3)$,
 i) ως προς τον άξονα x' είναι το $B(-1, -3)$
 ii) ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το $\Delta(1, 3)$
 iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{xOy}$
 είναι το $E(3, -1)$
 iv) ως προς την αρχή των αξόνων είναι
 το $\Gamma(1, -3)$.



4. Με βάση τον τύπο $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ της απόστασης των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουμε

i) $(OA) = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

ii) $(AB) = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

iii) $(\Delta B) = \sqrt{(1+3)^2 + 0^2} = 4$.

iv) $(\Delta B) = \sqrt{0^2 + (4+1)^2} = 5$.

5. i) Είναι

$$(AB) = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(-3-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}.$$

Άρα, $(AB) = (A\Gamma)$, οπότε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή το A.

- ii) Είναι

$$(AB) = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ οπότε } (AB)^2 = 8.$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}, \text{ οπότε } (A\Gamma)^2 = 18.$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(4+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}, \text{ οπότε } (B\Gamma)^2 = 26.$$

Παρατηρούμε ότι $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$. Άρα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την A.

6. Είναι

$$(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = 5.$$

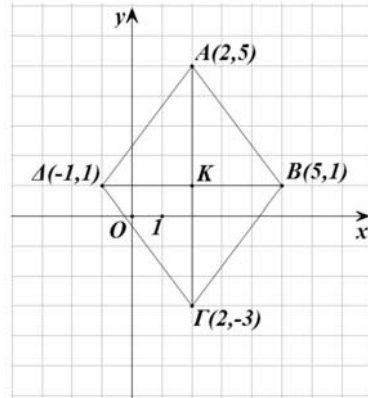
$$(ΒΓ) = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = 5.$$

$$(ΓΔ) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = 5.$$

$$(ΔΑ) = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = 5.$$

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Σχόλιο: Άμεσα προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, αφού οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.



7. Πρέπει

i) $f(2) = 6 \Leftrightarrow 2^2 + k = 6 \Leftrightarrow k = 2.$

ii) $g(-2) = 8 \Leftrightarrow k(-2)^3 = 8 \Leftrightarrow k = -1.$

iii) $h(3) = 8 \Leftrightarrow k\sqrt{4} = 8 \Leftrightarrow k = 4.$

8. i) Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

- Για $y = 0$ έχουμε $x = 4$, οπότε η $y = f(x)$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(4, 0)$.
- Για $x = 0$ έχουμε $y = -4$, οπότε η $y = f(x)$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$.

Ομοίως

ii) Η g έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και τέμνει

- τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A_1(2, 0)$ και $A_2(3, 0)$ και
- τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B(0, 6)$.

iii) Η h έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- έχει με τον άξονα $x'x$ κοινό σημείο το $A(1, 0)$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο το $B(0, 1)$.

iv) Η q έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 1)$.

v) Η φ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $[1, +\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1, 0)$ και
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

vi) Η ψ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ δύο κοινά σημεία, τα $A_1(-2, 0)$ και $A_2(2, 0)$.
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

9. i) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = -1$. Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0, -1)$.

Για $y = 0$ έχουμε $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $B_1(-1, 0)$ και $B_2(1, 0)$.

ii) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

10. i) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Άρα $x = 5$ ή $x = 2$.

Για $x = 2$, $g(2) = 4 - 6 = -2$.

Για $x = 5$, $g(5) = 4$.

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα $A(2, -2)$ και $B(5, 4)$.

ii) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

§ 4.3. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Όπως είναι γνωστό, για το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $y = ax + \beta$ ισχύει: $\alpha = \varepsilon\omega$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η $y = ax + \beta$ με τον άξονα $x'x$. Επομένως, θα έχουμε

i) $\varepsilon\omega = 1$, οπότε $\omega = 45^\circ$.

ii) $\varepsilon\omega = \sqrt{3}$, οπότε $\omega = 60^\circ$.

iii) $\varepsilon\omega = -1$, οπότε $\omega = 135^\circ$.

iv) $\varepsilon\omega = -\sqrt{3}$, οπότε $\omega = 120^\circ$.

2. Αν θέσουμε $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta y = y_2 - y_1$, έχουμε:

i) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1$.

ii) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1$.

iii) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 1}{-1 - 2} = 0$.

iv) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 3}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2$.

3. Σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = ax + \beta$.

i) Επειδή $\alpha = -1$ και $\beta = 2$, η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -x + 2$.

ii) Επειδή $\alpha = \varepsilon\phi 45^\circ = 1$ και $\beta = 1$, η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = x + 1$.

iii) Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη με την $y = 2x - 3$ θα έχει ίδια κλίση με αυτή, οπότε θα είναι $a = 2$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $y = 2x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ θα ισχύει $1 = 2 \cdot 1 + \beta$ οπότε θα έχουμε $\beta = -1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 2x - 1$.

4. Όπως είδαμε στην άσκηση 2, σε όλες τις περιπτώσεις η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$.

i) Επειδή $a = 1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ θα ισχύει $2 = 1 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 1$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $y = x + 1$.

ii) Επειδή $a = -1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = -x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ θα ισχύει $2 = -1 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 3$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -x + 3$.

iii) Επειδή $a = 0$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$, η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 1$.

iv) Επειδή $a = -2$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = -2x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ θα ισχύει $3 = -2 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 5$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x + 5$.

5. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $C = a \cdot F + \beta$ επειδή το νερό παγώνει στους 0°C ή στους 32°F , θα ισχύει $0 = a \cdot 32 + \beta$. (1)

Επειδή, επιπλέον, το νερό βράζει στους 100°C ή στους 212°F , θα ισχύει $100 = a \cdot 212 + \beta$. (2)

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε $100 = a \cdot 180$, οπότε

$a = \frac{5}{9}$ και επομένως $\beta = -\frac{5}{9} \cdot 32$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{5}{9} \cdot 32 \Leftrightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

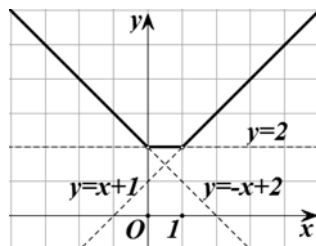
Αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον αριθμό T , τότε θα ισχύει

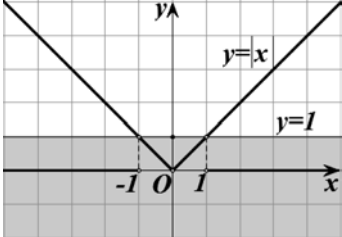
$$T = \frac{5}{9}(T - 32) \Leftrightarrow 9T = 5T - 5 \cdot 32 \Leftrightarrow 4T = -5 \cdot 32 \Leftrightarrow T = -40.$$

Άρα οι -40°F αντιστοιχούν στους -40°C .

6. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται:

- ✓ Από το τμήμα της ευθείας $y = -x + 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in (-\infty, 0]$.
- ✓ Από το τμήμα της ευθείας $y = 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [0, 1]$ και



- ✓ Από το τμήμα της ευθείας $y = x + 1$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [1, +\infty)$.
7. i) Οι ρίζες εξίσωσης $f(x) = 1$ είναι οι τετμημένες κοινών σημείων της $y = f(x)$ και της ευθείας $y = 1$, δηλαδή οι αριθμοί -1 και 1 .
Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x$ είναι τετμημένες των κοινών σημείων της $y = f(x)$ και της ευθείας $y = x$, δηλαδή οι αριθμοί -2 , 0 και 1 .
- ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y = f(x)$ τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 1$, δηλαδή οι αριθμοί $x \in (-\infty, 1) - \{-1\}$.
Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq x$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y = f(x)$ τα οποία βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y = x$ ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα σημεία $x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty)$.
8. i) Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = |x|$ και $g(x) = 1$ δίνονται στο διπλανό σχήμα.
- 
- ✓ Οι λύσεις της ανίσωσης $|x| \leq 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y = |x|$ που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 1$ ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα $x \in [-1, 1]$.
- ✓ Οι λύσεις ανίσωσης $|x| > 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y = |x|$ που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y = 1$, δηλαδή τα $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- ii) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι για $\rho > 0$ ισχύει
 $|x| \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq x \leq \rho$.
 $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho$.
 Επομένως
 $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.
 $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1$.

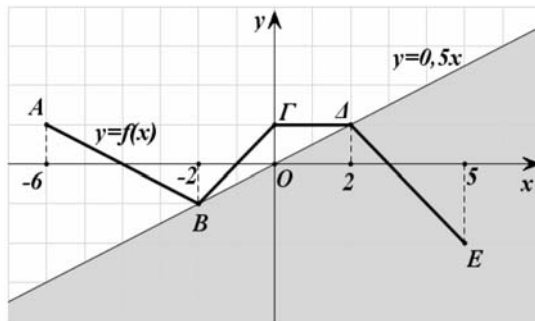
Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι
 $f(-6) = 1, f(-5) = \frac{1}{2}, f(-4) = 0, f(-3) = -\frac{1}{2}, f(-2) = -1, f(-1) = 0$.
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 0, f(4) = -1, f(5) = -2$.
- ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = a$ είναι οι τετμημένες του σημείου της C_f που έχουν τεταγμένη a . Επομένως
 ✓ Οι ρίζες της $f(x) = 0$ είναι οι αριθμοί $-4, -1$ και 3 .
 ✓ Οι ρίζες της $f(x) = -1$ είναι οι αριθμοί -2 και 4 .
 ✓ Οι ρίζες της $f(x) = 1$ είναι ο αριθμός -6 και όλοι οι αριθμοί του κλειστού διαστήματος $[0, 2]$.

- iii) Η ευθεία ΒΔ είναι εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία $B(-2, -1)$ και $\Delta(2, 1)$ θα ισχύει $-1 = a(-2) + \beta$ και $1 = a \cdot 2 + \beta$.

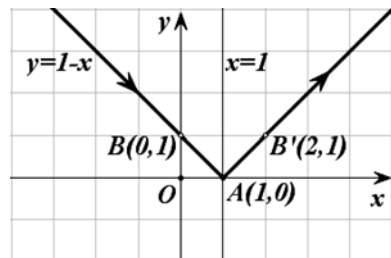
Οπότε, με πρόσθεση των εξισώσεων αυτών κατά μέλη, βρίσκουμε ότι $\beta = 0$ και επομένως θα έχουμε $a = 0,5$.

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΒΔ θα είναι η $y = 0,5x$.



Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0,5x$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 0,5x$, ή πάνω σ' αυτή. Είναι δηλαδή όλα τα $x \in [2, 5] \cup \{-2\}$.

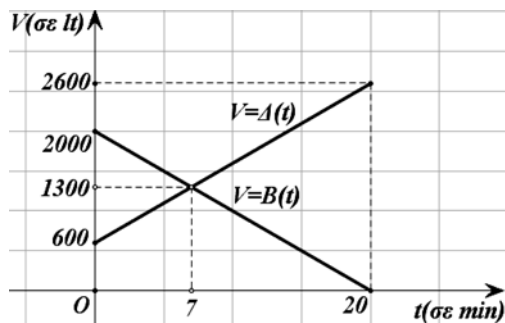
2. Η ανάκλαση γίνεται στο σημείο $A(1, 0)$ και η ανακλωμένη είναι συμμετρική της ημιευθείας AB (σχ.) ως προς άξονα την ευθεία $x = 1$. Επομένως, η ανακλώμενη θα είναι η ημιευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B'(2, 1)$, όπου A η αρχή της.



Αν $y = ax + \beta$, $x \geq 1$ είναι η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας, τότε αυτή θα επαλυθεύεται από τα ζεύγη $(1, 0)$ και $(2, 1)$. Δηλαδή θα ισχύουν $0 = a + \beta$ και $1 = 2a + \beta$, από τις οποίες βρίσκουμε $a = 1$ και $\beta = -1$. Επομένως η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας είναι: $y = x - 1$, $x \geq 1$.

3. i) α) Αν $B(t)$ είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στο βυτιοφόρο κατά τη χρονική στιγμή t , τότε θα ισχύει $B(t) = 2000 - 100t$ και επειδή πρέπει $B(t) \geq 0$ θα ισχύει $2000 - 100t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 20$. Επομένως, θα έχουμε $B(t) = 2000 - 100t$, $0 \leq t \leq 20$.
β) Αν $\Delta(t)$ είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στη δεξαμενή κατά τη χρονική στιγμή t , τότε θα ισχύει $\Delta(t) = 600 + 100t$, $0 \leq t \leq 20$.

- ii) Οι γραφικές παραστάσεις της παραπάνω συνάρτησης είναι τα ευθύγραμμα τμήματα του παρακάτω σχήματος. Η χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο ποσότητες είναι ίσες είναι η λύση της εξίσωσης $B(t) = \Delta(t)$, η οποία γράφεται $2000 - 100t = 600 + 100t \Leftrightarrow 200t = 1400 \Leftrightarrow t = 7$. Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η $t = 7\text{min}$.



4. Για να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle M\Gamma\Delta$ αφαιρούμε από το εμβαδόν του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων

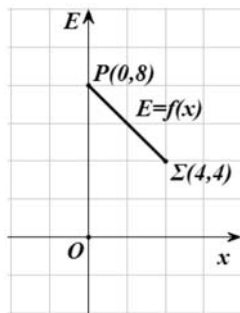
τριγώνων $\triangle AM\Delta$ και $\triangle BM\Gamma$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} E_{M\Gamma\Delta} &= E_{AB\Gamma\Delta} - E_{AM\Delta} - E_{BM\Gamma} \\ &= \frac{4+2}{2} \cdot 4 - \frac{x \cdot 4}{2} - \frac{(4-x) \cdot 2}{2} \\ &= 12 - 2x - (4-x) = -x + 8. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = -x + 8, \text{ με } 0 \leq x \leq 4.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $P(0, 8)$ και $\Sigma(4, 4)$.



5. i) Το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση της μορφής $h = at + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $\Gamma(0, 20)$ θα ισχύει $0 = 3a + \beta$ και $20 = \beta$, οπότε θα είναι $a = -\frac{20}{3}$ και $\beta = 20$. Επομένως, το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση

$$h = -\frac{20}{3}t + 20, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Άρα η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_1 είναι η

$$h_1(t) = -\frac{20}{3}t + 20, \quad 0 \leq t \leq 3. \quad (1)$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_2 είναι η

$$h_2(t) = -5t + 20, \quad 0 \leq t \leq 4. \quad (2)$$

ii) Το κερύ k_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερύ k_1 τη χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει $h_2(t) = 2h_1(t)$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} h_2(t) = 2h_1(t) &\Leftrightarrow -\frac{2\theta}{4}t + 2\theta = 2\left(-\frac{2\theta}{3}t + 2\theta\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = -\frac{2}{3}t + 2 \Leftrightarrow -3t + 12 = -8t + 24 \\ &\Leftrightarrow 5t = 12 \Leftrightarrow t = 2,4. \end{aligned}$$

Άρα, το k_2 είχε το διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t = 2,4h$.

iii) Αν εργαστούμε όπως στο ερώτημα i) θα βρούμε ότι

$$h_1(t) = -\frac{v}{3}t + v, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

$$h_2(t) = -\frac{v}{4}t + v, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

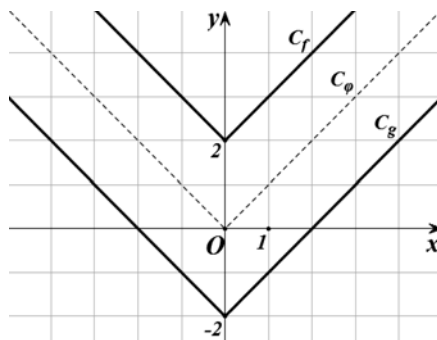
$$\begin{aligned} \text{οπότε, } h_2(t) = 2h_1(t) &\Leftrightarrow -\frac{v}{4}t + v = 2\left(-\frac{v}{3}t + v\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right) \Leftrightarrow t = 2,4. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το k_2 θα έχει διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t = 2,4h$, ανεξάρτητα του αρχικού ύψους v των κερών k_1 και k_2 .

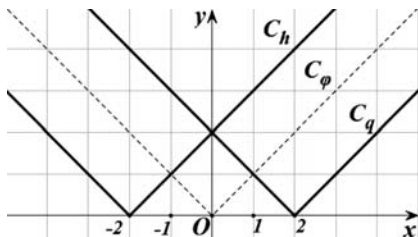
§ 4.4. Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Α' ΟΜΑΔΑΣ

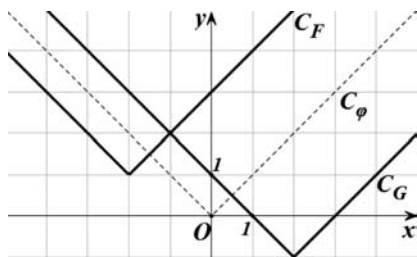
1. Όπως είδαμε στην §4.3, η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$, αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).



2. Η γραφική παράσταση της $h(x) = |x + 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της $q(x) = |x - 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).

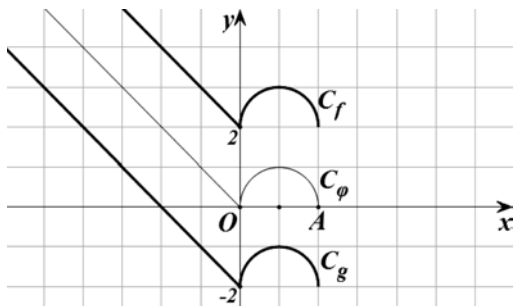


3. Αρχικά χαράσσουμε την $y = |x + 2|$, που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 2| + 1$, που, όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = |x + 2|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της $F(x) = |x + 2| + 1$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (σχήμα).

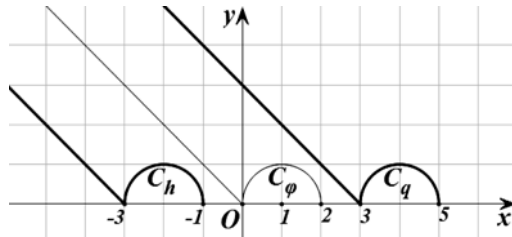


Ομοίως, η γραφική παράσταση της $G(x) = |x - 2| - 1$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

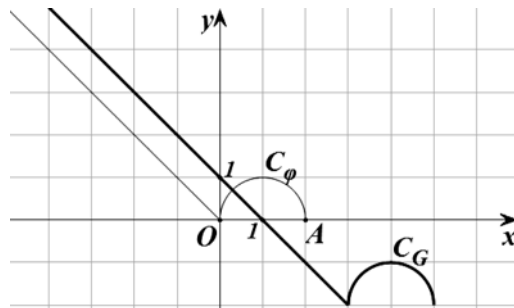
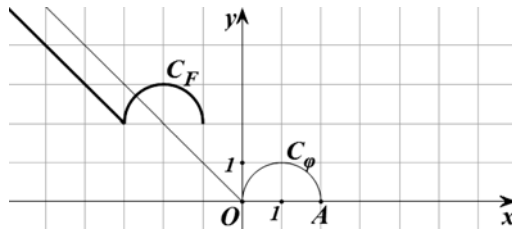
4. i)



ii)



iii)



5. i) $f(x) = 2(x - 2)^2 - 1 + 1 = 2(x - 2)^2$.
 ii) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1 - 2 = 2(x - 3)^2 - 3$.
 iii) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 1 + 1 = 2(x + 2)^2$.
 iv) $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1 - 2 = 2(x + 3)^2 - 3$.

§ 4.5. Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες συνάρτησης Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
 • Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
 • Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

2. • Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
 • Η g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.
 • Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και για $x = 1$ το $h(-1) = h(1) = -2$, ενώ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
3. i) Αρκεί να δείξουμε τα $f(x) \geq f(3)$. Έχουμε

$$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$
 ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \leq g(1)$. Έχουμε

$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2, \text{ που ισχύει.}$$
4. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4$, άρα η f_1 είναι άρτια.
 ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1$, άρα η f_2 είναι άρτια.
 iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $f_3(-x) = |-x + 1|$, οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού
 $f_3(-1) \neq \pm f_3(1)$.
 iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(x)$, άρα η f_4 περιττή.
 v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα, η f_5 δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

$$f_5(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}, \text{ άρα ούτε άρτια, ούτε περιττή.}$$
 vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f_6(x), \text{ άρα } f_6 \text{ είναι περιττή.}$$
5. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x).$$
 Άρα η f_1 είναι άρτια.
 ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_3(-x) = |-x - 1| - |-x + 1| = |x + 1| - |x - 1| = -f_3(x).$$

Άρα η f_3 είναι περιττή.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι περιττή, διότι ισχύει

$$f_4(x) = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην i), θα αποδείξουμε ότι:

v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι $f_5(-x) = f_5(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και είναι άρτια, διότι $f_6(-x) = f_6(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

6. i) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$. Άρα η f είναι περιττή.

ii) Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα η g είναι άρτια.

iii) Η C_h δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον $y'y$, ούτε κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$. Άρα η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

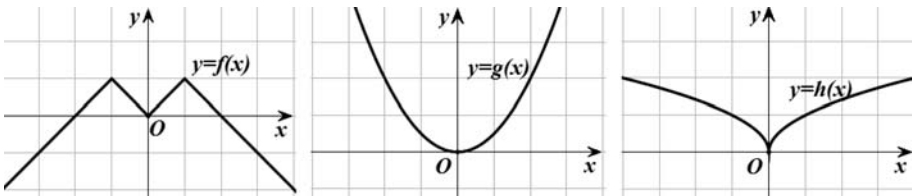
7. Ομοίως

i) Η f είναι άρτια.

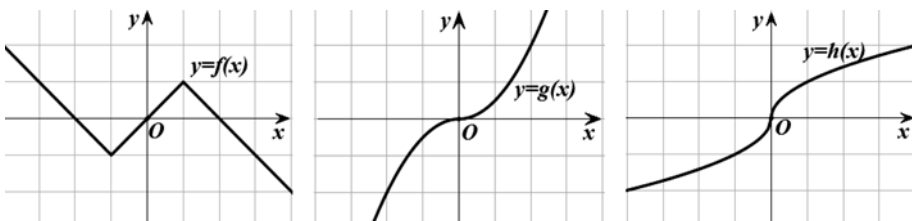
ii) Η g είναι περιττή.

iii) Η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

8. α) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1 , C_2 και C_3 ως προς τον άξονα $y'y$.



β) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1 , C_2 και C_3 ως προς την αρχή των αξόνων.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 5.1. Μελέτης της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

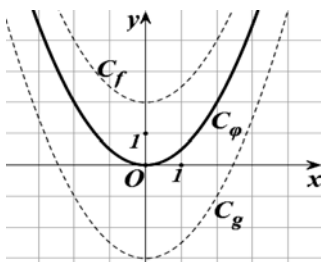
1. Η καμπύλη είναι μια παραβολή με κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα y . Επομένως, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = ax^2$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, οι συντεταγμένες του σημείου A θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Άρα θα ισχύει $2 = a \cdot 1^2 \Leftrightarrow a = 2$.

Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 2x^2$.

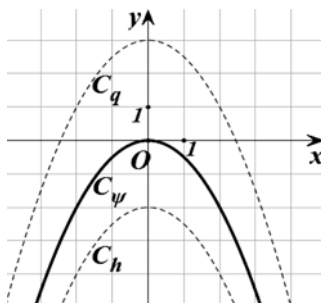
2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0,5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα πάνω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y (σχ.).

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = 0,5x^2 + 2$ και $g(x) = 0,5x^2 - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = 0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



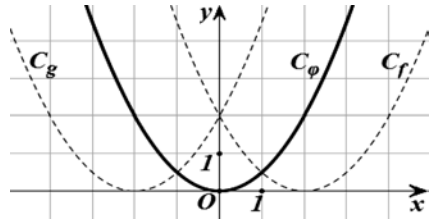
- ii) Η γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0,5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα κάτω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y (σχ.).

Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $h(x) = -0,5x^2 - 2$ και $q(x) = -0,5x^2 + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

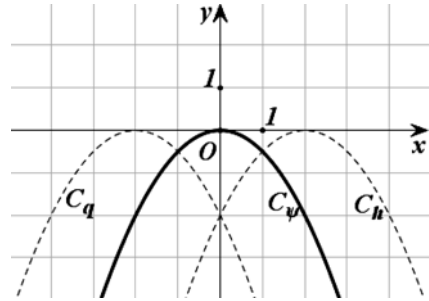


Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ , h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ , f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να παίρναμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ , f και g ως προς τον άξονα x .

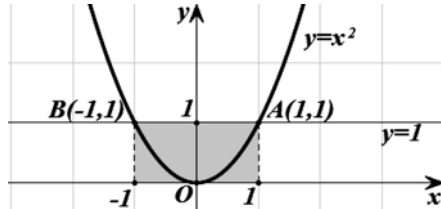
3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0,5x^2$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 0,5(x-2)^2$ και $g(x) = 0,5(x+2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = 0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.



- ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0,5x^2$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0,5(x-2)^2$ και $q(x) = -0,5(x+2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0,5x^2$, της πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.



4. i) Η γραφική παράσταση των $f(x) = x^2$ είναι η παραβολή $y = x^2$ του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία $y = 1$ του ίδιου σχήματος.



Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία $A(1, 1)$ και $B(-1, 1)$ που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

Επειδή

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

η ανίσωση $x^2 \leq 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $x^2 > 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g . Επομένως, θα έχουμε

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1.$$

- ii) Έχουμε

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

$$x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

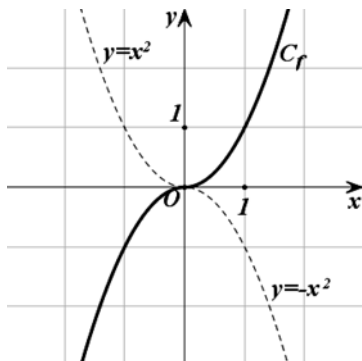
διότι το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y = -x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.



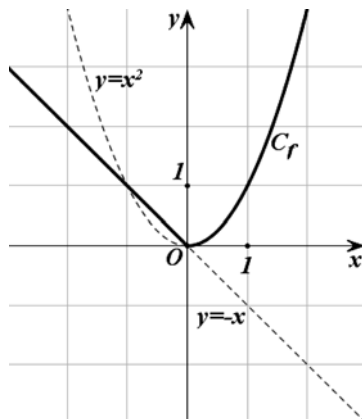
2. Η γραφική παράστασης της

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

αποτελείται από το τμήμα της ευθείας $y = -x$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι

- ✓ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- ✓ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.



3. i) Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι

α) Στο διάστημα $(0, 1)$ από όλες τις γραφικές παραστάσεις χαμηλότερα βρίσκεται η $y = x^3$, έπειτα η $y = x^2$, έπειτα η $y = x$ και τέλος η $y = \sqrt{x}$. Επομένως, αν $x \in (0, 1)$ τότε $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

β) Στο διάστημα $(1, +\infty)$ συμβαίνει το αντίθετο. Επομένως αν $x \in (1, +\infty)$, τότε $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

ii) • Έστω $0 < x < 1$. Τότε

- ✓ $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^2(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x^2 < x \Leftrightarrow x(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 < x$, που ισχύει από πριν.

$$\text{Άρα } x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}.$$

- Έστω $x > 1$. Αν εργαστούμε αναλόγως, βρίσκουμε ότι $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

4. Αν $x > 0$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, τότε η τεταγμένη του θα είναι $y = x^2$. Άρα το Α θα έχει συντεταγμένες (x, x^2) , οπότε το σημείο Β, που είναι συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα $y'y$, θα έχει συντεταγμένες $(-x, x^2)$. Επομένως, θα έχουμε:
- $$(AB) = 2x \quad \text{και} \quad (OA) = (OB) = \sqrt{x^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 + x^4}.$$

Επομένως, το τρίγωνο $\triangle OAB$ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} (OA) &= (AB) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + x^4} \Leftrightarrow (2x)^2 = x^2 + x^4 \\ &\Leftrightarrow x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3, \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3}, \text{ διότι } x > 0. \end{aligned}$$

§ 5.2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $y = \frac{a}{x}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$, οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

$$\text{Επομένως θα ισχύει } 1 = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2.$$

$$\text{Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η } y = \frac{2}{x}.$$

2. i) Η γραφική παράσταση

$$\text{της } \varphi(x) = \frac{1}{x} \text{ είναι μια}$$

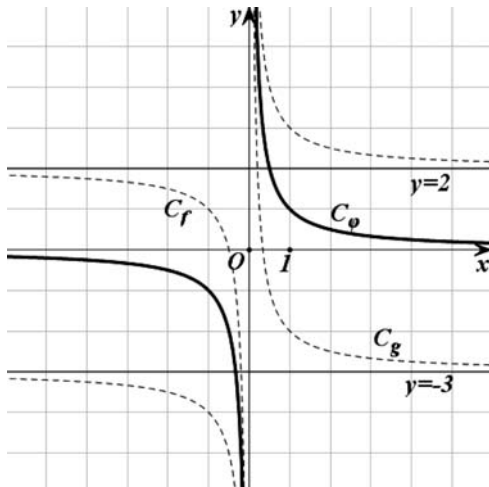
υπερβολή με κλάδους στο 1° και 3° τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2 \text{ και}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 3 \text{ προκύπτουν}$$

από κατακόρυφη μετα-



τόπιση της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

ii) Η γραφική παράσταση

της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$ είναι μια

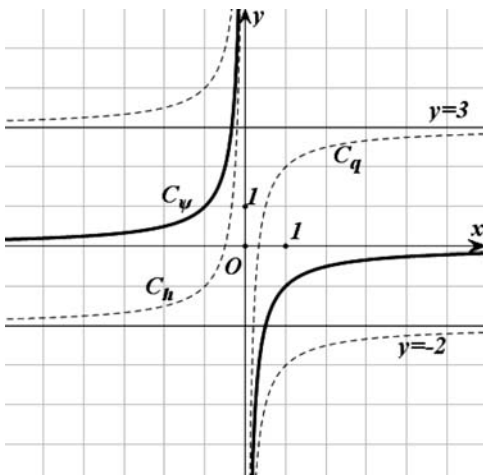
υπερβολή με κλάδους στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).

Η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$h(x) = -\frac{1}{x} - 2$ και

$q(x) = -\frac{1}{x} + 3$ προκύ-

πτουν από κατακόρυφες



μετατοπίσεις της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες

προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ , h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ , f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να πάρουμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ , f και g ως προς τον άξονα $x'x$.

3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της

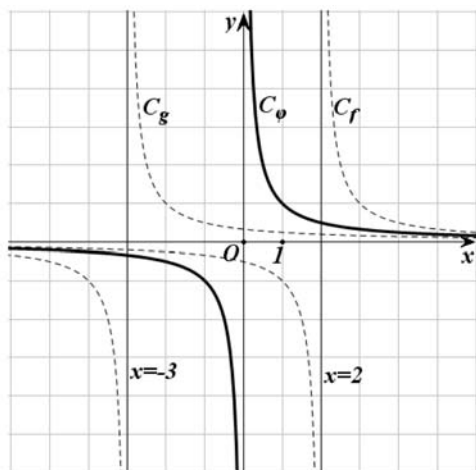
$\varphi(x) = \frac{1}{x}$, όπως στην

άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ και

$g(x) = \frac{1}{x+3}$, προκύπτουν

από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής



$y = \frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της

$$\psi(x) = -\frac{1}{x}, \text{ όπως στην}$$

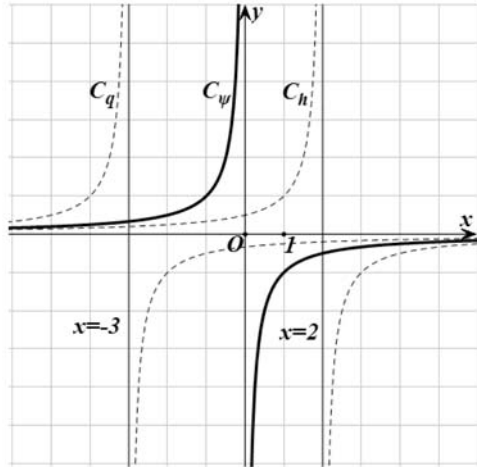
άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$h(x) = -\frac{1}{x-2} \text{ και}$$

$$q(x) = -\frac{1}{x+3}$$

προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής

$y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

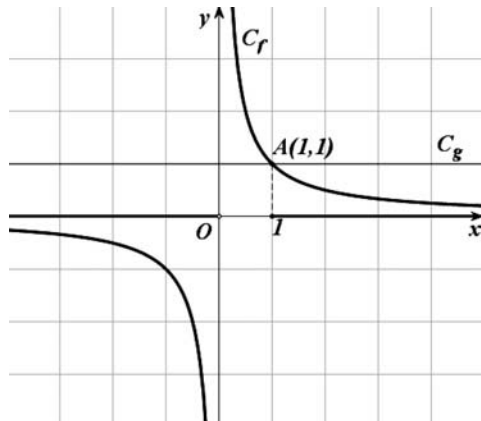


4. i) Η γραφική παράσταση

$$\text{της } f(x) = \frac{1}{x} \text{ είναι η}$$

υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 1)$.

Επομένως:



- $\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x \geq 1$
- $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0 < x < 1$

ii) Έχουμε

$$\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) \leq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1.$$

$$\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

5. i) Η γραφική παράσταση

της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ είναι η παραβολή C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 1)$. Επειδή

$$\frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ και}$$

$$\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

η ανίσωση $\frac{1}{x} \leq x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται

κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $\frac{1}{x} > x^2$ αληθεύει για

εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

Επομένως, θα έχουμε

$$\bullet \frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1.$$

$$\bullet \frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

ii) Έχουμε

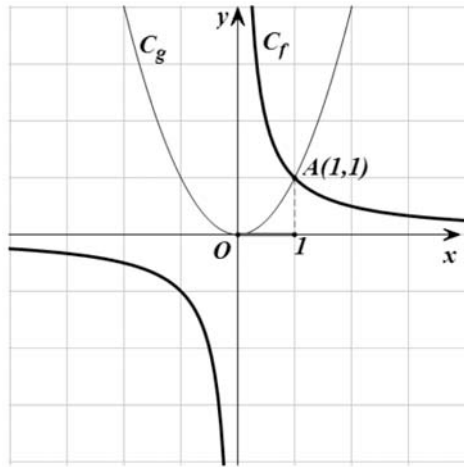
$$\bullet \frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^3}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1.$$

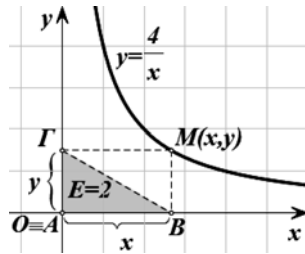


Επομένως

$$\bullet \frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

6. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε $AB = OA = x > 0$ και $AG = OG = y > 0$. Τότε το εμβαδό E του τριγώνου είναι $E = \frac{xy}{2}$, οπότε έχουμε

$$\frac{xy}{2} = 2 \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}, \quad (1).$$



Η γραφική παράσταση της (1) είναι υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{4}{x}$ και φαίνεται στο σχήμα.

§ 5.3. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έχουμε

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3.$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

- ii) Έχουμε

$$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 = -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 = -2(x - 2)^2 - 1.$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = -2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

2. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ είναι $a = 2 > 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ το } f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{3}{2}.$$

- β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$ είναι $a = -3 < 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-5}{6}, \text{ το } g\left(\frac{-5}{6}\right) = -3\left(\frac{-5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{-5}{6}\right) + 2 = \frac{49}{12}.$$

3. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ είναι $a = 2 > 0$, οπότε αυτή

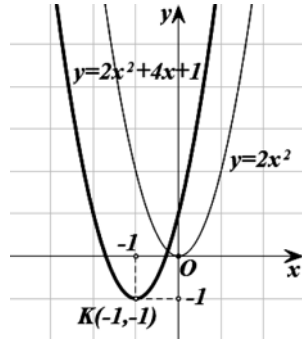
✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -1, \text{ το } f(-1) = -1.$$

- ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.
Ακόμη η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και
✓ έχει κορυφή το σημείο $K(-1, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$,
✓ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία

$$A\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ και } B\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

οι τετμημένες των οποίων, είναι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + 4x + 1$, ενώ τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, 1)$.

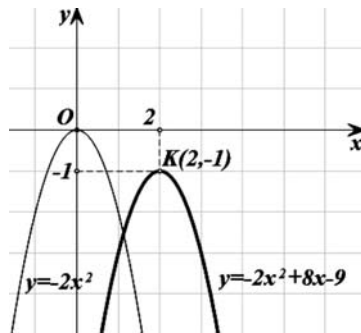


- β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$ είναι $a = -2 < 0$, οπότε αυτή

✓ Παρουσιάζει μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2, \text{ το } g(2) = -1.$$

- ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Ακόμη η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και
✓ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$,
✓ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -9)$ ενώ, δεν τέμνει τον άξονα $x'x$, γιατί το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.



4. Γνωρίζουμε ότι

ι) Όταν $a > 0$, τότε η παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$ είναι ανοιχτή προς τα πάνω, ενώ όταν $a < 0$, τότε η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω. Επομένως, θετικό a έχουν τα τριώνυμα f_1, f_3 και f_6 , ενώ αρνητικό a έχουν τα τριώνυμα f_2, f_4, f_5 και f_7 .

ii) Το γ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της παραβολής $y = ax^2 + bx + \gamma$ με τον άξονα $y'y$. Επομένως, θετικό γ έχουν τα τριώνυμα f_1 και f_5 , αρνητικό γ έχουν τα τριώνυμα f_2, f_3, f_6 και f_7 , ενώ γ ίσον με μηδέν έχει το f_4 .

iii) Η τεταγμένη της κορυφής K της παραβολής $y = ax^2 + bx + \gamma$ δίνεται

από τον τύπο $x_K = \frac{-\beta}{2\alpha}$, οπότε ισχύει $\beta = -2\alpha \cdot x_K$. Επομένως

- ✓ για την f_2 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
- ✓ για την f_3 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta < 0$,
- ✓ για την f_4 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
- ✓ για την f_5 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
- ✓ για την f_6 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta > 0$, και
- ✓ για την f_7 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta < 0$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+	-	+	-	-	+	-
β	0	+	-	+	+	+	-
γ	+	-	-	0	+	-	-
Δ	-	0	+	+	+	+	-

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παραβολή εφάπτεται του $x'x$ μόνο αν είναι $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta \text{ηλαδή } (k+1)^2 - 4k &= 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 - 4k = 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1. \end{aligned}$$

ii) Η παραβολή έχει τον $y'y$ άξονα συμμετρίας μόνο αν η κορυφή της βρίσκεται στον άξονα $y'y$, δηλαδή αν και μόνο αν $\frac{-\beta}{2\alpha} = 0$. Επομένως πρέπει

$$-\frac{(k+1)}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

iii) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο

$$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right) \text{ δηλαδή το σημείο } K\left(-\frac{k+1}{2}, f\left(-\frac{k+1}{2}\right)\right).$$

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $f\left(-\frac{k+1}{2}\right) = -4$, που διαδοχικά γράφεται

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right) + k &= -4 \Leftrightarrow (k+1)^2 - 2(k+1)^2 + 4k = -16 \\ &\Leftrightarrow -(k+1)^2 + 4k + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow -k^2 - 2k - 1 + 4k + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow -k^2 + 2k - 1 + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $k_1 = -3$ και $k_2 = 5$.

- Για $k = -3$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = 1$, ενώ
- Για $k = 5$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = -3$.

2. i) Επειδή η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω, θα είναι $a < 0$.

ii) Επειδή η παραβολή τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(5, 0)$, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$.
Άρα είναι $\Delta > 0$.

iii) Επειδή $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και $\beta = 6$, θα έχουμε $1 + 5 = \frac{-6}{\alpha}$, οπότε θα είναι $\alpha = -1$.

Τέλος, επειδή $\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, θα έχουμε $1 \cdot 5 = \frac{\gamma}{-1}$, οπότε θα είναι $\gamma = -5$.

Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Αλλιώς. Επειδή το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$, θα είναι της μορφής $p(x) = a(x - \rho_1)(x - \rho_2) = a(x - 1)(x - 5) = ax^2 - 6ax + 5a$. Επομένως θα είναι $\beta = -6a$ και επειδή $\beta = 6$, θα έχουμε $a = -1$.

Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

3. i) Η περίμετρος L του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $L = 2(x + y)$ και επειδή δίνεται ότι $L = 20$, θα ισχύει $2(x + y) = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$. Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι ίσο με

$$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Άρα $f(x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$.

ii) Το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το τριώνυμο $f(x)$. Αυτό συμβαίνει όταν $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-10}{-2} = 5$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο, αφού για $x = 5$ είναι και $y = 5$. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με

$$f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25.$$

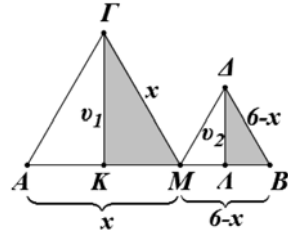
4. Αν θέσουμε $(AM) = x$, τότε θα είναι $(MB) = 6 - x$ (σχήμα). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΜ παίρνουμε.

$$v_1^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}, \text{ οπότε } v_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ομοίως από το τρίγωνο } \Lambda\Delta\text{Β παίρνουμε } v_2 = \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}.$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι τότε

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(AM)(ΚΓ) + \frac{1}{2}(MB)(\Lambda\Delta) \\ &= \frac{1}{2}x \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(6-x) \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(6-x)^2 \end{aligned}$$



$$\text{Άρα } E = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18), \text{ με } 0 \leq x \leq 6. \quad (1)$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν E είναι ελάχιστο για την τιμή του x , για την οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 18$ παρουσιάζει ελάχιστο. Επειδή $a = 1 > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3.$$

Επομένως το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν το M είναι το μέσο του AB .

5. Από το σχήμα βλέπουμε ότι για τις διαστάσεις x και y ισχύει

$$2x + 2x + 3y = 240 \Leftrightarrow 4x + 3y = 240 \Leftrightarrow y = \frac{240 - 4x}{3}. \quad (1)$$

Το εμβαδόν των δύο χώρων είναι

$$E = 2xy = 2x \left(\frac{240 - 4x}{3} \right) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x. \quad (2)$$

Για τη συνάρτηση $E(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x$ είναι $a = -\frac{8}{3} < 0$, οπότε αυτή

παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{-\frac{16}{3}} = 30$.

Τότε από την (1) παίρνουμε $y = \frac{240 - 4 \cdot 30}{3} = 40$.

Άρα, οι διαστάσεις που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν είναι $x = 30\text{m}$ και $y = 40\text{m}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

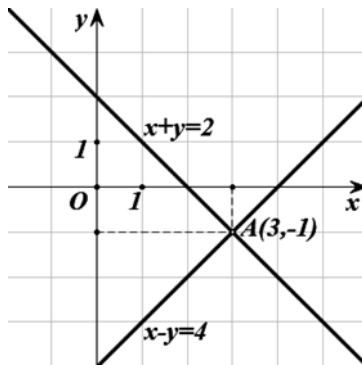
§ 6.1. Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3, -1)$.

ii)



2. i) $\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = 0 \\ x + y = 45. \end{cases} \quad (1)$

$\begin{cases} 8x - 7y = 0 \\ x + y = 45. \end{cases} \quad (2)$

Από τη (2) έχουμε $y = 45 - x$ και με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $8x - 7(45 - x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 315 + 7x = 0 \Leftrightarrow 15x = 315 \Leftrightarrow x = 21$.

Επομένως $y = 45 - 21 = 24$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(21, 24)$.

ii) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 3y - 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 4x + 3y = 8. \end{cases} \quad (1)$

$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 4x + 3y = 8. \end{cases} \quad (2)$

Με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $8x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Με αφαίρεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $6y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right)$.

3. i) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \Leftrightarrow 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 35 + 4y + 2 + 28 = 0 \Leftrightarrow 7x + 4y = 5.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \Leftrightarrow 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \Leftrightarrow 2x + 12 - 3y + 18 = 48$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y = 48 - 30 \Leftrightarrow 2x - 3y = 18.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} 7x + 4y = 5 & (1) \\ 2x - 3y = 18. & (2) \end{cases}$$

Απαλείφουμε το y

$$7x + 4y = 5 \quad (3)$$

$$2x - 3y = 18 \quad (4)$$

$$21x + 12y = 15$$

$$8x - 12y = 72$$

$$\hline 29x = 87, \text{ οπότε } x = \frac{87}{29} = 3.$$

Για $x = 3$ η (1) γίνεται $7 \cdot 3 + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y = -21 + 5 \Leftrightarrow 4y = -16$,
οπότε $y = -4$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3, -4)$.

- ii) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \Leftrightarrow 4(2x-1) = 12 \cdot 4 - 3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow 8x - 4 = 48 - 3y - 6 \Leftrightarrow 8x + 3y = 46.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \Leftrightarrow 3(x+3) - 3 \cdot 6 = 2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 9 - 18 = 2x - 2y \Leftrightarrow x + 2y = 9.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 8x + 3y = 46 & (1) \\ x + 2y = 9. & (2) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x = 9 - 2y$ και έχουμε

$$8(9 - 2y) + 3y = 46 \Leftrightarrow 72 - 16y + 3y = 46 \Leftrightarrow 13y = 26 \Leftrightarrow y = 2.$$

Η (2) για $y = 2$ γίνεται $x + 2 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow x = 5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(5, 2)$.

$$4. \text{ i) } \begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6. \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\text{ii) } \begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2. \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$\left(k, \frac{k+2}{2}\right), k \in \mathbb{R}.$$

5. i) Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 7 - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$$

$$\text{Επομένως } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3 \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (3, 1).

$$\text{ii) Το σύστημα γράφεται } \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11.$$

$$\text{Επομένως } x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2 \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2, -1).

$$6. \text{ i) } D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0, \text{ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.}$$

$$\text{ii) } D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0. \text{ Το σύστημα γράφεται}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$$

και επομένως έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

iii) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$. Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

7. i) $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} - 1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3} + 1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3} + 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ (\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)y = -(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$((\sqrt{3} + 1)(k + 1), k), k \in \mathbb{R}.$$

ii) $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} + 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} - 1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) - 2 = 2 - 2 = 0$.

Το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + 4y = 7 \\ x + 2(\sqrt{3} - 1)y = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + 4y = 7 \\ (\sqrt{3} + 1)x + 2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)y = 2(\sqrt{3} + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + 4y = 7 \\ (\sqrt{3} + 1)x + 4y = 2(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

8. i) Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\omega = 3x - 2y - 11$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

$$\begin{aligned} \bullet 2x - 5y - 2(3x - 2y - 11) &= 3 \Leftrightarrow 2x - 5y - 6x + 4y + 22 = 3 \\ &\Leftrightarrow -4x - y = -19 \Leftrightarrow 4x + y = 19 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bullet 5x + y - 2(3x - 2y - 11) &= 33 \Leftrightarrow 5x + y - 6x + 4y + 22 = 33 \\ &\Leftrightarrow -x + 5y = 11 \Leftrightarrow x - 5y = -11 \end{aligned} \quad (6)$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2×2 σύστημα

$$\begin{cases} 4x + y = 19 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$$

από τη λύση του οποίου κατά τα γνωστά βρίσκουμε $x = 4$ και $y = 3$. Με αντικατάσταση των τιμών των x και y στην (4) βρίσκουμε $\omega = -5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(4, 3, -5)$.

- ii) Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 3y - \omega + 2$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

$$\begin{aligned} \bullet 5(3y - \omega + 2) - y + 32 &= 4 \Leftrightarrow 15y - 5\omega + 10 - y + 32 = 4 \\ &\Leftrightarrow 14y - 2\omega = -6 \Leftrightarrow 7y - \omega = -3 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bullet 3(3y - \omega + 11) - 2y + 2\omega &= 2 \Leftrightarrow 9y - 3\omega + 6 - 2y + 2\omega = 2 \\ &\Leftrightarrow 7y - \omega = -4 \end{aligned} \quad (6)$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2×2 σύστημα

$$\begin{cases} 7y - \omega = -3 \\ 7y - \omega = -4 \end{cases} \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

- iii) Απαλείφουμε τους παρονομαστές και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6 \\ 3x + 2y + 2\omega = 10 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16. \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 4\omega - 2x + 6$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

$$\begin{aligned} \bullet 3x + 2(4\omega - 2x + 6) + 2\omega &= 10 \Leftrightarrow 3x + 8\omega - 4x + 12 + 2\omega = 10 \\ &\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bullet 5x + 3(4\omega - 2x + 6) - 2\omega &= 16 \Leftrightarrow 5x + 12\omega - 6x + 18 - 2\omega = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x + 10\omega = -2 \Leftrightarrow x - 10\omega = 2 \end{aligned} \quad (6)$$

Οι (5), (6) αποτελούν το σύστημα

$$\begin{cases} x - 10\omega = 2 \\ x - 10\omega = 2 \end{cases}$$

που έχει άπειρες λύσεις της μορφής με $x = 10k + 2$, $\omega = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Από την (4) έχουμε $y = 4k - 2(10k + 2) + 6 = -16k + 2$.

Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(10k + 2, -16k + 2, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έστω ότι η εξίσωση της ε_1 είναι $y = ax + \beta$. Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0, 2)$ και $(4, 0)$ έχουμε

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 0 + \beta \\ 0 = a \cdot 4 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ 4a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon_1: y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ε_2 είναι $y = x - 1$.

- ii) Οι εξισώσεις των δύο ευθειών ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

του οποίου η λύση, όπως φαίνεται και από το σχήμα είναι το ζεύγος $(2, 1)$.

2. Αν x είναι ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωμάτων, τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 16. \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν 10 δίκλινα και 16 τρίκλινα δωμάτια.

3. Αν τον αγώνα παρακολούθησαν x παιδιά και y ενήλικες τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 2200 \\ 1,5x + 4y = 5050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1500 \\ y = 700. \end{cases}$$

Άρα τον αγώνα παρακολούθησαν 1500 παιδιά και 700 ενήλικες.

4. Αφού για $T = 20$ είναι $R = 0,4$, έχουμε

$$0,4 = a \cdot 20 + \beta \Leftrightarrow 20a + \beta = 0,4 \quad (1)$$

Αφού για $T = 80$ είναι $R = 0,5$, έχουμε

$$0,5 = 80a + \beta \Leftrightarrow 80a + \beta = 0,5 \quad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 20a + \beta = 0,4 \\ 80a + \beta = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{600} \\ \beta = \frac{11}{30}. \end{cases}$$

$$\text{Άρα } R = \frac{1}{600} \cdot T + \frac{11}{30}.$$

5. Αν απαιτούνται x ml από το πρώτο διάλυμα και y ml από το δεύτερο διάλυμα, τότε $x + y = 100$. (1)

Η ποσότητα του υδροχλωρικού οξέως σε κάθε διάλυμα είναι $\frac{50}{100}x$ στο

πρώτο και $\frac{80}{100}y$ στο δεύτερο. Επομένως $\frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100$. (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{50}{100}x + \frac{80}{100}y = \frac{68}{100} \cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ 5x + 8y = 680. \end{cases}$$

Επομένως $5x + 8(100 - x) = 680 \Leftrightarrow 5x + 800 - 8x = 680$

$$\Leftrightarrow 5x - 8x = 680 - 800$$

$$\Leftrightarrow -3x = -120 \Leftrightarrow x = 40$$

οπότε $y = 60$.

Άρα πρέπει να αναμειξεί 40 ml από το πρώτο με 60 ml από το δεύτερο.

6. i) $2x + 4y = 3 \Leftrightarrow 4y = -2x + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{4}x + \frac{3}{4}$.

$$\text{Άρα } \lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x + 2y = \alpha \Leftrightarrow 2y = -x + \alpha \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Άρα } \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

ii) Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$, οι ευθείες ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Άρα δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες τέμνονται.

iii) Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν $\frac{3}{4} \neq \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 4\alpha \neq 6 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{2}$.

7. i) $\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^2 \\ x + \alpha y = 1. \end{cases}$

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1 - \alpha).$$

Αν $D \neq 0$ δηλαδή αν $\alpha \neq -1$ και $\alpha \neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, οπότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \text{ και}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}.$$

Άρα αν $\alpha \neq \pm 1$, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1}, \frac{-\alpha}{\alpha + 1}\right)$.

• Αν $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

που σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $\alpha = -1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

και είναι αδύνατο που σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii) $\begin{cases} ax - y = \alpha \\ x + ay = 1. \end{cases}$

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 \neq 0, \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Άρα οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

8. i) $D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 4 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 4 \cdot (-2) = -(\lambda^2 - 1) + 8$
 $= -\lambda^2 + 1 + 8 = -\lambda^2 + 9 = -(\lambda^2 - 9)$
 $= -(\lambda + 3)(\lambda - 3).$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -1 \cdot (\lambda + 1) - (-2)(-2) = -\lambda - 1 - 4 = -(\lambda + 5).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) - 4 = -2\lambda + 2 - 4 = -2\lambda - 2 = -2(\lambda + 1).$$

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μια λύση την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(\lambda + 5)}{-(\lambda + 3)(\lambda - 3)} = \frac{\lambda + 5}{(\lambda + 3)(\lambda - 3)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(\lambda + 1)}{-(\lambda + 3)(\lambda - 3)} = \frac{2(\lambda + 1)}{(\lambda + 3)(\lambda - 3)}.$$

• Αν $\lambda = 3$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = -1, \text{ που είναι αδύνατο.} \end{cases}$$

• Αν $\lambda = -3$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -4x - 2y = 1 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -1 \\ 4x + 2y = -2, \text{ που είναι αδύνατο.} \end{cases}$$

$$\text{ii) } D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2) - 5 = \mu^2 - 4 - 5 = \mu^2 - 9 = (\mu+3)(\mu-3).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2) - 25 = 5\mu + 10 - 25 = 5\mu - 15 = 5(\mu-3).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\mu-2) - 5 = 5\mu - 10 - 5 = 5\mu - 15 = 5(\mu-3).$$

- Αν $D \neq 0$, δηλαδή $\mu \neq \pm 3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{\mu+3}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{\mu+3}.$$

- Αν $\mu = 3$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + 5y = 5 \\ x + 5y = 5, \text{ που έχει άπειρες λύσεις τα ζεύγη } (5 - 5k, k), \text{ όπου } k \\ \text{οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.} \end{cases}$$

- Αν $\mu = -3$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 5, \text{ που είναι αδύνατο.} \end{cases}$$

9. Αν R_1, R_2 και R_3 οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1, O_2 και O_3 αντίστοιχως, τότε

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 6 & (1) \\ R_2 + R_3 = 7 & (2) \\ R_1 + R_3 = 5 & (3) \end{cases}$$

Το σύστημα λύνεται με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Λόγω όμως της μορφής του μπορούμε να το λύσουμε και ως εξής:

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε

$$2(R_1 + R_2 + R_3) = 18 \Leftrightarrow R_1 + R_2 + R_3 = 9 \quad (4)$$

Αν τώρα από τα μέλη της (4) αφαιρέσουμε τα μέλη των (1), (2) και (3), βρίσκουμε ότι

$$R_1 + R_2 + R_3 - R_1 - R_2 = 9 - 6 \Leftrightarrow R_3 = 3.$$

$$R_1 + R_2 + R_3 - R_2 - R_3 = 9 - 7 \Leftrightarrow R_1 = 2.$$

$$R_1 + R_2 + R_3 - R_1 - R_3 = 9 - 5 \Leftrightarrow R_2 = 4.$$

Επομένως οι ακτίνες των κύκλων είναι 2cm, 4cm και 3cm.

10. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο είναι ίσα.

Επομένως $AZ = AE = x$, $BD = BZ = y$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E = z$. Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = \gamma & (1) \\ y + z = \alpha & (2) \\ z + x = \beta & (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε

$$2(x + y + z) = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow x + y + z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \quad (4)$$

$$\bullet \text{ Από (4) και (1) έχουμε } \gamma + z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow z = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}.$$

$$\bullet \text{ Από (4) και (2) έχουμε } x + \alpha = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}.$$

$$\bullet \text{ Από (4) και (3) έχουμε } y + \beta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}.$$

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, τότε

$$x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} = \frac{2\tau - \alpha - \alpha}{2} = \tau - \alpha \text{ και ομοίως } y = \tau - \beta, z = \tau - \gamma.$$

- 11.** Αν x, y, z οι ποσότητες σε lt από κάθε διάλυμα αντιστοίχως, τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 52 & (1) \\ \frac{50}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{30}{100}z = \frac{32}{100} \cdot 52 & (2) \\ x = 2z & (3) \end{cases}$$

Από (1) και (3) έχουμε $y + 3z = 52$, οπότε $y = 52 - 3z$ και η (2) γίνεται

$$\begin{aligned} 50 \cdot 2z + 10(52 - 3z) + 30z &= 1664 \\ \Leftrightarrow 100z + 520 - 30z + 30z &= 1664 \\ \Leftrightarrow 100z &= 1144 \Leftrightarrow z = 11,44, \end{aligned}$$

οπότε $z \approx 11,44\text{lt}$

Επομένως $x = 22,88\text{lt}$ και $y = 17,68\text{lt}$.

- 12.** • Στην $1^{\text{η}}$ περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $f(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 3, θα ισχύει $f(0) = 3$, οπότε θα έχουμε $\gamma = 3$, επομένως το τριώνυμο θα είναι της μορφής

$$f(x) = ax^2 + \beta x + 3.$$

Επειδή το τριώνυμο $f(x)$ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ θα ισχύει

$$\begin{cases} \frac{-\beta}{2\alpha} = 2 \\ f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4\alpha \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Επομένως είναι $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Στην 2^η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο -1 , θα ισχύει $g(-1) = 0$, οπότε θα έχουμε

$$\alpha - \beta + \gamma = 0. \quad (2)$$

Επειδή επιπλέον η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x)$ έχει κορυφή το σημείο $K(1, 4)$, θα ισχύει

$$\begin{cases} \frac{-\beta}{2\alpha} = 1 \\ g\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ g(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha + \beta + \gamma = 4. \end{cases} \quad (3)$$

Επομένως, λόγω της (3), οι (2) και (4) γράφονται

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -3\alpha \\ -\alpha - 3\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Αρα, είναι $\alpha = -1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 3$, οπότε έχουμε $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

2ος τρόπος:

Μία ρίζα του τριωνύμου $g(x)$ είναι $\rho_1 = -1$. Αν ρ_2 είναι η άλλη ρίζα αυτού,

τότε θα ισχύει $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$. Επειδή, όμως η τετμημένη x_k της κορυφής

της παραβολής δίνεται από τον τύπο με $x_k = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και επειδή $x_k = 1$, θα ισχύει

$$\frac{-\beta}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{-1 + \rho_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \rho_2 = 3.$$

Αρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 3$, οπότε θα έχουμε

$$g(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha(x + 1)(x - 3).$$

Επειδή, όμως η κορυφή K της παραβολής έχει συντεταγμένες $(1, 4)$, θα ισχύει $g(1) = 4$, οπότε θα έχουμε

$$\alpha(1 + 1)(1 - 3) = 4 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Επομένως είναι

$$g(x) = -1(x + 1)(x - 3) = -x^2 + 2x + 3.$$

- Στην 3^η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $h(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία 2 και 4 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο 4, θα ισχύει

$$\begin{cases} h(2) = 0 \\ h(4) = 0 \\ h(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta = -4 \\ 16\alpha + 4\beta = -4 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -2 \\ 4\alpha + \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2 \\ 4\alpha - 2\alpha - 2 = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 0,5 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

Επομένως είναι $h(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$.

3ος τρόπος:

Το τριώνυμο $h(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 4$. Επομένως έχουμε

$$h(x) = \alpha(x-2)(x-4).$$

Επειδή, όμως η γραφική παράσταση του τριωνύμου διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0, 4)$, θα ισχύει $h(0) = 4$, οπότε θα έχουμε

$$\alpha(0-2)(0-4) = 4 \Leftrightarrow \alpha = 0,5.$$

Επομένως, είναι

$$h(x) = 0,5(x-2)(x-4) = 0,5x^2 - 3x + 4.$$

§ 6.2. Μη γραμμικά συστήματα**Α' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $y = 1 - x$ (1) και, αν αντικαταστήσουμε στην πρώτη, παίρνουμε

$$\begin{aligned} x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) &= 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Η (2) έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$, οπότε λόγω της (1) είναι

$$y_1 = 1 - x_1 = 1 + 1 = 2 \text{ και } y_2 = 1 - x_2 = 1 - 2 = -1.$$

Επομένως το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(-1, 2)$ και $(2, -1)$.

2. i) Η δεύτερη εξίσωση, λόγω της πρώτης, γράφεται

$$12x - 3(3x^2) = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0. \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα, την

$$x = \frac{2}{3}, \text{ οπότε από την πρώτη εξίσωση}$$

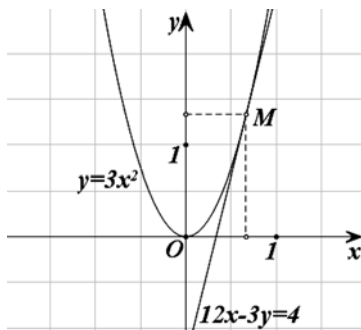
$$\text{του συστήματος παίρνουμε } y = \frac{4}{3}.$$

Επομένως

το σύστημα έχει μοναδική λύση, το ζεύγος $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Για να εξηγήσουμε

γραφικά τη λύση χαράσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, την παραβολή $y = 3x^2$ και την ευθεία $12x - 3y = 4$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M, το οποίο έχει

συντεταγμένες $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.



ii) Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ y = x & (2) \end{cases}$$

Η (1), λόγω της (2), γίνεται

$$x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 9$$

και έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{και } x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

οπότε θα έχουμε

$$y_1 = x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad y_2 = x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

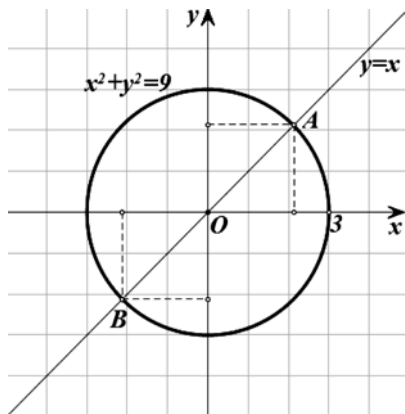
Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Για να εξηγήσουμε γραφικά τις λύσεις χαράσσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$ με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα 3 καθώς επίσης και την ευθεία $y = x$. Στο σχήμα παρατηρούμε

ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε δύο σημεία, τα $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και

$$B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$



iii) Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\text{και } y = \frac{2}{x}.$$

Η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$$

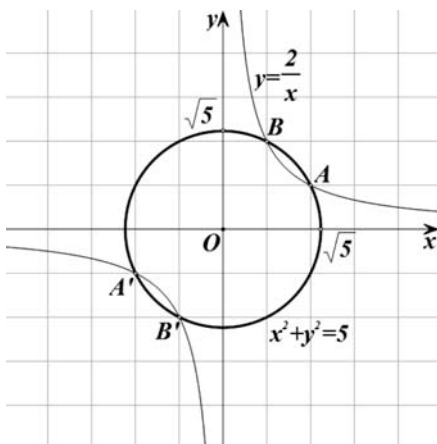
$$\Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0. \quad (1)$$

Αν θέσουμε $x^2 = \omega$ (2), η (1)

γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$. (3)

Αυτή έχει ρίζες $\omega_1 = 1$ και



$\omega_2 = 4$, οπότε λόγω της (2) έχουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = 4$. Από αυτές παίρνουμε τέσσερις ρίζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, οπότε για το y παίρνου-

με τις τιμές $y_1 = \frac{2}{x_1} = -2$, $y_2 = \frac{2}{x_2} = 2$ και $y_3 = \frac{2}{-2} = -1$, $y_4 = \frac{2}{2} = 1$.

Άρα, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ και $(2, 1)$. Για να εξηγήσουμε γραφικά τις λύσεις χαράσσουμε, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ με κέντρο

το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$, καθώς επίσης και την υπερβολή $y = \frac{2}{x}$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε τέσσερα σημεία, τα $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ και $(2, 1)$.

3. Από την $v = v_0 + at$ έχουμε $v - v_0 = at$, οπότε $a = \frac{v - v_0}{t}$. Αντικαθιστούμε στην πρώτη και έχουμε

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot t^2 = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2} = \frac{2v_0 t + vt - v_0 t}{2}.$$

$$\text{Άρα } S = \frac{v + v_0}{2} \cdot t.$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η δεύτερη εξίσωση λόγω της πρώτης γίνεται

$$2y + 10 + y^2 = 25$$

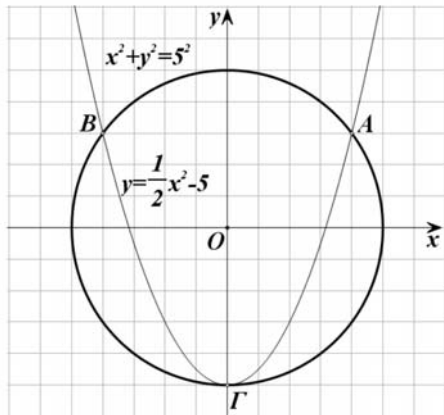
ή, ισοδύναμα,

$y^2 + 2y - 15 = 0$, η οποία έχει ρίζες 3 και -5. Για $y = 3$ έχουμε $x^2 = 16$, οπότε $x = 4$ ή $x = -4$. Για $y = -5$ έχουμε $x^2 = 0$, οπότε $x = 0$.

Άρα το σύστημα έχει τρεις λύσεις τις $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(0, -5)$. Η γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος είναι ότι η

$$\text{παραβολή } y = \frac{1}{2}x^2 - 5$$

και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5^2$ έχουν τρία κοινά σημεία.



2. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y(2x - y - 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $2x - y - 5 = 0$, οπότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad (2)$$

Για να λύσουμε το (1) θέτουμε στη δεύτερη εξίσωση $y = 0$, οπότε έχουμε $x^2 - 4x + 3 = 0$. Οι ρίζες αυτής είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, έτσι το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(1, 0)$ και $(3, 0)$. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2) γράφεται $y = 2x - 5$, (3) και αν θέσουμε στη δεύτερη παίρνουμε $2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$.

Οι ρίζες αυτές είναι $x_3 = 2$ και $x_4 = 4$, οπότε λόγω της (3) είναι $y_3 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$ και $y_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$. Έτσι το σύστημα (2) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(2, -1)$ και $(4, 3)$. Επομένως το αρχικό σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(2, -1)$ και $(4, 3)$.

3. Αν x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε είναι

$$xy = 120 \quad (1)$$

και $(x + 3)(y - 2) = 120 \quad (2)$

Η (2) γράφεται $xy + 3y - 2x - 6 = 120$ και λόγω της (1) γίνεται

$$120 + 3y - 2x - 6 = 120 \Leftrightarrow 3y - 2x = 6 \Leftrightarrow y = \frac{2x + 6}{3}, \quad (3)$$

θέτουμε στην (1) η οποία έτσι γίνεται

$$x \left(\frac{2x + 6}{3} \right) = 120 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 360 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 12$ και $x_2 = -15$.

Επειδή οι διαστάσεις είναι πάντοτε θετικές θα έχουμε $x = 12\text{cm}$, οπότε,

$$\text{λόγω της (1), θα είναι } y = \frac{120}{x} = \frac{120}{12} = 10\text{cm}.$$

4. Για να βρούμε τα σημεία, στα οποία η ευθεία $y = 2x + k$ τέμνει την παραβολή $y = -x^2$ λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y = 2x + k \\ y = -x^2 \end{cases} \quad (1)$

Αν θέσουμε στην πρώτη εξίσωση $y = -x^2$, παίρνουμε $-x^2 = 2x + k$ ή ακόμη $x^2 + 2x + k = 0$. (2)

Είναι φανερό ότι οι δύο γραμμές θα τέμνονται σε δύο σημεία, μόνο αν το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, που σημαίνει ότι η εξίσωση (2) θα πρέπει να έχει δύο λύσεις. Αυτό συμβαίνει, μόνο αν είναι $\Delta = 4 - 4k > 0$, δηλαδή αν είναι $k < 1$.

5. Με αντικαταστάτη του $y = x + \mu$ στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε την

$$2(x + \mu) = x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2\mu = 0. \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της (1) είναι $\Delta = 4 + 8\mu = 4(1 + 2\mu)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- $\Delta > 0$, δηλαδή

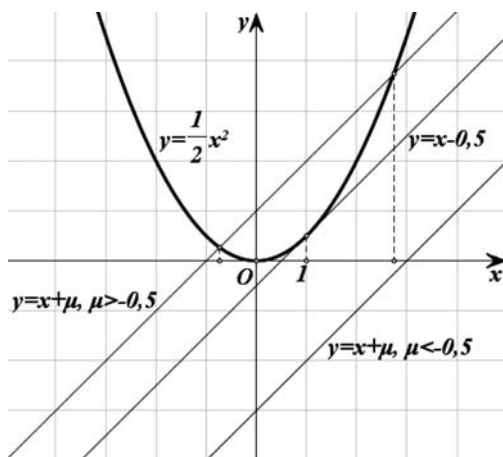
$\mu > -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει δύο

ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία τέμνονται.

- $\Delta = 0$, δηλαδή $\mu = -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει διπλή ρίζα, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μία λύση, οπότε η παραβολή και η ευθεία εφάπτονται.

- $\Delta < 0$, δηλαδή $\mu < -\frac{1}{2}$. Η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Γραφικά τα εξαγόμενα, εξηγούνται με τη βοήθεια του προηγούμενου σχήματος.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

§ 7.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο τρίγωνο $\triangle AB$ έχουμε $\eta\mu 30^\circ = \frac{x}{6}$, οπότε $x = 6 \eta\mu 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Στο τρίγωνο τώρα $\triangle A\Gamma$ έχουμε $\epsilon\varphi\omega = \frac{x}{3} = \frac{3}{3} = 1$, οπότε $\omega = 45^\circ$.

Επομένως, επειδή $\eta\mu\omega = \frac{x}{y}$, έχουμε

$$\eta\mu 45^\circ = \frac{3}{y}, \text{ οπότε } y = \frac{3}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

2. Επειδή $B + \Gamma = 90^\circ$ θα είναι $A = 90^\circ$. Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$

έχουμε $\eta\mu 30^\circ = \frac{(AB)}{2}$, οπότε $(AB) = 2 \eta\mu 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\eta\mu 60^\circ = \frac{(A\Gamma)}{2}$, οπότε $(A\Gamma) = 2 \eta\mu 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

3. i) $S = \alpha \cdot \rho$
 $6 = \omega \cdot 1$, άρα $\omega = 6\text{rad}$.
ii) $S = \alpha \cdot \rho$
 $6 = \omega \cdot 2$, άρα $\omega = 3\text{rad}$.
iii) $S = \alpha \cdot \rho$
 $6 = \omega \cdot 3$, άρα $\omega = 2\text{rad}$.

4. Από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ έχουμε

i) Για $\mu = 30$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$. Άρα $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

ii) Για $\mu = 120$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{120}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$. Άρα $120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$.

iii) Για $\mu = 1260$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1260}{180} \Leftrightarrow \alpha = 7\pi$. Άρα $1260^\circ = 7\pi \text{ rad}$.

iv) Για $\mu = 1485$, είναι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1485}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{33\pi}{4}$. Άρα $-1485^\circ = -\frac{33\pi}{4} \text{ rad}$.

5. Από τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ έχουμε

i) $\frac{\frac{\pi}{10}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 18$, άρα $\frac{\pi}{10} \text{ rad} = 18^\circ$.

ii) $\frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 150$, άρα $\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = 150^\circ$.

iii) $\frac{\frac{91\pi}{3}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 5460$, άρα $\frac{91\pi}{3} \text{ rad} = 5460^\circ$.

iv) $\frac{100}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = \frac{18000}{\pi}$, άρα $100 \text{ rad} = \frac{18000^\circ}{\pi}$.

6. i) Είναι $1830^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 30^\circ$, οπότε

$$\eta\mu 1830^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\upsilon\eta 1830^\circ = \sigma\upsilon\upsilon\eta 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 1830^\circ = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma\phi 1830^\circ = \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3}.$$

ii) Είναι $2940^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 60^\circ$, οπότε

$$\eta\mu 2940^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\upsilon\eta 2940^\circ = \sigma\upsilon\upsilon\eta 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi 2940^\circ = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \sigma\phi 2940^\circ = \sigma\phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

iii) Είναι $1980^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 180^\circ$, οπότε

$$\eta\mu 1980^\circ = \eta\mu 180^\circ = 0, \quad \sigma\upsilon\upsilon\eta 1980^\circ = \sigma\upsilon\upsilon\eta 180^\circ = -1.$$

$$\epsilon\phi 1980^\circ = \epsilon\phi 180^\circ = 0$$

ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των 1980° .

- iv) Είναι $3600^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 0^\circ$, οπότε
 $\eta\mu 3600^\circ = \eta\mu 0^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu 3600^\circ = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$.
 $\epsilon\varphi 3600^\circ = \epsilon\varphi 0^\circ = 0$
 ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των 3600° .

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο τρίγωνο $\triangle ΠΝ$ έχουμε

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{h}{(\Pi\Delta)}, \text{ οπότε } (\Pi\Delta) = \frac{h}{\epsilon\varphi\omega}. \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $\triangle \Lambda\Lambda\Lambda$ έχουμε

$$\epsilon\varphi 70^\circ = \frac{h}{(\Delta\Lambda)}, \text{ οπότε } (\Delta\Lambda) = \frac{h}{\epsilon\varphi 70^\circ}. \quad (2)$$

Επειδή $(\Pi\Delta) = (\Pi\Delta) + (\Delta\Lambda)$, λόγω των (1) και (2), έχουμε

$$\frac{h}{\epsilon\varphi\omega} + \frac{h}{\epsilon\varphi 70^\circ} = 1000 \Leftrightarrow h \cdot \epsilon\varphi 70^\circ + h \cdot \epsilon\varphi\omega = 1000 \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow h(\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi\omega) = 1000 \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ \Leftrightarrow h = \frac{1000 \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi\omega}. \quad (3)$$

- i) Αν $\omega = 30^\circ$, τότε, λόγω της (3), είναι

$$h = \frac{1000 \cdot \epsilon\varphi 30^\circ \cdot \epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi 30^\circ} \simeq 478$$

Αν $\omega = 45^\circ$, τότε έχουμε

$$h = \frac{1000 \cdot \epsilon\varphi 45^\circ \cdot \epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi 45^\circ} \simeq 733$$

Αν $\omega = 60^\circ$, τότε έχουμε

$$h = \frac{1000 \cdot \epsilon\varphi 60^\circ \cdot \epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi 60^\circ} \simeq 1062.$$

- ii) Αν τώρα $h = 1000$, τότε λόγω της (3), είναι

$$1000 = \frac{1000 \cdot \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi\omega} \Leftrightarrow 1 = \frac{\epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi\omega}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi 70^\circ = \epsilon\varphi 70^\circ + \epsilon\varphi\omega$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega(\epsilon\varphi 70^\circ - 1) = \epsilon\varphi 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega = \frac{\epsilon\varphi 70^\circ}{\epsilon\varphi 70^\circ - 1} \simeq 1,5723.$$

Άρα $\omega \simeq 58^\circ$.

2. i) Επειδή $\widehat{\Gamma AB} = 45^\circ$ είναι $(A\Gamma) = (B\Gamma)$. Έχουμε όμως:

$$\eta\mu 45^\circ = \frac{(A\Gamma)}{(AB)} = \frac{(A\Gamma)}{2}, \text{ οπότε } (A\Gamma) = 2\eta\mu 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

και επειδή $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ θα είναι $(B\Gamma) = \sqrt{2}$.

- ii) Στο τρίγωνο ΔAB έχουμε

$$\eta\mu 22,5^\circ = \frac{(B\Delta)}{(AB)} = \frac{(B\Delta)}{2}.$$

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAB και ΔAE είναι ίσα έχουμε $(\Delta B) = (\Delta E)$.
Έτσι $(EB) = 2(B\Delta) = 4 \eta\mu 22,5^\circ$.

- iii) Από την ισότητα των τριγώνων ΔAB και ΔAE προκύπτει $(AE) = (AB) = 2$.

Άρα $(E\Gamma) = (AE) - (A\Gamma) = 2 - \sqrt{2}$.

- iv) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓEB (σχήμα) έχουμε

$$(EB)^2 = (\Gamma B)^2 + (\Gamma E)^2 = (\sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2.$$

Άρα $EB = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

$$\text{v) Έχουμε } \eta\mu 22,5^\circ = \frac{(EB)}{2} = \frac{2}{2} = \frac{(EB)}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

- vi) Μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο των γωνιών $\frac{22,5^\circ}{2}, \frac{22,5^\circ}{4}$ κ.τ.λ.,

αρκεί να διχοτομήσουμε τη γωνία $\widehat{BA\Delta}$ κ.τ.λ.

3. • Από το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{6}{(A\Gamma)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{(A\Gamma)} \Leftrightarrow (A\Gamma) = 12.$$

- Από τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ έχουμε $\widehat{BA\Delta} = 30^\circ$. Επομένως

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{(B\Delta)}{(AB)} \Leftrightarrow \epsilon\phi 30^\circ = \frac{(B\Delta)}{6} \Leftrightarrow (B\Delta) = 6 \epsilon\phi 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα $B\Delta = 2\sqrt{3}$.

- Από το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\eta\mu 60^\circ = \frac{(B\Gamma)}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(B\Gamma)}{12}.$

Άρα $(B\Gamma) = 6\sqrt{3}$.

- Έχουμε $(\Gamma\Delta) = (B\Gamma) - (B\Delta) = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Άρα $(\Gamma\Delta) = (\Delta A) = 4\sqrt{3}$.

$$\text{Επομένως περίμετρος} = 12 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3}.$$

$$\text{Εμβαδόν} = \frac{1}{2} (\Delta\Gamma) \cdot (AB) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}.$$

4. Όπως είναι γνωστό ο λεπτοδείκτης εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε χρόνο 1 ώρας ή 3600 δευτερολέπτων. Διαγράφει δηλαδή γωνία 2π rad σε 3600sec.

$$\text{Επομένως σε 1sec διαγράφει γωνία } \frac{2\pi}{3600} \text{ rad.}$$

Αν το μήκος του λεπτοδείκτη είναι ίσο με ρ , τότε σύμφωνα με τον τύπο $S = \alpha\rho$, το άκρο του λεπτοδείκτη σε 1sec θα διαγράψει τόξο μήκους $\frac{2\pi}{3600} \cdot \rho$.

Για να είναι το μήκος αυτό ίσο με 1mm αρκεί

$$\frac{2\pi}{3600} \cdot \rho = 1\text{mm} \Leftrightarrow \rho = \frac{3600}{2\pi} \text{ mm} \approx 573\text{mm}.$$

§ 7.2. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν στην ισότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ αντικαταστήσουμε το $\eta\mu x$ με $\frac{3}{5}$ βρίσκουμε

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \quad \left[\begin{array}{l} \text{αφού για } \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ \text{ισχύει } \sigma\upsilon\nu x < 0. \end{array} \right]$$

$$\text{Επομένως } \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{-3}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-4}{3}.$$

2. Αν στην ισότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ αντικαταστήσουμε το $\sigma\upsilon\nu x$ με $\frac{-2}{3}$ βρίσκουμε

$$\eta\mu^2 x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \frac{4}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \left[\begin{array}{l} \text{αφού για } \pi < x < \frac{3\pi}{2} \\ \text{ισχύει } \eta\mu x < 0. \end{array} \right]$$

$$\text{Επομένως } \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$3. \bullet \sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

$$\bullet \text{Είναι } \epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\eta x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sigma\eta x \quad (1)$$

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\eta^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε

$$\frac{1}{3} \sigma\eta^2 x + \sigma\eta^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\eta^2 x + 3\sigma\eta^2 x = 3 \Leftrightarrow 4\sigma\eta^2 x = 3 \Leftrightarrow \sigma\eta^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\eta x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[\begin{array}{l} \text{αφού για } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ \text{ισχύει } \sigma\eta x > 0. \end{array} \right]$$

$$\bullet \text{Από την (1) τώρα παίρνουμε } \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

$$4. \bullet \epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\bullet \text{Είναι } \sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sigma\eta x}{\eta\mu x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sigma\eta x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \eta\mu x \quad (1)$$

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\eta^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε

$$\eta\mu^2 x + \frac{4}{5} \eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 5 \Leftrightarrow 9\eta\mu^2 x = 5$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \left[\begin{array}{l} \text{αφού για } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{ισχύει } \eta\mu x > 0. \end{array} \right]$$

$$\bullet \text{Από την (1) τώρα παίρνουμε } \sigma\eta x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$5. \bullet \text{Είναι } \sigma\phi x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sigma\eta x}{\eta\mu x} = -2 \Leftrightarrow \sigma\eta x = -2 \eta\mu x.$$

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε

$$\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \left[\begin{array}{l} \text{αφού για } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \\ \text{ισχύει } \eta\mu x < 0. \end{array} \right]$$

• Από την (1) τώρα παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = -2 \cdot \frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Επομένως η αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$ ισούται με

$$\frac{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{4}{5+2\sqrt{5}} = \frac{-4(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = \frac{8\sqrt{5}-20}{5}.$$

6. Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, αν υποθέσουμε ότι

i) $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε θα ισχύει $0^2 + 0^2 = 1$, δηλαδή $0 = 1$, που είναι άτοπο.

ii) $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$, τότε θα ισχύει $1^2 + 1^2 = 1$, δηλαδή $2 = 1$, που είναι άτοπο.

iii) $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$ τότε $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ που είναι αληθές.

Άρα υπάρχει τέτοια τιμή του x .

7. Αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του $M(x, y)$ από την αρχή $O(0, 0)$ είναι ίση με 3. Πράγματι

$$\begin{aligned} (OM) &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3 \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (3 \eta\mu\theta)^2} = \sqrt{9 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 9 \eta\mu^2\theta} \\ &= \sqrt{9(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

8. Έχουμε

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 &= 9(2 \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + 4(3 \eta\mu\theta)^2 = 9 \cdot 4 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 \cdot 9 \eta\mu^2\theta \\ &= 36 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 36 \eta\mu^2\theta = 36(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = 36 \cdot 1 = 36. \end{aligned}$$

9. Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \eta\mu^2\theta \sigma\upsilon\nu^2\varphi + r^2 \eta\mu^2\theta \eta\mu^2\varphi + r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &= r^2 \eta\mu^2\theta (\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi) + r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta = r^2 \eta\mu^2\theta + r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &= r^2 (\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = r^2. \end{aligned}$$

10. i) Αν $1 + \sigma\upsilon\nu \alpha \neq 0$ και $\eta\mu \alpha \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\eta\mu \alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu \alpha} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \alpha = (1 + \sigma\upsilon\nu \alpha)(1 - \sigma\upsilon\nu \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 \alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha \text{ που ισχύει.}$$

Αλλιώς αν $1 + \sigma\upsilon\nu \alpha \neq 0$ και $1 - \sigma\upsilon\nu \alpha \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\eta\mu \alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha} = \frac{\eta\mu \alpha (1 - \sigma\upsilon\nu \alpha)}{(1 + \sigma\upsilon\nu \alpha)(1 - \sigma\upsilon\nu \alpha)} = \frac{\eta\mu \alpha (1 - \sigma\upsilon\nu \alpha)}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha}$$

$$= \frac{\eta\mu \alpha (1 - \sigma\upsilon\nu \alpha)}{\eta\mu^2 \alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu \alpha}.$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu^4 \alpha - \eta\mu^4 \alpha = (\sigma\upsilon\nu^2 \alpha)^2 - (\eta\mu^2 \alpha)^2 = (\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \eta\mu^2 \alpha)(\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha)$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha = \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha) = 2 \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1.$$

11. Είναι

$$\text{i) } \frac{\eta\mu \theta}{1 + \sigma\upsilon\nu \theta} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu \theta}{\eta\mu \theta} = \frac{\eta\mu^2 \theta + (1 + \sigma\upsilon\nu \theta)^2}{\eta\mu \theta (1 + \sigma\upsilon\nu \theta)}$$

$$\frac{\eta\mu^2 \theta + 1 + 2 \sigma\upsilon\nu \theta + \sigma\upsilon\nu^2 \theta}{\eta\mu \theta (1 + \sigma\upsilon\nu \theta)} = \frac{2 + 2 \sigma\upsilon\nu \theta}{\eta\mu \theta (1 + \sigma\upsilon\nu \theta)} = \frac{2 (1 + \sigma\upsilon\nu \theta)}{\eta\mu \theta (1 + \sigma\upsilon\nu \theta)} = \frac{2}{\eta\mu \theta}.$$

$$\text{ii) } \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x (1 + \eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x (1 - \eta\mu x)}{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)} = \frac{2 \sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu^2 x}$$

$$= \frac{2 \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

$$\text{12. i) } \frac{\epsilon\varphi \alpha + \sigma\varphi \beta}{\epsilon\varphi \beta + \sigma\varphi \alpha} = \frac{\epsilon\varphi \alpha + \frac{1}{\epsilon\varphi \beta}}{\epsilon\varphi \beta + \frac{1}{\epsilon\varphi \alpha}} = \frac{\frac{\epsilon\varphi \alpha \epsilon\varphi \beta + 1}{\epsilon\varphi \beta}}{\frac{\epsilon\varphi \alpha \epsilon\varphi \beta + 1}{\epsilon\varphi \alpha}} = \frac{\epsilon\varphi \alpha}{\epsilon\varphi \beta}.$$

$$\text{ii) } \epsilon\varphi^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha = \frac{\eta\mu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} - \eta\mu^2 \alpha = \frac{\eta\mu^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}$$

$$= \frac{\eta\mu^2 \alpha (1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} = \frac{\eta\mu^2 \alpha \cdot \eta\mu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} = \left(\frac{\eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} \right)^2 \cdot \eta\mu^2 \alpha$$

$$= \epsilon\varphi^2 \alpha \cdot \eta\mu^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 13. \text{ i) } \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\phi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\phi x} &= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} : \\
 &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} \\
 &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } (1 - \sigma\upsilon\nu x) \left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) &= (1 - \sigma\upsilon\nu x) \frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} \\
 &= \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \eta\mu x = \epsilon\phi x \cdot \eta\mu x.
 \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \frac{1}{\epsilon\phi x + \sigma\phi x} = \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = \frac{1}{\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}} = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\underbrace{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}_1} = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } \left(\frac{1}{\eta\mu x} - \eta\mu x \right) \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x \right) &= \frac{1 - \eta\mu^2 x}{\eta\mu x} \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} \\
 &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x.
 \end{aligned}$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$ έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
 (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 &= \alpha^2 \\
 \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x &= \alpha^2 \\
 1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x &= \alpha^2 \\
 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x &= \frac{\alpha^2 - 1}{2}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\text{ii) } \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha^2 - 1}{2}} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}. \quad [\text{λόγω της (1)}]$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \varepsilon\phi x + \sigma\phi x &= \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{1}{\frac{\alpha^2 - 1}{2}} = \frac{2}{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \text{Σύμφωνα με την ταυτότητα } \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta), \text{ έχουμε} \\ \eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x &= (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^3 - 3\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \\ &= \alpha^3 - 3 \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{2} \cdot \alpha \left[\text{αφού } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha \text{ και } \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{\alpha^2 - 1}{2} \right] \\ &= \alpha^3 - \frac{3\alpha^3 - 3\alpha}{2} = \frac{3\alpha - \alpha^3}{2} = \frac{\alpha(3 - \alpha^2)}{2}. \end{aligned}$$

2. i) Βλέπε εφαρμογή 2, §7.2.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \text{Σύμφωνα με την ταυτότητα } \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta), \text{ έχουμε} \\ \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x &= (\eta\mu^2 x)^3 + (\sigma\upsilon\nu^2 x)^3 \\ &= \underbrace{(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^3}_1 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x \underbrace{(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)}_1 \\ &= 1 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } 2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \\ &= 2(1 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) - 3(1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) \\ &= 2 - 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x - 3 + 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = -1. \end{aligned}$$

3. Είναι

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{\frac{1 + \eta\mu x}{1 - \eta\mu x}} &= \sqrt{\frac{(1 + \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)}{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)}} = \sqrt{\frac{(1 + \eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \frac{1 + \eta\mu x}{|\sigma\upsilon\nu x|} \\ &= \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}, \text{ αφού } \sigma\upsilon\nu x > 0, \text{ επειδή } \left[-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Ομοίως είναι } \sqrt{\frac{1 - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x}} = \frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } \sqrt{\frac{1 + \eta\mu x}{1 - \eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1 - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x}} &= \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \\
&= \frac{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})^2}{(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} \\
&= \frac{1 + \sin x + 1 - \sin x + 2\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}}{(1+\sin x) - (1-\sin x)} \\
&= \frac{2 + 2\sqrt{1-\sin^2 x}}{2\sin x} = \frac{2 + 2\sqrt{\eta\mu^2 x}}{2\sin x} \\
&= \frac{1 + |\eta\mu x|}{\sin x} = \frac{1 + \eta\mu x}{\sin x} \quad \left[\text{αφού } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ είναι } \eta\mu x \geq 0 \right] \\
&= \frac{(1 + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x)}{\sin x (1 - \eta\mu x)} = \frac{1 - \eta\mu^2 x}{\sin x (1 - \eta\mu x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 - \eta\mu x)} = \frac{\sin x}{1 - \eta\mu x}.
\end{aligned}$$

§ 7.3. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Αν διαιρέσουμε τον 1200 με τον 360 βρίσκουμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 120.
Επομένως $1200^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 120^\circ$

οπότε

$$\eta\mu 1200^\circ = \eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1200^\circ = \sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi 1200^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \sigma\phi 1200^\circ = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- ii) Ομοίως έχουμε $2850^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 330^\circ$

οπότε

$$\eta\mu(-2850^\circ) = -\eta\mu 2850^\circ = -\eta\mu 330^\circ = -\eta\mu(360^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\eta\mu(-30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu(-2850^\circ) = \sigma\upsilon\nu 2850^\circ = \sigma\upsilon\nu 330^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(-2850^\circ) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi(-2850^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

2. i) Είναι $\frac{187\pi}{6} = \frac{187}{12} \cdot 2\pi$. Αν τώρα διαιρέσουμε το 187 με το 12 βρίσκουμε

πηλίκιο 15 και υπόλοιπο 7. Επομένως έχουμε

$$\frac{187\pi}{6} = \frac{187}{12} \cdot 2\pi = \left(15 + \frac{7}{12}\right) 2\pi = 15 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6}$$

οπότε

$$\eta\mu \frac{187\pi}{6} = \eta\mu \left(15 \cdot 2\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{7\pi}{6} = \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{187\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{187\pi}{6} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi \frac{187\pi}{6} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

- ii) Είναι $\frac{21\pi}{4} = \frac{21}{8} \cdot 2\pi$. Αν τώρα διαιρέσουμε το 21 με το 8 βρίσκουμε πη-

λίκιο 2 και υπόλοιπο 5. Επομένως έχουμε

$$\frac{21\pi}{4} = \frac{21}{8} \cdot 2\pi = \left(2 + \frac{5}{8}\right) 2\pi = 2 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{4}$$

οπότε

$$\eta\mu \frac{21\pi}{4} = \eta\mu \frac{5\pi}{4} = \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{21\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{21\pi}{4} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \quad \text{και} \quad \sigma\varphi \frac{21\pi}{4} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

3. Επειδή $A + B + \Gamma = 180^\circ$ είναι

$$A = 180^\circ - (B + \Gamma) \quad \text{και} \quad \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{B + \Gamma}{2}.$$

Έτσι έχουμε

i) $\eta\mu A = \eta\mu(180^\circ - (B + \Gamma)) = \eta\mu(B + \Gamma).$

ii) $\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - (B + \Gamma)) = -\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma).$
 $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0.$

iii) $\eta\mu \frac{A}{2} = \eta\mu \left(90^\circ - \frac{B + \Gamma}{2} \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2} \quad \text{και}$

iv) $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \left(90^\circ - \frac{B + \Gamma}{2} \right) = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}.$

4. Επειδή $\sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu(-\alpha) = -\eta\mu\alpha$ και $\eta\mu(90^\circ + \alpha) = \eta\mu(90^\circ - (-\alpha)) = \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$, έχουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90^\circ + \alpha)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{(-\eta\mu\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\varphi\alpha.$$

5. Είναι

$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x, \quad \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu \left(\frac{9\pi}{2} + x \right) = \sigma\upsilon\nu \left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} + x \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - (-x) \right) \\ = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x.$$

$$\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(6 \cdot 2\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x, \quad \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi \left(\frac{21\pi}{2} - x \right) = \sigma\varphi \left(5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} - x \right) = \sigma\varphi \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \varepsilon\varphi x.$$

Επομένως

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{9\pi}{2} + x \right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\varphi \left(\frac{21\pi}{2} - x \right)} = \frac{(-\varepsilon\varphi x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x)}{(-\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \varepsilon\varphi x} = -1.$$

6. Επειδή $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sigma\upsilon\nu x, \quad \text{έχουμε}$$

$$\begin{aligned} & \eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2x = \eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1. \end{aligned}$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή

$$\eta\mu 495^\circ = \eta\mu(360^\circ + 135^\circ) = \eta\mu 135^\circ = \eta\mu(180^\circ - 45^\circ) = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 495^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ + 135^\circ) = \sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu(-120^\circ) = \sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad (\acute{o}\pi\omega\varsigma \pi\rho\omicron\eta\gamma\omicron\upsilon\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\varsigma)$$

$$\epsilon\varphi(-120^\circ) = -\epsilon\varphi 120^\circ = -\epsilon\varphi(180^\circ - 60^\circ) = \epsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{και}$$

$$\epsilon\varphi 495^\circ = \epsilon\varphi(360^\circ + 135^\circ) = \epsilon\varphi 135^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\epsilon\varphi 45^\circ = -1.$$

η τιμή της παράστασης ισούται με

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3} + (-1)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3} - 1} = 0.$$

2. Έχουμε

$$\eta\mu(5\pi + \omega) = \eta\mu(4\pi + \pi + \omega) = \eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(6\pi + \pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\varphi(5\pi + \omega) = \sigma\varphi(4\pi + \pi + \omega) = \sigma\varphi(\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\eta\mu(7\pi - \omega) = \eta\mu(6\pi + \pi - \omega) = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\varphi\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\epsilon\varphi\omega$$

Επομένως η παράσταση γίνεται

$$\frac{(-\eta\mu\omega)(-\sigma\upsilon\nu\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\omega}{\sigma\varphi\omega \cdot \eta\mu\omega \cdot \eta\mu\omega (-\epsilon\varphi\omega)} = -\frac{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega} = -\sigma\upsilon\nu^2\omega = \eta\mu^2\omega - 1.$$

3. Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, έχουμε

$$\begin{aligned} & \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \\ &= \left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \right]^2 - 2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \\ &= 5^2 - 2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 25 - 2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sigma\varphi\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + x\right)\right] \\ &= 25 - 2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 25 - 2 = 23. \end{aligned}$$

4. Είναι

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\varepsilon\varphi(\pi + x)}{\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi(\pi + x)} < 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x} < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x + \frac{1}{\sigma\varphi x}} < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{\varepsilon\varphi x}{\frac{\varepsilon\varphi^2 x + 1}{\varepsilon\varphi x}} < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi^2 x + 1} < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \varepsilon\varphi^2 x < \varepsilon\varphi^2 x + 1. \end{aligned}$$

που ισχύει, γιατί αποκλείεται να είναι $\varepsilon\varphi x = 0$, αφού, λόγω υποθέσεως, ορίζεται η $\sigma\varphi x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2) \\
 &= \frac{1}{2} (2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \\
 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha.
 \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \right] \geq 0 \quad \text{που ισχύει.}
 \end{aligned}$$

Το “=” ισχύει αν και μόνο αν

$$\alpha - \beta = 0 \quad \text{και} \quad \beta - \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \gamma - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

2. i) Έχουμε $(\kappa\beta)^2 + (\kappa\gamma)^2 = \kappa^2\beta^2 + \kappa^2\gamma^2 = \kappa^2(\beta^2 + \gamma^2) = \kappa^2\alpha^2 = (\kappa\alpha)^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{ii) Έχουμε } (\mu^2 - \nu^2)^2 + (2\mu\nu)^2 &= \mu^4 - 2\mu^2\nu^2 + \nu^4 + 4\mu^2\nu^2 \\
 &= \mu^4 + 2\mu^2\nu^2 + \nu^4 = (\mu^2 + \nu^2)^2.
 \end{aligned}$$

3	4	5
8	6	10
5	12	13
21	20	29
16	30	34
15	8	17

$$\begin{aligned}
 3. \text{ A) Έχουμε } \alpha\beta &\leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{4} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta \Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-\beta)^2, \text{ που ισχύει.}
 \end{aligned}$$

Το “ $\leq$ ” ισχύει όταν $\alpha = \beta$.

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β δεν υπερβαίνει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά το ημίαθροισμα $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

B) Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου, τότε το εμβαδόν του είναι $E = \alpha\beta$ και η περίμετρός του $P = 2(\alpha + \beta)$.

i) Έτσι η προηγούμενη ανισότητα γράφεται $E \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2$.

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \frac{P}{4}$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο.

ii) Λόγω της (i) έχουμε $E \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{E} \leq \frac{P}{4} \Leftrightarrow P \geq 4\sqrt{E}$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(Το παραπάνω αποτέλεσμα ήταν γνωστό πριν την εποχή του Ευκλείδη).

$$4. \text{ i) } 3(x+1) - \alpha x = 4 \Leftrightarrow 3x + 3 - \alpha x = 4 \Leftrightarrow (3-\alpha)x = 1.$$

• Αν $\alpha \neq 3$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{1}{3-\alpha}$.

• Αν $\alpha = 3$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 1$ και είναι αδύνατη.

$$\text{ii) Για } \alpha \neq 3 \text{ πρέπει } \frac{1}{3-\alpha} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3-\alpha} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-3+\alpha}{3-\alpha} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{3-\alpha} > 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(3-\alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha-3) < 0 \Leftrightarrow 2 < \alpha < 3.$$

5. i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \lambda^2(x-1) + 3\lambda &= x + 2 \Leftrightarrow \lambda^2x - \lambda^2 + 3\lambda = x + 2 \Leftrightarrow \lambda^2x - x = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\
 &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\
 &\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)x = (\lambda-1)(\lambda-2).
 \end{aligned}$$

ii) • Αν $\lambda \neq \pm 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{\lambda-2}{\lambda+1}.$$

- Για $\lambda = -1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 6$ και είναι αδύνατη.
 - Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
- iii) Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $x = \frac{1}{4}$, αν και μόνο αν ισχύει
- $$(\lambda - 1)(\lambda + 1)\frac{1}{4} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
- $$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(3\lambda - 9) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3.$$

6. Α) i) Έχουμε

$$180 = 60t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Leftrightarrow 18 = 6t - \frac{1}{2} t^2 \Leftrightarrow 36 = 12t - t^2 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 36 = 0 \Leftrightarrow (t - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6\text{sec}.$$

ii) Έχουμε

$$100 = 60t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Leftrightarrow 10 = 6t - \frac{1}{2} t^2 \Leftrightarrow 20 = 12t - t^2 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 20 = 0.$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = 64$$

$$\text{Επομένως } t = \frac{12 \pm 8}{2} \Leftrightarrow t = 2\text{sec} \text{ ή } t = 10\text{sec}.$$

Στην περίπτωση i) το ύψος των 180 μέτρων είναι το μέγιστο ύψος που φθάνει το σώμα, αφού η συνάρτηση του ύψους είναι $h(t) = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 + 60t$, δηλαδή

$$h(t) = -5t^2 + 60t \text{ και έχει μέγιστο για } t = \frac{-60}{2(-5)} = 6\text{sec}, \text{ το } h(6) = 180 \text{ μέτρα.}$$

Στη δεύτερη περίπτωση οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι οι χρονικές στιγμές που το σώμα θα βρεθεί σε ύψος 100 μέτρων, μια στην άνοδο όταν $t = 2\text{sec}$ και μια στην κάθοδο όταν $t = 10\text{sec}$.

Β) Για να μπορεί το σώμα να φθάσει σε ύψος h_0 , θα πρέπει το h_0 να είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με το μέγιστο της συνάρτησης $h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$.

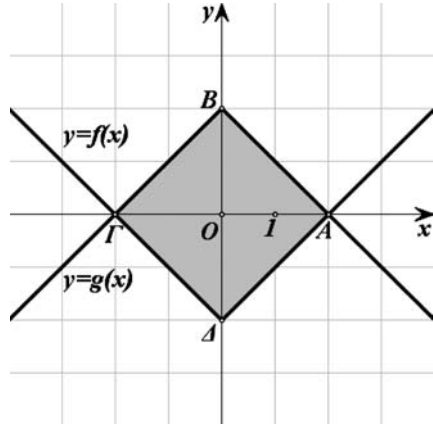
Το μέγιστο της συνάρτησης αυτής είναι ίσο με

$$h\left(\frac{-v_0}{2\left(-\frac{1}{2}\right)g}\right) = h\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} = \frac{-v_0^2}{2g} + \frac{2v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Άρα για να μπορεί το σώμα να φθάσει σε ύψος h_0 πρέπει $h_0 \leq \frac{v_0^2}{2g}$.

7. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 2 - |x|$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$, διότι η g είναι αντίθετη της f (σχ.).



Οι γραφικές αυτές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $\Gamma(-2, 0)$ και $\Delta(0, -2)$.

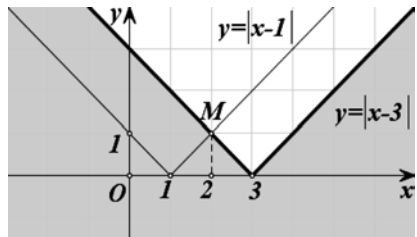
Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, είναι ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $\triangle OAB$, δηλαδή είναι ίσο με

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 4 \cdot E_{OAB} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) = 8 \text{ τμ.}$$

Σημείωση: Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, διότι έχει όλες του τις γωνίες ορθές και όλες του τις πλευρές ίσες, με μήκος $2\sqrt{2}$. Επομένως το εμβαδόν του είναι ίσο με

$$E_{AB\Gamma\Delta} = (2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ τμ.}$$

8. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 1|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = |x - 3|$



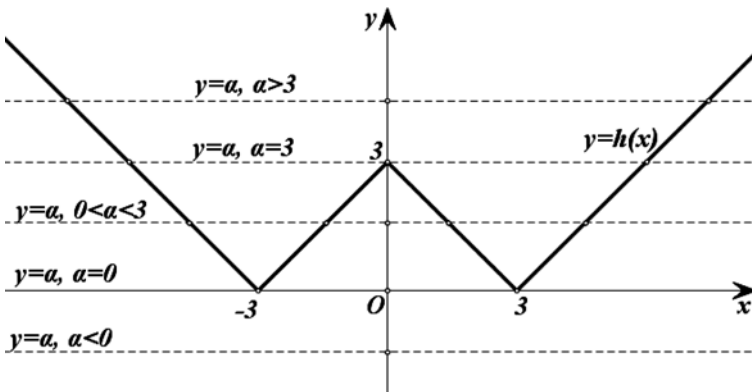
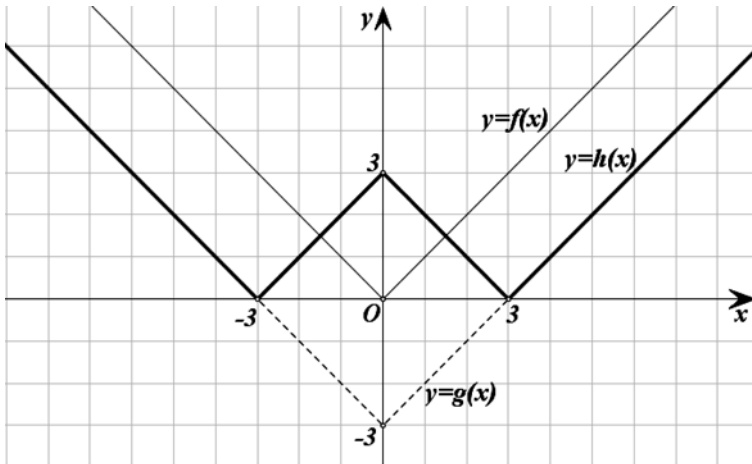
προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά (σχ.). Οι γραφικές αυτές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $A(2, 1)$.

Οι λύσεις της ανίσωσης $|x - 1| < |x - 3|$ είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $y = |x - 1|$ βρίσκεται κάτω από την $y = |x - 3|$. Αυτό συμβαίνει, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν $x < 2$.

Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται αλγεβρικά ως εξής

$$\begin{aligned} |x - 1| < |x - 3| &\Leftrightarrow |x - 1|^2 < |x - 3|^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 < (x - 3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 4x < 8 \Leftrightarrow x < 2. \end{aligned}$$

9. Α) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδες προς τα κάτω.
 Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g , αν παρατηρήσουμε ότι $h(x) = g(x)$, για $x \leq -3$ ή $x \geq 3$ και $h(x) = -g(x)$ για $-3 \leq x \leq 3$.



- Β) Το πλήθος των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} y = ||x| - 3| \\ y = a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$

παριστάνεται από το πλήθος των σημείων τομής της οριζόντιας ευθείας $y = a$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h . Επομένως,

- Αν $a < 0$, το σύστημα δεν έχει λύσεις, δηλαδή είναι αδύνατο.
- Αν $a = 0$, το σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Αν $0 < a < 3$, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις.
- Αν $a = 3$, το σύστημα έχει τρεις λύσεις.
- Αν $a > 3$, το σύστημα έχει δύο λύσεις.

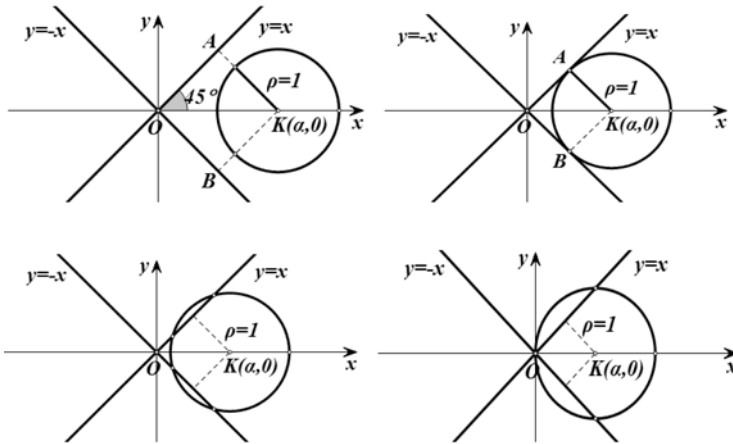
10. i) Έχουμε $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Leftrightarrow y = x$ ή $y = -x$, που είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών των αξόνων.

ii) Η απόσταση των σημείων $K(a, 0)$ και $M(x, y)$ είναι ίση με

$$d = \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(a, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, αν και μόνο αν $(KM) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow (x - a)^2 + y^2 = 1$.

iii) Το πλήθος των λύσεων του συστήματος είναι όσο και το πλήθος των κοινών σημείων του κύκλου με τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.

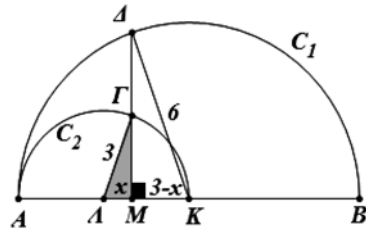


Επειδή, για $a \geq 0$, η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από τις ευθείες αυτές είναι ίση με $d = KA = KB = \frac{a}{\sqrt{2}}$, έχουμε:

- Αν $d > \rho \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} > 1 \Leftrightarrow a > \sqrt{2}$, ο κύκλος και οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $d = \rho \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$, ο κύκλος εφάπτεται των ευθειών, οπότε το σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Αν $d < \rho \Leftrightarrow 0 \leq a < \sqrt{2}$, ο κύκλος τέμνει και τις δύο ευθείες, οπότε το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, με εξαίρεση την περίπτωση $a = 1$ κατά την οποία ο κύκλος έχει με τις ευθείες τρία διακεκριμένα κοινά σημεία, οπότε το σύστημα έχει τρεις λύσεις.

Λόγω συμμετρίας, αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε και όταν $a \leq 0$.

11. Επειδή το τρίγωνο $\triangle M\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο, θα ισχύει $M\Gamma^2 = \Lambda\Gamma^2 - M\Lambda^2 = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$, οπότε θα είναι $M\Delta = 2M\Gamma = 2\sqrt{9 - x^2}$ και επειδή το τρίγωνο $\triangle MK\Delta$ είναι ορθογώνιο θα ισχύει



$$\begin{aligned} K\Delta^2 &= MK^2 + M\Delta^2 \Leftrightarrow 6^2 = (3 - x)^2 + (2\sqrt{9 - x^2})^2 \\ &\Leftrightarrow 36 = x^2 - 6x + 9 + 4(9 - x^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -3 \end{aligned}$$

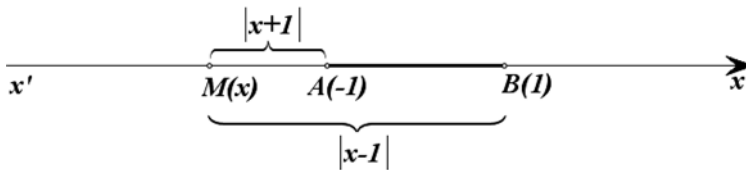
Άρα $x = 1$, αφού $x > 0$.

12. i) Από τον ορισμό της απόστασης δυο σημείων του άξονα προκύπτει ότι $(MA) = |x + 1|$ και $(MB) = |x - 1|$.

Επομένως, έχουμε

$$f(x) = (MA) + (MB) = |x + 1| + |x - 1|.$$

$$g(x) = ||x + 1| - |x - 1||.$$



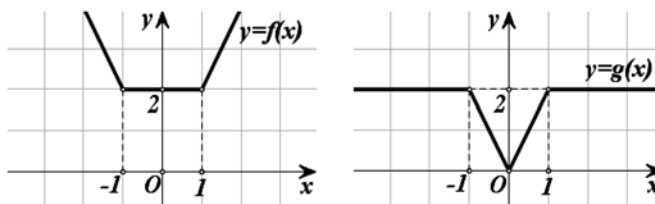
- ii) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης f και g , βρίσκουμε το πρόσημο των $x + 1$ και $x - 1$ για τις διάφορες τιμές του x που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$

Έτσι έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{αν } x < -1 \\ 2, & \text{αν } -1 \leq x < 1 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x < -1 \\ -2x, & \text{αν } -1 \leq x < 1 \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι οι ακόλουθες:



iii) Από τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις συμπεραίνουμε ότι

- Η συνάρτηση f
 - ✓ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, σταθερή του $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και
 - ✓ παρουσιάζει ελάχιστο, ίσο με 2, για κάθε $x \in [-1, 1]$.
- Η συνάρτηση g
 - ✓ είναι σταθερή στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και σταθερή στο $[1, +\infty)$,
 - ✓ παρουσιάζει ελάχιστο, ίσο με 0, για $x = 0$ και
 - ✓ παρουσιάζει μέγιστο, ίσο με 2, για κάθε $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

13. i) • Η f έχει ολικό μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 2$.

- Η g έχει ολικό μέγιστο για $x = 1$, το $g(1) = 2$ και ολικό ελάχιστο για $x = -1$, το $g(-1) = -2$.
- Η h έχει ολικό μέγιστο για $x = -1$ και $x = 1$, το $h(-1) = h(1) = 2$ και ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $h(0) = 0$.

ii) • Για την f αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

- Για την g πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες $g(x) \leq 2$ και $g(x) \geq -2$.

$$\text{Έχουμε } g(x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

$$\text{και } g(x) \geq -2 \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2 + 1} \geq -2 \Leftrightarrow 2x \geq -x^2 - 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

- Για την h πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(x) \geq 0$ και $h(x) \leq 2$.

$$\text{Έχουμε } h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x^4 + 1} \geq 0 \text{ που είναι φανερό ότι ισχύει και}$$

$$h(x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x^4 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 2x^2 \leq x^4 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

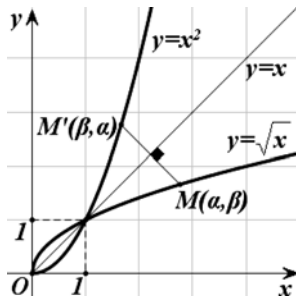
14. A) i) Πρέπει $x \geq 0$. Άρα $A = [0, +\infty)$.

ii) Αφού το $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε
 $\beta = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$. (1)

Για να ανήκει το $M'(\beta, \alpha)$ στη γραφική παράσταση της g , πρέπει $g(\beta) = \alpha \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$ που ισχύει.

iii) Επειδή τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά ως

προς τη διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$ είναι η συμμετρική της γραφικής της $g(x) = x^2$ ως προς την ευθεία $y = x$ για $x \geq 0$.

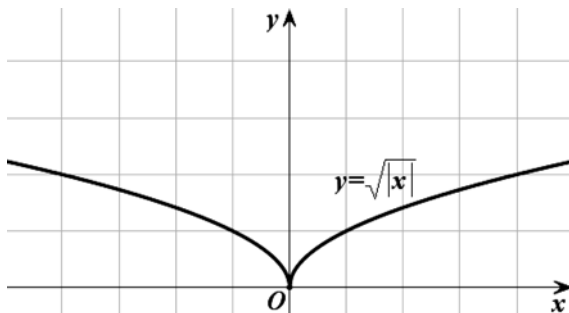


Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Β) Το πεδίο ορισμού της h είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Έχουμε $h(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = h(x)$.

Άρα η h είναι άρτια και η γραφική της παράσταση αποτελείται από τη γραφική παράσταση της f και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.



Γ) Στο τυχαίο τρίγωνο $\triangle NM'N'$ έχουμε $(NN') = f(v+1) = \sqrt{v+1}$ και

$$\begin{aligned} (NM') &= \sqrt{(NM)^2 + (MM')^2} = \sqrt{(v+1-v)^2 + (\sqrt{v})^2} \\ &= \sqrt{1+v} = (NN'). \end{aligned}$$

Άρα το τρίγωνο $\triangle NM'N'$ είναι ισοσκελές.

15. Στο κατακόρυφο επίπεδο της γέφυρας θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο παίρνουμε ως άξονα των x τη χορδή του παραβολικού τόξου και ως άξονα των y τη μεσοκάθετο αυτής (σχήμα).

Στο σύστημα αυτό το παραβολικό τόξο έχει εξίσωση της μορφής

$$y = ax^2 + \gamma, \text{ με } y \geq 0$$

και η κορυφή του είναι το σημείο $K(0, 5, 6)$. Συνεπώς, η εξίσωση του παραβολικού τόξου παίρνει τη μορφή

$$y = ax^2 + 5,6, \text{ με } y \geq 0 \quad (1)$$

Επειδή το πλάτος της γέφυρας είναι 8m, το παραβολικό τόξο θα τέμνει τον

άξονα $x'x$ στα σημεία $B(4, 0)$ και $B'(-4, 0)$, των οποίων οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν την εξίσωση (1). Επομένως θα ισχύει

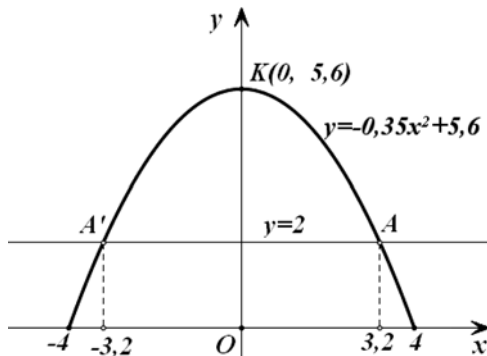
$$0 = a4^2 + 5,6 \Leftrightarrow a = -0,35.$$

Άρα, το παραβολικό τόξο έχει εξίσωση

$$y = -0,35x^2 + 5,6 \text{ με } -4 \leq x \leq 4 \quad (2)$$

Επειδή το ύψος της καρότσας είναι 2m τέμνει το παραβολικό τόξο στα σημεία A και A' , για να περάσει το γεωργικό μηχανήμα θα πρέπει $AA' > 6m$, που είναι το πλάτος του φορτηγού. Για να βρούμε το AA' αρκεί αν βρούμε τις συντεταγμένες των A, A' . Αν θέσουμε στην εξίσωση (2) $y = 2$ βρίσκουμε $-0,35x^2 + 5,6 = 2 \Leftrightarrow x^2 \approx 10,6 \Leftrightarrow x \approx 3,2$.

Άρα $A(3,2, 0)$ και $A'(-3,2, 0)$, οπότε $AA' \approx 6,4m > 6m$. Επομένως το γεωργικό μηχανήμα μπορεί να περάσει.



16. i) Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

- Όταν το σημείο M διαγράφει το ευθ. τμήμα AB , δηλαδή όταν $0 \leq x \leq 20$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου OAM θα είναι ίσο με

$$E = \frac{OA \cdot AM}{2} = \frac{10 \cdot x}{2} = 5x$$

οπότε θα είναι $f(x) = 5x$.

- Όταν το σημείο M διαγράφει το ευθ. τμήμα $BΓ$, δηλαδή όταν $20 \leq x \leq 40$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου θα είναι ίσο με

$$E = \frac{OA + BM}{2} \cdot AB = \frac{10 + (x - 20)}{2} \cdot 20 = 10(x - 10)$$

οπότε θα είναι $f(x) = 10x - 100$.

- Όταν το σημείο M διαγράφει το ευθ. τμήμα $ΓΔ$, δηλαδή όταν $40 \leq x \leq 60$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου θα είναι ίσο με

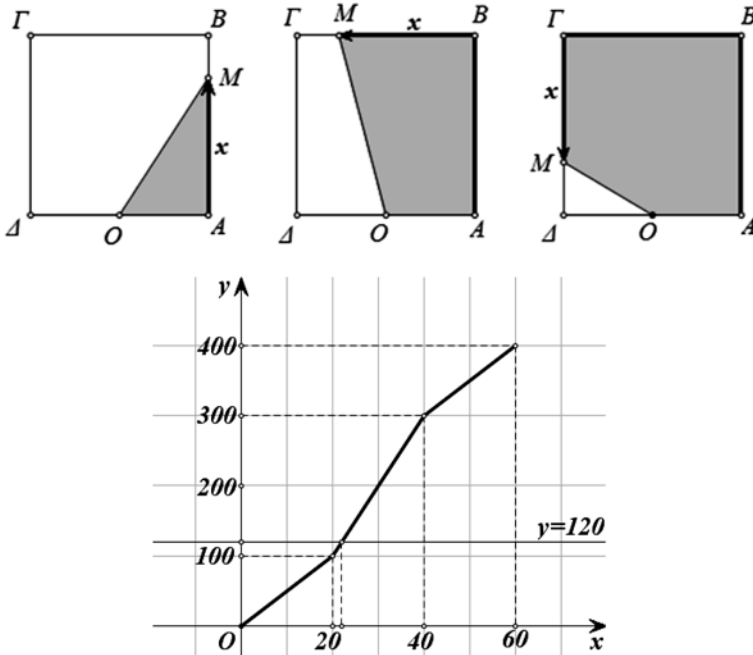
$$E = E_{ABΓΔ} - E_{OΔM} = 20 \cdot 20 - \frac{10 \cdot (60 - x)}{2} = 5x + 100$$

οπότε θα είναι $f(x) = 5x + 100$.

Επομένως, είναι

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \leq x \leq 20 \\ 10x - 100, & 20 \leq x \leq 40 \\ 5x + 100, & 40 \leq x \leq 60. \end{cases}$$

ii) Η γραφική παράσταση της f είναι η πολυγωνική γραμμή του παρακάτω σχήματος.



iii) Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f παίρνει την τιμή 120, όταν x μεταξύ 20 και 40.

Επομένως

$$f(x) = 120 \Leftrightarrow 10x - 100 = 120 \Leftrightarrow x = 22.$$

17. i) Είναι

$$E_{\text{MAB}} = \frac{AB \cdot MP}{2} = \frac{AB \cdot AP}{2} = \frac{2 \cdot x}{2} = x \quad \text{και}$$

$$E_{\text{MΣΓΔ}} = \frac{MΣ + ΓΔ}{2} \cdot ΣΔ = \frac{x + 2}{2} \cdot (2 - x) = \frac{4 - x^2}{2} = -0,5x^2 + 2$$

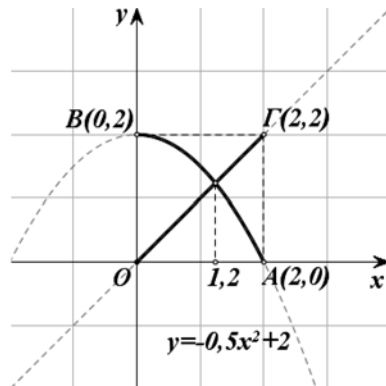
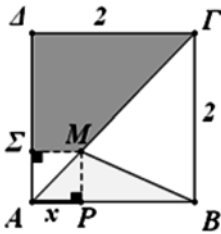
Επομένως

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \text{και} \quad g(x) = -0,5x^2 + 2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ii) Είναι

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -0,5x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 1, \text{ διότι } x > 0.$$

iii) Η γραφική παράσταση της f είναι το τμήμα ΟΓ της ευθείας $y = x$, ενώ η γραφική παράσταση της g είναι το τόξο ΑΒ της παραβολής $y = -0,5x^2 + 2$. Επομένως, η λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής των C_f και C_g και είναι περίπου 1,2, όσο είναι με προσέγγιση δεκάτου η ρίζα $x = \sqrt{5} - 1$ της εξίσωσης που βρήκαμε στο ερώτημα ii).

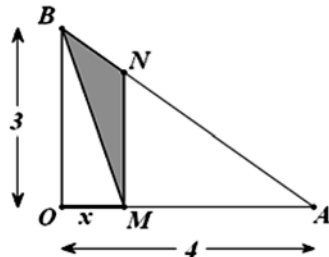


18. i) Έχουμε $\triangle AMN \sim \triangle AOB$, αφού $MN \parallel OB$ ως κάθετες στην ΟΑ. Επομένως

$$\frac{(NM)}{(BO)} = \frac{(MA)}{(OA)} \Leftrightarrow \frac{(NM)}{3} = \frac{4-x}{4},$$

οπότε

$$(MN) = \frac{3(4-x)}{4}.$$



Το εμβαδόν του τριγώνου BMN είναι ίσο με $\frac{1}{2} (MN)(OM)$, (αφού η OM είναι η απόσταση των παραλλήλων MN και OB).

$$\text{Επομένως, } E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3(4-x)}{4} \cdot x$$

$$\text{Άρα } E(x) = -\frac{3}{8} x^2 + \frac{3}{2} x.$$

ii) Το εμβαδόν $E(x)$ μεγιστοποιείται όταν $x = \frac{-\frac{3}{2}}{2\left(-\frac{3}{8}\right)} = 2$,

οπότε

$$E(2) = -\frac{3}{8} \cdot 2^2 + \frac{3}{2} \cdot 2 = -\frac{3}{2} + 3 = 1,5 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

19. i) Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της ευθείας AB . Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται από τα ζεύγη $(0, 4)$ και $(2, 2)$.

$$\text{Επομένως } \begin{cases} 4 = a \cdot 0 + \beta \\ 2 = 2a + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 \\ 2 = 2a + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \beta = 4. \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της AB είναι $y = -x + 4$.

Για $y = 0$ έχουμε $x = 4$. Άρα η ευθεία AB τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma(4, 0)$.

ii) Για $x < 4$, αλλά και για $x > 4$, έχουμε:

$$E = E_{\mu\beta}(AM\Gamma) - E_{\mu\beta}(MB\Gamma) = \frac{1}{2}(M\Gamma)(OA) - \frac{1}{2}(M\Gamma)(KB)$$

Όμως

$$(M\Gamma) = |x - 4|, \quad (OA) = 4 \quad \text{και} \quad (KB) = 2$$

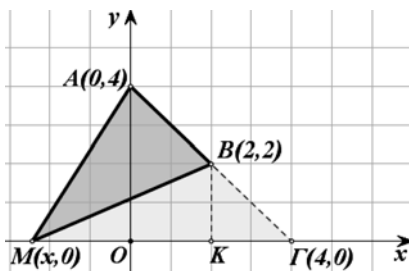
Επομένως

$$E = \frac{1}{2}|x - 4| \cdot 4 - \frac{1}{2}|x - 4| \cdot 2 = 2|x - 4| - |x - 4| = |x - 4|.$$

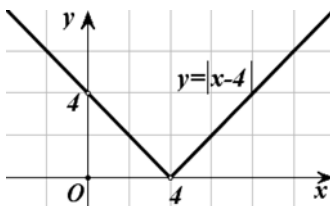
Στην περίπτωση που είναι $x = 4$, έχουμε $E = 0$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, ισχύει:

$$E(x) = |x - 4| = \begin{cases} -x + 4, & x < 4 \\ x - 4, & x \geq 4 \end{cases}$$

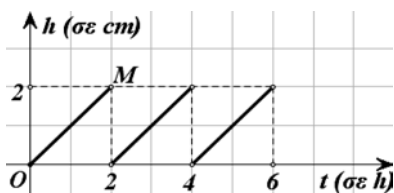


και η γραφική παράσταση της $E(x)$ φαίνεται στο σχήμα.



20. i) Η κίνηση από το Α στο Β και αντιστρόφως από το Β στο Α, επαναλαμβάνεται η ίδια ακριβώς κάθε δύο ώρες.

Επομένως το διάγραμμα του ύψους h , του χιονιού στο Α, θα επαναλαμβάνεται κάθε δύο ώρες, ακριβώς το ίδιο ως προς τη μορφή. Ως προς τη θέση θα είναι απλώς μετατοπισμένο κατά 2 μονάδες κάθε φορά, προς τα δεξιά του άξονα t του χρόνου.



Βρίσκουμε λοιπόν το τμήμα του διαγράμματος, που αντιστοιχεί στις 2 πρώτες ώρες.

Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του ύψους είναι σταθερός, οπότε το ύψος $h(t)$ και ο χρόνος t είναι ποσά ανάλογα. Αυτό σημαίνει ότι, όταν $t \in [0, 2]$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει

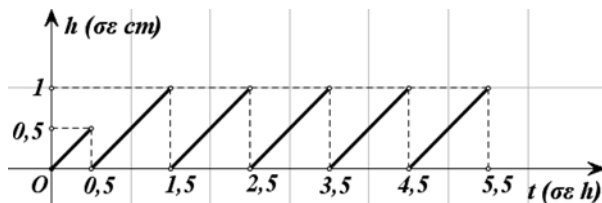
$$h(t) = at \quad (1)$$

Επειδή για $t = 1$ h το ύψος είναι $h = 1$ cm, το ζεύγος $(1, 1)$ θα επαληθεύει την (1), οπότε $1 = a \cdot 1$ και άρα $a = 1$.

Η (1) τότε γίνεται $h(t) = t$ και η γραφική της παράστασης είναι το ευθύγραμμο τμήμα OM της διχοτόμου της $1^{ης}$ γωνίας των αξόνων (σχ.).

Τέλος παρατηρούμε ότι όταν $t = 2$ h, του ύψους h του χιονιού είναι μηδέν, για αυτό το άκρο M του OM δεν ανήκει στο διάγραμμα. Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω για τα διαστήματα $[2, 4]$, $[4, 6]$,... έχουμε το πλήρες διάγραμμα (σχ.).

- ii) Με συλλογισμούς ανάλογους με τους παραπάνω καταλήγουμε για το ύψος του χιονιού στο Μ, στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος.



Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α).



Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.