

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας

Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Βλάμος Παναγιώτης

Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος

Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός

Επίκουρος Καθηγητής, Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης

Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: Βανδουλάκης Ιωάννης

Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας

Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια: Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων: Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση: Αλεξοπούλου Καίτη

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η «Ευκλείδεια Γεωμετρία» έχει ένα διττό ρόλο να εκπληρώσει: να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Το βιβλίο αυτό, σύμφωνα με τα πλαίσια συγγραφής που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ευελπιστεί ότι θα οδηγήσει τους μαθητές του Λυκείου να γνωρίσουν την αυστηρή αλλά και λιτή μαθηματική γλώσσα, ελπίζοντας ότι θα συνεισφέρει στη μαθηματική παιδεία του τόπου, αναπτύσσοντας το ρεαλισμό της μαθηματικής λογικής και σκέψης.

Το έργο αυτό είναι αποτέλεσμα της συλλογικής προσπάθειας μιας ομάδας μαθηματικών, οι οποίοι αποδεχόμενοι την πρόσκληση του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εργάστηκαν συστηματικά για την πραγματοποίησή του.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά: το Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για τη βοήθεια που μας πρόσφερε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής του έργου, τον Καθηγητή του Ε.Μ.Πολυτεχνείου κ. Ευγένιο Αγγελόπουλο για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη διαμόρφωση του βιβλίου και τα μέλη της επιτροπής κρίσης που με τις εύστοχες παρατηρήσεις τους βοήθησαν στην τελική μορφή αυτού του έργου.

Οι συγγραφείς

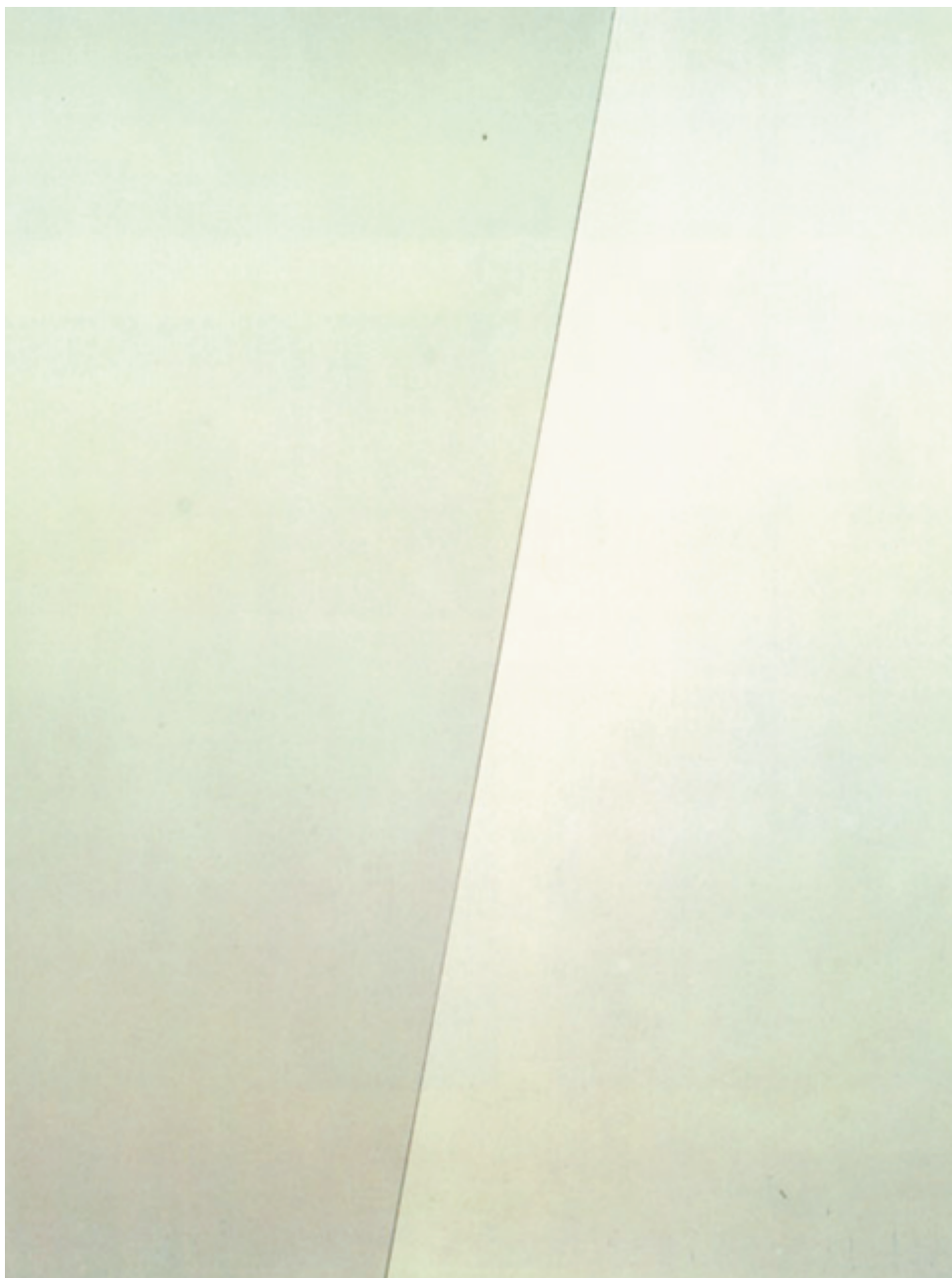
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1ο	Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία	1
1.1	Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας	3
1.2.	Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας	5
Κεφάλαιο 2ο	Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα	7
2.1.	Σημεία, γραμμές και επιφάνειες	9
2.2.	Το επίπεδο	9
2.3.	Η ευθεία	10
2.4.	Η ημιευθεία	10
2.5.	Το ευθύγραμμο τμήμα	10
2.6.	Μετατοπίσεις στο επίπεδο	11
2.7.	Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων	11
2.8.	Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων	12
2.9.	Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων	13
2.10	Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο	13
2.11.	Ημιεπίπεδα	14
2.12.	Η γωνία	15
2.13.	Σύγκριση γωνιών	15
2.14.	Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία	16
2.15.	Πράξεις μεταξύ γωνιών	17
2.16.	Είδη και απλές σχέσεις γωνιών	18
2.17.	Έννοια και στοιχεία του κύκλου	21
2.18.	Επίκεντρο γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου	23
2.19.	Μέτρο τόξου και γωνίας	25
2.20.	Τεθλασμένη γραμμή-Πολύγωνο-στοιχεία πολυγώνων	28
Κεφάλαιο 3ο	Τρίγωνα	33
3.1.	Είδη και στοιχεία τριγώνων	35
3.2.	1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	36
3.3.	2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	39
3.4.	3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων	39
3.5.	Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου	43
3.6.	Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων	44
3.7.	Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος	49
3.8.	Κεντρική συμμετρία	50
3.9.	Αξονική συμμετρία	51
3.10.	Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας	53
3.11.	Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών	54
3.12.	Τριγωνική ανισότητα	54
3.13.	Κάθετες και πλάγιες	58
3.14.	Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου	60
3.15.	Εφαπτόμενα τμήματα	62
3.16.	Σχετικές θέσεις δύο κύκλων	63
3.17.	Απλές γεωμετρικές κατασκευές	67
3.18.	Βασικές κατασκευές τριγώνων	69
Κεφάλαιο 4ο	Παράλληλες ευθείες	73
4.1.	Εισαγωγή	75
4.2.	Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα	75
4.3.	Κατασκευή παράλληλης ευθείας	78
4.4.	Γωνίες με πλευρές παράλληλες	79
4.5.	Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου	80
4.6.	Άθροισμα γωνιών τριγώνου	83
4.7.	Γωνίες με πλευρές κάθετες	84
4.8.	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου	85
Κεφάλαιο 5ο	Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία	95
5.1	Εισαγωγή	97
5.2.	Παραλληλόγραμμα	97
5.3.	Ορθογώνιο	100
5.4.	Ρόμβος	101
5.5.	Τετράγωνο	102
5.6.	Εφαρμογές στα τρίγωνα	104
5.7.	Βαρύκεντρο τριγώνου	107
5.8.	Το ορθόκεντρο τριγώνου	108
5.9.	Μια ιδιότητα του ορθόγωνιου τριγώνου	109
5.10.	Τραπεζίο	112
5.11.	Ισοσκελές τραπέζιο	113
5.12.	Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου	116
Κεφάλαιο 6ο	Εγγεγραμμένα σχήματα	121
6.1.	Εισαγωγικά - Ορισμοί	123
6.2.	Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης	123
6.3.	Γωνία χορδής και εφαπτομένης	124
6.4.	Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο	126
6.5.	Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο	130
6.6	Το εγγράψιμο τετράπλευρο	131
6.7.	Γεωμετρικοί τόποι	

και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων	135	κύκλου με κανονικά πολύγωνα	243
Κεφάλαιο 7ο Αναλογίες	143	11.5. Μήκος τόξου	244
7.1. Εισαγωγή	145	11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύ- κλου με κανονικά πολύγωνα .	246
7.2. Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε n ίσα μέρη	145	11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος	246
7.3. Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό - Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων	145	11.8. Τετραγωνισμός κύκλου	249
7.4. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες	147	Κεφάλαιο 12ο Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	257
7.5. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος	148	12.1. Εισαγωγή	259
7.6. Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο	148	12.2. Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του	260
7.7. Θεώρημα του Θαλή	151	12.3. Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων	262
7.8. Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου	158	12.4. Ευθείες και επίπεδα παράλληλα - Θεώρημα του Θαλή	265
7.9. Απολλώνιος Κύκλος	161	12.5. Γωνία δύο ευθειών - ορθογώνιες ευθείες	269
Κεφάλαιο 8ο Ομοιότητα	169	12.6. Απόσταση σημείου από επίπεδο - απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων	274
8.1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	171	12.7. Διέδρα γωνία - αντίστοιχη επίπεδα μιας διέδρας - κάθετα επίπεδα	277
8.2. Κριτήρια ομοιότητας	172	12.8. Προβολή σημείου και ευθείας σε επίπεδο - Γωνία ευθείας και επιπέδου	282
Κεφάλαιο 9ο Μετρικές σχέσεις	181	Κεφάλαιο 13ο Στερεά σχήματα	287
9.1. Ορθές προβολές	183	13.1. Περί πολυέδρων	289
9.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα . . .	183	13.2. Ορισμός και στοιχεία του πρίσματος	291
9.3. Γεωμετρικές κατασκευές . . .	186	13.3. Παραλληλεπίπεδο, κύβος . . .	292
9.4. Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος	189	13.4. Μέτρηση πρίσματος	293
9.5. Θεωρήματα Διαμέσων	194	13.5. Ορισμός και στοιχεία πυραμίδας	299
9.6. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι . .	196	13.6. Κανονική πυραμίδα - τετράεδρο	301
9.7. Τέμνουσες κύκλου	199	13.7. Μέτρηση πυραμίδας	301
Κεφάλαιο 10ο Εμβαδά	209	13.8. Ορισμός και στοιχεία κόλουρης πυραμίδας	304
10.1. Πολυγωνικά χωρία	211	13.9. Μέτρηση κόλουρης ισοσκελούς πυραμίδας	304
10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα	211	13.10. Στερεά εκ περιστροφής	307
10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων	212	13.11. Ορισμός και στοιχεία κυλίνδρου	307
10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου	218	13.12. Μέτρηση κυλίνδρου	308
10.5. Λόγος εμβαδών ομοίων τριγώνων - πολυγώνων	221	13.13. Ορισμός και στοιχεία κώνου	310
10.6. Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του	225	13.14. Μέτρηση του κώνου	310
Κεφάλαιο 11ο Μέτρηση Κύκλου	231	13.15. Κόλουρος κώνος	312
11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου	233	13.16. Ορισμός και στοιχεία σφαίρας	314
11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων	234	13.17. Θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα	315
11.3. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους	238	13.18. Μέτρηση σφαίρας	316
11.4. Προσέγγιση του μήκους του		13.19. Κανονικά πολύεδρα	321

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία



Ellsworth Kelly (Αμερικανός, 1923).
«Γκρι πανό 2»
2 πανό, λάδια σε καμβά, 1974.



1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του **χώρου** και των **σχημάτων**, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα.

Στο χώρο διακρίνουμε τις **επιφάνειες**, τις **γραμμές** και τα **σημεία**. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε **όρους** της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνώμονιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. **Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.**

Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν προταθεί πάρα πολλά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή διαφορετικές επιλογές αξιωμάτων (βλ. Παράρτημα Α). Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.



1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου, τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς αυτούς. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν και σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μία νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου και, περί το 440 π.Χ., τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Από μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική ακόμα περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής

των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως π.χ. η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλωνίου, που θα βρει εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17ο αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στα θεμέλια της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17ου αι. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Το 18ο αι. διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Όυλερ και του Μόντζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιοσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17ου αι. αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτή θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μόντζ.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαξε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπόλναιϊ (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετριών»), την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρημάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του 19ου αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεωμετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εμπέδωση και η συστηματική μελέτη των πρωταρχικών εννοιών: σημείο, ευθεία, επίπεδο καθώς και των βασικών γεωμετρικών σχημάτων: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα. Όπως είδαμε, οι πρωταρχικές έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο δίνονται χωρίς ορισμό και με βάση αυτές ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.



Andrea Mantegna (Ιταλός, περίπου 1431 - 1506).
Οροφή από την "*Camera degli Sposi*" (Δωμάτιο των Συζύγων),
τοιχογραφία από το Δουκικό Παλάτι , στη Μάντοβα της Ιταλίας.

Οι πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

Όπως αναφέραμε ήδη στην Εισαγωγή, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες

Ένα **σημείο** δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. Σημείο Α, Σημείο Β (σχ.1)).

Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία **γραμμή** (σχ.2). Σε κάθε θέση του μολυβιού το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο.

Επομένως, η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο.

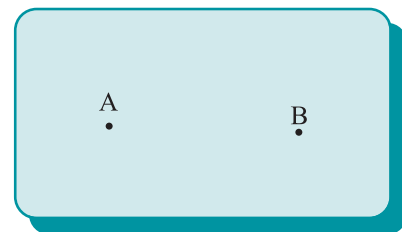
Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε από την **επιφάνειά** του. Το σύνολο των σημείων τα οποία το χωρίζουν από το περιβάλλον του ονομάζεται επιφάνεια του σώματος.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μελέτη σχημάτων ή γραμμών, που βρίσκονται σε μια ειδικού τύπου επιφάνεια, το **επίπεδο**.

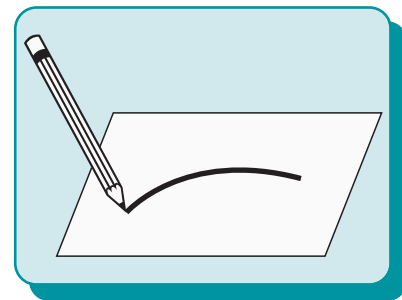
2.2 Το επίπεδο

Η απλούστερη από όλες τις επιφάνειες είναι η επίπεδη επιφάνεια ή απλά το **επίπεδο**. Η επιφάνεια του πίνακα, η επιφάνεια ενός λείου δαπέδου, η επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης κτλ. μας δίνουν την εικόνα ενός επιπέδου.

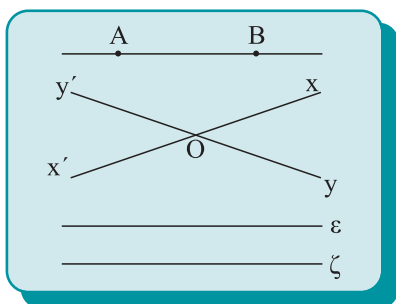
Στο πρώτο μέρος της Γεωμετρίας, που λέγεται επιπεδομετρία δε θα ορίσουμε το επίπεδο ούτε τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν, αλλά θα το μελετήσουμε εξετάζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων, των οποίων όλα τα στοιχεία περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται **επίπεδα σχήματα**.



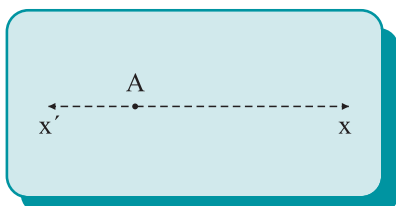
Σχήμα 1



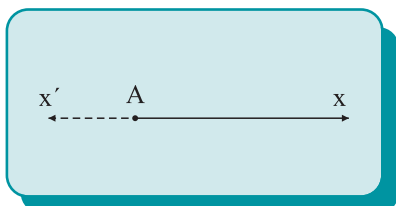
Σχήμα 2



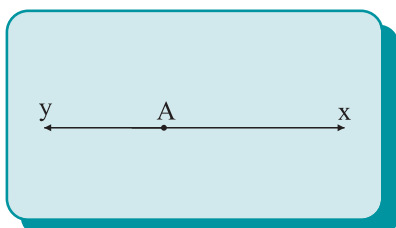
Σχήμα 3



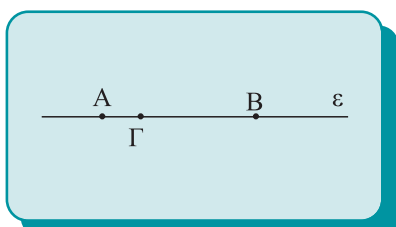
Σχήμα 4



Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Σημείωση:

Όταν λέμε ότι προεκτείνουμε το τμήμα AB , θα εννοούμε προς το μέρος του B , ενώ το BA προς το μέρος του A .

2.3 Η ευθεία

Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία A, B διέρχεται μοναδική ευθεία. Την ευθεία αυτή ονομάζουμε ευθεία AB ή BA (σχ.3). Επίσης μία ευθεία συμβολίζεται είτε με ένα μικρό γράμμα ($\epsilon, \zeta, \dots$) του ελληνικού αλφαβήτου είτε ως $x'x$.

Προφανώς δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Άρα θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή κανένα. Δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέγονται **τεμνόμενες** ευθείες και το κοινό σημείο τους λέγεται **τομή** των δύο ευθειών, ενώ δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται **παράλληλες**.

Το ευθύγραμμο τμήμα

2.4 Η ημιευθεία

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα χωρίς διακοπές και κενά. Έστω μία ευθεία $x'x$ και σημείο της A (σχ.4). Τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Ax και Ax' και τα ονομάζουμε **ημιευθείες** με **αρχή** το σημείο A .

Η ευθεία $x'x$ λέγεται **φορέας** της ημιευθείας Ax (σχ.5). Δύο ημιευθείες Ax, Ay με μόνο κοινό σημείο την αρχή τους A , όταν έχουν τον ίδιο φορέα λέγονται **αντικείμενες** (σχ.6).

2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα

Σε ευθεία ϵ θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία A, B . **Ευθύγραμμο τμήμα** AB ή BA (σχ.7) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία A, B και τα σημεία της ευθείας ϵ που βρίσκονται μεταξύ τους.

Τα σημεία A και B λέγονται **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ϵ λέγεται **φορέας** του τμήματος. Τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, εκτός των άκρων του, λέγονται **εσωτερικά** σημεία του τμήματος. Αν π.χ. το Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος AB (σχ.7), λέμε ότι τα A, B βρίσκονται **εκατέρωθεν** του Γ , ενώ τα B, Γ είναι **προς το ίδιο μέρος** του A . Δύο τμήματα, που έχουν κοινό ένα άκρο και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγονται **διαδοχικά**.

2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Για κάθε επίπεδο σχήμα δεχόμαστε ότι μπορεί να μετατοπισθεί μέσα στο επίπεδο πηγαίνοντας από την αρχική του θέση σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμένει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος.

Το τελικό σχήμα που προκύπτει (δηλαδή το αρχικό σχήμα στην τελική θέση) λέγεται **ομόλογο** (ή **εικόνα**) του αρχικού.

2.7 Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων

• Ίσα ευθύγραμμα τμήματα

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.

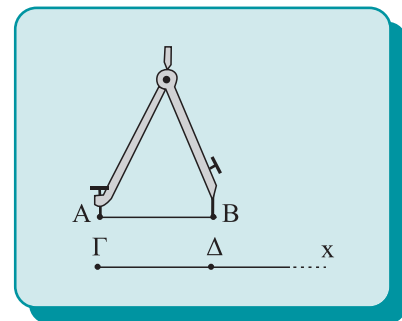
Για την ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων δεχόμαστε το παρακάτω αξίωμα:

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB . Τότε για κάθε ημιευθεία $G\chi$ υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ , ώστε $AB = G\Delta$ (σχ.8).

Άμεση συνέπεια του παραπάνω αξιώματος είναι η επόμενη κατασκευή.

• Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσου προς δοσμένο

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα AB και η ημιευθεία $G\chi$. Εφαρμόζουμε τη μια ακίδα του διαβήτη στο A και την άλλη στο B και, στη συνέχεια, κρατώντας σταθερό το άνοιγμα του διαβήτη τοποθετούμε το ένα άκρο του στο G , οπότε το άλλο άκρο του ορίζει το σημείο Δ της $G\chi$ (σχ.8). Τότε το τμήμα $G\Delta$ είναι ίσο με το αρχικό.



Σχήμα 8

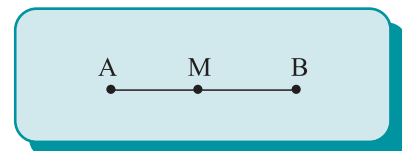
• Γεωμετρικές κατασκευές

Η παραπάνω διαδικασία λέγεται **γεωμετρική κατασκευή**. Θα λέμε ότι ένα σχήμα κατασκευάζεται γεωμετρικά, όταν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα **γεωμετρικά όργανα**, δηλαδή τον **κανόνα** (χωρίς υποδιαιρέσεις) και το **διαβήτη**.

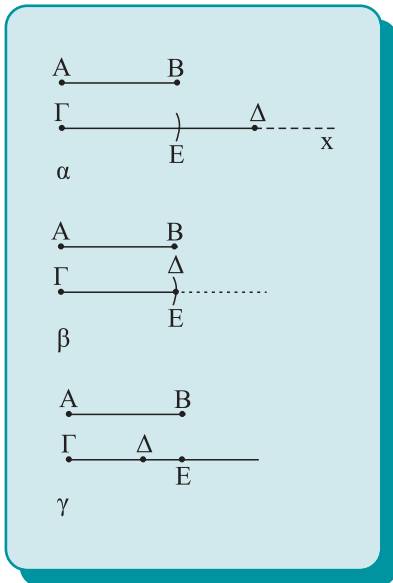
• Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο M τέτοιο, ώστε $AM=MB$ (σχ.9).

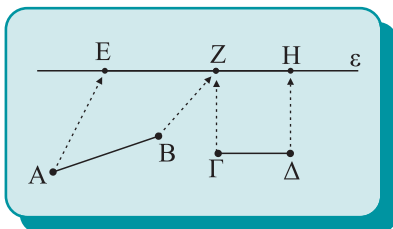
Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο.



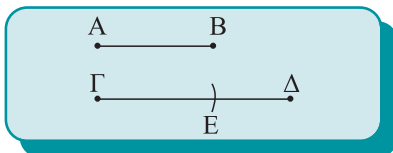
Σχήμα 9



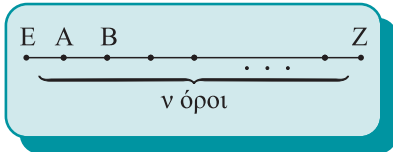
Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12



Σχήμα 13

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $AB = \Gamma\Delta$, τότε η διαφορά $\Gamma\Delta - AB$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τα άκρα του οποίου συμπίπτουν. Το τμήμα αυτό λέγεται **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.

• Άνισα ευθύγραμμο τμήματα

Έστω δύο ευθύγραμμο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το $\Gamma\Delta$ οπότε προκύπτει η ημιευθεία $\Gamma\chi$. Μετατοπίζουμε το AB ώστε το A να ταυτιστεί με το Γ . Τότε θα υπάρχει μοναδικό σημείο E της $\Gamma\chi$, ώστε $AB = \Gamma E$.

• Αν το E είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος $\Gamma\Delta$, θα λέμε ότι το τμήμα AB είναι μικρότερο από το $\Gamma\Delta$. Συμβολίζουμε $AB < \Gamma\Delta$ (σχ. 10α).

• Αν το E ταυτίζεται με το Δ , τότε $AB = \Gamma\Delta$, όπως προηγούμενα (σχ. 10β).

• Αν το E δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος $\Gamma\Delta$, θα λέμε ότι το τμήμα AB είναι μεγαλύτερο από το $\Gamma\Delta$. Συμβολίζουμε $AB > \Gamma\Delta$ (σχ. 10γ).

2.8 Πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων

Έστω δύο ευθύγραμμο τμήματα AB , $\Gamma\Delta$.

(i) Με τη βοήθεια του διαβήτη ορίζουμε πάνω σε μία ευθεία ε τα διαδοχικά τμήματα $EZ = AB$ και $ZH = \Gamma\Delta$ (σχ. 11). Έτσι κατασκευάζουμε το τμήμα EH , που λέγεται **άθροισμα** των AB και $\Gamma\Delta$ και γράφουμε **$EH = AB + \Gamma\Delta$** . Η διαδικασία αυτή λέγεται **πρόσθεση** δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στην πρόσθεση αριθμών (βλ. Δραστηριότητα).

(ii) Αν $AB < \Gamma\Delta$ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο E του $\Gamma\Delta$, ώστε $\Gamma E = AB$ (σχ. 12). Το τμήμα $E\Delta$ λέγεται **διαφορά** του AB από το $\Gamma\Delta$ και συμβολίζεται **$E\Delta = \Gamma\Delta - AB$** .

(iii) Αν n φυσικός αριθμός, τότε ονομάζεται **γινόμενο** του τμήματος AB επί το φυσικό αριθμό n το ευθύγραμμο τμήμα EZ , το οποίο είναι το άθροισμα n διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το AB (σχ. 13). Γράφουμε

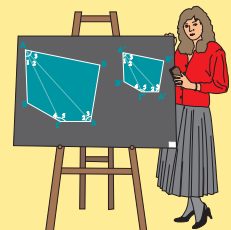
$$EZ = n \cdot AB \text{ ή ισοδύναμα } AB = \frac{EZ}{n}.$$

Δραστηριότητα

Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση των ευθύγραμμων τμημάτων:

i) $AB + \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + AB$ (**αντιμεταθετική**)

ii) $(AB + \Gamma\Delta) + EZ = AB + (\Gamma\Delta + EZ)$ (**προσεταιριστική**).



2.9 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος - Απόσταση δύο σημείων

• Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Είπαμε παραπάνω ότι μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται **μονάδα μήκους**. Θα δούμε στη συνέχεια (Κεφάλαιο 7) ότι για δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΑΒ υπάρχει ένας θετικός αριθμός ρ (όχι απαραίτητα φυσικός), ώστε $\Gamma\Delta = \rho AB$. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μήκους το ΑΒ, τότε ο αριθμός ρ λέγεται **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

• Απόσταση δύο σημείων

Έστω δύο σημεία Α,Β (σχ.14). Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των σημείων Α και Β.

2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

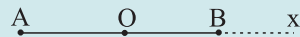
Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο Α, υπάρχει μοναδικό σημείο Β τέτοιο, ώστε το Ο να είναι το μέσο του ΑΒ. Πράγματι αρκεί να προεκτείνουμε το τμήμα ΑΟ και στην ημιευθεία Οχ να πάρουμε τμήμα $OB = OA$ (σχ.15). Το σημείο Β λέγεται **συμμετρικό** του Α ως προς Ο. Προφανώς και το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς το Ο. Τα σημεία Α και Β λέγονται **συμμετρικά** σημεία ως προς **κέντρο συμμετρίας** το σημείο Ο. Παρατηρούμε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το μήκος του τμήματος ΑΒ θα συμβολίζεται με (AB) ή απλούστερα με AB , όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.



Σχήμα 14



Σχήμα 15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

- Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:
 - κανένα κοινό σημείο
 - ένα κοινό σημείο
 - δύο κοινά σημεία
 - άπειρα κοινά σημεία
 Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Στο παρακάτω σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:
 - με αρχή το Α,
 - με αρχή το Β.

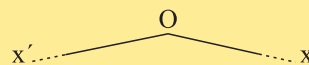


Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;

- Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ είναι συνευθειακά. Αν το Β είναι μεταξύ των Α, Γ και το Γ μεταξύ των Α, Δ, να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των Β, Δ.



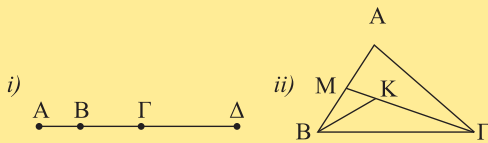
- Οι ημιευθείες Οχ' και Οχ του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες;



- Πόσες ευθείες ορίζουν τρία διαφορετικά σημεία;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων:



2. Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δυο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε: i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών, ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.

3. Σε ευθεία ϵ παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ και Δ ώστε $AB = \Gamma\Delta$. Να δικαιολογήσετε ότι $A\Gamma = B\Delta$.

4. Σε ευθεία ϵ παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ . Αν M και N τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι $A\Gamma = 2MN$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε ευθεία ϵ παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$i) EZ = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}, \quad ii) A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma.$$

2. Σε ευθεία ϵ θεωρούμε τμήμα AB , το μέσο του M , Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος MB και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος AB . Να αποδείξετε ότι:

$$i) \Gamma M = \frac{\Gamma A - \Gamma B}{2}, \quad ii) \Delta M = \frac{\Delta A + \Delta B}{2}.$$

3. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων A, B, Γ , ισχύει $AB \leq A\Gamma + B\Gamma$.

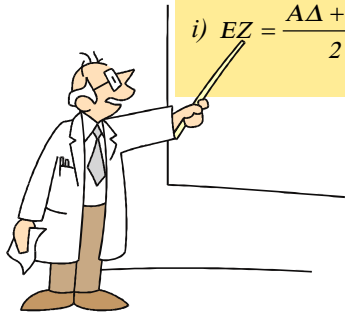
ii) Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $A\Delta \leq A\Gamma + \Gamma B + B\Delta$.

Σύνθετα θέματα

1. Αν A, B, Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, E τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}.$$

2. Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για n δρόμους ($n \geq 2$).



Γωνίες

2.11 Ημιεπίπεδα

Για το επίπεδο δεχόμαστε ότι:

Κάθε ευθεία ϵ ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη Π_1 και Π_2 , τα οποία βρίσκονται **εκατέρωθεν** αυτής.

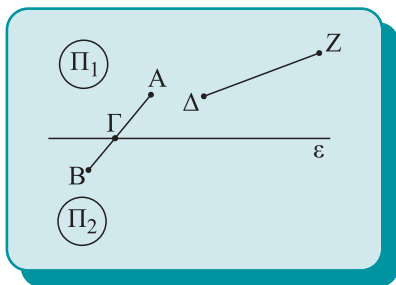
Τα σημεία του Π_1 , μαζί με τα σημεία της ϵ (σχ.16) αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται **ημιεπίπεδο**.

Για να καθορισθεί ένα ημιεπίπεδο, αρκεί να ξέρουμε, εκτός από την ευθεία ϵ , ένα ακόμα σημείο του. Έστω A αυτό το σημείο (σχ.16), τότε το Π_1 συμβολίζεται και (ϵ, A) . Όμοια το Π_2 συμβολίζεται (ϵ, B) .

Για τα ημιεπίπεδα Π_1 και Π_2 δεχόμαστε ότι:

Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μίας ευθείας ϵ , τότε η ευθεία ϵ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

Έτσι η ϵ τέμνει το AB στο σημείο Γ , που βρίσκεται **μεταξύ** των A και B , ενώ δεν τέμνει το ΔZ (σχ.16).



Σχήμα 16

2.12 Η γωνία

Από τυχαίο σημείο O ενός επιπέδου φέρουμε δύο ημιευθείες Ox και Oy (σχ.17), οι οποίες δεν έχουν τον ίδιο φορέα.

Έστω σημεία A, B των ημιευθειών Ox, Oy αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Ox, B) και (Oy, A) λέγεται **κυρτή γωνία** με **κορυφή** O και **πλευρές** Ox και Oy . Συμβολίζεται με $\angle xOy$ ή $\angle yOx$ ή $\hat{O}$ ή $\angle AOB$ ή $\angle BOA$ (σχ.17) και είναι φανερό ότι καθορίζεται από τις πλευρές της.

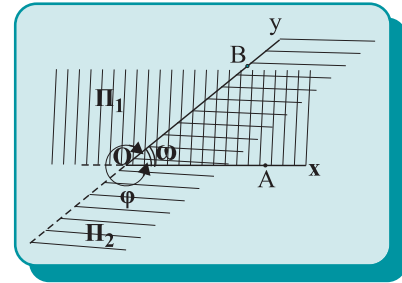
Τα σημεία του επιπέδου, που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $\angle xOy$, μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Ox και Oy λέγεται **μη κυρτή γωνία** με κορυφή O και πλευρές Ox και Oy .

Τα σημεία μίας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται **εσωτερικά** σημεία της και αποτελούν το **εσωτερικό** της γωνίας. Τα σημεία που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται **εξωτερικά** σημεία της και αποτελούν το **εξωτερικό** της γωνίας.

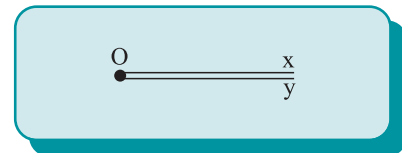
Στην ειδική περίπτωση που οι ημιευθείες Ox και Oy έχουν τον ίδιο φορέα τότε:

- Αν οι ημιευθείες Ox και Oy ταυτίζονται, τότε ορίζουν μία μόνο ημιευθεία Ox (σχ.18) και η κυρτή γωνία $\angle xOy$ λέγεται **μηδενική γωνία**, ενώ η μη κυρτή γωνία $\angle xOy$ ταυτίζεται με όλο το επίπεδο (σχ.19) και λέγεται **πλήρης γωνία**.
- Αν οι ημιευθείες Ox, Oy είναι αντικείμενες (σχ.20), τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy λέγεται **ευθεία γωνία**.

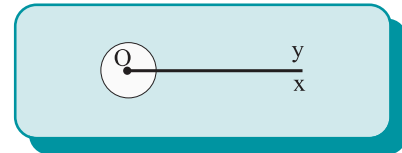
Στα επόμενα, όταν θα λέμε απλώς γωνία, θα εννοούμε κυρτή γωνία.



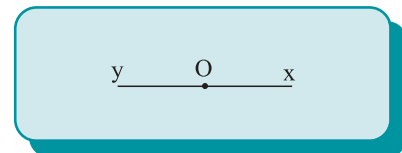
Σχήμα 17



Σχήμα 18



Σχήμα 19



Σχήμα 20

2.13 Σύγκριση γωνιών

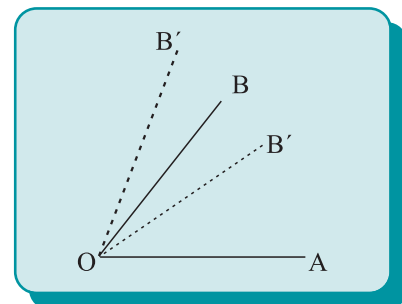
Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $\angle AOB$ και $\angle AOB'$ που έχουν κοινή κορυφή O , την OA κοινή πλευρά και τις OB, OB' προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της OA (σχ.21α). Τότε:

(i) Αν οι πλευρές OB και OB' συμπίπτουν, λέμε ότι οι γωνίες είναι ίσες και γράφουμε $\angle AOB = \angle AOB'$.

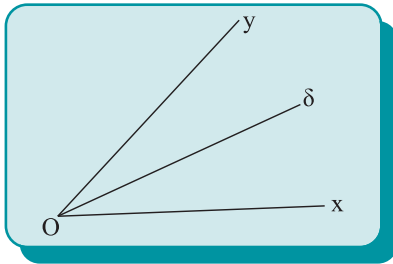
(ii) Αν η πλευρά OB' βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\angle AOB$, λέμε ότι η γωνία $\angle AOB'$ είναι μικρότερη από τη γωνία $\angle AOB$ και γράφουμε $\angle AOB' < \angle AOB$.

(iii) Αν η πλευρά OB' βρίσκεται εκτός της γωνίας $\angle AOB$, λέμε ότι η γωνία $\angle AOB'$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\angle AOB$ και γράφουμε $\angle AOB' > \angle AOB$.

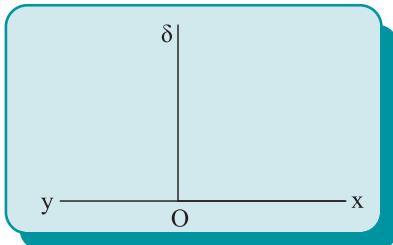
Για να συγκρίνουμε δύο γωνίες $\angle AOB$ και $\angle ΓΚΔ$ που βρίσκονται σε τυχαία θέση μετατοπίζουμε την $\angle ΓΚΔ$ έτσι ώστε, η κορυφή



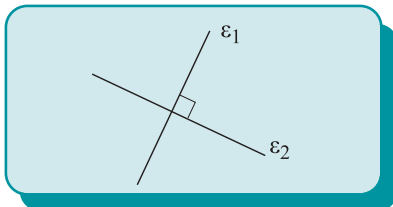
Σχήμα 21α



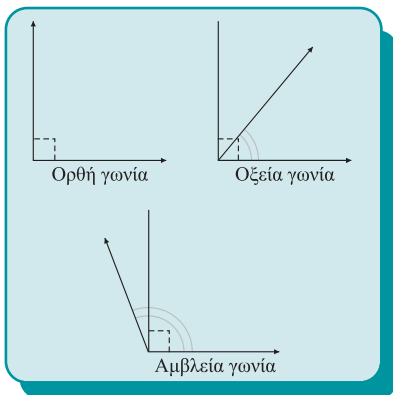
Σχήμα 22



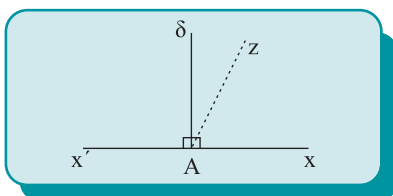
Σχήμα 23



Σχήμα 24



Σχήμα 25

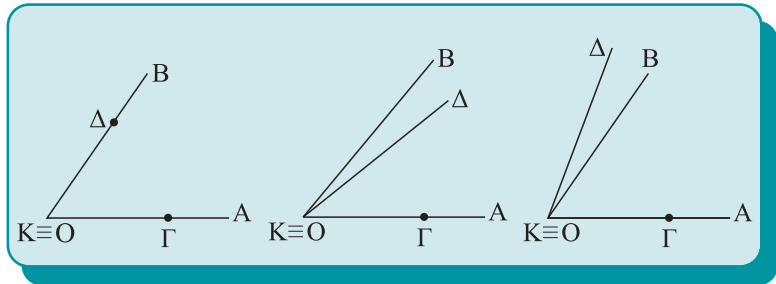


Σχήμα 26

της K να ταυτισθεί με το O και η μία της πλευρά ΓK να συμπίπτει με την πλευρά OA της γωνίας AÔB.

Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν η πλευρά KΔ συμπίπτει με την OB, τότε οι γωνίες είναι ίσες: $\hat{A}ÔB = \hat{\Gamma}K\Delta$ (σχ.21β)
- Αν η πλευρά KΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας AÔB, τότε η γωνία $\hat{\Gamma}K\Delta$ είναι μικρότερη της AÔB: $\hat{\Gamma}K\Delta < \hat{A}ÔB$ (σχ.21γ).
- Αν η πλευρά KΔ βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας AÔB, τότε η γωνία $\hat{\Gamma}K\Delta$ είναι μεγαλύτερη της AÔB: $\hat{\Gamma}K\Delta > \hat{A}ÔB$ (σχ.21δ).



Σχήμα 21β

Σχήμα 21γ

Σχήμα 21δ

Διχοτόμος γωνίας

Διχοτόμος μιας γωνίας xÔy λέγεται η ημιευθεία Oδ, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $\hat{x}Ô\delta = \hat{\delta}Ôy$ (σχ.22).

Δεχόμαστε ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.

Κάθετες ευθείες - Είδη γωνιών

Έστω xÔy μια ευθεία γωνία και Oδ η διχοτόμος της (σχ.23). Καθεμία από τις ίσες γωνίες xÔδ και δÔy που προκύπτουν λέγεται **ορθή** γωνία, και θα τη συμβολίζουμε $\perp$.

Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ευθείες **κάθετες** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ.24).

Μια κυρτή γωνία θα λέγεται **οξεία** αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία, ενώ θα λέγεται **αμβλεία** αν είναι μεγαλύτερη από ορθή γωνία (σχ.25).

2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία

Ας θεωρήσουμε ευθεία x'x και ένα σημείο A (σχ.26).

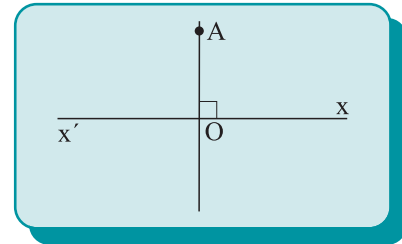
Αν το A είναι σημείο της ευθείας και Aδ η διχοτόμος της ευθείας γωνίας xAx', τότε από τον ορισμό της ορθής γωνίας προκύπτει ότι $A\delta \perp x'x$.

Αν υποθέσουμε ότι και μια άλλη ευθεία Az (σχ.26), διαφορετική της Ad , είναι κάθετη στην $x'x$, τότε θα είναι $\hat{x}Az = \hat{z}Ax' = 1L$, δηλαδή η Az είναι διχοτόμος της $\hat{x}Ax'$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί η διχοτόμος είναι μοναδική. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.

Το ίδιο συμβαίνει (σχ.27) όταν το A δεν είναι σημείο της ευθείας. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της καθέτου, έννοιες τις οποίες θα διαπραγματευθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω (βλ. §.3.5), όπου και θα γίνει η κατασκευή της καθέτου με χρήση κανόνα και διαβήτη.

Το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθύγραμμου τμήματος AO που άγεται από το σημείο A στην ευθεία $x'x$ λέγεται **απόσταση** του σημείου A από την ευθεία $x'x$ (σχ.27).



Σχ.27

ΣΧΟΛΙΟ

Μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο»

Στην απόδειξη της μοναδικότητας της καθέτου σε ευθεία, από σημείο A της ευθείας, υποθέσαμε ότι εκτός της Ad υπάρχει και άλλη κάθετος προς τη $x'x$ (δηλαδή ότι το συμπέρασμα δεν είναι ακριβές) και καταλήξαμε ότι η γωνία $\hat{x}Ax'$ έχει δύο διχοτόμους, το οποίο είναι «άτοπο» (δηλαδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ή άλλη γνωστή πρόταση). Ο παραπάνω τρόπος απόδειξης λέγεται μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο».

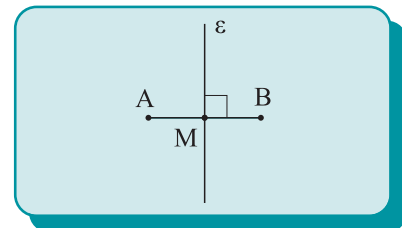
• Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος – Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και διέρχεται από το μέσο του λέγεται **μεσοκάθετος** του ευθύγραμμου τμήματος AB (σχ.28).

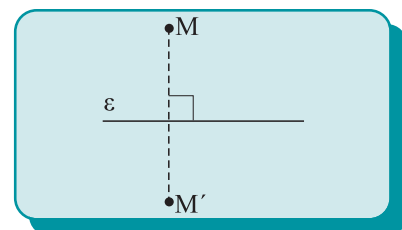
Τα σημεία A, B λέγονται **συμμετρικά** ως προς την ευθεία ε . Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας**.

Για να βρούμε επομένως το συμμετρικό ενός σημείου M ως προς μια ευθεία ε , φέρουμε το κάθετο τμήμα από το M προς την ευθεία και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το άκρο M' της προέκτασης αυτής είναι το συμμετρικό του M (σχ.29).

Το συμμετρικό ως προς την ευθεία ε κάθε σημείου της ορίζεται να είναι το ίδιο το σημείο.



Σχ.28

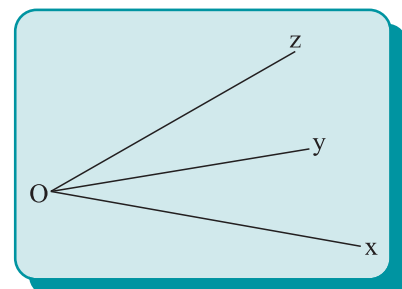


Σχ.29

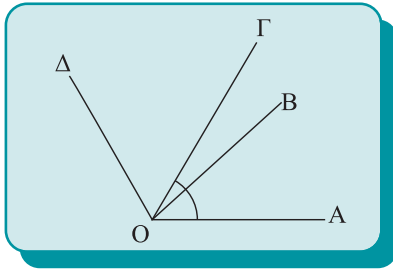
2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

• Εφεξής γωνίες

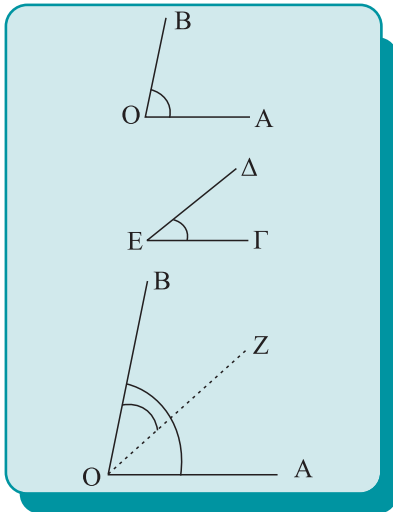
Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής**, αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά κοινή και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής, π.χ. οι γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{yOz}$ (σχ.30) είναι εφεξής.



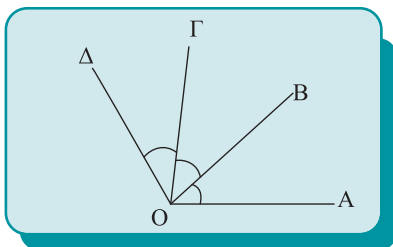
Σχ.30



Σχήμα 31



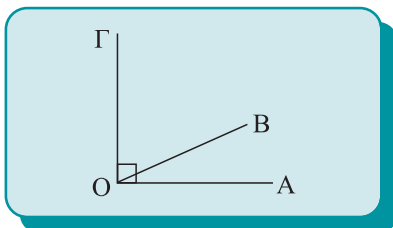
Σχήμα 32



Σχήμα 33

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το άθροισμα γωνιών ή το γινόμενο γωνίας με φυσικό αριθμό μπορεί να ξεπεράσει την πλήρη γωνία.



Σχήμα 34

Η γωνία $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ (σχ. 31) είναι εφεξής με τη $\hat{B}\hat{O}\hat{G}$, και η $\hat{B}\hat{O}\hat{G}$ είναι εφεξής με τη $\hat{G}\hat{O}\hat{D}$. Οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$, $\hat{B}\hat{O}\hat{G}$, $\hat{G}\hat{O}\hat{D}$ λέγονται **διαδοχικές**.

• Πρόσθεση γωνιών - Γινόμενο γωνίας επί φυσικό αριθμό

(i) **Άθροισμα** δύο εφεξής γωνιών $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και $\hat{B}\hat{O}\hat{G}$ λέγεται η γωνία $\hat{A}\hat{O}\hat{G}$ με πλευρές τις δύο μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών (σχ.31).

Αν οι γωνίες δεν είναι εφεξής τις μετατοπίζουμε ώστε να γίνουν. Αν έχουμε παραπάνω από δύο γωνίες, τις καθιστούμε διαδοχικές, π.χ. $\hat{A}\hat{O}\hat{D} = \hat{A}\hat{O}\hat{B} + \hat{B}\hat{O}\hat{G} + \hat{G}\hat{O}\hat{D}$ (σχ.31).

(ii) Έστω $\hat{A}\hat{O}\hat{B} > \hat{G}\hat{E}\hat{D}$ (σχ.32). Μετατοπίζουμε τη γωνία $\hat{G}\hat{E}\hat{D}$, ώστε η πλευρά της ΕΓ να συμπίσει με την ΟΑ ενώ η πλευρά της ΕΔ μετατοπίζεται σε ημιευθεία ΟΖ στο εσωτερικό της $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ (σχ.32). Η γωνία $\hat{Z}\hat{O}\hat{B}$ λέγεται **διαφορά** της γωνίας $\hat{G}\hat{E}\hat{D}$ από την $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και συμβολίζεται $\hat{A}\hat{O}\hat{B} - \hat{G}\hat{E}\hat{D}$. Είναι φανερό ότι $\hat{G}\hat{E}\hat{D} + \hat{Z}\hat{O}\hat{B} = \hat{A}\hat{O}\hat{B}$.

Η διαφορά δύο ίσων γωνιών είναι η μηδενική γωνία.

(iii) **Γινόμενο** της γωνίας $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ επί το φυσικό αριθμό n ονομάζεται το άθροισμα n διαδοχικών γωνιών ίσων με $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$.

$$n \cdot \hat{A}\hat{O}\hat{B} = \underbrace{\hat{A}\hat{O}\hat{B} + \hat{A}\hat{O}\hat{B} + \dots + \hat{A}\hat{O}\hat{B}}_{n \text{ όροι}},$$

$$\text{π.χ. } \hat{A}\hat{O}\hat{D} = \hat{A}\hat{O}\hat{B} + \hat{B}\hat{O}\hat{G} + \hat{G}\hat{O}\hat{D} = 3\hat{A}\hat{O}\hat{B} \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \frac{\hat{A}\hat{O}\hat{D}}{3} \text{ (σχ.33).}$$

2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

• Συμπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και **συμπλήρωμα** της άλλης, π.χ. οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και $\hat{B}\hat{O}\hat{G}$ (σχ.34) είναι συμπληρωματικές.

• Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και **παραπλήρωμα** της άλλης (σχ.35).

Προφανώς τα παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας (ή ίσων γωνιών) είναι ίσες γωνίες.

Θεώρημα

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Αν οι εφεξής γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές OA και OG είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ είναι η ευθεία γωνία $\hat{A}\hat{O}\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

• Κατακορυφήν γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν**, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

Π.χ. οι γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}y'$ καθώς και οι γωνίες $\hat{y}\hat{O}x'$ και $\hat{x}\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν (σχ.36).

Θεώρημα I

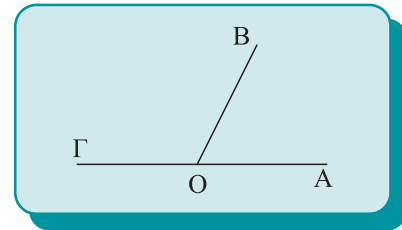
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}y'$ (σχ.36). Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρώματα της ίδιας γωνίας $\hat{y}\hat{O}x'$.

Θεώρημα II

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.



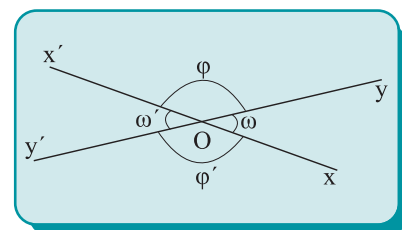
Σχήμα 35

ΣΧΟΛΙΟ

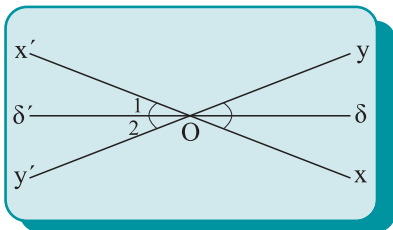
Αντίστροφα Θεωρήματα λέγονται αυτά στα οποία η υπόθεση του ενός είναι συμπέρασμα του άλλου. Όταν αποδείξουμε ένα θεώρημα (ευθεία πρόταση) δεν προκύπτει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές, π.χ.:

Ευθεία Πρόταση: Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες.

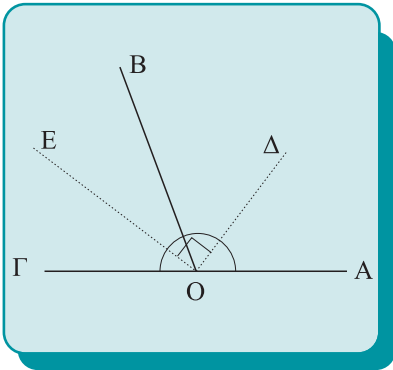
Αντίστροφη Πρόταση: Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές. Προφανώς η πρόταση αυτή δεν αληθεύει.



Σχήμα 36



Σχήμα 37



Σχήμα 38

Απόδειξη

Έστω οι κατακορυφές γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'O'y'}$ και η διχοτόμος Οδ της $\hat{xOy}$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.

Αν Οδ' είναι η προέκταση της Οδ, τότε $\hat{O}_1 = \delta\hat{O}x$ και $\hat{O}_2 = \delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφές).

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η Οδ' είναι διχοτόμος της $\hat{x'O'y'}$.

Θεώρημα III

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη

Έστω $\hat{AOB}$ και $\hat{BOG}$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους (σχ.38).

Τότε $\hat{AOB} + \hat{BOG} = 2\text{L}$ ή $2\hat{DOB} + 2\hat{BOE} = 2\text{L}$ ή $\hat{DOB} + \hat{BOE} = 1\text{L}$ ή $\hat{DOE} = 1\text{L}$. Άρα $OD \perp OE$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:

- την ευθεία ε_1 ,
- την ευθεία ε_2 ,
- το σημείο Μ.

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

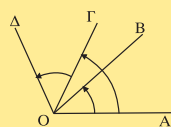
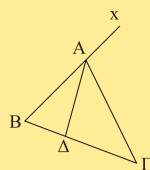
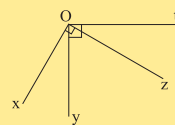
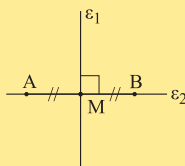
2. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις οξείες, τις ορθές και τις αμβλείες γωνίες που υπάρχουν.

3. Να γράψετε τρία ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.

4. i) Οι γωνίες $\hat{AOB}$ και $\hat{GOA}$ είναι εφεξής;

ii) Οι γωνίες $\hat{AOG}$ και $\hat{AOB}$ είναι διαδοχικές;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



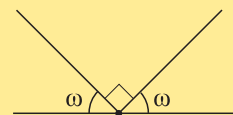
5. Υπάρχει περίπτωση η συμπληρωματική μιας γωνίας να είναι ίση με την παραπληρωματική της;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\hat{xOy}$, $\hat{yOz}$ και $\hat{zOt}$, ώστε $\hat{xOz} = \hat{yOt}$.

Να δικαιολογήσετε ότι $\hat{xOy} = \hat{zOt}$.

2. Να υπολογίσετε, σε μέρη ορθής, τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος.



3. Ένα ρολόι τοίχου δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς. Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού; Μετά από πόσες ώρες (φυσικό αριθμό) οι δείκτες του ρολογιού θα σχηματίζουν ίση γωνία;

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.

2. Θεωρούμε κυρτή γωνία $\hat{A}\hat{O}B$, τη διχοτόμο της OA και τυχαία ημιευθεία OG εσωτερική της γωνίας $\hat{A}\hat{O}B$, όπου OA' η αντικείμενη ημιευθεία της OA . Να απο-

δείξετε ότι $\hat{G}\hat{O}A = \frac{\hat{G}\hat{O}A + \hat{G}\hat{O}B}{2}$.

3. Θεωρούμε κυρτή γωνία $\hat{A}\hat{O}B$, τη διχοτόμο της OA και τυχαία ημιευθεία OG εσωτερική της γωνίας $\hat{A}\hat{O}B$.

Να αποδείξετε ότι $\hat{G}\hat{O}A = \frac{\hat{G}\hat{O}A - \hat{G}\hat{O}B}{2}$.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}G$, $\hat{G}\hat{O}A$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Ox , Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{G}\hat{O}A$ αντίστοιχα, να απο-

δείξετε ότι $x\hat{O}y = \frac{\hat{A}\hat{O}A + \hat{B}\hat{O}G}{2}$.

2. Θεωρούμε αμβλεία γωνία $\hat{A}\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $OG \perp OA$. Αν OD , OE οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}G$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\hat{D}\hat{O}E = \frac{1}{2}L$.



Κύκλος

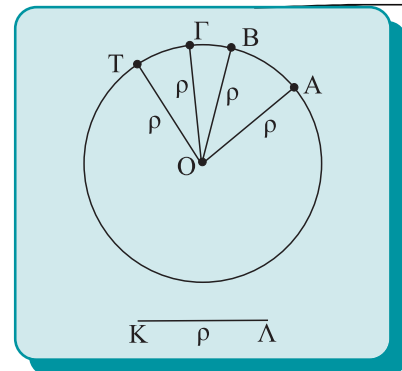
2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο O και ένα τμήμα $KL = \rho$ (σχ.39).

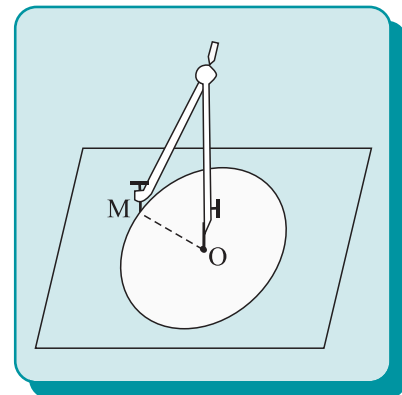
Κύκλος με **κέντρο** O και **ακτίνα** ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το O απόσταση ίση με ρ . Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (O, ρ) ή με (O) αν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά της ακτίνας και σχεδιάζεται με το γνωστό μας διαβήτη (σχ.40). Κάθε τμήμα OM , όπου M σημείο του κύκλου (O, ρ) (σχ.40), λέγεται επίσης ακτίνα του κύκλου.

Για τα σημεία M ενός κύκλου (O, ρ) και μόνο γι' αυτά ισχύει $OM = \rho$. Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του.

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται **γεωμετρικός τόπος**. Έτσι ο κύκλος (O, ρ) είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία, και μόνο γι' αυτά, ισχύει $OM = \rho$.



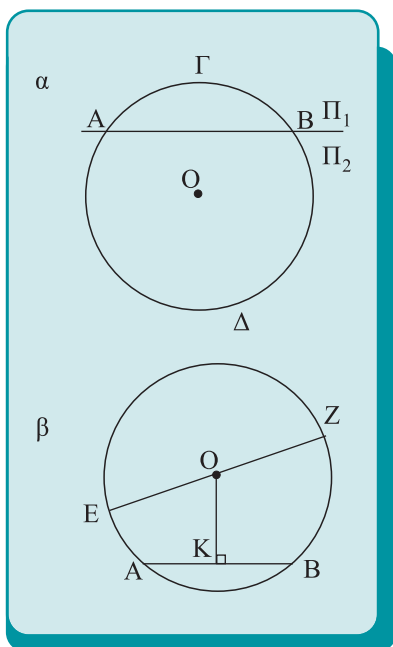
Σχήμα 39



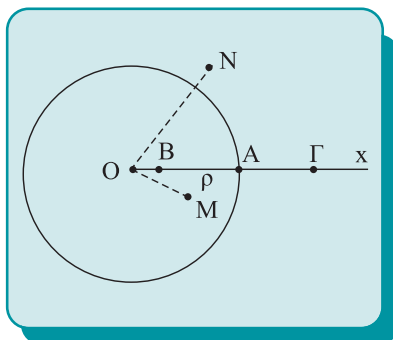
Σχήμα 40

• Τόξα - Χορδές

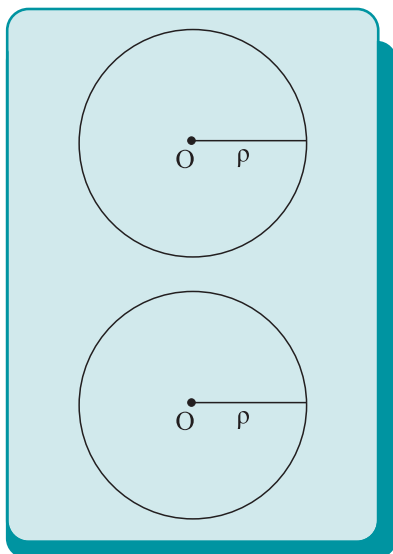
Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου O και δύο σημεία του A και B (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π_1 , που ορίζει η ευθεία AB , και το άλλο στο Π_2 .



Σχήμα 41



Σχήμα 42



Σχήμα 43

Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται **τόξο** του κύκλου με άκρα A και B και συμβολίζεται με $\widehat{AB}$. Κάθε σημείο ενός τόξου, διαφορετικό από τα άκρα του λέγεται **εσωτερικό σημείο** του τόξου. Για να αναφερθούμε στο ένα από τα τόξα με άκρα τα A και B, χρησιμοποιούμε και ένα εσωτερικό σημείο. Έτσι, τα τόξα του σχ.41α με άκρα A,B συμβολίζονται με $\widehat{A\Gamma B}$ το ένα και με $\widehat{A\Delta B}$ το άλλο.

Το ευθύγραμμο τμήμα AB (σχ.41β) που ορίζεται από τα άκρα A,B ενός τόξου λέγεται **χορδή** του τόξου. Η χορδή ενός τόξου λέγεται και χορδή του κύκλου.

Το μοναδικό κάθετο τμήμα OK (σχ.41β) που άγεται από το κέντρο O προς τη χορδή AB λέγεται **απόστημα** της χορδής. Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.

Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται **αντιδιαμετρικά** σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα EZ (σχ. 41β) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία E, Z είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Είναι φανερό ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας και το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της.

Επειδή το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό, προκύπτει ότι **το κέντρο κάθε κύκλου είναι μοναδικό**.

• Θέση σημείου ως προς κύκλο

Έστω ένας κύκλος (O,ρ) και μία ημιευθεία Ox που τον τέμνει στο σημείο A. Για κάθε σημείο B (σχ.42) της ακτίνας OA, διαφορετικό του A ισχύει $OB < \rho$, ενώ για κάθε σημείο Γ της προέκτασης της OA ισχύει $OG > \rho$. Τα σημεία B,Γ λέγονται αντίστοιχα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Γενικά, ένα σημείο M του επιπέδου ενός κύκλου (O,ρ) (σχ.42) λέγεται **εσωτερικό** σημείο του κύκλου, όταν $OM < \rho$, ενώ ένα σημείο N λέγεται **εξωτερικό** του κύκλου, όταν $ON > \rho$.

• Ίσοι κύκλοι

Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον (σχ.43). Είναι φανερό ότι δύο κύκλοι είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.

2.18 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου

Μία γωνία λέγεται **επίκεντρη** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

Για παράδειγμα, στο σχ.44 η $\hat{xOy}$ είναι μία επίκεντρη γωνία.

Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\widehat{AGB}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ **βαίνει** στο τόξο $\widehat{AGB}$.

• Σύγκριση τόξων

Η σύγκριση δύο τόξων γίνεται όπως και η σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων.

Δύο τόξα ΑΒ και ΓΔ του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται **ίσα**, όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο και γράφουμε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ (σχ.45α).

Το τόξο $\widehat{AB}$ λέγεται **μεγαλύτερο** από το τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ (ή το τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ μικρότερο του ΑΒ) και γράφουμε $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$, όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\widehat{\Gamma\Delta}$ ταυτίζεται με μέρος του ΑΒ (σχ.45β).

Επισημαίνουμε ότι τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι συγκρίσιμα.

• Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

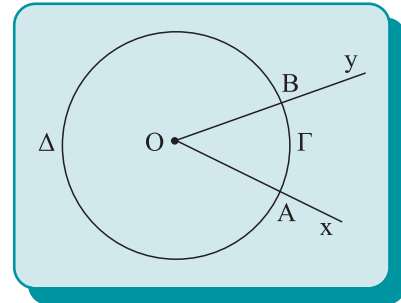
Η σύγκριση δύο τόξων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν σε αυτά, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα I

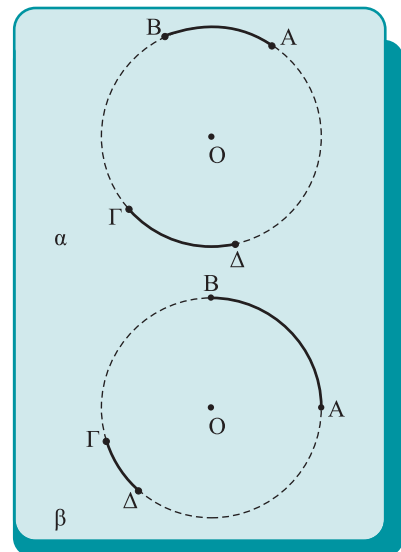
Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

Απόδειξη

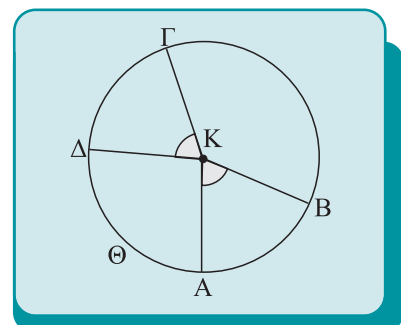
Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ) (σχ.46). Τα τόξα ΑΒ και ΓΔ, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπίπτει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{GKD}$ είναι ίσες.



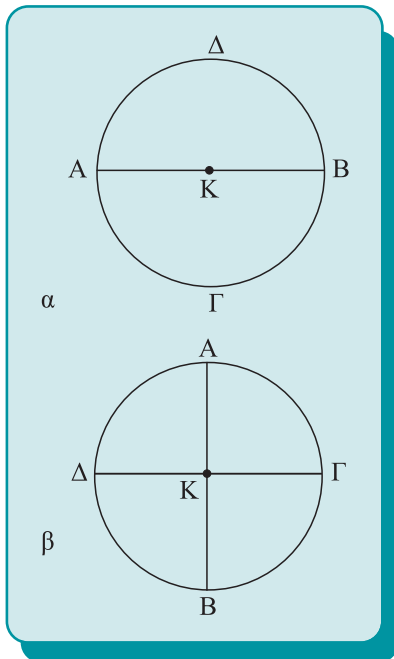
Σχήμα 44



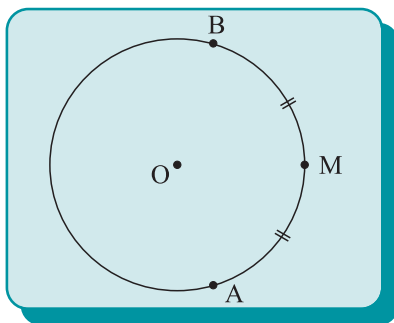
Σχήμα 45



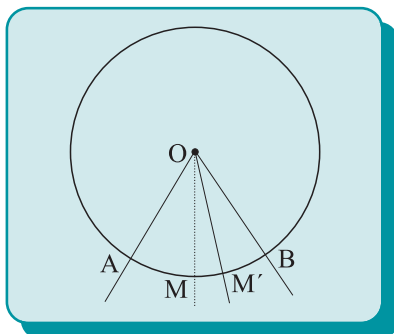
Σχήμα 46



Σχήμα 47



Σχήμα 48



Σχήμα 49

Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{GKD}$ στον κύκλο (K). Τότε, αφού τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\widehat{GKD}$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $\widehat{AKB}$, το Γ θα ταυτισθεί με το A και το Δ με το B. Έτσι τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.
- (ii) Δύο κάθετες διαμέτροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.
- (iii) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιότροπως άνισες.

Καθένα από τα ίσα τόξα $\widehat{AGB}$ και $\widehat{BDA}$ (σχ.47α) στα οποία διαιρείται ο κύκλος (K) από την διάμετρο του AB, λέγεται **ημικύκλιο**, ενώ το καθένα από τα ίσα τόξα $\widehat{AG}$, $\widehat{\Gamma B}$, $\widehat{B\Delta}$ και $\widehat{\Delta A}$ (σχ.47β) στα οποία διαιρείται από τις κάθετες διαμέτρους AB και ΓΔ, λέγεται **τεταρτοκύκλιο**.

• Μέσο τόξου

Ένα εσωτερικό σημείο M ενός τόξου $\widehat{AB}$ (σχ.48) λέγεται **μέσο** του, όταν τα τόξα $\widehat{AM}$ και $\widehat{MB}$ είναι ίσα, δηλαδή όταν $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.

Θεώρημα II

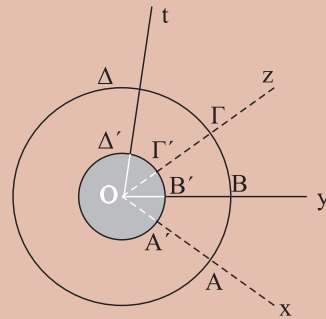
Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω $\widehat{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου O, και M το μέσο του (σχ.49). Επειδή $\widehat{MA} = \widehat{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{MOB}$ είναι ίσες και επομένως η OM είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\widehat{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο το M', τότε η OM' είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{zOt}$ του διπλανού σχήματος είναι επίκεντρες σε δύο *ομόκεντρους* κύκλους, (δηλαδή κύκλους με το ίδιο κέντρο), (O,R) και (O,R') με $R' < R$. Αν $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και $\widehat{A'B'} = \widehat{\Gamma'\Delta'}$ (σχ.50).



Σχ. 50

Απόδειξη

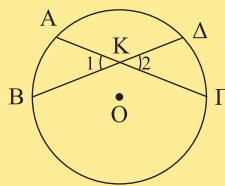
Επειδή $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, θα είναι $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma\Delta\Delta}$, οπότε και $\widehat{A'B'} = \widehat{\Gamma'\Delta'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου (O,r) . Πότε δύο κύκλοι λέγονται ίσοι; Πώς ελέγχεται η ισότητα δύο κύκλων;
2. Πότε ένα σημείο λέγεται εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και πότε εξωτερικό;
3. Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;
4. Τι λέγεται διάμετρος ενός κύκλου και ποια η σχέση της με την ακτίνα του κύκλου;
5. Τι λέγεται τόξο κύκλου με άκρα A,B και τι χορδή του; Πώς ορίζεται η ισότητα και η ανισότητα δύο τόξων ενός κύκλου;
6. Τι λέγεται επίκεντρη γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της; Ποια σχέση ισότητας – ανισότητας υπάρχει μεταξύ επίκεντρων γωνιών και αντίστοιχων τόξων;
7. Τι λέγεται μέσο τόξου; Αν τα σημεία M,N είναι μέσα ενός τόξου $\widehat{AB}$, τι συμπεραίνετε γι' αυτά;

8. Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$;



Ασκήσεις Εμπέδωσης

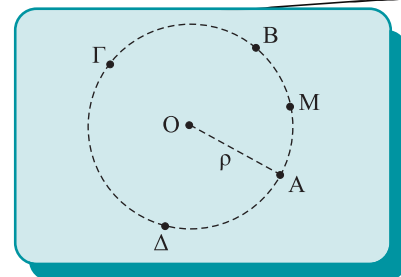
1. Σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας r , που να διέρχεται από σταθερό σημείο K. Πόσους τέτοιους κύκλους μπορούμε να χαράζουμε στο επίπεδο; Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;
2. Σχεδιάστε δύο κύκλους (O,r) και (O,R) με $R > r$. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εσωτερικά του κύκλου (O,R) και εξωτερικά του κύκλου (O,r) .

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,R) και (O,r) με $R > r$. Μία ευθεία ε διέρχεται από το O και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία A,B,Γ,Δ. Να αποδείξετε ότι $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ και $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta}$.
2. Αν δύο διάμετροι σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες, τότε να αποδείξετε ότι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.

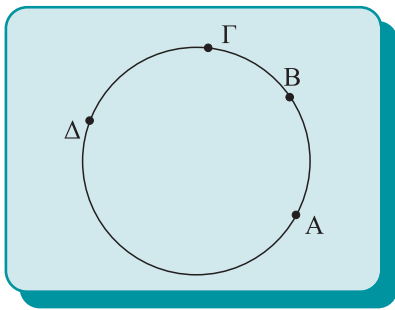
2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας

Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα άκρο κοινό και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται *διαδοχικά*, π.χ. τα τόξα AB και BΓ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Τρία ή περισσότερα τόξα με καθορισμένη σειρά λέγονται διαδοχικά, όταν το καθένα είναι



Σχήμα 51





Σχήμα 52

διαδοχικό με το επόμενο του, π.χ. τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Είναι φανερό ότι τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι διαδοχικά, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma O\Delta}$ είναι διαδοχικές.

Έστω $\widehat{AB}$ και $\widehat{B\Gamma}$ δύο διαδοχικά τόξα ενός κύκλου (σχ.52). Το τόξο $\widehat{AB\Gamma}$ λέγεται άθροισμα των τόξων $\widehat{AB}$ και $\widehat{B\Gamma}$ και συμβολίζεται με $\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma}$, δηλαδή $\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} = \widehat{AB\Gamma}$. Αν το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ είναι ίσο με το $\widehat{AB}$, τότε το τόξο $\widehat{AB\Gamma}$ συμβολίζεται με $2 \widehat{AB}$ και λέγεται διπλάσιο του $\widehat{AB}$. Όμοια ορίζεται και το $n \cdot \widehat{AB}$, όπου n φυσικός.

Αν για δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου ισχύει $\widehat{\Gamma\Delta} = n \widehat{AB}$, τότε το $\widehat{AB}$ λέγεται ένα **n -οστό του $\widehat{\Gamma\Delta}$** και συμβολίζεται με

$$\frac{1}{n} \widehat{\Gamma\Delta}, \text{ δηλαδή } \widehat{AB} = \frac{1}{n} \widehat{\Gamma\Delta}.$$

Στην περίπτωση που τα τόξα δεν είναι διαδοχικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα από αυτά, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Στην § 3.18 θα αναφέρουμε τη σχετική γεωμετρική κατασκευή.

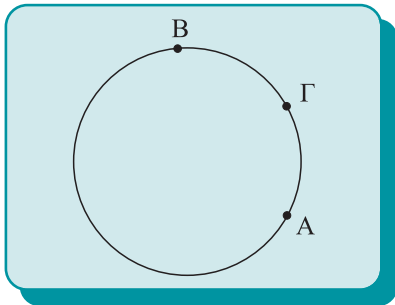
Αν $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$ είναι δύο μη διαδοχικά τόξα ενός κύκλου με $\widehat{AB} > \widehat{A\Gamma}$ (σχ.53) που έχουν κοινό σημείο το ένα άκρο τους A , τότε το τόξο $\widehat{\Gamma B}$ λέγεται διαφορά του $\widehat{A\Gamma}$ από το $\widehat{AB}$ και συμβολίζεται με $\widehat{AB} - \widehat{A\Gamma}$. Όταν $\widehat{AB} = \widehat{A\Gamma}$, τότε η διαφορά τους είναι το μηδενικό τόξο 0 .

Είδαμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε ένα τόξο ενός κύκλου με ένα άλλο τόξο του ίδιου κύκλου. Ένα τόξο με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα άλλα το λέμε μονάδα μέτρησης. Έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το τόξο

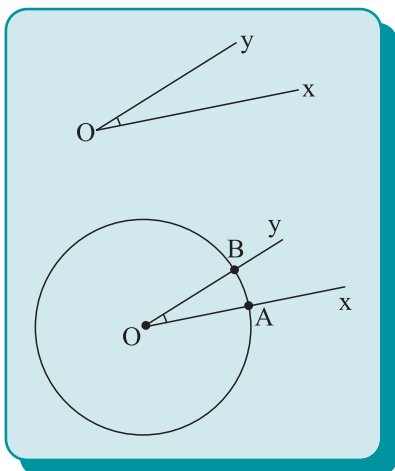
μίας **μοίρας** που ορίζεται ως το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1° . Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής. Ο αριθμός αυτός λέγεται **μέτρο** του τόξου.

Από τον ορισμό της μοίρας προκύπτει ότι το τόξο ενός κύκλου είναι 360° και επομένως το ημικύκλιο και το τεταρτοκύκλιο είναι τόξα 180° και 90° αντίστοιχα. Η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (συμβολικά $60'$) και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (συμβολικά $60''$).

Θεωρούμε μια γωνία $\widehat{xOy}$ (σχ.54), που την καθιστούμε επίκεντρη σε έναν κύκλο (O, ρ) , και έστω $\widehat{AB}$ το τόξο στο



Σχήμα 53



Σχήμα 54

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

οποίο βαίνει. Ορίζουμε ως **μέτρο** της γωνίας $\widehat{xOy}$ το μέτρο του τόξου $\widehat{AB}$. Το μέτρο της $\widehat{xOy}$ το συμβολίζουμε με $(\widehat{xOy})$ ή απλά $\widehat{xOy}$.

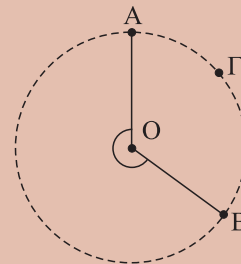
Το μέτρο μίας ορθής, ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα 90° , 180° και 360° .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο κέντρου O , θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$ και $\widehat{GA}$ (σχ.55), ώστε $\widehat{AB} = 3\widehat{BG} = 6\widehat{GA}$.

Να υπολογισθούν:

- (i) τα μέτρα των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$ και $\widehat{GA}$,
- (ii) τα μέτρα των γωνιών $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOG}$ και $\widehat{GOA}$.



Σχήμα 55

Λύση

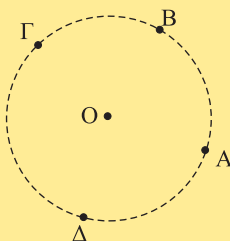
- (i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\widehat{AB} = 6\widehat{GA}$ και $\widehat{BG} = 2\widehat{GA}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση $\widehat{AB} + \widehat{BG} + \widehat{GA} = 360^\circ$ προκύπτει ότι $9\widehat{GA} = 360^\circ$ ή $\widehat{GA} = 40^\circ$. Άρα $\widehat{AB} = 240^\circ$ και $\widehat{BG} = 80^\circ$.
- (ii) Η $\widehat{AOB}$ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το $\widehat{AB}$, επομένως $\widehat{AOB} = \widehat{AB} = 240^\circ$ (μη κυρτή). Όμοια $\widehat{BOG} = 80^\circ$ και $\widehat{GOA} = 40^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:

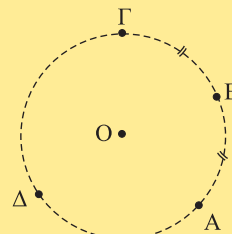
- i) $\widehat{AB} + \widehat{BG}$,
- ii) $\widehat{AB} + \widehat{BG} + \widehat{GA}$,
- iii) $\widehat{ABG} - \widehat{BG}$.



2. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθούν τα τόξα:

- i) $2\widehat{AB}$,
- ii) $2\widehat{AB} + \widehat{GA}$,

- iii) $2\widehat{AB} - \widehat{BG}$,
- iv) $\widehat{AB} - \widehat{BG}$.



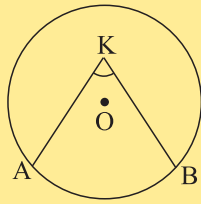
3. Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός:

- α. αρνητικός β. μηδέν γ. θετικός δ. μη αρνητικός.
- Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

4. Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;

5. Αν $\widehat{AB} = \mu^\circ$ (παρακάτω σχήμα), τότε η γωνία $\widehat{AKB}$ θα είναι μ° ;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία A, B και σημείο M του τόξου $\widehat{AB}$, ώστε $\widehat{MA} = \widehat{MB}$.

i) Αν P σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο

$\widehat{AB}$, να αποδείξετε ότι $PM = \frac{1}{2} (PA + PB)$.

ii) Αν Σ σημείο του τόξου $\widehat{MB}$, να αποδείξετε ότι

$$\widehat{SM} = \frac{1}{2} (\widehat{SA} - \widehat{SB}).$$

2. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\widehat{AG} - \widehat{BG} = 80^\circ$. Να βρείτε τα μέτρα:

i) των τόξων $\widehat{AG}$ και $\widehat{GB}$,

ii) των γωνιών $\widehat{AOG}$ και $\widehat{GOB}$ (O είναι το κέντρο του κύκλου).

3. Δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.

4. Αν μια γωνία ω είναι τα $\frac{6}{5}$ μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία ω έχει συμπληρωματική γωνία;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

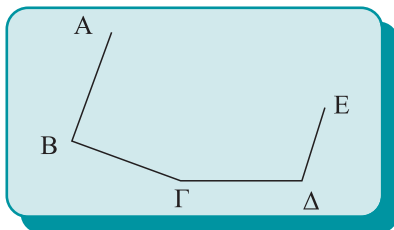
1. Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της ω . Να υπολογίσετε την ω .

2. Μια γωνία ϕ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20° . Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.

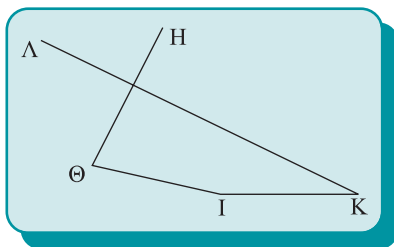
3. Τέσσερις ημιευθείες OA, OB, OG, OD σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOG}$, $\widehat{GOD}$, $\widehat{DOA}$, που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.

Ευθύγραμμα σχήματα

2.20 Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου



Σχήμα 56



Σχήμα 57

Θεωρούμε σημεία που έχουν καθορισμένη σειρά και ανά τρία διαδοχικά δεν είναι συνευθειακά, π.χ. τα A, B, Γ, Δ και E, με την αλφαβητική τους σειρά και θέση, όπως στο σχ.56. Το σχήμα που ορίζουν τα τμήματα AB, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγεται **τεθλασμένη γραμμή** ή απλά **τεθλασμένη**. Η τεθλασμένη αυτή συμβολίζεται με ABΓΔΕ.

Τα σημεία A, B, Γ, Δ και E λέγονται **κορυφές** της τεθλασμένης και ειδικότερα οι κορυφές A και E λέγονται **άκρα** της. Τα τμήματα AB, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγονται **πλευρές** της τεθλασμένης και το άθροισμά τους λέγεται **περίμετρος** της τεθλασμένης.

Μία τεθλασμένη λέγεται **απλή**, όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο. Έτσι, η τεθλασμένη ABΓΔΕ (σχ.56) είναι απλή, ενώ η HΘΙΚΛ (σχ.57) δεν είναι.

Μία τεθλασμένη λέγεται **κυρτή**, όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές της προς το ίδιο μέρος του,

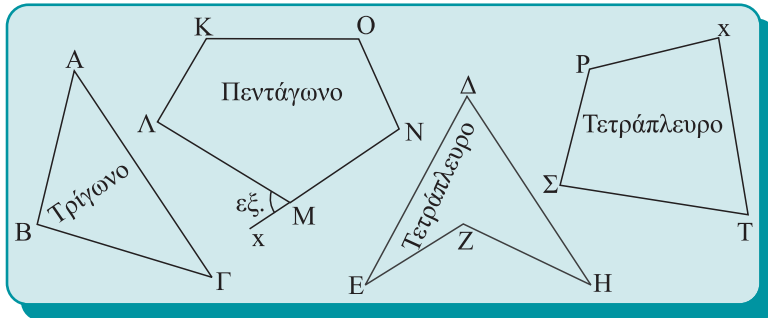
ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**. Έτσι η γραμμή ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι κυρτή, ενώ οι ΗΘΙΚΛ (σχ.57) και ΝΡΣΤΧ (σχ.58) είναι μη κυρτές.

Επίσης, μια τεθλασμένη, της οποίας τα άκρα ταυτίζονται, λέγεται **κλειστή**, π.χ. η ΑΒΓΔΕ, όπου το Α ταυτίζεται με το Ε (σχ.59).

Μια κλειστή και απλή τεθλασμένη λέγεται **πολύγωνο**.

Αν η τεθλασμένη είναι κυρτή, τότε το πολύγωνο λέγεται **κυρτό**, ενώ αν είναι μη κυρτή, το πολύγωνο λέγεται **μη κυρτό**.



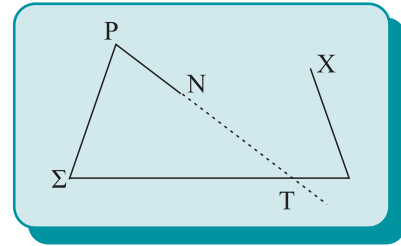
Σχήμα 60

Για παράδειγμα, τα πολύγωνα ΑΒΓ (σχ.60) και ΚΑΜΝΟ (σχ.60) είναι κυρτά, ενώ το ΔΕΖΗ (σχ.60) είναι μη κυρτό. Το πολύγωνο με τρεις κορυφές λέγεται **τρίγωνο** (σχ.60), με τέσσερις **τετράπλευρο** (σχ.60), με πέντε **πεντάγωνο** (σχ.60) και γενικά με ν, **ν-γωνο**. Στο εξής λέγοντας πολύγωνο θα εννοούμε κύρτο πολύγωνο.

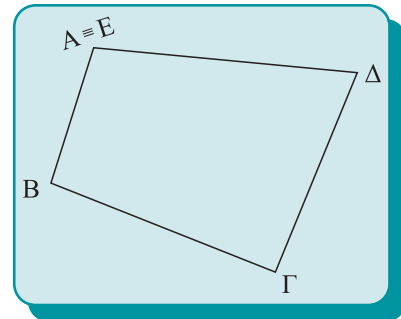
Κάθε τμήμα που έχει άκρα δύο μη διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου λέγεται **διαγώνιος** του πολυγώνου. Έτσι τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ.61).

Γωνίες πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του. Σε ένα κυρτό πολύγωνο τα κοινά εσωτερικά σημεία των γωνιών τους λέγονται **εσωτερικά** σημεία του πολυγώνου και αποτελούν το **εσωτερικό** του πολυγώνου.

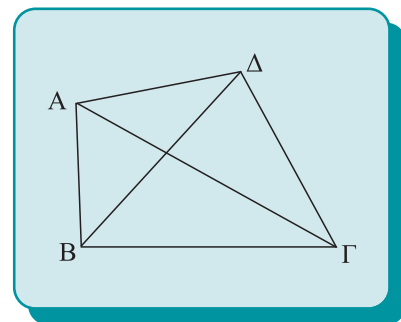
Εξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του. Για να τη σχηματίσουμε, αρκεί να προεκτείνουμε μια πλευρά του πολυγώνου, π.χ. η γωνία $\hat{A}Mx$ (σχ. 60) είναι εξωτερική γωνία του πενταγώνου ΚΑΜΝΟ και συμβολίζεται $\hat{M}_{εξ}$.



Σχήμα 58



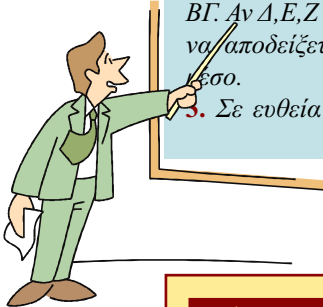
Σχήμα 59



Σχήμα 61

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ώστε $AB < \frac{A\Gamma}{2}$, $B\Gamma < \frac{B\Delta}{2}$ και ονομάζουμε E , Z τα μέσα των $A\Gamma$, $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $EZ = \frac{A\Delta - B\Gamma}{2}$.
2. Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα AB , $B\Gamma$. Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔE , BZ έχουν κοινό μέσο.
3. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ονομάζουμε E το μέσο του $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $AE > \frac{A\Gamma}{2}$.
4. Θεωρούμε κύκλο (O, R) και τα διαδοχικά σημεία του A , B , Γ και Δ , ώστε $\widehat{AB} = 150^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 45^\circ$ και $\widehat{A\Delta} = 105^\circ$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ είναι αντικείμενη ημιευθεία της OA .
5. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB , M το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$ και K τυχαίο σημείο του τόξου $\widehat{BM}$. Αν Γ και Δ είναι τα μέσα των τόξων $\widehat{AK}$ και $\widehat{MK}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$.



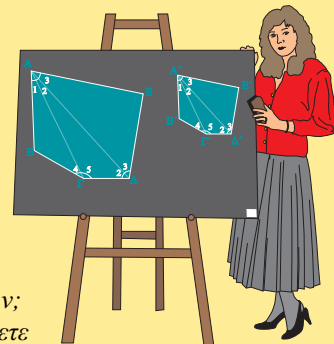
Δραστηριότητα

Να βρείτε κατά πόσο αυξάνει ο αριθμός των διαγωνίων κυρτού n -γώνου όταν ο αριθμός των πλευρών του αυξηθεί κατά 1.

Εργασία

Να βρείτε το πλήθος δ των διαγωνίων κυρτού n -γώνου ως συνάρτηση του πλήθους των πλευρών του ($n \geq 3$), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- i) Να κατασκευάσετε τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο και να βρείτε:
 - α) το πλήθος των διαγωνίων με μια κοινή κορυφή,
 - β) το συνολικό πλήθος των διαγωνίων.
- ii) Μπορείτε να «ανακαλύψετε» ποιος τύπος δίνει το δ ως συνάρτηση του n ;
- iii) Υποθέστε ότι ο τύπος ισχύει για πολύγωνο με n πλευρές και να αποδείξετε ότι ισχύει για πολύγωνο με $n+1$ πλευρές. **Υπόδειξη:** Προσθέστε μια κορυφή και βρείτε το πλήθος των επιπλέον διαγωνίων.



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τις πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο και ορίσαμε τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία και κύκλο. Τέλος, δώσαμε την έννοια της τεθλασμένης γραμμής και του πολυγώνου.

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία A, B ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία A, B και τα σημεία της ευθείας AB που είναι μεταξύ των A, B . Στη συνέχεια μιλήσαμε για σύγκριση τμημάτων, για το μέσο ενός τμήματος και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά του. Κατόπιν ορίσαμε πράξεις με τμήματα, την έννοια του μήκους ενός τμήματος και την απόσταση δύο σημείων.

Η γωνία ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία δύο ημιεπιπέδων. Στη συνέχεια μιλήσαμε για σύγκριση γωνιών, για τη διχοτόμο μιας γωνίας και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά της. Κατόπιν ορίσαμε την έννοια της ορθής (καθεμία από τις γωνίες στις οποίες χωρίζεται η ευθεία γωνία από τη διχοτόμο της), οξείας, αμβλείας γωνίας και της καθετότητας δύο ευθειών. Επίσης, ορίσαμε τις πράξεις με γωνίες και τις έννοιες συμπληρωματικές, παραπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες.

Ο κύκλος (O, ρ) ορίστηκε ως το σύνολο των σημείων M του επιπέδου που απέχουν από το σημείο O , απόσταση ρ . Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τόξα, χορδές και σύγκριση τόξων. Αποδείξαμε τη μοναδικότητα του μέσου ενός τόξου στηριζόμενοι στη μοναδικότητα της διχοτόμου μιας γωνίας και αξιοποιώντας τη βασική σχέση της επίκεντρης γωνίας με το αντίστοιχο τόξο της. Τέλος, ορίσαμε το μέτρο τόξου και γωνίας (ως το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της, όταν αυτή γίνει επίκεντρη σε κύκλο).

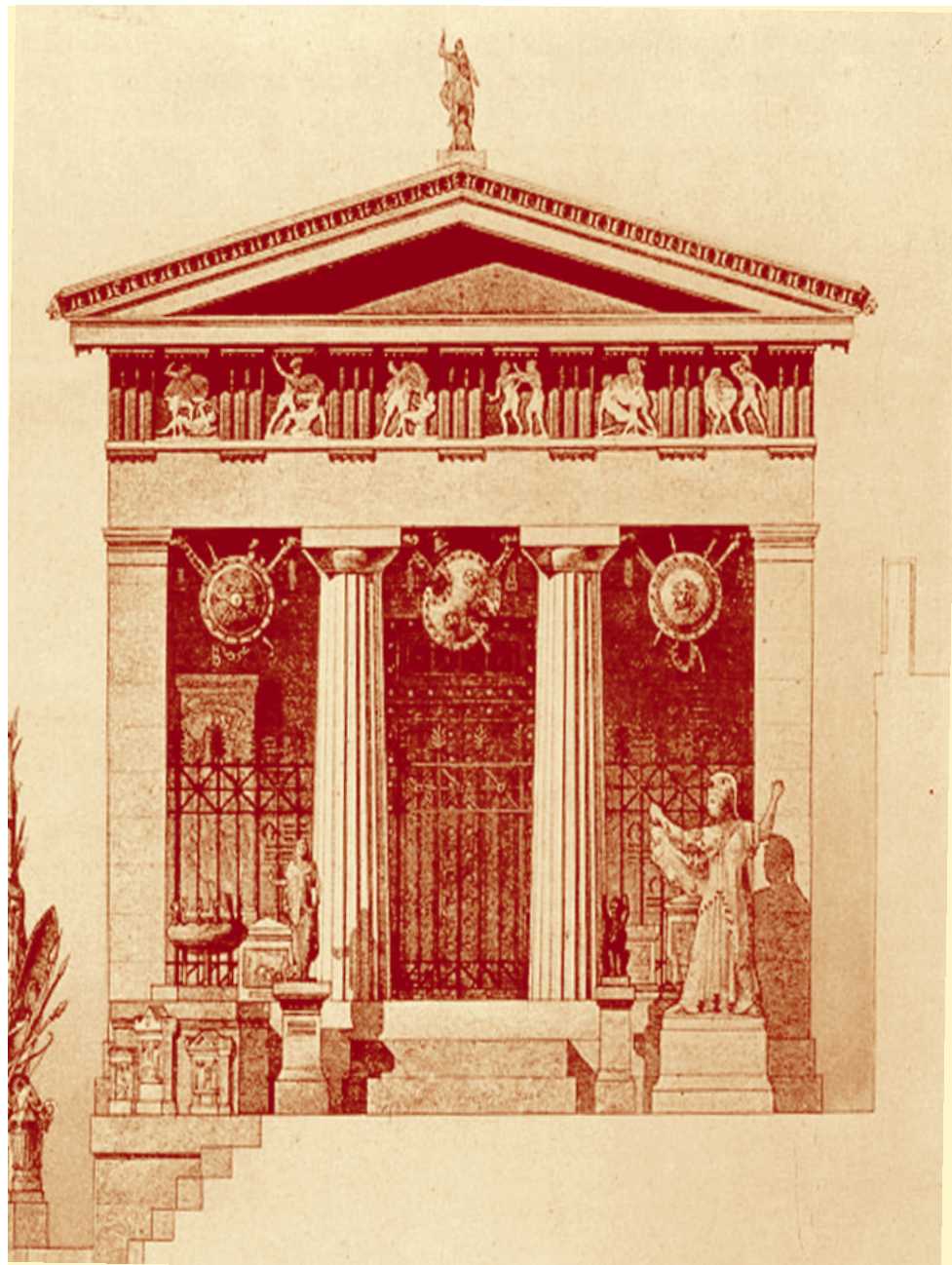
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Τα βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

- | | |
|------------------------|--|
| • Πρωταρχικές έννοιες: | σημείο, ευθεία, επίπεδο |
| • Ευθύγραμμο τμήμα | <ul style="list-style-type: none">• Σύγκριση τμημάτων• Μέσο τμήματος• Πράξεις με τμήματα• Μήκος τμήματος - Απόσταση σημείων |
| • Γωνίες | <ul style="list-style-type: none">• Σύγκριση γωνιών• Διχοτόμος γωνίας• Οξεία, ορθή, αμβλεία γωνία, κάθετες ευθείες• Πράξεις με γωνίες• Συμπληρωματικές, παραπληρωματικές, κατακορυφήν γωνίες |
| • Κύκλος | <ul style="list-style-type: none">• Διάμετρος• Τόξα - χορδές, σύγκριση τόξων, μέσο τόξου• Επίκεντρη γωνία και σχέση με το αντίστοιχο τόξο• Μέτρο τόξου και γωνίας |
| • Ευθύγραμμα σχήματα: | τεθλασμένη γραμμή, πολύγωνο, στοιχεία πολυγώνου |

Τρίγωνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με το πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είναι το τρίγωνο. Αρχικά δίνουμε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Ως εφαρμογή των κριτηρίων αυτών παρουσιάζουμε ιδιότητες των στοιχείων του κύκλου, των ισοσκελών τριγώνων, της μεσοκάθετου ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου μιας γωνίας. Η μεσοκάθετος και η διχοτόμος εξετάζονται και ως βασικοί γεωμετρικοί τόποι. Στη συνέχεια αναφέρουμε συνοπτικά την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο και άξονα και μελετάμε ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο και τις εφαρμογές τους στη σύγκριση κάθετων και πλάγιων τμημάτων. Επίσης, παρουσιάζουμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, καθώς και τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Το κεφάλαιο κλείνει με κάποιες βασικές γεωμετρικές κατασκευές.



Ο Θησαυρός των Αθηναίων στους Δελφούς, 508 π.Χ.
Αναπαράσταση Α. Tournaire

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχ.1) έχει τρεις κορυφές A, B, Γ , τρεις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ και τρεις γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}, \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$. Για ευκολία οι πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ συμβολίζονται με α, β, γ αντίστοιχα, και οι γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}, \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$ με $\hat{A}, \hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ . Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο. Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

- **σκαληνό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- **ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ η πλευρά $B\Gamma$ λέγεται **βάση** του και το A **κορυφή** του,
- **ισόπλευρο**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).

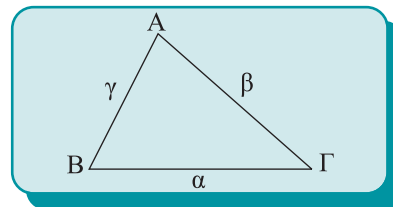
Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

- **οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- **ορθογώνιο**, όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** και οι άλλες δύο λέγονται **κάθετες πλευρές** του τριγώνου,
- **αμβλυγώνιο**, όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).

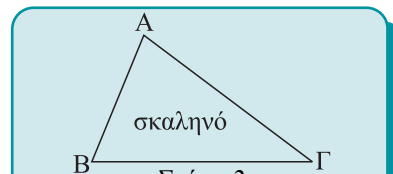
• Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα AM είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου $AB\Gamma$ και συμβολίζεται με μ_α . Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

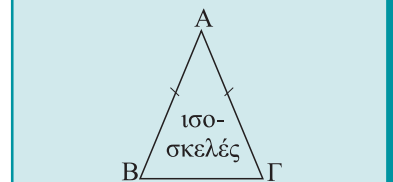
Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα AD είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_α . Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.



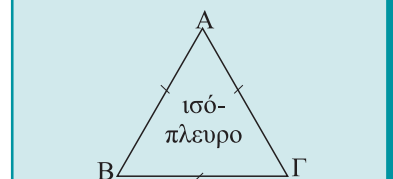
Σχήμα 1



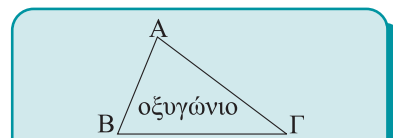
Σχήμα 2



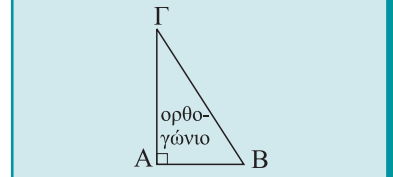
Σχήμα 3



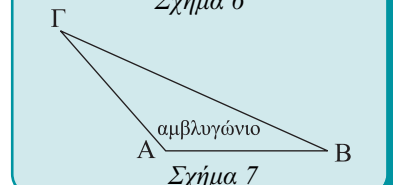
Σχήμα 4



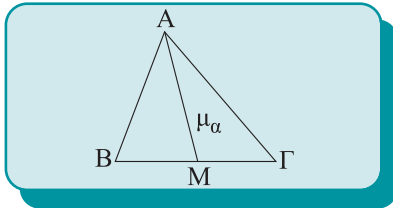
Σχήμα 5



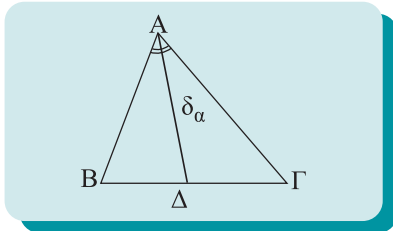
Σχήμα 6



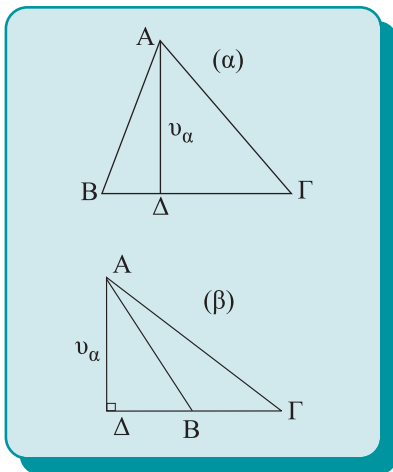
Σχήμα 7



Σχήμα 8



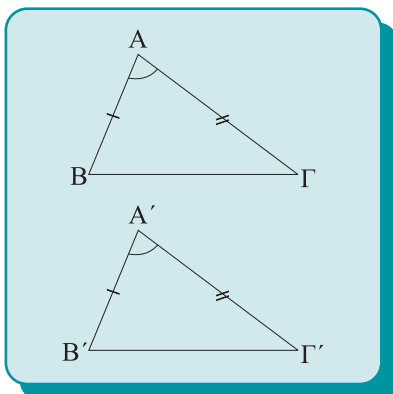
Σχήμα 9



Σχήμα 10

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.



Σχήμα 11

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με v_a , v_b και v_c .

Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται **προβολή** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και **ίχνος** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είδαμε ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Συνεπώς:

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται **αντίστοιχες** ή **ομόλογες**.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους.

Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $AB = A'B'$, $AG = A'G'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α'Β'Γ', ώστε το σημείο Α' να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α'Β' να ταυτιστεί με την ΑΒ. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ και η ημιευθεία Α'Γ' θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού $AB = A'B'$ και $AG = A'G'$, το σημείο Β' ταυτίζεται με το Β και το Γ' με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

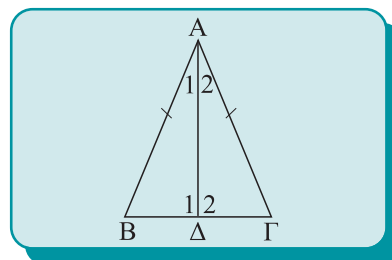
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ (σχ.12). Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ έχουν $AB = AG$, $A\Delta$ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $B\Delta = \Delta\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 12

ΠΟΡΙΣΜΑ II

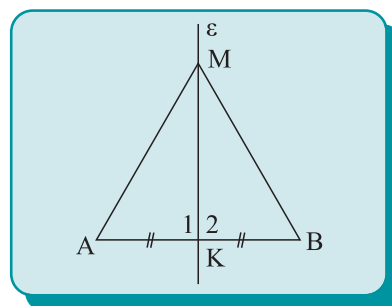
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ III

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος AB (σχ.13) και M ένα σημείο της. Τα τρίγωνα MKA και MKB έχουν $KA=KB$, MK κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $MA = MB$.



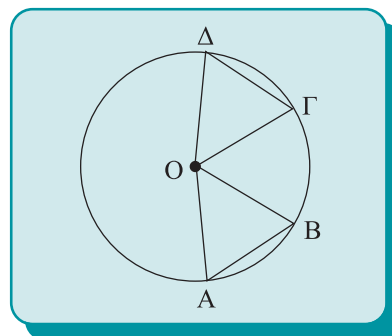
Σχήμα 13

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (O, ρ) (σχ.14). Τότε είναι $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$. Επομένως είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.



Σχήμα 14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB , η μεσοκάθετός του ε και σημείο M της ε (σχ.15). Στις προεκτάσεις των AM και BM προς το M παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ , ώστε $M\Gamma = M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

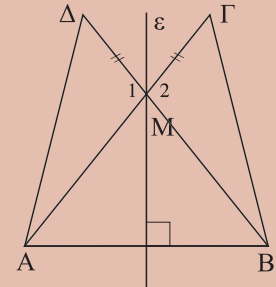
(i) $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = \hat{M}\hat{B}\hat{A}$,

(ii) $A\Delta = B\Gamma$.

Λύση

(i) Επειδή το M είναι σημείο της μεσοκάθετου ε του AB είναι $MA = MB$, επομένως το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = \hat{M}\hat{B}\hat{A}$.

(ii) Τα τρίγωνα $MA\Delta$ και $MB\Gamma$ έχουν $MA = MB$, $M\Gamma = M\Delta$ (υπόθεση) και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν), άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε $A\Delta = B\Gamma$.



Σχήμα 15

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο εξωτερικό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$, ώστε $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{G}\hat{A}\hat{E}$. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma\Delta$.
2. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = AM$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAM είναι ισόπλευρο.
3. Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.
4. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της $\hat{A}$ στην οποία θεωρούμε τμήματα $AE = AB$ και $AZ = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και K σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των $AK, BK, \Gamma K$ θεωρήσουμε τμήματα $K\Delta = AK, KE = BK, KZ = \Gamma K$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\hat{\Gamma}$.
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του $BA, \Gamma A$ θεωρούμε ίσα τμήματα $A\Delta, AE$ αντίστοιχα. Αν M το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.
3. Δίνεται κύκλος κέντρου O και χορδή του AB . Προεκτείνουμε την AB και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.



3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Με τη βοήθεια του 1^{ου} κριτηρίου αποδεικνύουμε το 2^ο και 3^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.16) έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Θα αποδείξουμε ότι έχουν και $AB = A'B'$. Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην AB , ώστε να είναι $B\Delta = B'A'$. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B\Delta = B'A'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}'$. Αλλά $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ και επομένως $B\hat{\Gamma}\Delta < \hat{\Gamma}$. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $AB \neq A'B'$, άρα $AB = A'B'$. Τα τρίγωνα, λοιπόν, $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $AB = A'B'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.

* Σημείωση: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα I (σελ. 36).

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται και από την ισότητα των τριών πλευρών τους, μία προς μία, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

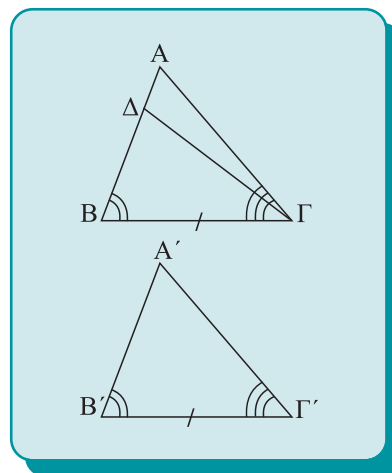
Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Gamma A = \Gamma'A'$ (σχ.17). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια.

Θεωρούμε την ημιευθεία Bx , ώστε $\hat{GB}x = \hat{B}'$ (σχ.17) και σημείο της Δ , ώστε $B\Delta = A'B'$. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B\Delta = A'B'$ και $\hat{GB}\Delta = \hat{B}'$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \Gamma'A'$ και $\hat{\Delta} = \hat{A}'$.

ΣΧΟΛΙΟ

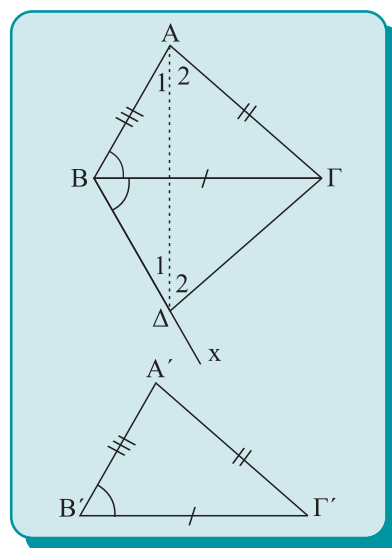
Η συντομογραφία ΓΠΓ σημαίνει γωνία, πλευρά, γωνία.



Σχήμα 16

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΠΠ σημαίνει πλευρά, πλευρά, πλευρά.



Σχήμα 17

Επειδή $BD = A'B'$ και $A'B' = AB$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Επίσης, αφού $\Gamma\Delta = A'\Gamma'$ και $A'\Gamma' = A\Gamma$, προκύπτει ότι

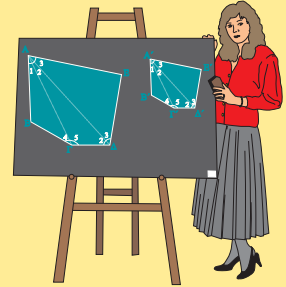
$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα $A\Delta$ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{A}'$, έχουμε $\hat{A} = \hat{A}'$, που είναι το ζητούμενο.

Δραστηριότητα

Εξετάστε τις άλλες δύο περιπτώσεις της απόδειξης του 3^{ου} Κριτηρίου:

- i) $\hat{B} > 90^\circ$ και $\hat{B}' > 90^\circ$.
- ii) $\hat{B} = 90^\circ$ και $\hat{B}' = 90^\circ$.



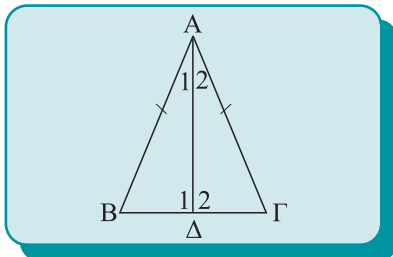
Με τη βοήθεια του κριτηρίου ΠΠΠ αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A\Delta$ η διάμεσός του (σχ.18). Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν $AB = A\Gamma$, $A\Delta$ κοινή και $BD = \Delta\Gamma$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.



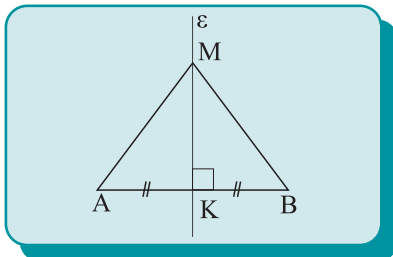
Σχήμα 18

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB (σχ.19), M ένα σημείο, ώστε $MA = MB$ και K το μέσο του AB . Τότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η MK διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η MK θα είναι και ύψος δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB .

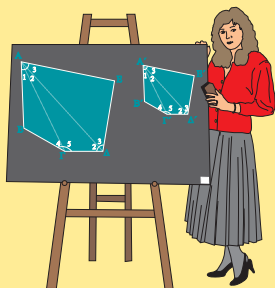


Σχήμα 19

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα III του θεωρήματος I (§3.2) προκύπτει ότι **η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.**

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου.

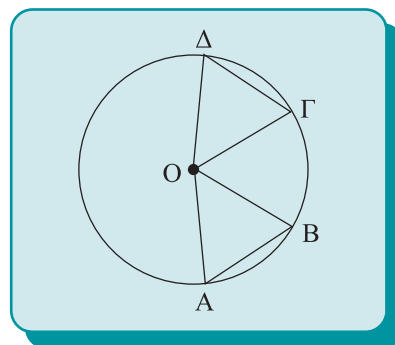


ΠΟΡΙΣΜΑ III

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (O, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με $AB = \Gamma\Delta$. Τότε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ (σχ.20) έχουν: $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $AB = \Gamma\Delta$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, οπότε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.



Σχήμα 20

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα III και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

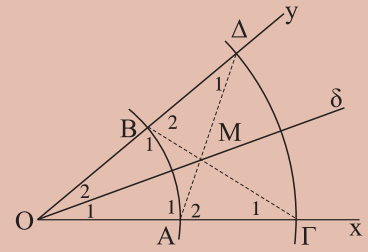
Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:
Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),
- μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),
- και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε γωνία $\hat{xOy}$ και δύο κύκλους (O, ρ) , (O, R) με $\rho < R$ (σχ.21). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox , Oy στα A , B , ο δεύτερος στα Γ , Δ και M είναι το σημείο τομής των $A\Delta$, $B\Gamma$, να αποδειχθεί ότι:

- (i) τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Gamma B$ είναι ίσα,
- (ii) τα τρίγωνα $MA\Gamma$ και $MB\Delta$ είναι ίσα,
- (iii) τα τρίγωνα OAM και OBM είναι ίσα,
- (iv) η OM είναι η διχοτόμος της $\hat{xOy}$.



Σχήμα 21

Απόδειξη

- (i) Τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Gamma B$ έχουν $OA = OB (= \rho)$, $OG = OD (= R)$ και $\hat{O}$ κοινή (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα.
- (ii) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ή $180^\circ - \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$. Επομένως, τα τρίγωνα $MA\Gamma$ και $MB\Delta$ έχουν $A\Gamma = B\Delta$, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.
- (iii) Από το (ii) προκύπτει ότι $MA = MB$, οπότε τα τρίγωνα OAM και OBM έχουν $OA = OB$, $MA = MB$ και OM κοινή (ΠΠΠ), άρα είναι ίσα.
- (iv) Επειδή τα τρίγωνα OAM και OBM είναι ίσα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η OM είναι η διχοτόμος της $\hat{xOy}$.

ΣΧΟΛΙΟ

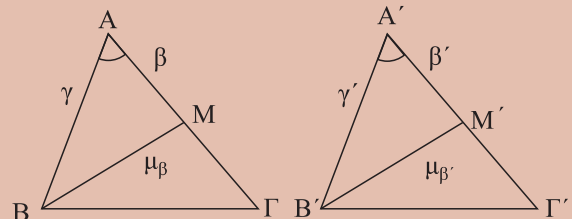
Η εφαρμογή 1 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

Εξετάζουμε πρώτα τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ (σχ.22). Αυτά έχουν $AB = A'B'$, $BM = B'M'$ (από την υπόθεση) και $AM = A'M'$, ως μισά των ίσων πλευρών $A\Gamma$ και $A'\Gamma'$. Άρα, τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.



Σχήμα 22

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία. Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι скаληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες. Σ Λ

2. Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

3. Συμπληρώστε τα κενά:

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι

ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι

iii) Ένα σημείο M βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος AB , όταν

iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δύο τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν I είναι το σημείο τομής των διχοτόμων AD και BE του τριγώνου $ABΓ$ και I' το σημείο τομής των διχοτόμων $A'D'$ και $B'E'$ του $A'B'Γ'$ να αποδείξετε ότι:

i) $AD = A'D'$ και $BE = B'E'$

ii) $AI = A'I'$ και $BI = B'I'$.

2. Δύο τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_a = \delta_{a'}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

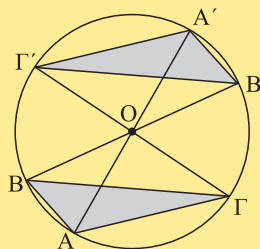
ii) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.

3. Σε τρίγωνο $ABΓ$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα MD . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $BΓD$ είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

2. Αν AA' , BB' και $ΓΓ'$ είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$ είναι ίσα.



3. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι $AB = ΓΔ$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{Δ}$.

Σύνθετα θέματα

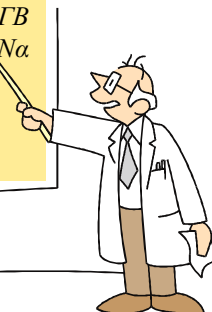
1. Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα $ABΓ$ και $A'B'Γ'$. Η διάμεσος AM και η διχοτόμος BD του $ABΓ$ τέμνονται στο Θ , ενώ η αντίστοιχη διάμεσος $A'M'$ και η αντίστοιχη διχοτόμος $B'D'$ του $A'B'Γ'$ τέμνονται στο Θ' . Να αποδείξετε ότι: i) $BD = B'D'$, ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$, iii) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A'B'\Theta'$ είναι ίσα, iv) $A\Theta = A'\Theta'$ και $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$.

2. Δύο τμήματα AB και $ΓΔ$ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ϵ . Αν η ϵ και η μεσοκάθετος του $ΑΓ$ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του $ΒΔ$.

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = ΑΓ$). Η μεσοκάθετος της πλευράς $ΑΓ$ τέμνει την προέκταση της $ΓΒ$ στο Δ . Προεκτείνουμε τη ΔA κατά τμήμα $AE = ΔB$. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο $\Delta AΓ$ είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο $ΓΔE$ είναι επίσης ισοσκελές.

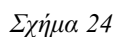


3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα κάθετου

Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.



Έστω ευθεία $x'x$, σημείο A εκτός αυτής και σημείο M της $x'x$ (σχ.23). Αν η AM είναι κάθετη στην $x'x$, τότε το θεώρημα ισχύει ως προς την ύπαρξη της καθέτου. Έστω ότι η AM δεν είναι κάθετη στην $x'x$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει η $x'x$ και δεν περιέχει το A θεωρούμε την ημιευθεία My , ώστε να είναι $\hat{xMy} = \hat{AMx}$ και πάνω σε αυτή σημείο B , ώστε $MA = MB$. Επειδή τα σημεία A, B είναι εκατέρωθεν της $x'x$, η $x'x$ τέμνει την AB σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω K . Αφού $MA = MB$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, η MK είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο MAB , άρα είναι και ύψος και επομένως $AB \perp x'x$.



Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.24).
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα (σχ.25).

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτεινούσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Έστω δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (σχ.26). Θα αποδείξουμε ότι είναι και $AB = A'B'$. Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$. Τότε στην πλευρά BA υπάρχει σημείο Δ , ώστε $B\Delta = A'B'$.

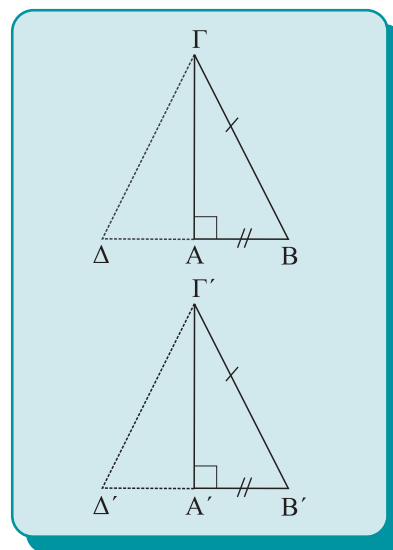
Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Delta B = A'B'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}' = 90^\circ$, δηλαδή $\Gamma\Delta \perp AB$. Έτσι έχουμε $\Gamma A \perp AB$ και $\Gamma\Delta \perp AB$ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $AB \neq A'B'$. Άρα $AB = A'B'$, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $BA = B'A'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (ΠΓΠ).

Θεώρημα II

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.27) με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Θα αποδείξουμε ότι και $\hat{B} = \hat{B}'$. Στις προεκτάσεις των BA και $B'A'$ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ' , ώστε να είναι $A\Delta = AB$ και $A'\Delta' = A'B'$. Τότε η ΓA είναι μεσοκάθετος του ΔB και η $\Gamma'A'$ μεσοκάθετος του $\Delta'B'$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $\Gamma\Delta = \Gamma B$ και $\Gamma'\Delta' = \Gamma'B'$. Από τις τελευταίες ισότητες και την $B\Gamma = B'\Gamma'$ προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$. Έτσι τα τρίγωνα $\Gamma\Delta B$ και $\Gamma'\Delta'B'$ έχουν $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\Delta B = \Delta'B'$ (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων AB και $A'B'$), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).



Σχήμα 27

ΠΟΡΙΣΜΑ I

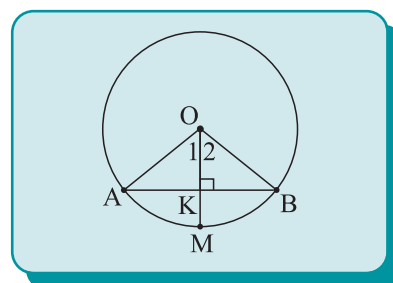
Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O, ρ) , μια χορδή του AB και την κάθετη OK της AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M (σχ.28). Επειδή το τμήμα OK είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB = \rho$), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα



Σχήμα 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το K είναι μέσο του AB και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Θεώρημα III

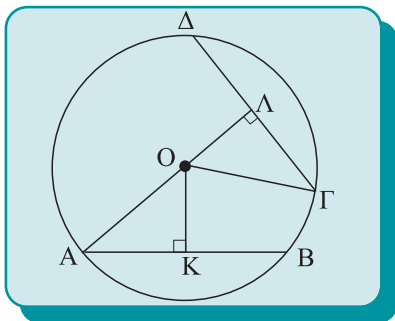
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O, ρ) και OK , OL τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$, έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma (= \rho)$ και $AK = \Gamma L$ (αφού $AB = \Gamma\Delta$). Επομένως είναι ίσα, οπότε $OK = OL$.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$ έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma$ και $OK = OL$, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$AK = \Gamma L \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad AB = \Gamma\Delta.$$



Σχήμα 29

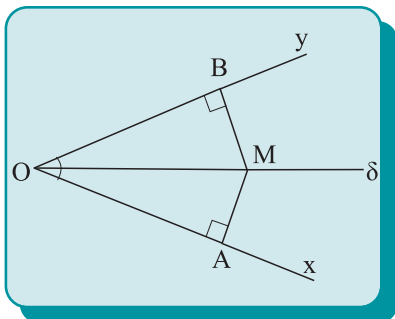
Θεώρημα IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $\chi\hat{O}y$ και M ένα σημείο της διχοτόμου της $O\delta$ (σχ.30). Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AOM και BOM είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $\hat{MOA} = \hat{MOB}$, επομένως $MA = MB$.

Αντίστροφα. Έστω M ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι $MA = MB$. Τότε τα τρίγωνα AOM και BOM είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $MA = MB$ και επομένως $\hat{MOA} = \hat{MOB}$, οπότε το M είναι σημείο της διχοτόμου $O\delta$.



Σχήμα 30

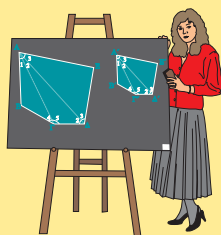
Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού αντιμετωπίζεται η επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα

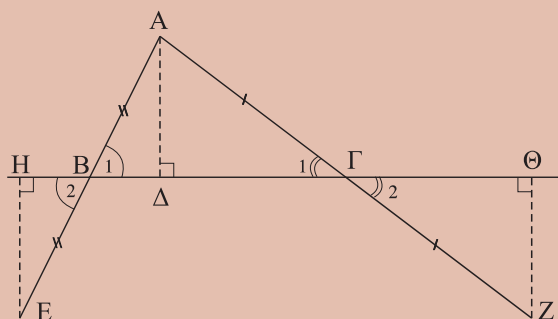
Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς AB (σχ.31) παίρνουμε σημείο E , ώστε $BE=AB$ και στην προέκταση της $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , ώστε $\Gamma Z=A\Gamma$. Αν $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου και $EH, Z\Theta$ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία $B\Gamma$, τότε:

- (i) να συγκριθούν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και EBH , καθώς και τα $A\Gamma\Delta$ και $Z\Gamma\Theta$,
- (ii) να αποδειχθεί ότι $EH = Z\Theta$.



Σχήμα 31

Λύση

(i) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και EBH είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta} = \hat{H} = 90^\circ$) και έχουν $AB = BE$ (από υπόθεση) και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (κατακορυφήν). Άρα, είναι ίσα.

Όμοια και τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $Z\Gamma\Theta$ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Theta} = 90^\circ$, $A\Gamma = \Gamma Z$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$.

(ii) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και EBH προκύπτει ότι $EH=A\Delta$. Όμοια από την άλλη ισότητα των τριγώνων προκύπτει $Z\Theta = A\Delta$. Επομένως $EH = Z\Theta$.

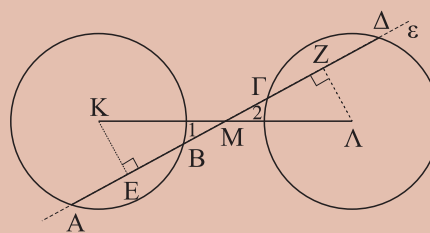
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα K, Λ και από το μέσο M του $K\Lambda$ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους (σχ.32) στα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Απόδειξη

Επειδή τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι $AB = \Gamma\Delta$ αρκεί τα αποστήματά τους KE και ΛZ , αντίστοιχα, να είναι ίσα.

Τα τρίγωνα EMK και ZML είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$) και έχουν $KM = ML$, γιατί το M είναι μέσο του $K\Lambda$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα, οπότε $KE = \Lambda Z$.



Σχήμα 32

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Έστω ευθεία ε και σημείο A εκτός αυτής. Αν $AB \perp \varepsilon$ και $AG \perp \varepsilon$ (B, G σημεία της ε) τότε:

- | | | |
|-----------------|----------|-----------|
| i) $B \equiv G$ | Σ | Λ |
| ii) $B \neq G$ | Σ | Λ |
| iii) $AB = AG$ | Σ | Λ |

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

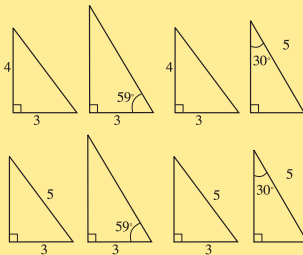
2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), Δ σημείο της βάσης και οι προτάσεις:

- π_1 : Το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.
 π_2 : Το $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου.
 π_3 : Το $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

Αν για το $A\Delta$ ισχύει μία από τις π_1, π_2, π_3 , τότε ισχύουν οι άλλες δύο προτάσεις;

3. Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.

4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.



5. Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:

Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής είναι μεσοκάθετος της και διχοτομεί

6. Αν $AB, \Gamma\Delta$ είναι χορδές ενός κύκλου (K) και KE, KZ είναι αντίστοιχα τα αποστήματά τους τότε:

- α. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = \frac{1}{2} KZ$,
 β. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE > KZ$,
 γ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = KZ$,
 δ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2} KE = \frac{1}{3} KZ$,
 ε. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE < KZ$.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

8. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

2. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:

- i) από τη βάση,
 ii) από τις ίσες πλευρές.

3. Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.

4. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- i) το M ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,
 ii) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του M από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

2. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $\alpha = \alpha', \nu_\alpha = \nu_{\alpha'}, \mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $\alpha = \alpha', \nu_\beta = \nu_{\beta'}, \nu_\gamma = \nu_{\gamma'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = I^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

5. Δίνεται κύκλος (O, R), οι ίσες χορδές του $AB, \Gamma\Delta$ και τα αποστήματά τους OK και OL αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των BA και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι:

- i) τα τρίγωνα MOK και MOL είναι ίσα,
 ii) $MA = M\Gamma$ και $MB = M\Delta$.

Σύνθετα Θέματα

1. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Έστω E και Z οι προβολές του Δ στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBE και $\Delta \Gamma Z$.
 ii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$ στο σημείο Δ' , με προβολές τα σημεία E', Z' στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 iii) Να αποδείξετε ότι $EE' = A\Gamma$ και $ZZ' = AB$.

2. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma, A'B'\Gamma'$ έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

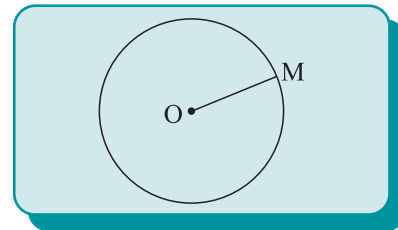
3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

Όπως έχουμε αναφέρει, γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

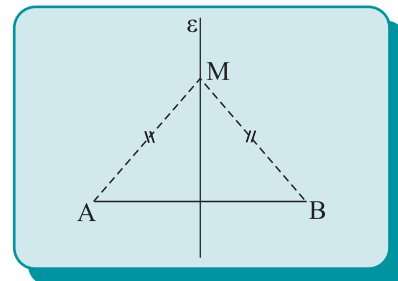
Επομένως:

- ο κύκλος (σχ.33) είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
- η μεσοκάθετος ενός τμήματος (σχ.34) είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- η διχοτόμος μιας γωνίας (σχ.35) είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

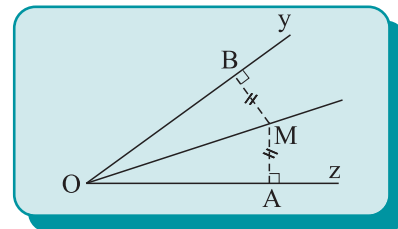
Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου απαιτεί μια ιδιαίτερη διαδικασία η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.



Σχήμα 33



Σχήμα 34



Σχήμα 35

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

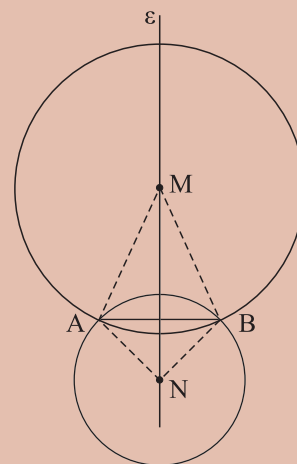
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B.

Λύση

Έστω M ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα A, B (σχ.36). Τότε $MA=MB$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου και επομένως το M ανήκει στη μεσοκάθετο ε του τμήματος AB.

Αντίστροφα. Έστω N ένα σημείο της μεσοκαθέτου ε του AB. Τότε θα είναι $NA=NB$, οπότε ο κύκλος (N, NA) διέρχεται και από το B. Επομένως κάθε σημείο της ε είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα A, B.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του τμήματος AB.



Σχήμα 36

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθεί τα εξής στάδια:

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο M του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση τη χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή Γ πάνω στην οποία βρίσκεται.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε με τον κανόνα και το διαβήτη τη γραμμή αυτή και εξετάζουμε αν το τυχαίο σημείο N της γραμμής αυτής ικανοποιεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η γραμμή Γ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

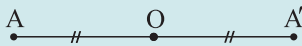
Ερωτήσεις Κατανόησης

Συμπληρώστε τα κενά στις επόμενες προτάσεις.

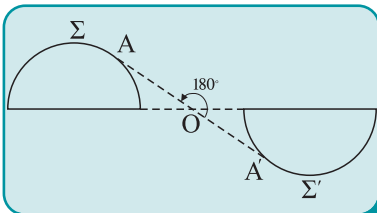
- Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών των ισοσκελών τριγώνων με γνωστή βάση είναι
- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι

Ασκήσεις Εμπέδωσης

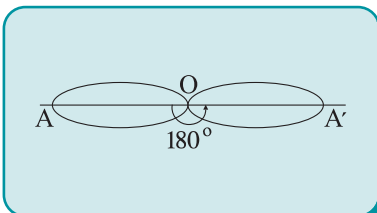
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών A των τριγώνων $AB\Gamma$, που έχουν σταθερή την πλευρά $B\Gamma = a$ και τη διάμεσο AM με γνωστό μήκος.
- Δίνεται κύκλος (O, R) . Αν N τυχαίο σημείο του κύκλου και M σημείο στην προέκταση της ON , ώστε $ON = NM$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M , όταν το N διαγράφει τον κύκλο.



Σχήμα 37



Σχήμα 38



Σχήμα 39

Συμμετρικά σχήματα

3.8 Κεντρική συμμετρία

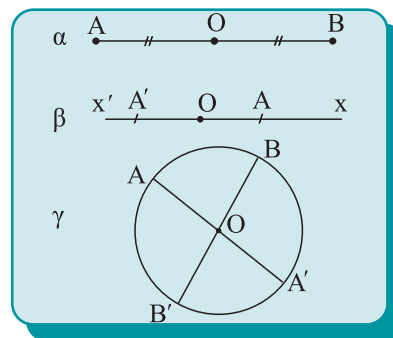
Στην §2.10 είδαμε πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο O (σχ.37).

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O (σχ.38), αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το O και αντίστροφα. Το σημείο O λέγεται **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το O σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή ένα σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς το O , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **κεντρική συμμετρία**.

Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ , με κέντρο συμμετρίας το O (σχ.39), κατά 180° γύρω από το O , θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

Από τα γνωστά μας, μέχρι τώρα σχήματα:

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του (σχ.40α).
- Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της (σχ.40β).
- Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του (σχ.40γ).



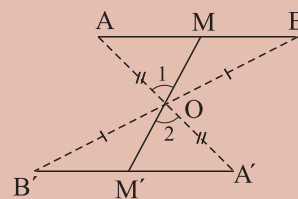
Σχήμα 40

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό.

Απόδειξη

Έστω ένα τμήμα AB (σχ.41), σημείο O που δεν ανήκει στην ευθεία AB και A', B' τα συμμετρικά των A, B ως προς το O αντίστοιχα. Επειδή $OA' = OA$, $OB' = OB$ και $\hat{A'OB'} = \hat{AOB}$, τα τρίγωνα AOB και $A'OB'$ είναι ίσα, οπότε $A'B' = AB$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα AB και $A'B'$ είναι συμμετρικά ως προς το O . Έστω σημείο M του AB και M' η τομή της MO με το $A'B'$. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A'}$, οπότε τα τρίγωνα AOM και $A'OM'$ είναι ίσα γιατί έχουν $OA' = OA$, $\hat{A} = \hat{A'}$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Επομένως $OM' = OM$, που σημαίνει ότι το M' είναι συμμετρικό του M .



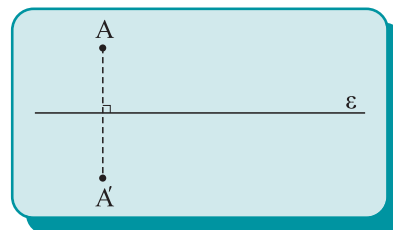
Σχήμα 41

Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου M' του $A'B'$ είναι σημείο του AB . Άρα τα $AB, A'B'$ είναι συμμετρικά ως προς το O .

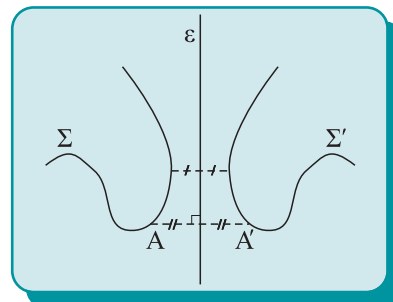
3.9 Αξονική συμμετρία

Στην §2.14 είδαμε πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε (σχ.42).

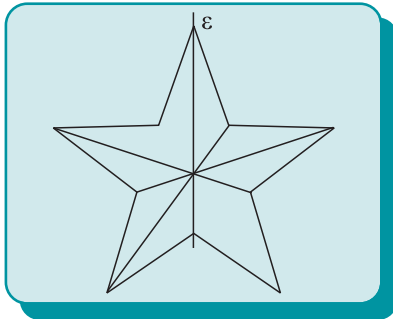
Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε , αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς την ε , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **αξονική συμμετρία**. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε , τότε η ε χωρίζει



Σχήμα 42



Σχήμα 43

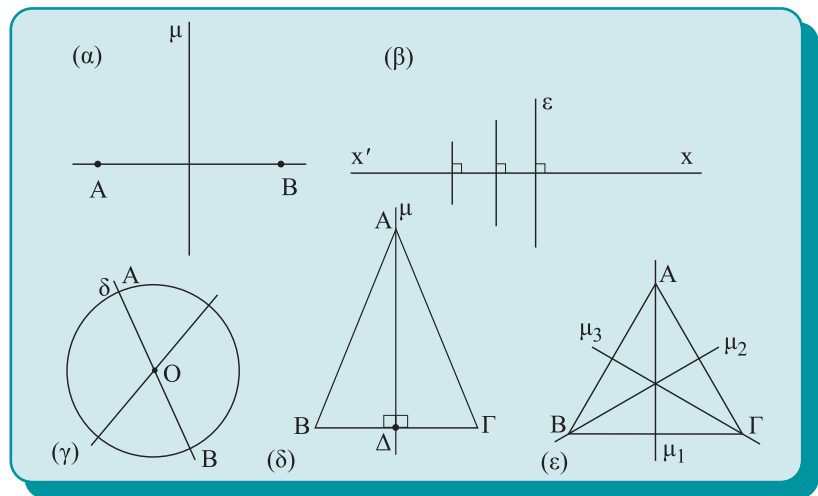


Σχήμα 44

το σχήμα (σχ.44) σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε , τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Από τα γνωστά μας σχήματα

- Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ε (σχ.45α).
- Η ευθεία $x'x$ έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία $\varepsilon \perp x'x$ και την ίδια τη $x'x$ (σχ.45β).
- Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του AB (σχ.45γ).
- Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους $A\Delta$ (σχ.45δ).
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του (σχ.45ε).



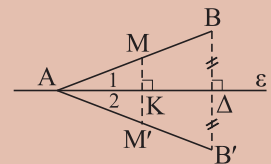
Σχήμα 45

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ε και ένα τμήμα AB του οποίου το ένα άκρο A είναι σημείο της ε . Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του AB ως προς την ε είναι το τμήμα AB' ίσο με το AB , όπου B' το συμμετρικό του B ως προς την ε .

Απόδειξη

Το συμμετρικό του A ως προς την ε είναι το ίδιο το A , αφού το A είναι σημείο της ε . Επειδή η ε είναι μεσοκάθετος του BB' , είναι $AB' = AB$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABB' η $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Έστω σημείο M του AB . Φέρουμε $MK \perp \varepsilon$ η οποία όταν προεκταθεί τέμνει το AB' στο M' . Στο τρίγωνο AMM' η AK είναι ύψος και διχοτόμος (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή $KM' = KM$, οπότε το M' είναι συμμετρικό του M . Όμοια αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό κάθε σημείου του AB' είναι σημείο του AB . Άρα τα AB , AB' είναι συμμετρικά ως προς την ε .



Σχήμα 46

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων: Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.
2. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και σημείο O . Αν A' , B' , $Γ'$ είναι τα συμμετρικά των A , B , $Γ$ ως προς το κέντρο O αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $ABΓ$, $A'B'Γ'$ είναι συμμετρικά ως προς το O και ίσα.
3. Αν $x'A'y'$ είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο O , εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί ότι $x'A'y' = x\hat{A}y$.

4. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου $ABΓ$ ως προς την ευθεία $BΓ$ είναι τρίγωνο ίσο με το $ABΓ$.
5. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.
6. Έστω ε , ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο O και ένα τυχαίο σημείο M . Αν M' είναι το συμμετρικό του M ως προς ε και M'' το συμμετρικό του M' ως προς ε' , τότε να αποδείξετε ότι:
i) $OM = OM''$,
ii) τα σημεία M , O , M'' είναι συνευθειακά.



Ανισοτικές σχέσεις

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την ανισοτική σχέση που ισχύει μεταξύ μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου και των απέναντι γωνιών του και την ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης, παρουσιάζουμε την τριγωνική ανισότητα.

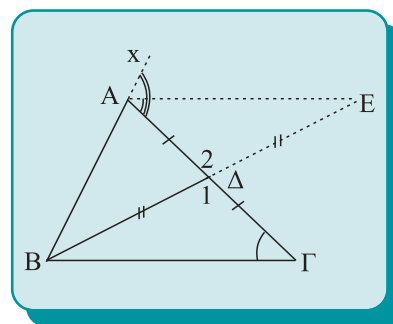
3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $ABΓ$. Φέρουμε τη διάμεσο BD (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ , θεωρούμε σημείο E , ώστε $\Delta E = BD$. Επειδή το E βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}$ έχουμε $\hat{A}E < \hat{A}x = \hat{A}_{\varepsilon}$. Όμως τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $E\Delta A$ είναι ίσα γιατί έχουν: $BD = \Delta E$, $\Delta D = \Delta\Gamma$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\hat{A}E < \hat{A}_{\varepsilon}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{\varepsilon} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{\varepsilon} > \hat{B}$.



Σχήμα 47

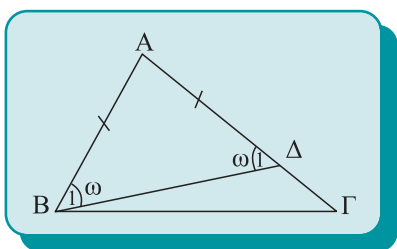
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- (ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.



Σχήμα 48

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ (σχ.48). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$, ενώ η $\hat{\Delta}_1$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

ΣΧΟΛΙΟ

Το διπλανό πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος I της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- (ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- (iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

3.12 Τριγωνική ανισότητα

Γνωρίζουμε ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα συνδέει. Αυτό εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

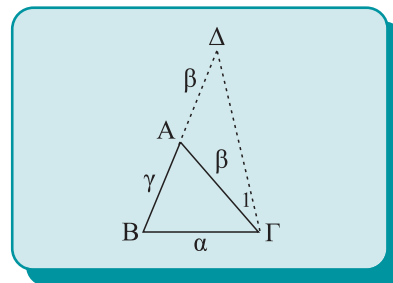
Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \beta + \gamma$ (σχ.49). Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά BA , προς το A , κατά τμήμα $A\Delta = A\Gamma$. Τότε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και η ΓA εσωτερική ημιευθεία της $B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε έχουμε αντίστοιχα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 < B\hat{\Gamma}\Delta$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\hat{\Delta} < B\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι $B\Gamma < B\Delta$ ή $\alpha < \beta + \gamma$.

Όμοια προκύπτει ότι $\beta < \gamma + \alpha$ και $\gamma < \alpha + \beta$. Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι $\alpha > \beta - \gamma$, αν $\beta \geq \gamma$ ή $\alpha > \gamma - \beta$, αν $\gamma \geq \beta$, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma, \quad \beta \geq \gamma$$



Σχήμα 49

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν M είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδειχθεί ότι:

- (i) $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$
- (ii) $MB + M\Gamma < AB + A\Gamma$.

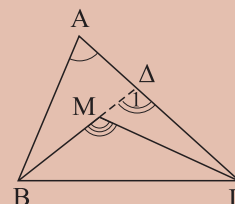
Απόδειξη

- (i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του BM με την $A\Gamma$. Η γωνία $B\hat{M}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ και επομένως $B\hat{M}\Gamma > \hat{\Delta}_1$. Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$. Άρα θα είναι και $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.
- (ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα $AB\Delta$ και $M\Gamma\Delta$ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

$$MB + M\Delta < AB + A\Delta \text{ και } M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$MB + M\Delta + M\Gamma < AB + (A\Delta + \Delta\Gamma) + M\Delta \text{ ή } MB + M\Gamma < AB + A\Gamma.$$



Σχήμα 50

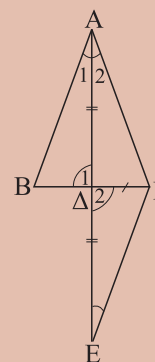
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

- (i) το τμήμα $A\Delta$ είναι διάμεσος,
 - (ii) το τμήμα $A\Delta$ είναι διχοτόμος,
 - (iii) το τμήμα $A\Delta$ είναι ύψος,
- τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$.

Λύση

Έστω $A\Delta$ διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ.51). Προ-



Σχήμα 51

εκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα ($ΒΔ = ΔΓ$, $ΑΔ = ΔΕ$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ως κατακορυφήν). Άρα $ΑΒ = ΓΕ$ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{E}$. Από την $\hat{A}_1 = \hat{E}$ προκύπτει $ΑΓ = ΓΕ$ (2), αφού ΑΔ διχοτόμος, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{E}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΑΒ = ΑΓ$. Αν ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος ή ύψος και διχοτόμος τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε $ΑΒ = ΑΓ$.

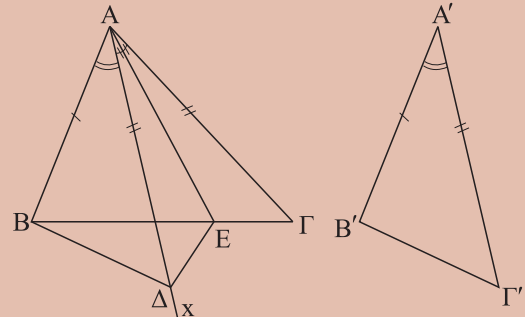
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με $ΑΒ = Α'Β'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και $\hat{A} > \hat{A}'$ (σχ.55).

Θα αποδείξουμε ότι $ΒΓ > Β'Γ'$. Αφού $\hat{A} > \hat{A}'$, υπάρχει εσωτερική ημιευθεία Αχ της $\hat{A}$ τέτοια, ώστε $Β\hat{A}χ = \hat{A}'$. Πάνω στην Αχ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $ΑΔ = Α'Γ'$. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Γ' είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα, $ΒΔ = Β'Γ'$. Φέρουμε κατόπιν τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας Δ\hat{A}Γ, οπότε σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα τα ΑΔΕ και ΑΓΕ, άρα $ΕΔ = ΕΓ$. Στο τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι $ΒΔ < ΒΕ + ΕΔ$ ή $ΒΔ < ΒΕ + ΕΓ$ ή $Β'Γ' < ΒΓ$.



Σχήμα 52

Αντίστροφα. Ας θεωρήσουμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι $ΑΒ = Α'Γ'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και $ΒΓ > Β'Γ'$. Αν ήταν $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε θα είχαμε ότι $ΒΓ = Β'Γ'$, ενώ αν ήταν $\hat{A} < \hat{A}'$, θα είχαμε ότι $Β'Γ' < ΒΓ$, που είναι άτοπο. Επομένως, $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

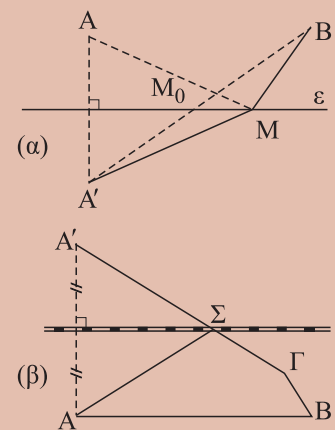
Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α' του Α ως προς την ε (Σχ.53α).

(i) Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι $ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ' + ΜΒ \geq Α'Β$. Πότε το άθροισμα $ΜΑ + ΜΒ$ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;

(ii) Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.53β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευασθεί σταθμός Σ. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός;

Λύση

(i) Επειδή το Α' είναι συμμετρικό του Α ως προς την ε, η ε είναι μεσοκάθετος του ΑΑ', οπότε $ΜΑ = ΜΑ'$ και επομένως $ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ' + ΜΒ$ (1). Αν το Μ δεν είναι σημείο του τμήματος Α'Β από το τρίγωνο ΜΑ'Β, έχουμε $ΜΑ' + ΜΒ > Α'Β$ (2), ενώ αν το Μ είναι



Σχήμα 53

σημείο του $A'B'$ έχουμε $MA' + MB = A'B$ (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ και ότι το $MA + MB$ παίρνει τη μικρότερή του τιμή $A'B$, όταν $M = M_0$, όπου M_0 το σημείο τομής της ε με το $A'B$.

(ii) Όμοια με το (i).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

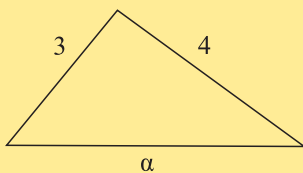
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

- i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{\varepsilon}$ τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$. Σ Λ
 ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{\varepsilon}$ τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μικρότερη από τη $\hat{\Gamma}$. Σ Λ
 iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° . Σ Λ
 iv) Αν $\beta > \gamma$ (σε τρίγωνο $AB\Gamma$), τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα. Σ Λ
 v) Αν $\beta = \gamma$ (σε τρίγωνο $AB\Gamma$), τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα. Σ Λ

2. Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:

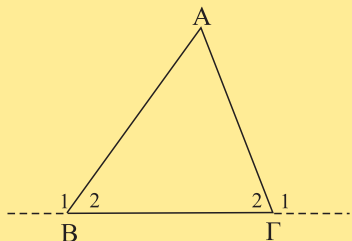
α. $\alpha = 7$ β. $\alpha = 1$ γ. $1 < \alpha < 7$ δ. $\alpha > 7$ ε. $0 < \alpha < 1$
 Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



3. Υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = \frac{\gamma}{3}$ και $\beta = \frac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90^\circ$.



2. Αν σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν $AB = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = \Gamma\Delta$. Τι συμπεραίνετε για τη $B\Delta$;

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. i) Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$; ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή A τέμνει την ευθεία $B\Gamma$, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς $B\Gamma$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της ημιευθείας Bx που περιέχει το A . Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των B και A , ταυτίζεται με το A ή βρίσκεται μετά το A , αντίστοιχα.

5. Αν M σημείο της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AM < AB$.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Να αποδείξετε ότι $A\Delta < \Delta B$.

7. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και O σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι BO και ΓO τέμνουν τις $A\Gamma$ και AB στα σημεία Λ και M αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι $BO = \Gamma O$ και $OA = OM$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K, Λ τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ , τότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

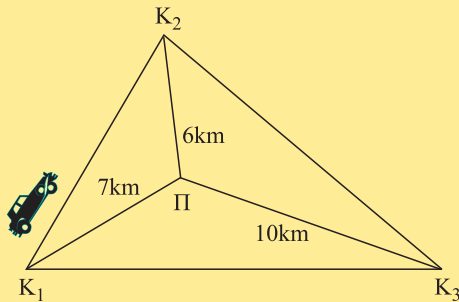
9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές,

ii) η AI είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

10. Οι κωμοπόλεις K_1, K_2, K_3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1 K_2 K_3 K_1$ επιστρέφει στην K_1 . Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή

τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\mu_a < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_a = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_a > \frac{\alpha}{2}$;
2. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}M\Gamma > \hat{A}MB$.
3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διάμεσος AM . Να αποδείξετε ότι:
 - i) $\hat{M}AB > \hat{M}A\Gamma$,
 - ii) $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_a < \frac{\beta + \gamma}{2}$,
 - iii) $\mu_a + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.
4. Έστω κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και σημείο Σ της ημιευθείας OA . Για κάθε σημείο M του κύκλου να αποδειχθεί ότι $\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$. (Το τμήμα ΣA λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).
5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν η διχοτόμος δ_a τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β , να αποδείξετε ότι:
 - i) $A\Gamma = 2AB$,
 - ii) $AB < B\Gamma$.

6. Έστω κύκλος (O, R) και δύο τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$. Αν $\widehat{AB} = 2\widehat{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι $AB < 2\Gamma\Delta$.

7. Σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και O εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι

$$OA + OB + OG + OD > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}.$$

ii) Για ποια θέση του O το άθροισμα

$$OA + OB + OG + OD \text{ γίνεται ελάχιστο;}$$

2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA προς το μέρος του A κατά τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $A\epsilon = AB$ αντίστοιχα. Η ευθεία $\Delta\epsilon$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο $MB\epsilon$ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}\epsilon$ διέρχεται από το σημείο A .

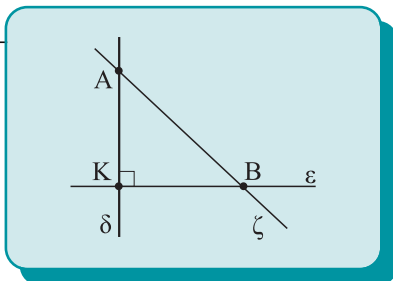
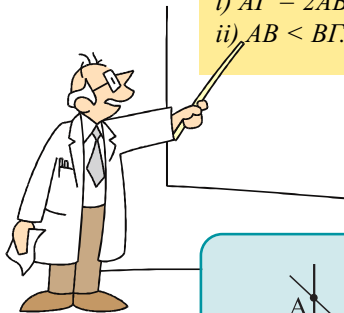
3. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) $A\Gamma + B\Delta > AB + \Gamma\Delta$ και $A\Gamma + B\Delta > A\Delta + B\Gamma$,

iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Ox , Oy τα σημεία A , B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από $2OG$.



Σχήμα 54

3.13 Κάθετες και πλάγιες

Έστω μια ευθεία ϵ (σχ.54) και ένα σημείο A εκτός αυτής. Από το A φέρουμε προς την ϵ την κάθετο δ και μια πλάγια ζ . Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ϵ στα K και B αντίστοιχα. Το K , όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του A πάνω στην ϵ ή ίχνος της καθετούς δ πάνω στην ϵ . Το B λέγεται **ίχνος** της ευθείας ζ ή του τμήματος AB πάνω στην ϵ .

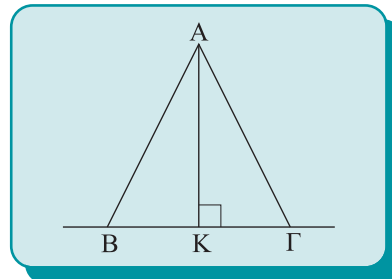
Θεώρημα I

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω AB και AG δύο ίσα πλάγια τμήματα και AK το κάθετο τμήμα (σχ.55). Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές και το AK ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή $KB = ΚΓ$.

Αντίστροφα. Έστω ότι $KB = ΚΓ$. Στο τρίγωνο $ABΓ$ το AK είναι ύψος και διάμεσος, άρα (εφαρμογή §3.12) το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλαδή $AB = AG$.



Σχήμα 55

Θεώρημα II

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

- (i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
- (ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

Απόδειξη

(i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB (σχ.56), η γωνία $\hat{K}$ είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά AB είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, $AB > AK$.

(ii) Έστω ευθεία ϵ και σημείο A εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο AK στην ϵ και δύο πλάγια τμήματα AB, AG , όπου $B, Γ$ σημεία της ϵ (σχ.57).

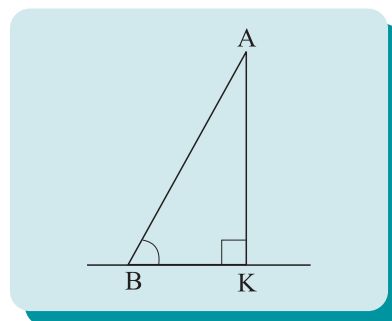
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη $B, Γ$ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο K .

Ας υποθέσουμε ότι $KΓ > KB$ (σχ.57). Θα αποδείξουμε ότι $AG > AB$. Αφού το B είναι μεταξύ των $K, Γ$, η $\hat{ABΓ}$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου KAB , επομένως $\hat{ABΓ} > \hat{K} = 1\text{L}$, δηλαδή η $\hat{ABΓ}$ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο $ABΓ$ η πλευρά AG βρίσκεται απέναντι από την $\hat{ABΓ}$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $AG > AB$.

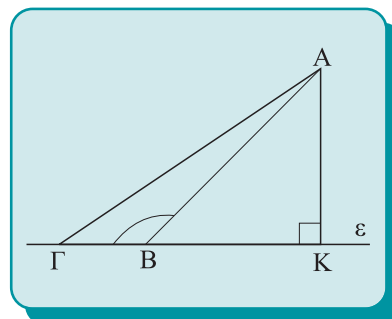
Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι $AG > AB$. Αν ήταν $KΓ = KB$, τότε θα είχαμε $AG = AB$, που είναι άτοπο. Αν $KΓ < KB$, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε ότι $AG < AB$, που είναι επίσης άτοπο. Επομένως $KΓ > KB$.

ΣΧΟΛΙΟ

Την ιδιότητα (i) του Θεωρήματος II, που έχει το κάθετο τμήμα συνήθως εκφράζουμε και ως: η απόσταση ενός σημείου A από μία ευθεία ϵ είναι μικρότερη από την απόσταση του A από τυχόν σημείο της ευθείας.



Σχήμα 56



Σχήμα 57

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν AB, AG πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και AK το κάθετο τμήμα, τότε:

1. Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες

i) $AB=AG \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

ii) $AB>AG \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

2. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i) $AB>AK$

Σ Λ

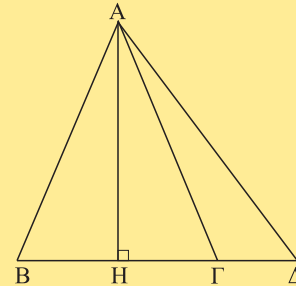
ii) $AB=AK$

Σ Λ

iii) $AB<AK$

Σ Λ

2. Στο παρακάτω σχήμα το AH είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ABG . Να συγκρίνετε τα τμήματα AB, AG και AD .



3. Δίνεται τμήμα AB , σημείο P της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το A .

i) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του P από την ευθεία ε και το σημείο B .

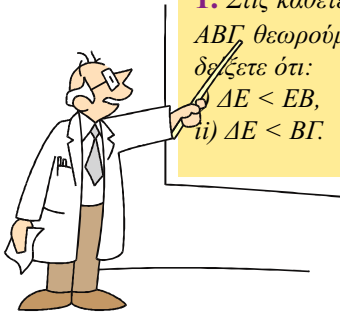
ii) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε , ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στις κάθετες πλευρές AB, AG ορθογώνιου τριγώνου ABG θεωρούμε τα σημεία Δ, E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

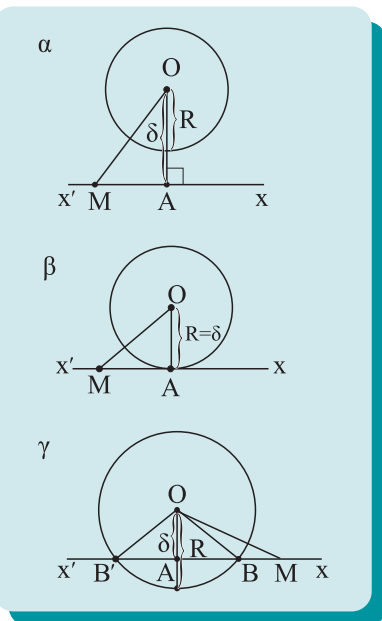
i) $\Delta E < EB$,

ii) $\Delta E < BG$.



Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Σχήμα 58

Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R) μια ευθεία $x'x$ και την απόσταση $\delta = OA$ του κέντρου O από την $x'x$ (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: $\delta > R$, $\delta = R$ και $\delta < R$. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

• Έστω $\delta > R$ (σχ.58α). Τότε το A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο M της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού $OM > OA > R$. Επομένως, η $x'x$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εξωτερική** ευθεία του κύκλου.

• Έστω $\delta = R$ (σχ.58β). Τότε το A είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο M της $x'x$ είναι εξωτερικό σημείο του (O,R) , αφού $OM > OA = R$. Επομένως, η $x'x$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου στο σημείο A . Το σημείο A λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $x'x$ εφάπτεται του κύκλου (O,R) στο σημείο A . Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

• Έστω $\delta < R$ (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε $AM = R$. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού $OM > AM = R$. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx' έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β'.

Επομένως, η x'x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x'x, λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία **τομής** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

- Αν $\delta > R$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
- Αν $\delta = R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.
- Αν $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

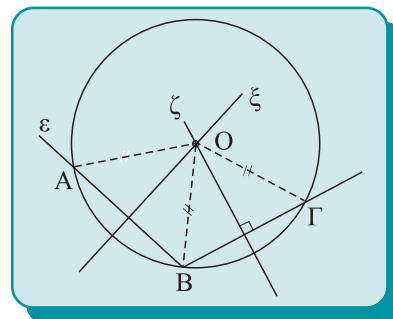
Με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα I

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (Ο,ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ (σχ. 59). Επειδή $OA = OB (= \rho)$ και $OB = OG (= \rho)$, οι μεσοκάθετοι ξ,ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο. Έτσι από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε τις ξ, ζ, που είναι άτοπο.



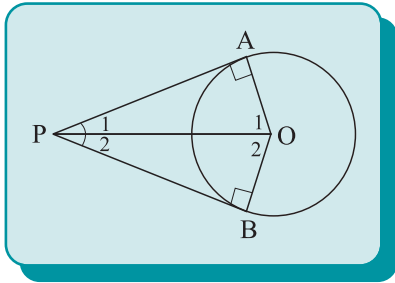
Σχήμα 59

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τρία οποιαδήποτε σημεία ενός κύκλου δεν είναι συνευθειακά. Στην § 4.5 θα δούμε ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας κύκλος, που είναι και μοναδικός.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο P . Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το P φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα PA και PB λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** του κύκλου από το σημείο P και η ευθεία PO **διακεντρική ευθεία** του σημείου P . Ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχήμα 60

Θεώρημα II

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα AOP και BOP (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OP κοινή και $OA = OB (= \rho)$, άρα είναι ίσα, οπότε $PA = PB$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

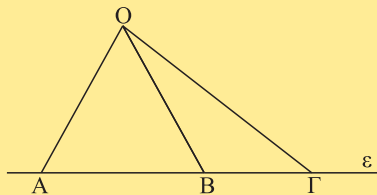
- (i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- (ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

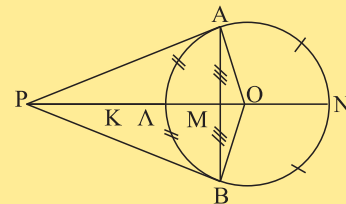
1. Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;

2. Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι $OA = OB = OG$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



3. Στο παρακάτω σχήμα τα PA, PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, η PK διχοτόμος της $\hat{APB}$, τα A, N μέσα των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{ANB}$ αντίστοιχα και το M μέσο της χορδής

AB . Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:



- | | | |
|---|---|---|
| i) $PA = PB$. | Σ | Λ |
| ii) Η PK διέρχεται από το O . | Σ | Λ |
| iii) Η OM διέρχεται από τα P, A, N . | Σ | Λ |
| iv) Η προέκταση του AM διχοτομεί τις γωνίες $\hat{APB}$, $\hat{AOB}$ και το τόξο $\widehat{ANB}$. | Σ | Λ |

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.
2. Δίνεται κύκλος (O, ρ) , μία διάμετρος του AB και οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του κύκλου στα A, B . Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Γ, Δ , να αποδείξετε ότι $\hat{G}\hat{O}\hat{\Delta} = 90^\circ$.
3. Από εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο E του κύκλου τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB .

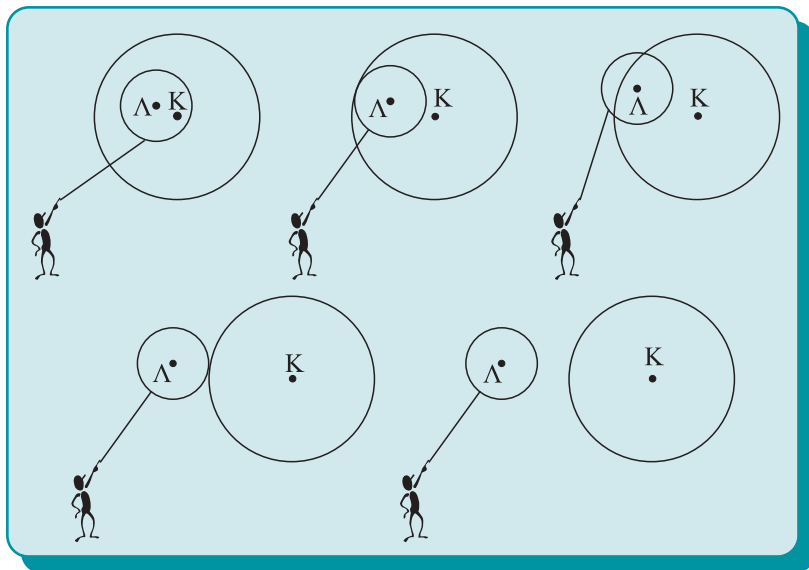
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.
2. Από σημείο M εξωτερικό του κύκλου (O, R) φέρουμε τις εφαπτόμενες MA, MB του κύκλου. Προεκτείνουμε το OB κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma}$ είναι τριπλάσια της $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}$.
3. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου κέντρου O , φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος OP να αποδείξετε ότι $\hat{M}\hat{A}\hat{P} = \hat{M}\hat{B}\hat{P}$.



3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Οι σχετικές τους θέσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχ.61α).

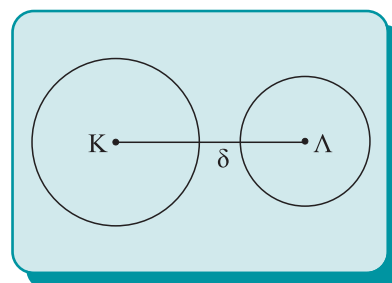


Σχήμα 61α

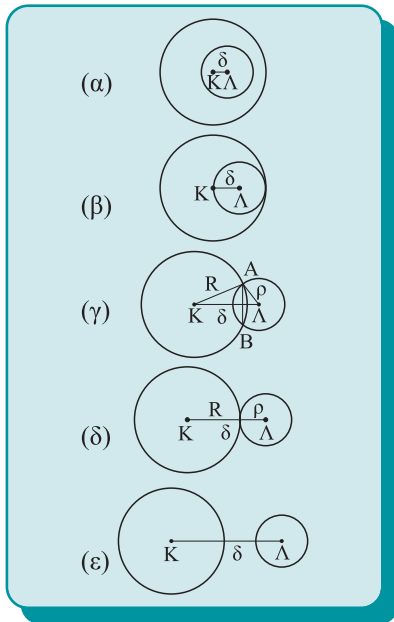
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ (σχ. 61β). Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

• Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

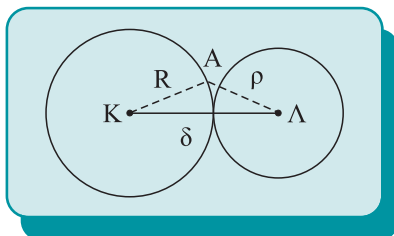
- (i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν



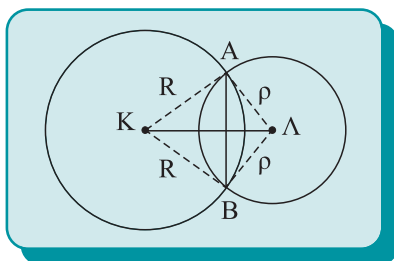
Σχήμα 61β



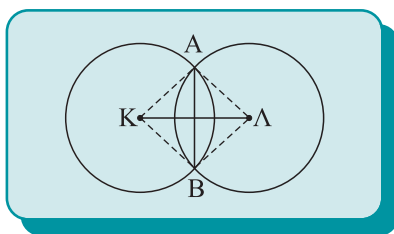
Σχήμα 62



Σχήμα 63



Σχήμα 64



Σχήμα 65

και μόνο αν $\delta < R - \rho$ (σχ.62α).

(ii) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$ (σχ.62ε).

• Εφαπόμενοι κύκλοι

(i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$ (σχ.62β).

(ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$ (σχ.62δ).

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται **σημείο επαφής** και είναι σημείο της διακέντρου.

Πράγματι, αν το σημείο επαφής A (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο AKΛ έχουμε $K\Lambda < KA + A\Lambda$, δηλαδή $\delta < R + \rho$, που είναι άτοπο.

• Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$ (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) του σχ.64 και A, B τα σημεία τομής τους. Επειδή $KA = KB = R$, το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Όμοια από την $LA = LB = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Άρα, η KΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB του κύκλου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) (σχ.65) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν $R = \rho$, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

Πράγματι, επειδή $R = \rho$, θα είναι $AK = AL$ και $BK = BL$. Άρα τα A και B είναι σημεία της μεσοκαθέτου του KΛ και επομένως η κοινή χορδή AB είναι μεσοκάθετος της διακέντρου KΛ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α (σχ.66). Μία ευθεία ε εφάπτεται και στους δύο κύκλους στα Β, Γ αντίστοιχα, όπως στο σχ.66. Να αποδειχθεί ότι:

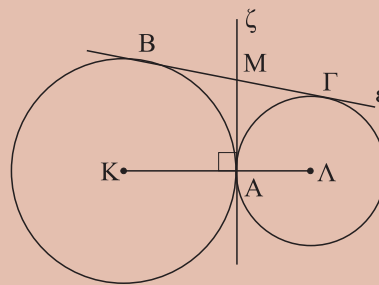
- (i) Η εφαπτομένη ζ του ενός κύκλου στο Α είναι και εφαπτομένη του άλλου.
(ii) Η ευθεία ζ διχοτομεί το τμήμα ΒΓ.

Απόδειξη

- (i) Έστω ότι η ζ εφάπτεται στον κύκλο (Κ) στο Α. Τότε $\zeta \perp KA$ (1).

Επειδή όμως οι κύκλοι εφάπτονται, το Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $\zeta \perp AL$, επομένως η ευθεία ζ είναι και εφαπτομένη του κύκλου (Λ).

- (ii) Έστω Μ το σημείο τομής της ζ με την ε. Τότε $MA = MB$, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Κ) και $MA = MG$, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Λ). Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι $MB = MG$.



Σχήμα 66

ΣΧΟΛΙΟ

Η ευθεία ε του παραπάνω σχήματος, που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους αφήνει προς το ίδιο μέρος της λέγεται **κοινή εξωτερική εφαπτομένη**, ενώ η ευθεία ζ που έχει τους κύκλους στους οποίους εφάπτεται εκατέρωθεν αυτής λέγεται **κοινή εσωτερική εφαπτομένη**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Αν (Κ, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και $R > \rho$, $KL = \delta$, να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Ο κύκλος (Λ, ρ) είναι εσωτερικός του (Κ, R).	1. $\delta > R + \rho$
β. Ο κύκλος (Λ, ρ) εφάπτεται εσωτερικά του (Κ, R).	2. $\delta = R + \rho$
γ. Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται.	3. $\delta = R - \rho$
δ. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.	4. $\delta < R - \rho$
ε. Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.	5. $2\delta = R - \rho$
	6. $\rho < \delta < R$
	7. $2\delta = R\rho$
	8. $R - \rho < \delta < R + \rho$

2. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

- i) Η διάκεντρος δύο κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής. Σ Λ
ii) Η κοινή χορδή δύο ίσων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου. Σ Λ
iii) Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι σημείο της διακέντρου. Σ Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να προσδιορισθούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, 2ρ) αν

- i) $KL = \frac{\rho}{2}$,
ii) $KL = \rho$,
iii) $KL = 2\rho$,
iv) $KL = 3\rho$,
v) $KL = 4\rho$.

2. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και μια ακτίνα του ΟΑ. Γρά-

φουμε κύκλο με διάμετρο OA . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

3. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσο του O . Γράφουμε τον κύκλο (A, AO) και τον κύκλο με διάμετρο OB . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται κύκλος (O, R) και εξωτερικό σημείο του P , ώστε $OP < 2R$. Γράφουμε τον κύκλο $(O, 2R)$. Να αποδείξετε ότι:

- ο κύκλος $(O, 2R)$ τέμνει τον κύκλο (P, PO) σε δύο σημεία Γ και Δ ,
- τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O, R) στα σημεία A και B ,
- τα PA και PB εφάπτονται στον (O, R) .

2. Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) με $O_1O_2 > R_1 + R_2 > 2R_2$.

i) Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

ii) Εστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον (O_1) στα σημεία M, M' και τον (O_2) στα σημεία N, N' αντίστοιχα με τα M, N μεταξύ των M', N' . Να αποδείξετε ότι $MN \leq AB \leq M'N'$, όπου A, B τυχαία σημεία των κύκλων (O_1) και (O_2) αντίστοιχα.

3. Ένας κύκλος κέντρου K είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ . Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο P . Να αποδείξετε ότι $\widehat{KPA} = 90^\circ$.

4. Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι γεωμετρικές κατασκευές

Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές προτάσεις διαορίζονται σε «θεωρήματα», όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε «προβλήματα», όπου ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» οι κατασκευές στηρίζονται στα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας).

Ως τα τέλη του 4ου αι. πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι ορισμένα προβλήματα, όπως π.χ. το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με τα επιτρεπτά τότε κατασκευαστικά εργαλεία. Έτσι εμφανίζεται η πρώτη ιεράρχηση των προβλημάτων με βάση τα επιτρεπτά κατασκευαστικά εργαλεία επιλυσιμότητάς τους. Ως επίπεδα προβλήματα θεωρούνται αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, στερεά προβλήματα είναι εκείνα που λύνονται με τη βοήθεια κωνικών τομών, και γραμμικά προβλήματα είναι όλα τα υπόλοιπα. Ο Πάππος μάλιστα θεωρούσε σοβαρό λάθος τη λύση ενός επίπεδου προβλήματος με τη βοήθεια κωνικών τομών.

Γεωμετρικές κατασκευές

Στην § 2.7 αναφέραμε την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια: την **κατασκευή** (ή **σύνθεση**), την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

- Η **κατασκευή** είναι όλες εκείνες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος.
- Η **απόδειξη** είναι η επιβεβαίωση ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία τα δοσμένα.
- Η **διερεύνηση** είναι η αναγραφή όλων εκείνων των συνθηκών, που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στη διερεύνηση εξετάζεται επίσης και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή, τότε, πριν από την κατασκευή κάνουμε, ως βοηθητικό βήμα, και τη λεγόμενη **ανάλυση**. Σε προβλήματα επόμενων κεφαλαίων θα χρησιμοποιήσουμε και την ανάλυση.



3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

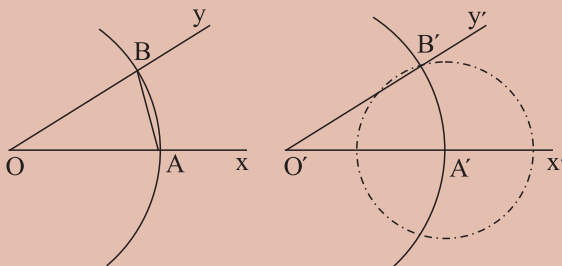
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές με τις οποίες κατοχυρώνουμε κατασκευαστικά στοιχειώδη γεωμετρικά αντικείμενα και διαδικασίες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και η ημιευθεία $O'x'$. Να κατασκευασθεί γωνία ίση με τη $\hat{xOy}$ η οποία έχει ως μια πλευρά, την $O'x'$ και κορυφή το O' .

• Κατασκευή

Καθιστούμε τη γωνία $\hat{xOy}$ (σχ.67) επίκεντρη γράφοντας κύκλο με κέντρο O και τυχαία ακτίνα ρ . Έστω $\widehat{AB}$ το αντίστοιχο τόξο της. Με κέντρο O' και ακτίνα την ίδια, γράφουμε άλλον κύκλο που τέμνει την $O'x'$ στο A' . Ακολουθώντας γράφουμε τον κύκλο (A', AB) του οποίου ένα κοινό σημείο με τον (O', ρ) είναι το B' . Φέρουμε την ημιευθεία $O'B'$. Η γωνία $\hat{x'O'B'}$, δηλαδή η $\hat{x'O'y'}$ είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 67

• Απόδειξη

Οι γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'O'y'}$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες στους ίσους κύκλους (O, ρ) , (O', ρ) και βαίνουν στα ίσα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A'B'}$ αντίστοιχα. (§ 2.18)

• Διερεύνηση

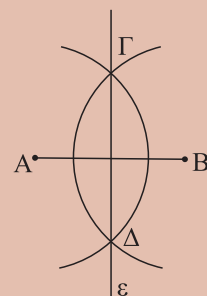
Για να έχει το πρόβλημα λύση, θα πρέπει οι κύκλοι (O', ρ) και (A', AB) να τέμνονται. Αυτό όμως, συμβαίνει πάντοτε, επειδή για τη διάκεντρό τους $O'A' = \rho$ ισχύει: $\rho - AB < \rho < \rho + AB$ (λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο OAB). Μια δεύτερη λύση του προβλήματος αντιστοιχεί στο δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (O', ρ) και (A', AB) .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος.

• Κατασκευή

Έστω τμήμα AB (σχ.68). Με κέντρα τα άκρα του A, B και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Αν Γ, Δ είναι τα κοινά σημεία των κύκλων αυτών, η ευθεία ε που ορίζουν είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 68

• Απόδειξη

Η ευθεία ε είναι κοινή χορδή ίσων κύκλων, επομένως είναι κάθετη στη διάκεντρο AB (§3.16)

• Διερεύνηση

Για να έχει το πρόβλημα λύση θα πρέπει οι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) να τέμνονται. Αυτό όμως ισχύει, αφού η διάκεντρό τους AB ικανοποιεί την $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Με την παραπάνω κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος.

Αρκετές φορές τα παραπάνω βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση μπορεί να παρουσιάζονται ενοποιημένα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται ευθεία ε και σημείο A . Να κατασκευασθεί ευθεία που να διέρχεται από το A κάθετη στην ε , όταν:

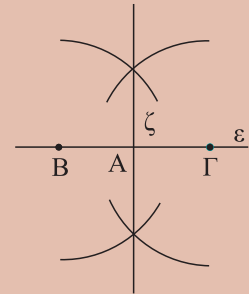
- (i) το A είναι σημείο της ευθείας ε ,
- (ii) το A δεν είναι σημείο της ε .

Λύση

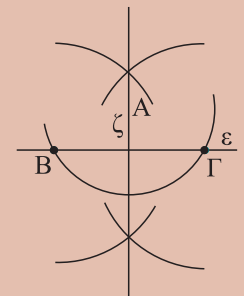
(i) Με κέντρο το A (σχ.69) και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ε στα σημεία B και Γ . Έτσι το A έγινε μέσο του τμήματος $B\Gamma$ και επομένως η ζητούμενη κάθετος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ (προηγούμενη κατασκευή).

(ii) Με κέντρο το A (σχ.70) και κατάλληλη ακτίνα γράφουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία ε στα B και Γ . Η μεσοκάθετος ζ του τμήματος $B\Gamma$, που κατασκευάζεται όπως προηγουμένως, είναι η ζητούμενη κάθετος.

Πράγματι, επειδή $AB = AG$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, η μεσοκάθετος της χορδής $B\Gamma$ διέρχεται από το A .



Σχήμα 69



Σχήμα 70

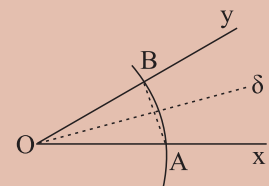
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευασθεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

Λύση

Έστω γωνία $\hat{xOy}$ (σχ.71). Με κέντρο το O και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα A , B αντίστοιχα. Φέρουμε τη μεσοκάθετο δ (Πρόβλημα 2) της χορδής AB που είναι και η ζητούμενη διχοτόμος.

Πράγματι η ευθεία δ , ως μεσοκάθετος χορδής κύκλου, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$ της γωνίας $\hat{xOy}$ (§ 3.6). Επομένως είναι διχοτόμος της.



Σχήμα 71

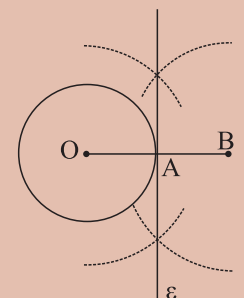
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να κατασκευασθεί η εφαπτομένη ενός κύκλου (O, ρ) σε ένα σημείο του A .

Λύση

Στην προέκταση της ακτίνας OA (σχ.72) παίρνουμε το σημείο B , ώστε να είναι $AB = OA$. Στη συνέχεια φέρουμε τη μεσοκάθετο του OB που είναι η εφαπτομένη του κύκλου, γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα στο άκρο της A .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για την κατασκευή των εφαπτομένων από σημείο εκτός κύκλου βλέπε σελ. 137.



Σχήμα 72



3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

Σε αντιστοιχία με τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων (§3.2-3.4) έχουμε τις επόμενες γεωμετρικές κατασκευές.

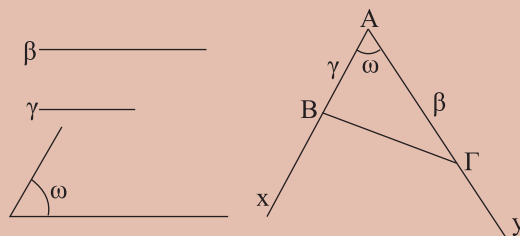
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευαστεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνονται οι πλευρές $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και η περιεχόμενη γωνία $\hat{A} = \omega$.

Λύση

Με πλευρά μια ημιευθεία Ax κατασκευάζουμε (§ 3.17) γωνία $\hat{x}Ay = \omega$ (σχ.73). Στις πλευρές Ax , Ay παίρνουμε, με το διαβήτη, τα σημεία B , Γ αντίστοιχα, ώστε $AB = \gamma$ και $A\Gamma = \beta$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και $\hat{A} = \omega$. Με τον περιορισμό $0^\circ < \omega < 180^\circ$ (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.



Σχήμα 73

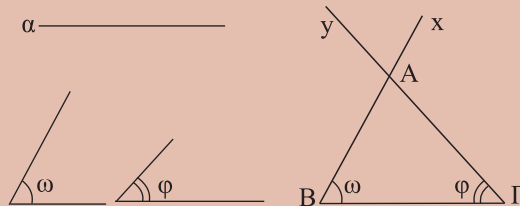
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνεται η πλευρά $B\Gamma = a$ και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες $\hat{B} = \omega$ και $\hat{\Gamma} = \phi$.

Λύση

Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = a$ και με κορυφές τα B , Γ (σχ.74) κατασκευάζουμε, προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, γωνίες $\hat{B}\Gamma x = \omega$ και $\hat{B}\Gamma y = \phi$. Οι πλευρές Bx , Γy των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο A . Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $B\Gamma = a$, $\hat{B} = \omega$ και $\hat{\Gamma} = \phi$. Με τον περιορισμό $0^\circ < \omega + \phi < 180^\circ$ (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση. Στο επόμενο κεφάλαιο (§4.2) θα δούμε ότι ο περιορισμός $\omega + \phi < 180^\circ$ εξασφαλίζει την τομή των ημιευθειών Bx και Γy .



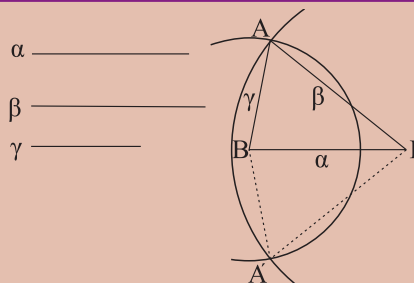
Σχήμα 74

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνονται οι πλευρές $B\Gamma = a$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$.

Λύση

Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = a$ (σχ.75) και γράφουμε τους κύκλους (B, γ) και (Γ, β) . Αν οι κύκλοι τέμνονται και A είναι το ένα από τα σημεία τομής τους, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 75

Πράγματι το τρίγωνο $AB\Gamma$, από την κατασκευή, έχει $B\Gamma = \alpha$, $AB = \gamma$ ως ακτίνα του (B, γ) και $A\Gamma = \beta$ ως ακτίνα του (Γ, β) .

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει οι κύκλοι (B, γ) και (Γ, β) να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει (§3.16) όταν $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ ($\beta > \gamma$). Αν A' είναι το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (B, γ) και (Γ, β) , το τρίγωνο $A'B\Gamma$ είναι ίσο με το $AB\Gamma$, επομένως δεν αποτελεί νέα λύση του προβλήματος, αφού τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι τρία τμήματα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνον αν ισχύει $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ ($\beta \geq \gamma$). Αν υποθέσουμε ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$, η τελευταία διπλή ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\alpha < \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πώς θα χωριστεί με κανόνα και διαβήτη ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα τμήματα;
 2. Πώς θα βρεθεί με κανόνα και διαβήτη το μέσο ενός τόξου δοσμένου κύκλου;
 3. Πώς θα βρεθεί το κέντρο ενός κύκλου που έχει γραφεί με ένα νόμισμα;
 4. Τα τμήματα α, β, γ με $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$ είναι πλευρές τριγώνου όταν:
α. $\alpha = \beta + \gamma$ β. $\alpha > \beta + \gamma$ γ. $\alpha < \beta + \gamma$ δ. $\alpha < 2(\beta + \gamma)$
ε. Λίποτε από τα προηγούμενα.
- Συκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία 45° .
2. Να χωρίσετε δοσμένη γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.
3. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά γνωστό τμήμα a .
4. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίνονται η βάση a και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος u .
5. Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, όταν δίνονται:
i) $AB = \gamma$ και $A\Gamma = \beta$,
ii) $AB = \gamma$ και $B\Gamma = \alpha$,
όπου α, β, γ γνωστά τμήματα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ τέτοια, ώστε $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 2\angle$. i) Να αποδείξετε ότι $AB = A'B'$, ii) Διατυπώστε λεκτικά την άσκηση αυτή.
2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και με πλευρές τις $AB, B\Gamma, \Gamma A$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του $AB\Gamma$ τρία ισόπλευρα τρίγωνα $A'B\Gamma, AB'\Gamma$ και $AB\Gamma'$. Να αποδείξετε ότι $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$.
3. Αν OK, OL είναι αντίστοιχα τα αποστήματα των χορδών $AB, \Gamma A$ κύκλου (O, R) , να αποδείξετε ότι $AB < \Gamma A$, αν και μόνον αν $OK > OL$.
4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα, ώστε $AD = BE = \Gamma Z$. Αν K, Λ, M τα σημεία τομής των $AE, \Gamma A$ και BZ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 1\angle$ και $A\Gamma = 2AB$. Να

αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} < \frac{\hat{A}}{2}$.

6. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 1\angle$.
7. Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες διαμέσους που περιέχονται στις πλευρές αυτές ίσες μία προς μία είναι ίσα.
8. Δίνεται μια γωνία xOy και δύο εσωτερικά της σημεία A και B . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την Ox και B' το συμμετρικό του B ως προς την Oy . Αν M, N είναι τυχαία σημεία των Ox, Oy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AM + MN + NB = A'M + MN + NB'$. Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής να βρείτε τις θέσεις των M, N , για τις οποίες το άθροισμα $AM + MN + NB$ είναι το μικρότερο δυνατό.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Τα τρίγωνα ταξινομούνται σε

- **σκαληνά, ισοσκελή** και **ισόπλευρα**, ως προς τις πλευρές τους.
- **οξυγώνια, ορθογώνια, αμβλυγώνια**, ως προς τις γωνίες τους.

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια** στοιχεία του, ενώ οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη του λέγονται **δευτερεύοντα** στοιχεία.

Δύο **τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΠΠ).
- Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).
- Και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

Ειδικότερα δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο οποιεσδήποτε ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος.

Στον **κύκλο**:

- Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.
- Δύο χορδές είναι ίσες, αν και μόνον αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
- Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής:
 - διέρχεται από το κέντρο του κύκλου,
 - είναι μεσοκάθετος της χορδής,
 - διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικοί **γεωμετρικοί τόποι** είναι: ο **κύκλος**, η **μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος και η **διχοτόμος** γωνίας.

- Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του.
- Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας, που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Δύο σχήματα Σ , Σ' λέγονται **συμμετρικά** ως προς ένα σημείο O ή μια ευθεία ε , όταν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ , ως προς το O ή την ε και αντίστροφα.

Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο:

- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
- Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Βασική συνέπεια:

- Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, τότε θα είναι και $\beta = \gamma$.
- Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και διάμεσος ή διχοτόμος και ύψος ή διάμεσος και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Σχέση χορδών και αποστημάτων

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι:

- κύκλος
- μεσοκάθετος
- διχοτόμος

Συμμετρία ως προς κέντρο και άξονα

Ανισοτικές σχέσεις - Κάθετες και πλάγιες

Σχετικές θέσεις:

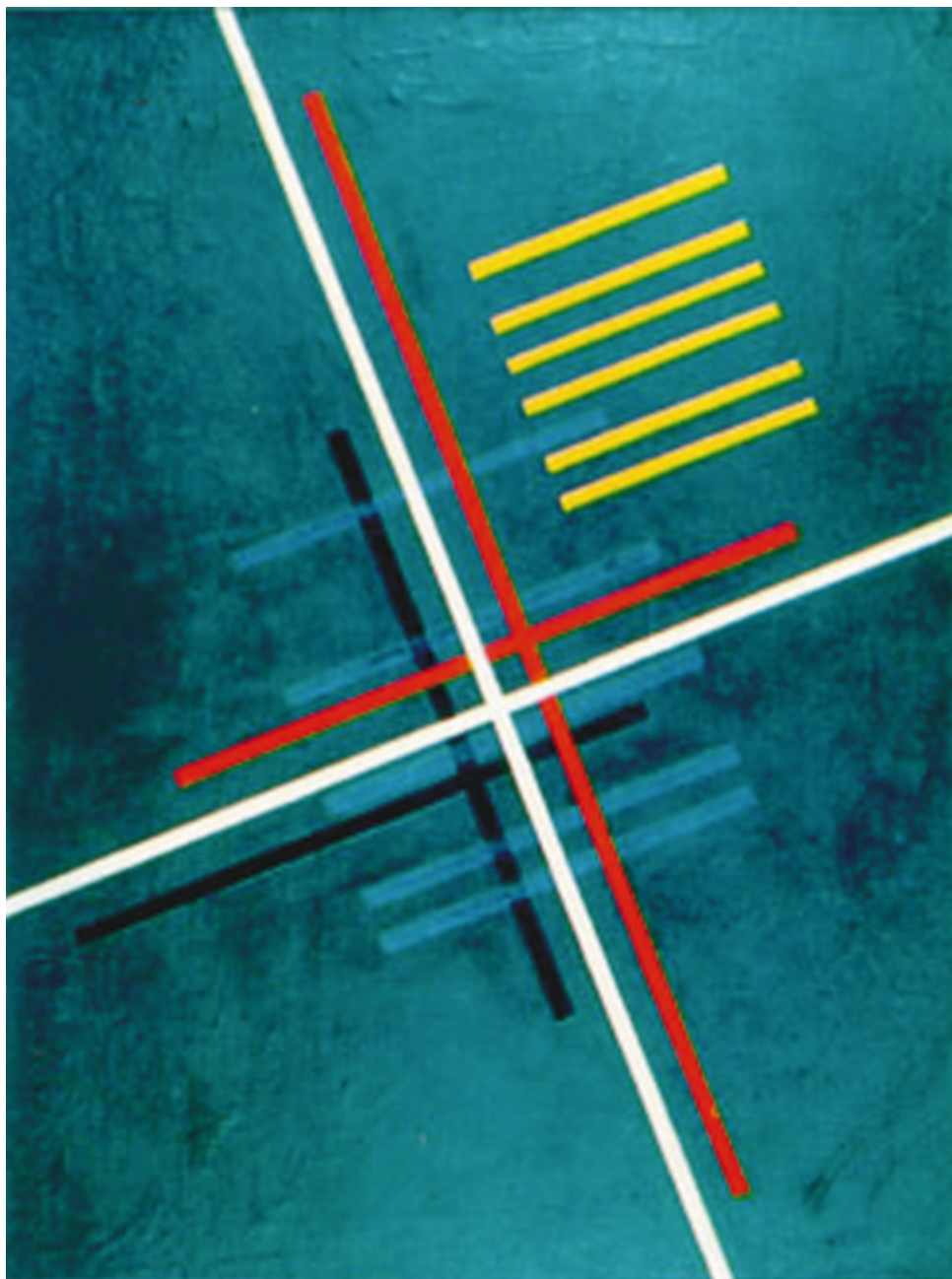
- ευθείας και κύκλου
- δύο κύκλων

Απλές γεωμετρικές κατασκευές – Βασικές κατασκευές τριγώνων

Παράλληλες Ευθείες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις παράλληλες ευθείες. Αρχικά, με βάση τις γωνίες που σχηματίζουν δύο παράλληλες και μία τέμνουσα θα κατασκευάσουμε από σημείο εκτός ευθείας μία παράλληλη προς αυτή.

Στη συνέχεια, θα δεχθούμε ως αξίωμα το αίτημα παραλληλίας, που είναι ισοδύναμο με το Ευκλείδειο αίτημα και θα μελετήσουμε τις συνέπειές του στα τρίγωνα.



László Moholy-Nagy, (Ούγκρος, 1895-1946), «Χρώμα -δικτύωμα no.1» 1922.

4.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.3, δύο **διαφορετικές** ευθείες μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

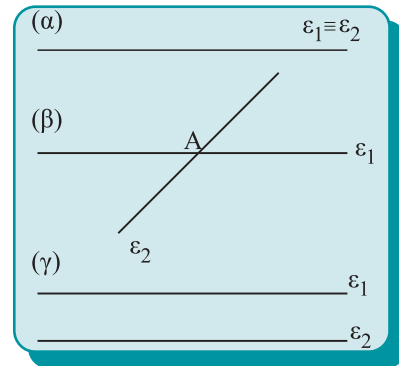
Επομένως, οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2 , οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

- i) ταντίζονται (σχ.1α),
- ii) τέμνονται (σχ.1β),
- iii) δεν τέμνονται (σχ.1γ).

Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες ε_1 και ε_2 λέγονται **παράλληλες**, ώστε:

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



Σχήμα 1

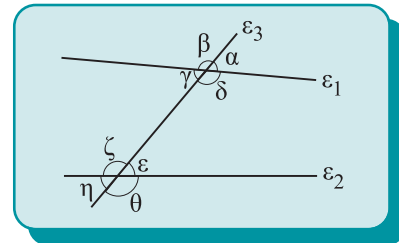
4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 . Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.

Οι γωνίες γ , δ , ε , ζ που βρίσκονται μεταξύ των ε_1 , ε_2 λέγονται **“εντός”**, ενώ οι γωνίες α , β , η , θ λέγονται **“εκτός”**. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ε_3 λέγονται **“επί τα αυτά μέρη”**, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ε_3 λέγονται **“εναλλάξ”**.

Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών, οι γωνίες ε και γ λέγονται **εντός εναλλάξ**, οι γωνίες ε και α λέγονται **εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη**, ενώ οι γωνίες ε και δ λέγονται **εντός και επί τα αυτά μέρη**.

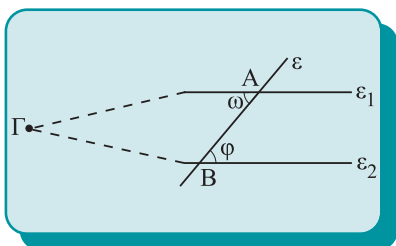
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γωνίες, θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, που εξασφαλίζει την ύπαρξη παράλληλων ευθειών.



Σχήμα 2

Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.



Σχήμα 3

Απόδειξη

Έστω ότι $\omega = \varphi$. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο Γ, η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ABΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω , που είναι άτοπο. (§ 3.10)

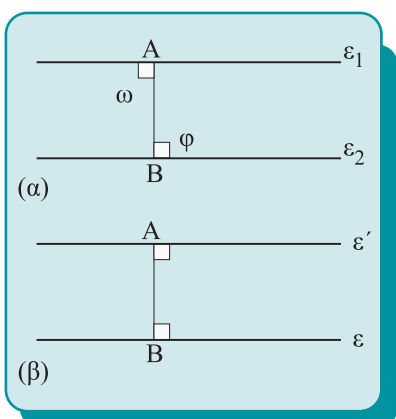
Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



Σχήμα 4

Απόδειξη

Πράγματι οι γωνίες ω και φ (σχ.4α) είναι ορθές, οπότε $\omega = \varphi$. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

• Θα εξετάσουμε τώρα αν από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλες ευθείες προς αυτή και πόσες.

Έστω λοιπόν, ευθεία ε και σημείο A εκτός αυτής (σχ.4β). Φέρουμε την $AB \perp \varepsilon$ και ονομάζουμε ε' την ευθεία που είναι κάθετη στην AB στο σημείο A. Τότε $\varepsilon' // \varepsilon$ (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην AB).

Έτσι λοιπόν **υπάρχει** ευθεία ε' που διέρχεται από ένα σημείο A που δεν ανήκει στην ε και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε . Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι η ευθεία αυτή είναι **μοναδική**, δηλαδή:

Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω αξίωμα είναι ισοδύναμο με το 5^ο αίτημα των "Στοιχείων" του Ευκλείδη (Ευκλείδειο αίτημα).

Το Ευκλείδειο αίτημα ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της Γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

(βλ. Ιστορικό σημείωμα, σελ. 90)

Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

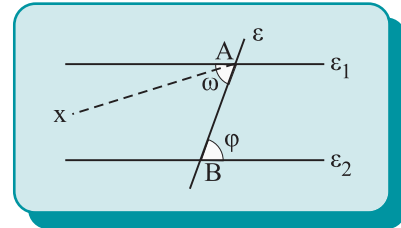
Άμεσες συνέπειες του αιτήματος παραλληλίας είναι οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση I

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε μια τέμνουσα (σχ. 5). Θα αποδείξουμε π.χ. ότι $\omega = \varphi$. Αν οι γωνίες ω και φ δεν είναι ίσες, φέρουμε την Ax ώστε οι γωνίες $\angle x\hat{A}B$ και φ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και να είναι ίσες. Τότε $Ax // \varepsilon_2$ γιατί τεμνόμενες από την AB σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο παράλληλες από το A προς την ε_2 , που είναι άτοπο. Άρα $\omega = \varphi$.



Σχήμα 5

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν

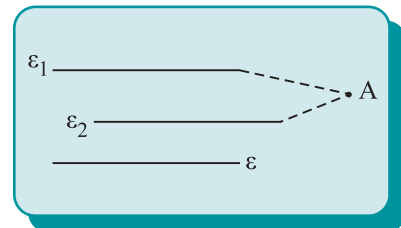
- i) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
- ii) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Πρόταση II

Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Απόδειξη

Αν οι ε_1 και ε_2 τέμνονταν σε σημείο A , θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε , που είναι άτοπο. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



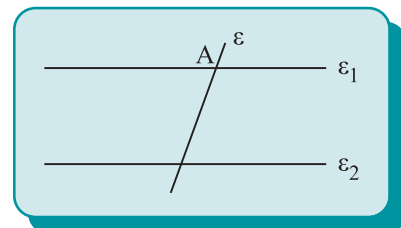
Σχήμα 6

Πρόταση III

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η ε τέμνει την ε_1 στο A . Αν η ε δεν έτεμνε την ε_2 , θα ήταν $\varepsilon // \varepsilon_2$ και έτσι θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε_2 , πράγμα αδύνατο. Άρα η ε τέμνει την ε_2 .



Σχήμα 7

ΠΟΡΙΣΜΑ

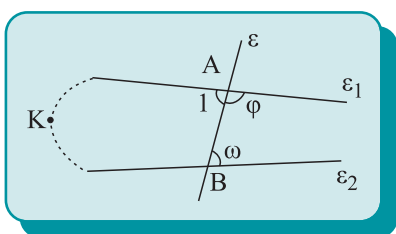
Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Πρόταση IV

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Απόδειξη

Έστω ότι η ε τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα A και B (σχ. 8) αντίστοιχα και ότι $\varphi + \omega \neq 2L$. Τότε οι ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες, αφού $\varphi + \omega \neq 2L$ (Πόρισμα σελ. 77). Έστω ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο K, προς το μέρος της τέμνουσας, που δεν περιέχει τις γωνίες ω και φ . Τότε, όμως, η εξωτερική γωνία ω του τριγώνου AKB είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{A}_1$, δηλαδή $\omega > \hat{A}_1 = 2L - \varphi$ ή $\omega + \varphi > 2L$, που είναι άτοπο. Άρα οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες ω και φ .



Σχήμα 8

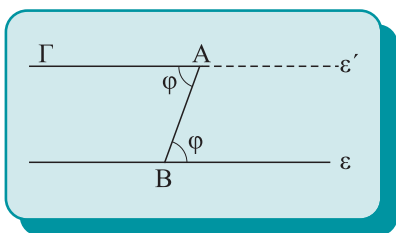
ΣΧΟΛΙΟ

Η πρόταση IV αποτελεί **βασικό κριτήριο** με το οποίο εξετάζουμε αν δύο ευθείες τέμνονται.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών. (βλέπε § 3.18 – Πρόβλημα 2)

4.3 Κατασκευή παράλληλης ευθείας



Σχήμα 9

Είδαμε παραπάνω ότι υπάρχει ευθεία ε' , η οποία διέρχεται από ένα σημείο A και είναι παράλληλη προς γνωστή ευθεία ε . Για την κατασκευή της ε' φέρουμε από το A ένα πλάγιο τμήμα AB προς την ε και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία που σχηματίζει το AB με την ε . Μεταφέρουμε τη γωνία φ (§ 2.6) ώστε να έχει κορυφή το A, η μια πλευρά της να είναι η AB και η άλλη πλευρά της ΑΓ να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η γωνία φ . Επειδή $\hat{A}B = \varphi$ έχουμε $ΑΓ // \varepsilon$, αφού τεμνόμενες από την AB, σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Έτσι η ευθεία ΑΓ είναι η ζητούμενη ευθεία ε' .

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

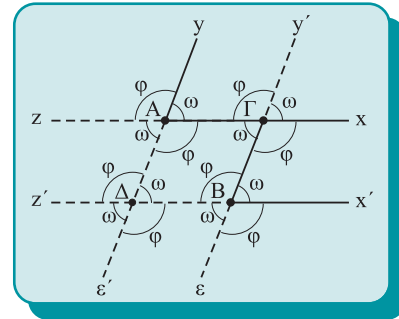
Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $\hat{x}\hat{A}y$ και $\hat{x}'\hat{B}y'$ με $Ax//Bx'$ και $Ay//By'$, δηλαδή δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους, μία προς μία παράλληλες. Αν προεκτείνουμε τις Bx' και By' θα τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Έτσι όλες οι γωνίες του σχήματος 10 λόγω των παραλλήλων θα είναι ίσες με ω ή ϕ .

Παρατηρούμε ότι:

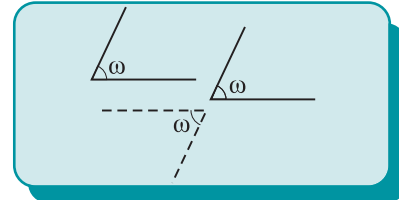
- Αν και οι δύο γωνίες είναι **οξείες** (σχ.11), είναι ίσες.
- Αν και οι δύο γωνίες είναι **αμβλείες** (σχ.12), είναι ίσες.
- Αν η μία γωνία είναι **οξεία** και η άλλη **αμβλεία** (σχ.13), είναι παραπληρωματικές.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

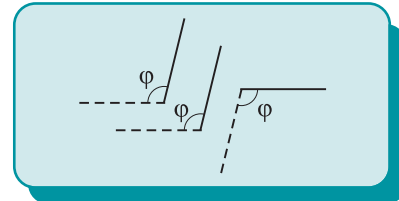
Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.



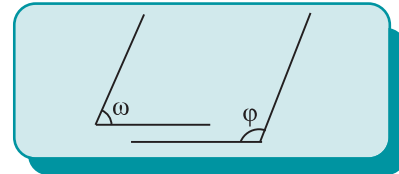
Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12



Σχήμα 13

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ε_1 και ε_2 δύο παράλληλες που τέμνονται από ευθεία ε .

Να αποδειχθεί ότι

(i) Οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.

(ii) Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

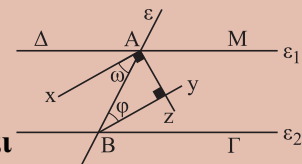
Απόδειξη

(i) Έστω Ax , By οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Delta}\hat{A}B$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Τότε $\omega = \frac{\hat{\Delta}\hat{A}B}{2}$ και $\phi = \frac{\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}}{2}$. Αλλά $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\omega = \phi$. Οι ω και ϕ όμως είναι εντός εναλλάξ γωνίες των ευθειών Ax και By με τέμνουσα την AB . Άρα $Ax//By$.

(ii) Αν Az διχοτόμος της $\hat{M}\hat{A}B$, τότε $Az \perp Ax$ (ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών). Αφού $Ax//By$, θα είναι και $Az \perp By$.



Σχήμα 14

4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε το Ευκλείδειο αίτημα για να μελετήσουμε τους κύκλους που σχετίζονται με ένα τρίγωνο.

• Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται **περίκεντρο**.

Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Απόδειξη

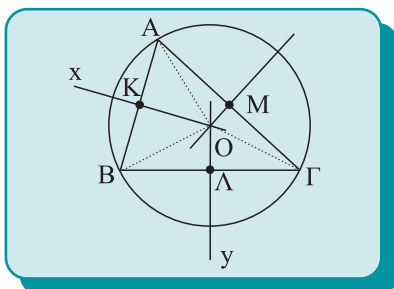
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και K, Λ, M τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Kx και Λy των $AB, B\Gamma$ θα τέμνονται σε σημείο O , αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους AB και $B\Gamma$. Το O ισαπέχει από τις κορυφές A και B αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς AB , δηλαδή $OA=OB$. Επίσης $OB=O\Gamma$, αφού το O ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς $B\Gamma$. Επομένως ισχύει ότι $OA=O\Gamma$, οπότε το O θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της $A\Gamma$. Άρα, ο κύκλος (O, OA) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.

• Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ενας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται **έγκεντρο**, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



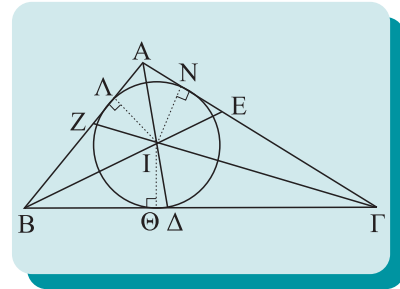
Σχήμα 15

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διχοτόμοι BE και ΓZ των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Οι BE και ΓZ τέμνονται σε σημείο I αφού $\hat{E}\hat{B}\Gamma + \hat{Z}\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2L$. (§ 4.2 – Πρόταση IV)

Το I ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της BA και $B\Gamma$, δηλαδή $IL = IO$. Ανάλογα το I θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $IO = IN$. Επομένως το I ισαπέχει από τις AB και $A\Gamma$ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Τελικά, το I είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το I και ακτίνα την κοινή απόσταση του I από τις πλευρές του $AB\Gamma$, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



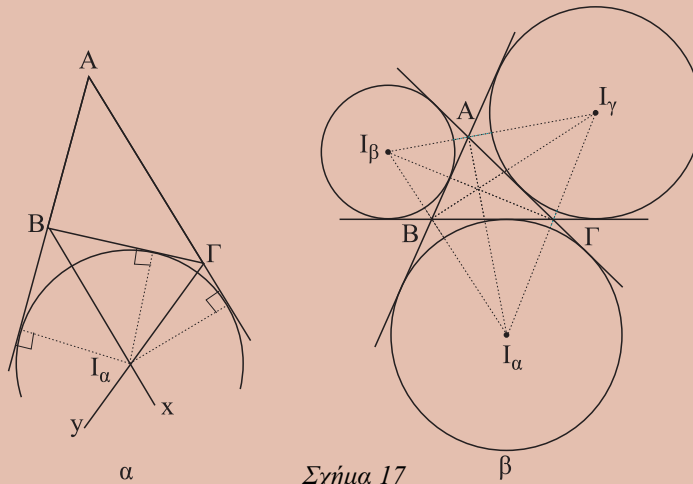
Σχήμα 16

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου

Η ιδιότητα των εσωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου να διέρχονται από το ίδιο σημείο ισχύει και όταν θεωρήσουμε δύο εξωτερικές και μία εσωτερική διχοτόμο του τριγώνου. Οι τρεις αυτές διχοτόμοι τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος** και το κέντρο του **παράκεντρο** του τριγώνου. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρία παράκεντρα, τα οποία συμβολίζουμε $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$, και κατά συνέπεια τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι (σχ. 17α,β).

Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων.

Απόδειξη



Σχήμα 17

Ας θεωρήσουμε τις διχοτόμους Βχ και Γγ των δύο εξωτερικών γωνιών $\hat{B}_{εξ}$ και $\hat{G}_{εξ}$ αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Οι Βχ και Γγ τέμνονται σε σημείο I_a , αφού ισχύει ότι:

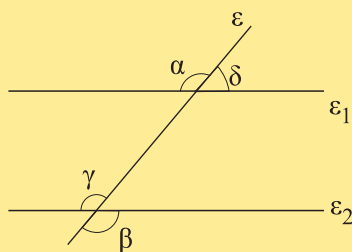
$$x\hat{B}G + y\hat{G}B = \frac{\hat{B}_{εξ} + \hat{G}_{εξ}}{2} = 2L - \frac{\hat{B} + \hat{G}}{2} < 2L.$$

Το I_a ισαπέχει από τη ΒΓ και την προέκταση της ΑΒ, καθώς και από την προέκταση της ΑΓ. Επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, αφού ισαπέχει από τις πλευρές της.

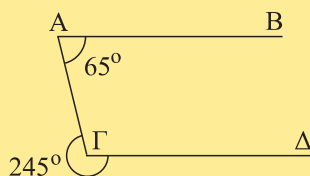
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

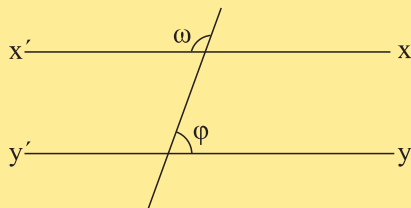
- i) Πώς ονομάζονται οι γωνίες α και β του παρακάτω σχήματος; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους;
ii) Τι ισχύει για τις γωνίες γ και δ;



- Να εξηγήσετε γιατί η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.



- Αν $\omega = 120^\circ - \theta$ και $\varphi = 60^\circ + \theta$ να εξηγήσετε γιατί $xx' // yy'$.



- Να αναφέρετε πέντε (5) τρόπους για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.
- Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι:
i) συμπληρωματικές,
ii) ίσες,
iii) παραπληρωματικές,
iv) κανένα από τα παραπάνω.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

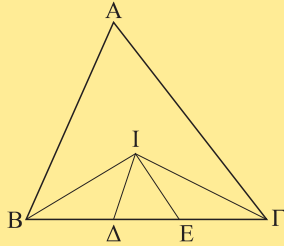
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
- Δίνεται γωνία xÔy και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οχ τέμνει την Ογ στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.
- Δίνεται γωνία xÔy και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Ογ φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ που τέμνει την προέκταση της Οχ στο Β. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΒ.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Δ, ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ.
- Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα: ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.
- Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και Μ το μέσο χορδής του ΑΒ. Φέρουμε Οχ⊥ΟΜ. Να αποδείξετε ότι Οχ//ΑΒ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και η διάμεσος του ΑΜ. Φέρουμε Γχ⊥ΒΓ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜÂΓ.
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΕ//ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ.
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και η εξωτερική διχοτόμος του Αχ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΔ//Αχ που τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΑΓ - ΑΒ.
- Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία

Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$.

5. Από το έγκεντρο I τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε $ID \parallel AB$ και $IE \parallel AG$. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔIE ισούται με τη $B\Gamma$.



Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του $B\Delta$ και η εξωτερική διχοτόμος του Bx . Θεωρούμε δύο σημεία E και K της πλευράς AB . Αν ο κύκλος (E, EB) τέμνει τη $B\Delta$ στο Z , ενώ ο κύκλος (K, KB) τέμνει τη Bx στο M , να αποδείξετε ότι $EZ \parallel MK$.

2. Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος AB φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Ax και By . Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του AB , και στις Ax, By τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και $BE = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta \hat{I} E$ είναι ορθή.

3. Από το παράκεντρο I_a τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ φέρουμε παράλληλη στην AB , που τέμνει τις πλευρές $B\Gamma$ και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = AE - B\Delta$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Από το M φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$, που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.

ii) $BE + \Gamma Z = \text{σταθερό}$.

iii) Αν M μέσο της $B\Gamma$ τότε:

$$\alpha) BE = \Gamma Z = \frac{A\Gamma + AB}{2},$$

$$\beta) AE = AZ = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Η παραλληλία επιτρέπει να μεταφέρουμε τις γωνίες ενός τριγώνου, ώστε να έχουν κοινή κορυφή μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου και να σχηματίζουν ευθεία γωνία (σχ.18). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

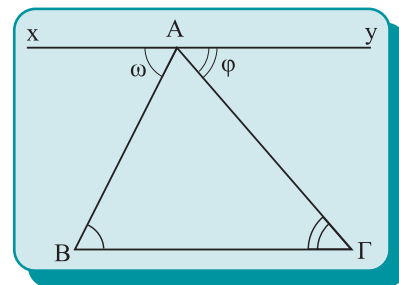
Απόδειξη

Από μια κορυφή, π.χ. την A , φέρουμε ευθεία $xy \parallel B\Gamma$. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και $B\Gamma$ με τέμνουσες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\text{L}$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

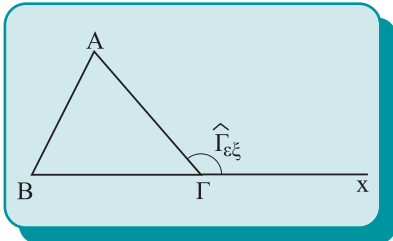
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}.$$



Σχήμα 18

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.



Σχήμα 19

- ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
- iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
- iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .

Απόδειξη

i) Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} = 2\text{L}$, οπότε

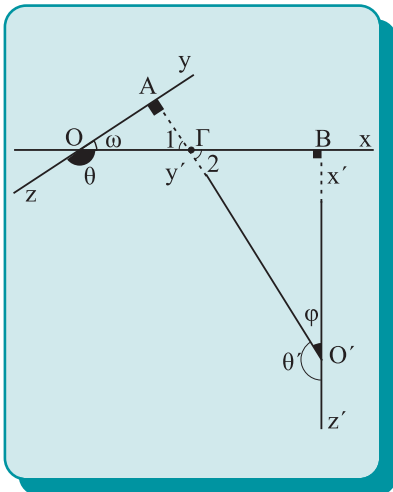
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} \quad \text{ή} \quad \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}.$$

ii) – iv) Προφανή.

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες

Θεώρημα

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}y = \omega$ και $x'\hat{O}'y' = \varphi$ με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.

Τα τρίγωνα OAG και $O'BΓ$ έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 1\text{L}$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).

Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε $\omega = \varphi$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
- ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

Απόδειξη

i) Πράγματι, (σχ. 20) είναι $\theta + \omega = 2\text{L}$, $\theta' + \varphi = 2\text{L}$, οπότε $\theta = \theta'$, αφού $\omega = \varphi$.

ii) Πράγματι, (σχ. 20) είναι $\theta + \omega = 2\text{L}$, οπότε $\theta + \varphi = 2\text{L}$, αφού $\omega = \varphi$.

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

Ας θεωρήσουμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και Ο τυχαίο εσωτερικό σημείο του. Αν ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του πενταγώνου, σχηματίζονται πέντε τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Έτσι το άθροισμα των γωνιών και των πέντε τριγώνων είναι $(2 \cdot 5)$ ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 = 4$ ορθές, θα μείνει το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, δηλαδή:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = (2 \cdot 5 - 4) \text{ ορθές.}$$

Όμοια, αν το κυρτό πολύγωνο έχει n πλευρές και ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του σχηματίζονται n τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών των n τριγώνων είναι $2n$ ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \dots + \hat{O}_n = 4$ ορθές έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \dots + \hat{A}_n = (2n - 4) \text{ ορθές.}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι πρέπει:

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι $2n-4$ ορθές.

Άλλη απόδειξη. Ας θεωρήσουμε κυρτό πολύγωνο $A_1 A_2 \dots A_n$ με n πλευρές και ας φέρουμε από μια κορυφή του, π.χ. την A_1 όλες τις διαγωνίους που διέρχονται από αυτή. Έτσι το πολύγωνο διαιρείται σε $n-2$ τρίγωνα, γιατί σε καθεμία από τις πλευρές του, εκτός των $A_1 A_2$ και $A_1 A_n$ που διέρχονται από την κορυφή A_1 , αντιστοιχεί ένα τρίγωνο. Επειδή το άθροισμα των γωνιών των $n-2$ τριγώνων είναι $2(n-2) = (2n-4)$ ορθές και ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, προκύπτει ότι:

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2n-4$ ορθές.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν - γώνου είναι 4 ορθές.

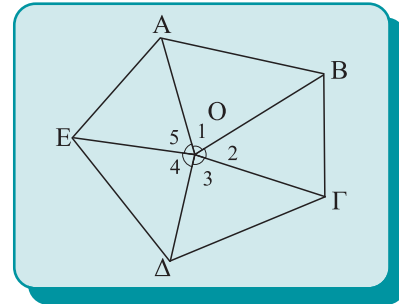
Απόδειξη

$$\text{Έχουμε} \begin{cases} \hat{A}_{1εξ} + \hat{A}_1 = 2L \\ \hat{A}_{2εξ} + \hat{A}_2 = 2L \\ \dots \dots = \dots \\ \hat{A}_{νεξ} + \hat{A}_n = 2L \end{cases} \text{ προσθέτουμε κατά μέλη οπότε:}$$

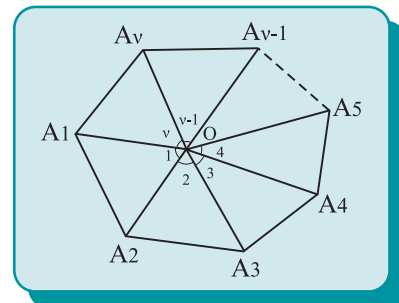
$$(\hat{A}_{1εξ} + \hat{A}_{2εξ} + \dots + \hat{A}_{νεξ}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n) = 2nL \quad \eta$$

$$(\hat{A}_{1εξ} + \hat{A}_{2εξ} + \dots + \hat{A}_{νεξ}) + (2n - 4)L = 2nL \quad \eta$$

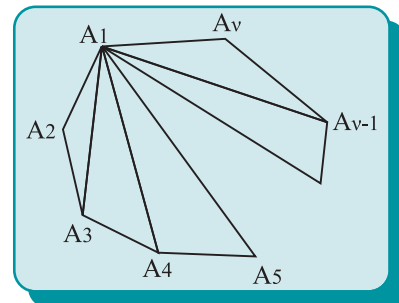
$$\hat{A}_{1εξ} + \hat{A}_{2εξ} + \dots + \hat{A}_{νεξ} = 4L.$$



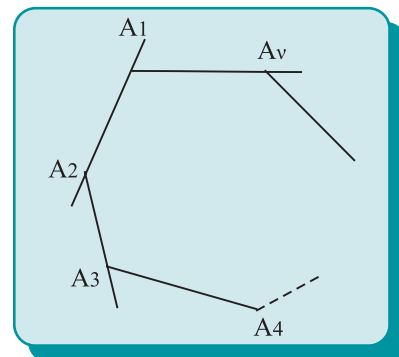
Σχήμα 21



Σχήμα 22



Σχήμα 23



Σχήμα 24

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διχοτόμο Αx της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν Αx//ΒΓ.

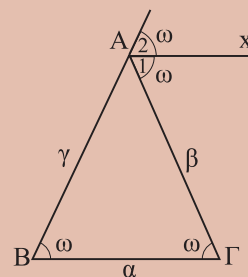
Απόδειξη

(i) Αν $\beta = \gamma$ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega$.

Όμως $\hat{A}_{\text{εξ}} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\omega$, οπότε $\frac{\hat{A}_{\text{εξ}}}{2} = \omega$ ή $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \omega$. Άρα

Αx//ΒΓ, αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.

(ii) Αν Αx//ΒΓ τότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ) και $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), οπότε $\beta = \gamma$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι

(i) Η γωνία των δύο εσωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

(ii) Η γωνία μίας εσωτερικής και μίας εξωτερικής διχοτόμου είναι ίση με $\frac{\hat{A}}{2}$.

(iii) Η γωνία των δύο εξωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$.

Απόδειξη

Οι εσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στο έγκεντρο I. Οι εξωτερικές διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_α και η εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$ με την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_β .

(i) Από το τρίγωνο ΒΙΓ παίρνουμε:

$$\hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1 \quad \text{ή}$$

$$\hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \quad \text{ή} \quad \hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 90^\circ + 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \quad \text{ή}$$

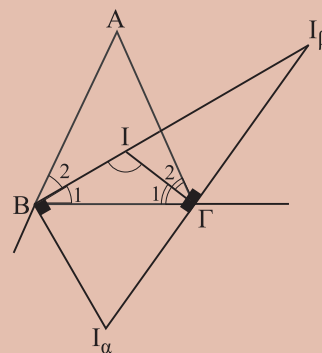
$$\hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad (\text{επειδή } \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ). \quad (1)$$

(ii) Η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τέμνονται **κάθετα**. Έτσι στο τρίγωνο ΙΓ I_β είναι: $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\hat{B}\hat{I}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \hat{I}_\beta$ (2) (ως εξωτερική γωνία).

$$\text{Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι } \hat{I}_\beta = \frac{\hat{A}}{2}. \quad (3)$$

$$(iii) \text{ Όμοια στο τρίγωνο } I_\alpha B I_\beta \text{ είναι } \hat{B} = 90^\circ, \text{ οπότε } \hat{I}_\alpha + \hat{I}_\beta = 90^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{I}_\alpha = 90^\circ - \hat{I}_\beta. \quad (4)$$

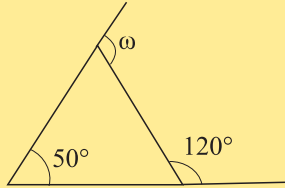
$$\text{Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι } \hat{I}_\alpha = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}.$$



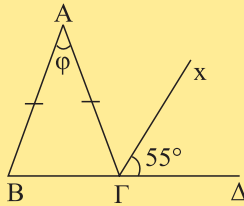
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να υπολογίσετε τη γωνία ω στο παρακάτω σχήμα.



2. Αν $AB = AG$ και Gx διχοτόμος της $\widehat{A\Gamma\Delta}$, να υπολογίσετε τη γωνία φ (βλ. σχήμα).



3. Υπάρχει κυρτό ν-γωνο τέτοιο, ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του να ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του;

4. Να εξηγήσετε γιατί αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μια γωνία 60° είναι ισόπλευρο.

5. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι:

α) 180° β) 270° γ) 360° δ) 540°

ε) κανένα από τα παραπάνω

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

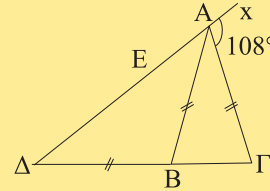
1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) είναι $\widehat{A} = \frac{\widehat{B}}{2}$. Αν I το έγκεντρο του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία $\widehat{B\Gamma I}$. (Εφαρμογή 2 – § 4.8)

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\widehat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\widehat{B}$. Αν $\widehat{\Gamma_{εξ}} = 144^\circ$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD . Να αποδείξετε ότι $\widehat{B} = \widehat{A\Gamma D}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{DAB}$.

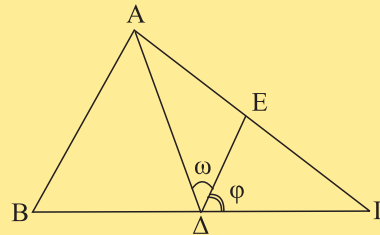
5. Στο παρακάτω σχήμα είναι:



$AB = AG = BG$ και $\widehat{xAG} = 108^\circ$.

Να υπολογισθεί η γωνία $\widehat{A}$.

6. Στο παρακάτω σχήμα είναι: $\widehat{A} = 90^\circ$, AD διχοτόμος, $DE \parallel AB$. Αν η γωνία $\widehat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη $\widehat{\Gamma}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ .



7. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 900° . Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{B_{εξ}} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι $AB = AG$.

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του AD . Να αποδείξετε ότι
i) $\widehat{A\Gamma D} - \widehat{A\Gamma B} = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$,

ii) $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ - \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$, $\widehat{A\Gamma D} = 90^\circ + \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$.

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος AD και τη διχοτόμο AE . Να αποδείξετε ότι $\widehat{DAE} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$.

4. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται σε σημείο E , να αποδείξετε ότι $\widehat{AEB} = \frac{\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta}}{2}$.

5. Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε τη $DE \perp AG$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = \widehat{EAG}$.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) το ύψος του AD και η διχοτόμος του $B\Gamma$ τέμνονται σε σημείο E . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και την κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο Γ , στο H . Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = \Gamma H$.

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το A , παίρνουμε τμήμα $AE = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \perp B\Gamma$.

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του $\hat{A}$. Από την κορυφή B φέρουμε ευθεία κάθετη στην $A\Delta$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι $E\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΓB κατά τμήμα $B\Delta = AB$. Φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο Γ και παίρνουμε σε αυτή -προς το μέρος του A - τμήμα $\Gamma E = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $B\Delta$. Φέρουμε $\Delta H \perp AB$, που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:
i) $B\Delta = \Delta E$, ii) $B\Gamma > \Gamma E$.

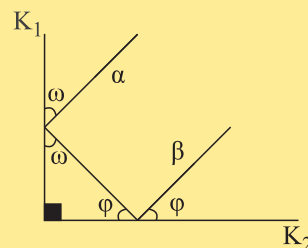
5. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, προεκτείνουμε τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE , προς το μέρος των κορυφών και επί των προεκτάσεων παίρνουμε τμήματα $BZ = A\Gamma$ και $\Gamma H = AB$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

i) $AZ = AH$, ii) $AZ \perp AH$.

6. Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} > \hat{\Gamma}$ και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία των διχοτόμων των γωνιών

$\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι $\varphi = \frac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2}$.

7. Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1, K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2 , εξέρχεται κατά την ακτίνα β . Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α ;



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι $B\Delta\Gamma = \Gamma E\hat{A}$.

2. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma = B\Gamma = \alpha$) και τα σημεία Δ και E των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = BE = \frac{1}{3}\alpha$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \perp B\Gamma$.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $\hat{A}$. Φέρουμε $\Delta x \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο E και την προέκτασή της $A\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι $BE = Z\Gamma$.

4. Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Στην προέκταση της $A\Delta$ παίρνουμε τμήμα $\Delta E = AB$. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma \perp \Gamma E$.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
i) Το ύψος $A\Delta = v_a$ σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.

ii) Η διάμεσος $AM = \mu_a$ σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.

iii) Το ύψος v_a και η διάμεσος μ_a βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου $AE = \delta_a$.

6. Τρεις κύκλοι με κέντρα K_1, K_2, K_3 εφάπτονται εξωτερικά στα A, B, Γ . Να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο $K_1 K_2 K_3$.

7. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$, τον εγγεγραμμένο κύκλο του (I, ρ) και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του (I_a, ρ_a) . Ονομάζουμε Δ, E, Z και Δ', E', Z' τα σημεία επαφής των (I, ρ) και (I_a, ρ_a) με τις ευθείες $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) $AZ = AE = \tau - \alpha$, $B\Delta = BZ = \tau - \beta$, $\Gamma\Delta = \Gamma E = \tau - \gamma$,

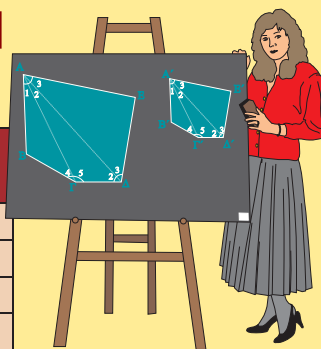
ii) $AZ' = AE' = \tau$,

iii) $ZZ' = EE' = \alpha$, $\Delta\Delta' = \beta - \gamma$.

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα για κυρτά n -γωνα.

αριθμός πλευρών	άθροισμα γωνιών κυρτού n -γώνου	άθροισμα εξωτερικών γωνιών κυρτού n -γώνου
4		
5		
6		
7		
.		
.		
.		
n	$2n-4$ ορθές	4 ορθές



i) Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου; Εξαρτάται από τον αριθμό των πλευρών n ; Τι ισχύει όταν αυξάνεται το n ;

ii) Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού n -γώνου. Να σχολιάσετε τη σχέση του με τον αριθμό των πλευρών n .

2. Να κατασκευάσετε δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες (3 περιπτώσεις). Να εξετάσετε τι ισχύει για τις διχοτόμους τους (παράλληλες, κάθετες κτλ.)

Να κάνετε το ίδιο για δύο γωνίες με πλευρές κάθετες.

Εργασία

Να υπολογίσετε τις γωνίες ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB=AG$), το οποίο είναι δυνατόν να χωρισθεί σε δύο άλλα ισοσκελή τρίγωνα.

Υπόδειξη: Η ευθεία που χωρίζει το $AB\Gamma$ σε δυο ισοσκελή τρίγωνα πρέπει να διέρχεται από μια κορυφή του τριγώνου. Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις: i) με ευθεία AD από την κορυφή A .

ii) με ευθεία BE από την κορυφή B .

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η θεωρία των παραλλήλων

Το αίτημα του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του ο Ευκλείδης ορίζει ως παράλληλες «τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον και από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά» (Ορισμός 23). Αμέσως μετά διατυπώνει πέντε αιτήματα, τα τέσσερα πρώτα από τα οποία εκφράζουν τις βασικές

ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, ενώ το πέμπτο αποφαίνεται ότι:

«Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές» (Αίτημα V).

Το αίτημα αυτό αποδεικνύεται ισοδύναμο με τις εξής προτάσεις:

- (E1) Υπάρχει ευθεία α και σημείο A εκτός αυτής τέτοιο, ώστε από το A διέρχεται μία μοναδική ευθεία που δεν τέμνει την α .
- (E2) Υπάρχει τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες.
- (E3) Το άθροισμα των γωνιών τυχόντος τριγώνου ισούται με δύο ορθές.
- (E4) Υπάρχει τρίγωνο, το άθροισμα των γωνιών του οποίου να ισούται με δύο ορθές.
- (E5) Αν μια ευθεία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες, οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.
- (E6) Τα σημεία που κείνται προς το ίδιο μέρος από δεδομένη ευθεία και σε μία και την αυτή απόσταση, σχηματίζουν ευθεία.
- (E7) Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και αυτές αποκλίνουν η μία από την άλλη από το ένα μέρος, τότε από το άλλο μέρος συγκλίνουν.
- (E8) Υπάρχουν όμοια τρίγωνα.
- (E9) Υπάρχουν τρίγωνα με οσοδήποτε μεγάλο μέγεθος.
- (E10) Έστω α τυχούσα ευθεία και A σημείο εκτός αυτής. Τότε στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία α και το σημείο A υπάρχει όχι περισσότερες από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και δεν τέμνει την ευθεία α (Αξίωμα παραλληλίας).

Το αίτημα του Ευκλείδη ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της γεωμετρίας και απο-

τελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην αρχαιότητα και το Βυζάντιο. Είναι πιθανό πριν τη διατύπωση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» του Ευκλείδη να υπήρξαν προσπάθειες να αποδειχθεί. Όμως οι διαθέσιμες μαρτυρίες είναι πενιχρότατες και αποσπασματικές. Ενδείξεις υπάρχουν στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, όπου συνδέεται το πρόβλημα των παραλλήλων με την πρόταση (E3). Ο Αριστοτέλης ασκεί κριτική στις προσπάθειες μαθηματικών (που δεν κατονομάζονται) να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα ότι υποπίπτουν στο λογικό σφάλμα της «λήψης του ζητούμενου» (*petitio principii*), δηλαδή ότι κατά την απόδειξη χρησιμοποιούν πρόταση ισοδύναμη προς την αποδεικτέα. Άλλη πηγή είναι τα «Σχόλια για τις δυσκολίες στην εισαγωγή του βιβλίου του Ευκλείδη» του Ομάρ Χαγιάμ όπου αναφέρει ότι «η αιτία του λάθους των ύστερων επιστημόνων στην απόδειξη αυτής της υπόθεσης είναι ότι δε λάμβαναν υπόψη τους τις αρχές του φιλοσόφου [δηλαδή, του Αριστοτέλη]» και παραθέτει πέντε αρχές, τέσσερις από τις οποίες απαντώνται με λίγο διαφορετική διατύπωση στα «Φυσικά» και το «Περί Ουρανού».

Το πρώτο γνωστό έργο της αρχαιότητας, που λίγες μόλις δεκαετίες μετά τα «Στοιχεία» αναφέρεται στη θεωρία των παραλλήλων, είναι η χαμένη πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί παραλλήλων», που μνημονεύει ο βιβλιογράφος Ιμπν αλ-Ναντίμ (πέθανε το 993) στο «Βιβλίο της βιβλιογραφίας των επιστημών», μαζί με άλλα έργα του Αρχιμήδη που διασώθηκαν μόνο στα Αραβικά. Το βιβλίο αυτό ήταν πιθανότατα γνωστό στον Θαμπίτ ιμπν Κούρρα (836-901), συγγραφέα δύο πραγματειών σχετικών με τη θεωρία των παραλλήλων. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου, ο οποίος θεωρεί ότι το αίτημα του Ευκλείδη είναι θεώρημα και επιχειρεί να δώσει μια δική του απόδειξη, ο Ποσειδώνιος είχε προτείνει έναν ορισμό των παραλλήλων, διαφορετικό από αυτόν του Ευκλείδη. Παράλληλες ονομάζει τις ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δε συγκλίνουν ούτε αποκλίνουν και όλες οι κάθετες από τα σημεία της μιας προς την άλλη είναι ίσες μεταξύ τους. Ο ορισμός αυτός όμως βασίζεται στο ισοδύναμο αξίωμα (E6). Ο Πρόκλος αναφέρεται επίσης εκτεταμένα στις προσπάθειες του Κλαύδιου Πτολεμαίου και άλλων μαθηματικών, τους οποίους δεν κατονομάζει, να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Με την απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος ασχολήθηκε ο Διόδωρος (1ος αι. π.Χ.). Στα Αραβικά διατηρήθηκαν και οι προσπάθειες κάποιου Αγάνη και του Σιμπλίκιου που στηρίζονται στον ορισμό του Ποσειδωνίου και, επομένως, στο αξίωμα (Ε6).

Η θεωρία των παραλλήλων στα Αραβικά μαθηματικά. Η πρώτη γνωστή προσπάθεια απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στα Αραβικά μαθηματικά έγινε από τον αλ-Τζαουχαρί στο έργο του «Τελειοποίηση του βιβλίου των "Στοιχείων"», το περιεχόμενο του οποίου μεταφέρει ο Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί. Όμως στην απόδειξή του χρησιμοποιεί την ισοδύναμη προς το αποδεδειγμένο πρόταση ότι «αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, τότε το ίδιο ισχύει όταν οι δύο ευθείες τέμνονται από οποιαδήποτε άλλη ευθεία». Οι πρώτες προσπάθειες αντικατάστασης του Ευκλείδειου αιτήματος με το αξίωμα της «ισαπεχόντων» ευθειών ανάγονται στον αλ-Ναϊριζί και τον Ιμπν Σίνα (Αβικέννα).

Οι άραβες μαθηματικοί ανέπτυξαν δύο κυρίως προσεγγίσεις στην απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος, που εγκαινιάζονται στο έργο του Θαμπίτ ιμπν Κούρρα (908-946): τη γεωμετρική και την κινηματική προσέγγιση. Η κινηματική προσέγγιση ακολουθεί το πνεύμα του Αρχιμήδη και αναπτύχθηκε από τον Ιμπν αλ-Χαϊθάμ. Η πρωτοτυπία της μεθόδου του αλ-Χαϊθάμ, την οποία ακολούθησαν συχνά οι γεωμέτρες στη συνέχεια, είναι ότι υποθέτει την ύπαρξη ενός τετραπλεύρου με τρεις ορθές γωνίες και εξετάζει τις περιπτώσεις η τέταρτη γωνία να είναι οξεία ή αμβλεία, προσπαθώντας να καταλήξει σε αντίφαση με τον ορισμό των παραλλήλων ως «ισαπεχόντων» ευθειών. Η γεωμετρική προσέγγιση αναπτύχθηκε κυρίως από τον Ομαρ Χαγιάμ. Ξεκινώντας από την απόδειξη της πρότασης (Ε2) και με συλλογισμούς συγγενείς με αυτούς του Πρόκλου, αποδεικνύει το Ευκλείδειο αίτημα χωρίς να υποθέσει στο λογικό σφάλμα της «λήψης του ζητουμένου». Ο εγκυκλοπαιδιστής φιλόσοφος, μαθηματικός και αστρονόμος Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί (1201-1274) στη δική του πρωτότυπη απόδειξη του αξιώματος των παραλλήλων ακολουθεί το ύφος του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, αλλά στηρίζεται σε αξίωμα που αποτελεί ισχυρότερη μορφή του αιτήματος παραλληλίας.

Στη διάρκεια του 13ου αι. συνεχίζονται οι αναζητήσεις απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος. Ο αλ-Χαναφί, ακολουθώντας παλαιότερες τάσεις που εκδηλώνονται στο έργο του αλ-Κιντί, του αλ-Μπιρουνί (973-περ. 1050) και του Ομάρ Χαγιάμ, συνδέουν το πρόβλημα του Ευκλείδειου αιτήματος με την έννοια της επ'

άπειρον διαιρετότητας των γεωμετρικών μεγεθών. Ιδιαίτερα διαδεδομένη ήταν η θεωρία των παραλλήλων του αλ-Αμπχαρί (ή αλ-Αμπχαρί, πέθανε το 1263). Συγγενής προς αυτήν ήταν η θεωρία του αλ-Μαγκριμπί. Στις δύο τελευταίες θεωρίες βρίσκεται κανείς ίχνη του ύφους των συλλογισμών του Σιμπλίκιου. Στα τέλη του 13ου-αρχές 14ου αι. μια ακόμα αξιοσημείωτη προσπάθεια γίνεται από τον αντ-Ντιν ασ-Σιραζί (1236-1311), μαθητή του αλ-Τουσί.

Παρ' όλες τις προσπάθειες που σκιαγραφήσαμε οι Άραβες μαθηματικοί ήταν πολύ μακριά από την ιδέα ότι είναι δυνατή μια άλλη γεωμετρία. Απλώς προσπαθούσαν να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα από υποθέσεις που θεωρούσαν πιο προφανείς. Στην πορεία των προσπαθειών τους απέδειξαν την ισοδυναμία του Ευκλείδειου αιτήματος με διάφορες προτάσεις που μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες με το πέμπτο αίτημα, καθώς και πολλά θεωρήματα που σήμερα εμπίπτουν στο πεδίο της Υπερβολικής και της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην Ευρώπη από τον 13ο ως το 18ο αι. Η πρώτη γνωστή απόπειρα απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στη μεσαιωνική Ευρώπη απαντάται το 13ο αι. στο σύγγραμμα του Βιτέλο (Vitelo, περίπου 1225-1280) «Οπτική» ή «Προοπτική» (1572). Βασική πηγή του Βιτέλο είναι το έργο του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ. Ωστόσο, η απόδειξή του υστερεί ως προς το επίπεδο αυστηρότητας που είχαν φτάσει οι Άραβες μαθηματικοί.

Δύο άλλες απόπειρες απαντώνται το 14ο αι. στα «Σχόλια» του Γερσωνίδη (Levi ben Gerson ή Gersonides, 1288-1344) και στο έργο κάποιου Αλφόνσο, ο οποίος εικάζεται ότι είναι ο Ισπανός ιατρός και συγγραφέας πολεμικών θρησκευτικών έργων Αλφόνσο του Βαλλαντολίντ (1270-1346).

Στις αρχές του 16ου αι. η θεωρία παραλλήλων εξετάζεται στο «Κάτοπτρο αστρονομικό που περικλείει την ανθρώπινη σοφία σε κάθε επιστήμη» του Φ. Μπ. Γκρισογκόνο (1472-1538), που εκδίδεται στη Βενετία το 1507. Το 1574 εμφανίζεται μία πρωτότυπη απόδειξη του πέμπτου αιτήματος από τον Κλάβιο (Clavius (Schlssel), 1537-1612) που εργαζόταν στη Ρώμη και συμμετείχε στην επεξεργασία του Γρηγοριανού ημερολογίου. Η απόδειξη του Κλάβιου στηρίζεται στην πρόταση (Ε6). Η απόδειξή του παρουσιάζει ομοιότητες με αυτές του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, τις οποίες ίσως γνώριζε από δεύτερο χέρι.

Τον 17ο αι. παρατηρείται κάποια ένταση των προσπαθειών στη θεωρία των παραλλήλων, η οποία όμως δεν απέφερε ιδιαίτερα αξιόλογους καρπούς. Δημοσιεύονται το 1603 στην Μπολόνια δύο τομίδια

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

του Πιέτρο Α. Κατάλντι (1548-1626), το 1658 στην Πίζα η επεξεργασμένη από τον Τζ.Α. Μπορέλλι (1608-1679) έκδοση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, και το 1680 ανάλογη έκδοση των «Στοιχείων» από τον Βιτάλε Τζορντάνο (1633-1711). Το 1693 δημοσιεύεται η πραγματεία του Τζ. Ουώλλις (J. Wallis, 1616-1703) «Το πέμπτο αίτημα και ο πέμπτος ορισμός του Βιβλίου VI του Ευκλείδη», το δεύτερο μέρος της οποίας περιέχει μετάφραση μιας απόδειξης που αποδίδεται στον αλ-Τουσί, και στο τρίτο εκτίθεται απόδειξη του Ουώλλις, που βασίζεται στην πρόταση (E9), την οποία θεωρεί φυσική «Κοινή Έννοια».

Από την πραγματεία του Ουώλλις γνωρίστηκε με την αποδιδόμενη στον αλ-Τουσί απόδειξη του πέμπτου αιτήματος ο Τζιρόλαμο Σακκέρι (G.G. Saccheri, 1667-1733). Ο Σακκέρι ξεκινώντας από το ισόπλευρο τετράπλευρο με τις δύο ορθές του Ομάρ Χαγιάμ και του αλ-Τουσί αναλύει τις ίδιες τρεις υποθέσεις για τις άλλες δύο γωνίες. Αποκλείει την υπόθεση της οξείας γωνίας επειδή θεωρεί ότι στην περίπτωση αυτή, όπως και στην περίπτωση της ορθής γωνίας ισχύει το πέμπτο αίτημα, δηλαδή επειδή αντιφάσκει στα αξιώματα της συνήθους γεωμετρίας του Ευκλείδη. Στην περίπτωση της αμβλείας γωνίας ο Σακκέρι προχωρεί όσο κανείς άλλος πριν από αυτόν στην απόδειξη θεωρημάτων της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Όμως διολισθαίνοντας σε λάθος συλλογισμό κατέληξε σε αντίφαση, οπότε συμπέρανε ότι η περίπτωση της ορθής γωνίας (δηλαδή της Ευκλείδειας γεωμετρίας) είναι η μόνη δυνατή.

Πιο σημαντική είναι η προσπάθεια του Γερμανού μαθηματικού Λάμπερτ (J.H. Lambert, 1728-1777). Ξεκινώντας από το ίδιο τετράπλευρο του Ομάρ

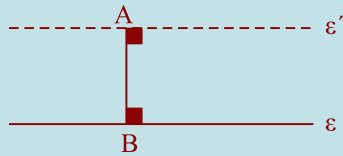
Χαγιάμ και του Σακκέρι αποκλείει χωρίς δυσκολία την υπόθεση της οξείας γωνίας, στη βάση ότι στην περίπτωση αυτή δύο κάθετες στην ίδια ευθεία τέμνονται, πράγμα που, κατά τη γνώμη του, δεν αντιφάσκει στο πέμπτο αίτημα, αλλά στα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Επίσης παρατηρεί ότι η υπόθεση της οξείας γωνίας ισχύει στην επιφάνεια της σφαίρας αν ως ευθείες ληφθούν οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας. Εξετάζοντας την υπόθεση της αμβλείας γωνίας ο Λάμπερτ αποδεικνύει ακόμα περισσότερα και από τον Σακκέρι θεωρήματα της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Προσπαθώντας να λάβει κάποια παράδοξα αποτελέσματα παραδέχεται ότι δεν είναι εύκολο να αποκλεισθεί η υπόθεση της αμβλείας γωνίας. Αντίθετα με τον Σακκέρι, ούτε υποπίπτει σε σφάλμα, ούτε συμπεραίνει ότι η υπόθεση της αμβλείας γωνίας οδηγεί σε αντίφαση. Αντίθετα, εκφράζοντας κάποια έκπληξη για τις «περίεργες» ιδιότητες των σχημάτων στην περίπτωση αυτή (π.χ. ότι χάνεται η έννοια της ομοιότητας και της αναλογίας των σχημάτων, ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου αυξάνει όσο μειώνεται η επιφάνεια του τριγώνου, κ.α.) διατυπώνει την ιδιαίτερα βαθιά και διορατική σκέψη ότι «η τρίτη υπόθεση ισχύει σε κάποια φανταστική σφαίρα».

Από τις προσπάθειες μετά τον Λάμπερτ, αξίζει να αναφερθεί η «απόδειξη» του Λ. Μπερτράν (L. Bertrand, 1731-1812), μαθητή του Όυλερ, το 1778, του Α.Μ. Λεζάντρ (1752-1833), που αφιέρωσε σαράντα χρόνια στις έρευνες στη θεωρία των παραλλήλων, του Σ.Ε. Γκούριεφ (1764-1813), και του Φαρκάς Μπόλυαϊ (Farkas Bolyai, 1775-1856), του πατέρα του Γιάνος Μπόλυαϊ, του μετέπειτα δημιουργού της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

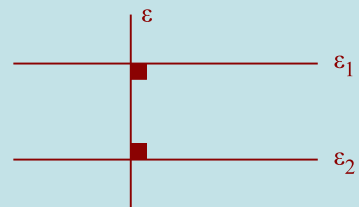
- ♦ Δύο ευθείες ενός επιπέδου
 - ταυτίζονται όταν έχουν 2 κοινά σημεία.
 - τέμνονται όταν έχουν 1 κοινό σημείο.
 - είναι **παράλληλες** όταν δεν έχουν κοινό σημείο.

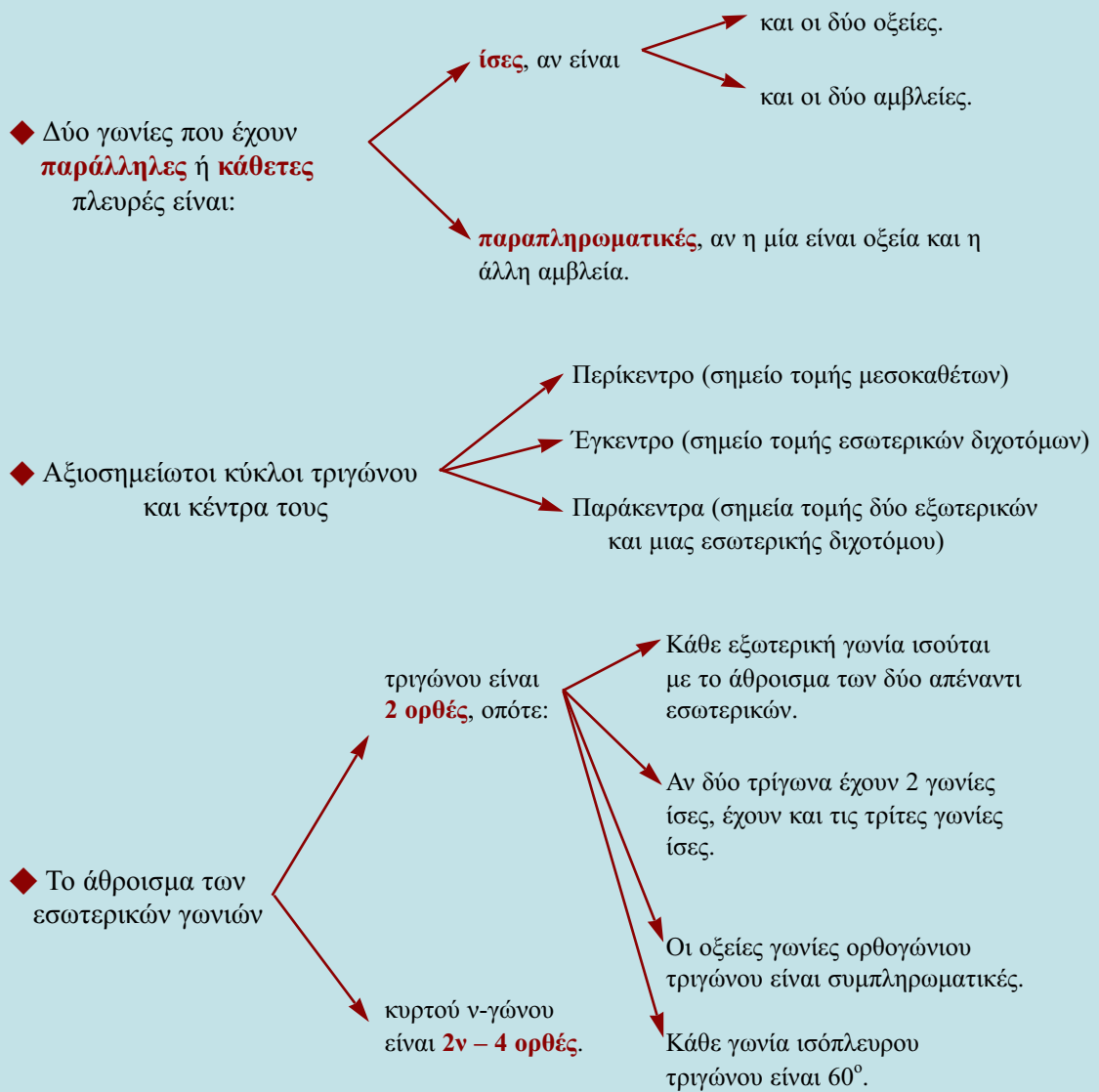
- ♦ Από σημείο A εκτός ευθείας ϵ
 - υπάρχει** ευθεία $\epsilon' // \epsilon$.
 - δεχόμαστε αξιωματικά ότι η ϵ' είναι **μοναδική**.
(Αίτημα παραλληλίας)



- ♦ Δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες αν :
 - είναι **κάθετες** στην ίδια ευθεία ϵ .
 - είναι **παράλληλες** προς τρίτη ευθεία ϵ .
 - τέμνονται από μια τρίτη ευθεία και σχηματίζουν:
 - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.
 - τις εντός εναλλάξ γωνίες τους **ίσες**.
 - τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **ίσες**.

- ♦ Έστω $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και ϵ μια τρίτη ευθεία..
 - Αν $\epsilon \perp \epsilon_1$ τότε $\epsilon \perp \epsilon_2$.
 - Αν η ϵ τέμνει την ϵ_1 τότε θα τέμνει και την ϵ_2 και θα σχηματίζει:
 - τις εντός εναλλάξ γωνίες **ίσες**.
 - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.
 - τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **ίσες**.





Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα τετράπλευρα που έχουν παράλληλες πλευρές, θα τα ταξινομήσουμε και θα εξετάσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Ως εφαρμογές θα αποδειχθούν κάποιες βασικές προτάσεις για τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα και τις παράλληλες ευθείες.



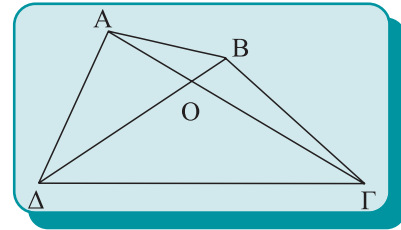
*Josef Albers (Γερμανός, 1888-1976).
«Αφιέρωμα στο τετράγωνο: οπτασία», λάδι σε σανίδα, 1959.
Συλλογή Μουσείου Solomon R. Guggenheim, Νέα Υόρκη.*

5.1 Εισαγωγή

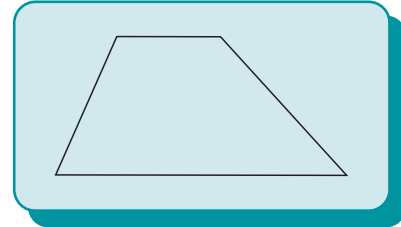
Όπως είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο τους.

Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.

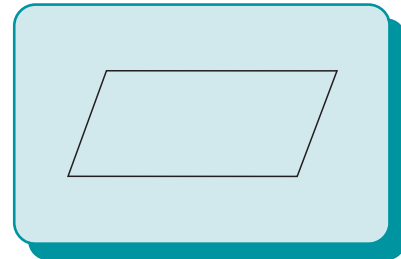
Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται **τραπέζιο** (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται **παραλληλόγραμμο** (σχ.3).



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

5.2 Παραλληλόγραμμο

Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD \parallel BG$.

• Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ. 5). Έχουμε:

$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

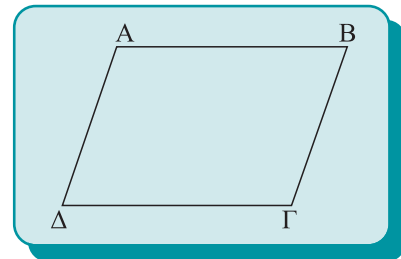
ΒΔ κοινή πλευρά.

$\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = \phi$ (εντός εναλλάξ).

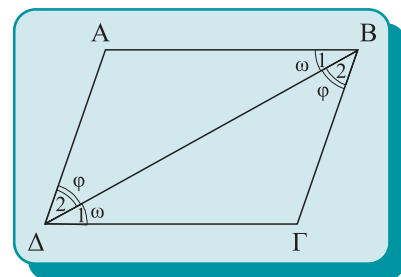
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$ και $AD = BG$. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \phi + \omega$.

Απόδειξη της ιδιότητας iii)

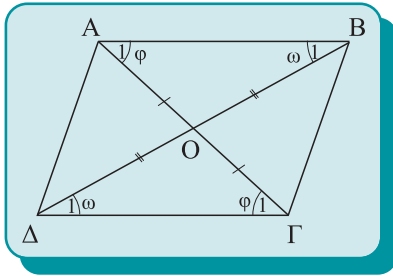
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:



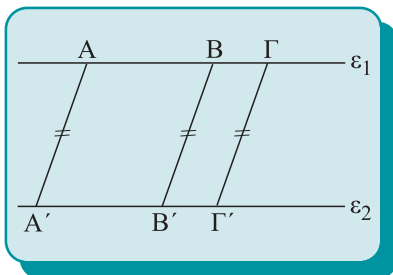
Σχήμα 4



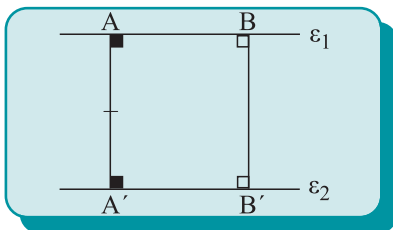
Σχήμα 5



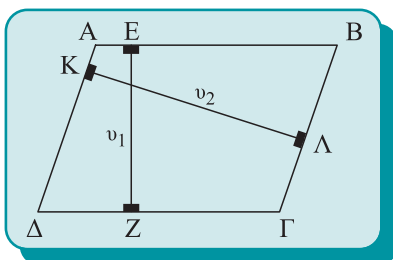
Σχήμα 6



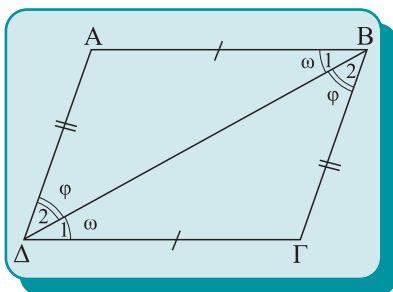
Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9



Σχήμα 10

$$AB = \Gamma\Delta$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

Για το λόγο αυτό λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).

Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται **απόσταση** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις** ως προς αυτό το ύψος (σχ.9).

• Κριτήρια για παραλληλόγραμμο

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- (ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

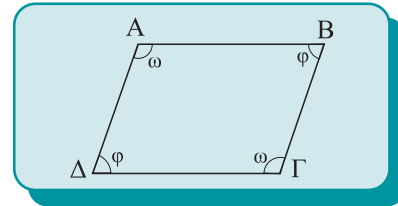
(i) Έστω $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

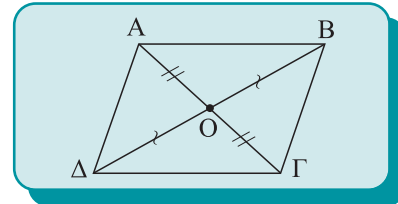
(ii) Έστω $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχ.10). Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η $B\Delta$ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4\angle$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4\angle$ ή $\varphi + \omega = 2\angle$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\angle$, οπότε $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(iv) Έστω $AO = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$ (σχ.12). Τα τρίγωνα AOB και $GO\Delta$, καθώς και τα τρίγωνα $AO\Delta$ και $BO\Gamma$ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11

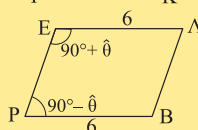
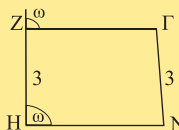
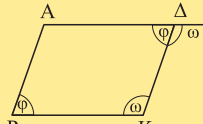
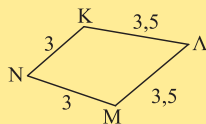
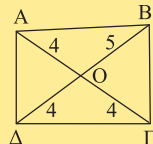
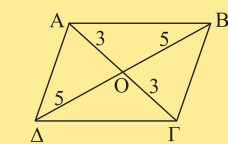


Σχήμα 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

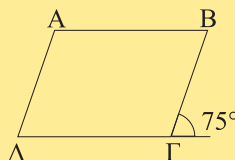
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμο, ποια όχι και γιατί;

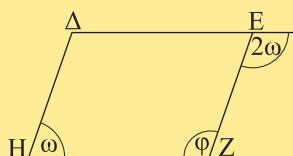


2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;

3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.



4. Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔEZH .



5. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες.

☐

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

☐

iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

☐

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

☐

(Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$.

2. Έστω O το κέντρο παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Αν E και Z σημεία των OA και OG αντίστοιχα, ώστε $OE = OZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Έστω E και Z , τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) οι $A\Gamma$, $B\Delta$ και EZ συντρέχουν.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του Δ . Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Αν η παράλληλη από το E προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Z , να αποδείξετε ότι $AE = BZ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $ME \parallel AB$ (E σημείο

του $ΑΓ$) και $ΜΔ//ΑΓ$ ($Δ$ σημείο του $ΑΒ$). Να αποδείξετε ότι $ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ$.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $Ε$ σημείο της $ΑΓ$. Φέρουμε $ΔΖ//ΒΕ$ ($Ζ$ σημείο του $ΑΓ$). Να αποδείξετε ότι $ΔΕ//ΒΖ$.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Προεκτείνουμε τη $ΔΓ$ κατά τμήμα $ΓΕ = ΔΓ$ και τη $ΔΑ$ κατά τμήμα $ΑΖ = ΔΑ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Ζ$, $Β$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Στις προεκτάσεις των διαμέσων $ΒΔ$ και $ΓΕ$ παίρνουμε σημεία $Η$ και $Ζ$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΔΗ = ΒΔ$ και $ΖΕ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι
i) $ΑΗ = ΑΖ$,
ii) τα σημεία $Ζ$, $Α$ και $Η$ είναι συνευθειακά.

5. Από σημείο $Α$ να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα $λ$.

χα, ώστε $ΑΕ = ΓΗ$ και $ΒΖ = ΔΚ$. Να αποδείξετε ότι
i) το τετράπλευρο $ΕΖΗΚ$ είναι παραλληλόγραμμο,
ii) οι $ΑΓ$, $ΒΔ$, $ΕΗ$ και $ΚΖ$ συντρέχουν.

2. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΑΒ$ παραλληλογράμιου $ΑΒΓΔ$ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΓ$ και επί της ημιευθείας $ΔΑ$ θεωρούμε σημείο $Ζ$, ώστε $ΔΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι $ΖΓΕ = 90^\circ$.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Προεκτείνουμε την $ΑΒ$ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΓ$ και την $ΑΔ$ κατά τμήμα $ΔΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Ζ$, $Γ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και σημείο $Δ$ της $ΑΓ$. Προεκτείνουμε την $ΑΒ$ κατά τμήμα $ΒΕ = ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι η $ΒΓ$ διχοτομεί τη $ΔΕ$.

5. Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ε$, $Ζ$, $Η$ και $Κ$ των πλευρών του $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ και $ΑΔ$ αντίστοι-



Είδη παραλληλογράμμων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το **ορθογώνιο**, το **ρόμβο** και το **τετράγωνο**.

5.3 Ορθογώνιο

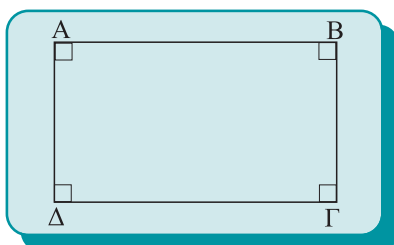
Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι **όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές**.

• Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.



Σχήμα 13

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες (σχ.14).

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $A\Delta$ κοινή, $AB = \Delta\Gamma$), οπότε $A\Gamma = B\Delta$.

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

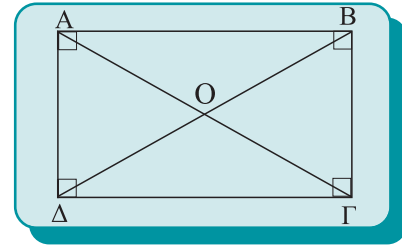
- (i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
- (ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
- (iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές**.
- (iv) Όλες οι γωνίες του είναι **ίσες**.

Απόδειξη

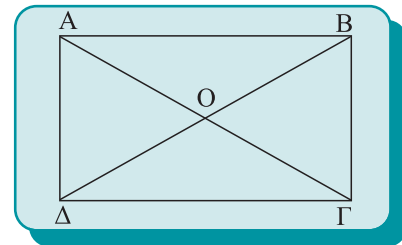
(i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
 ii) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $A\Gamma = B\Delta$. Τότε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα ($AB = \Delta\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$, $A\Delta$ κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Επομένως, το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι 360° .

(iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.



Σχήμα 14



Σχήμα 15

5.4 Ρόμβος

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

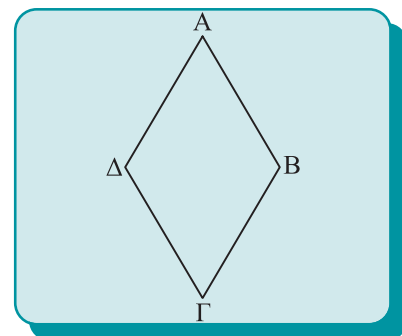
Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες**.

• Ιδιότητες του ρόμβου

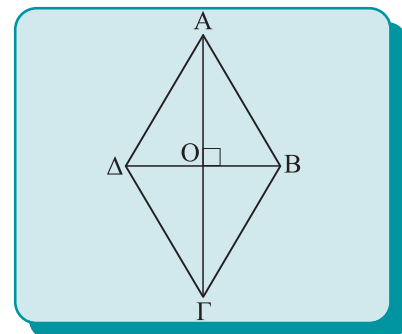
- (i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου **τέμνονται κάθετα**.
- ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου **διχοτομούν τις γωνίες του**.

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του AO είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως $A\Gamma \perp B\Delta$ και η $A\Gamma$ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η $A\Gamma$ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η $B\Delta$ τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.



Σχήμα 16

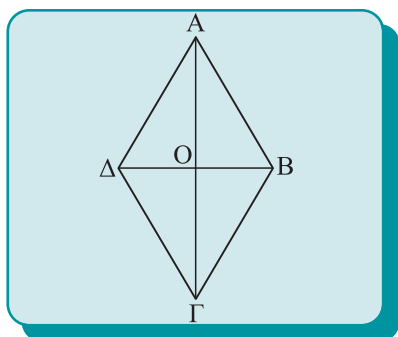


Σχήμα 17

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- (iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.



Σχήμα 18

Απόδειξη

- (i) και (ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
- (iii) Έστω $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο με $AG \perp BD$. Στο τρίγωνο $ABΔ$ η AO είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η AO είναι και ύψος, επειδή $AG \perp BD$. Άρα το τρίγωνο $ABΔ$ είναι ισοσκελές, οπότε $AB = AD$. Επομένως το $ABΓΔ$ είναι ρόμβος.
- (iv) Έστω $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο και AG διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο $ABΔ$ είναι ισοσκελές (αφού AO διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το $ABΓΔ$ είναι ρόμβος.

5.5 Τετράγωνο

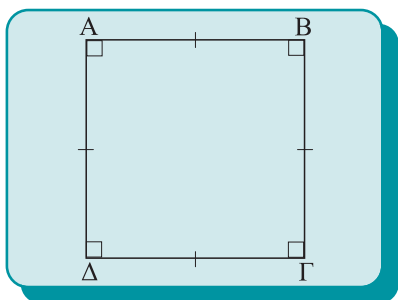
Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

• Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- (ii) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



Σχήμα 19

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

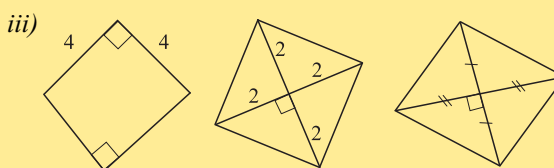
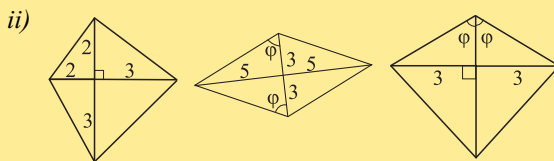
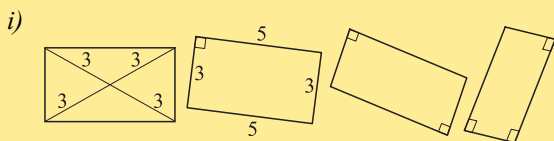
Αποδεικνύεται ότι ένα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- (iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- (vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι
i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα,
ποια όχι και γιατί;



2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι:

- i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος

3. Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;

- i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο

4. Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:

- i) Τετράγωνο – Ρόμβος ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

5. Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:

- i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐
- ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐
- iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐
- iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ φέρουμε $AE \perp ΔΓ$ και $ΓΖ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι το $AZΓE$ είναι ορθογώνιο.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με κέντρο O και $BD = 2AG$. Αν E, Z είναι τα μέσα των OB και OA αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $AEGZ$ είναι ορθογώνιο.

3. Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.

4. Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

5. Δίνεται ρόμβος $ABΓΔ$ με κέντρο O . Παίρνουμε δύο σημεία E και Z της AG , ώστε $OE = OZ = OB = OD$. Να αποδείξετε ότι το $ΔEBZ$ είναι τετράγωνο.

6. Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$. Στις πλευρές $AB, BΓ, ΓΔ$ και $ΔA$ παίρνουμε σημεία $K, Λ, Μ$ και N αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AK = BL = ΓM = ΔN$. Να αποδείξετε ότι το $KΛΜΝ$ είναι τετράγωνο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του $B\Delta$ και M το μέσο της $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z να αποδείξετε ότι το ΔEBZ είναι ρόμβος.
2. Στις πλευρές AB και $B\Gamma$, τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε σημεία E και Z αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι
i) $AZ = \Delta E$, ii) $AZ \perp \Delta E$.
3. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, E και Z είναι τα μέσα των $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν H είναι το σημείο τομής των AZ και BE και Θ το σημείο τομής των ΔZ και ΓE , να αποδείξετε ότι το $E\Theta ZH$ είναι ρόμβος.
4. Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.



Σύνθετα θέματα

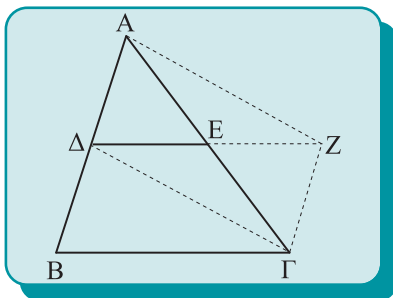
1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 45^\circ$. Από το μέσο M της $\Gamma\Delta$ φέρουμε κάθετο πάνω στη $\Gamma\Delta$ και έστω E και Z τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το $\Delta E\Gamma Z$ είναι τετράγωνο.
2. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε $BE \perp A\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΔBE τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο Z , να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma Z$.
3. Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

Θεώρημα I

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E των AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Το τετράπλευρο $\Delta\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα $\Delta\Delta \parallel \Gamma Z$, οπότε $\Delta B \parallel \Gamma Z$, αφού $\Delta\Delta = \Delta B$. Έτσι το τετράπλευρο $\Delta Z\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) $\Delta Z \parallel B\Gamma$ άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$ και

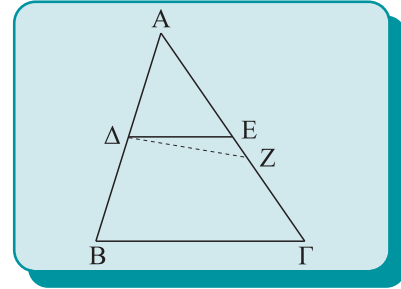
(ii) $\Delta Z = B\Gamma$ ή $2\Delta E = B\Gamma$ ή $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Θεώρημα II

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της AB την παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την AG στο E (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το E είναι το μέσο της AG . Έστω ότι το E δεν είναι μέσο της AG . Αν Z είναι το μέσο της AG , το τμήμα ΔZ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και AG , οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $\Delta Z \parallel B\Gamma$. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη $B\Gamma$, που είναι άτοπο. Άρα το E είναι μέσο της AG .



Σχήμα 21

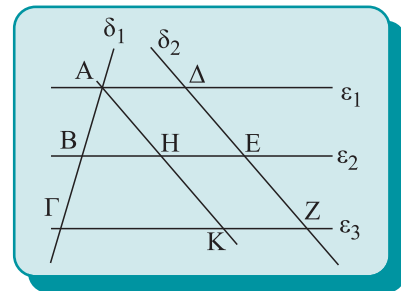
Θεώρημα III

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία A, B, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι $DE = EZ$.

Φέρουμε $AK \parallel \Delta Z$. Τότε τα τετράπλευρα $A\Delta EH$ και $EZKH$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $AH = DE$ (1) και $HK = EZ$ (2). Στο τρίγωνο $AK\Gamma$ το B είναι το μέσο της AG και $BH \parallel \Gamma K$. Άρα το H είναι μέσο της AK , δηλαδή $AH = HK$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $DE = EZ$.



Σχήμα 22

• Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

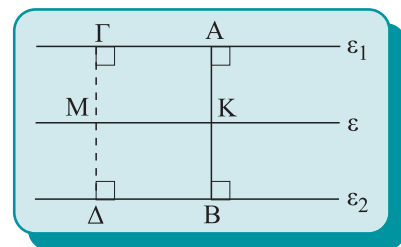
Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και ένα τμήμα $AB = v$ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις ε_1 και ε_2 . Αν από το μέσο K της AB φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , παρατηρούμε ότι κάθε σημείο M της ε

ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 , αφού $MG = MD = \frac{v}{2}$.

Αντίστροφα, αν ένα σημείο M ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 , το M τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει

$$MG + MD = GD = v, \text{ οπότε } MG = MD = \frac{v}{2}.$$

Έτσι τα τετράπλευρα $MGAK$ και $M\Delta BK$ είναι παραλληλόγραμμα ($MG \parallel AK, M\Delta \parallel KB$), οπότε $MK \parallel \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Επομένως, το M ανήκει στην ευθεία ε .



Σχήμα 23

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.
Η ευθεία ε λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ε_1 και ε_2 .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

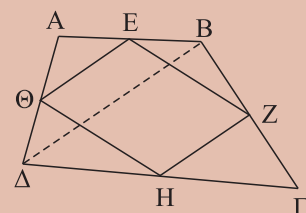
Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z, H, Θ των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

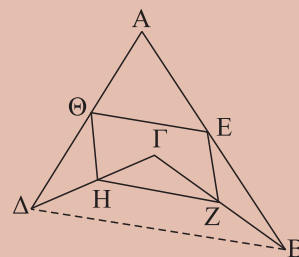
Φέρουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα E και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Delta$, οπότε $E\Theta \parallel \frac{B\Delta}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ προκύπτει ότι $ZH \parallel \frac{B\Delta}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $E\Theta \parallel ZH$, οπότε το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 24α



Σχήμα 24β

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

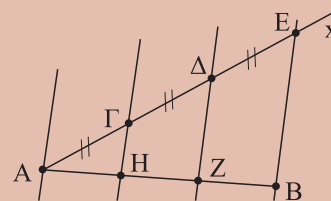
Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σχ.25).

Λύση

Φέρουμε μια ημιευθεία Ax και παίρνουμε σε αυτή τα ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AG, \Gamma\Delta, \Delta E$. Φέρουμε τη BE και από τα Δ, Γ και A παράλληλες προς αυτή, οι οποίες τέμνουν την AB στα σημεία Z και H . Τότε σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, σελ. 105, θα είναι $AH = HZ = ZB$.



Σχήμα 25

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{G}_1 < \hat{B} + \hat{G} < 2L$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii) $A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta$.

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $E\Theta \parallel \frac{ΓΚ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $Z\Theta \parallel \frac{ΒΚ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ // ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμα (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμα ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta K = \frac{\Theta K}{2}, \text{ άρα } \Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2} \text{ ή } A\Theta = 2\Theta\Delta.$$

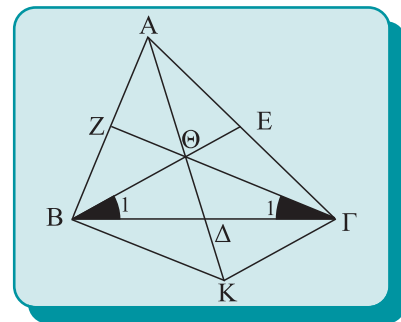
Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$E\Theta = \frac{\Gamma K}{2} = \frac{B\Theta}{2} \text{ ή } B\Theta = 2\Theta E.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε $\Gamma\Theta = 2\Theta Z$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι $A\Delta = A\Theta + \Theta\Delta = 2\Theta\Delta + \Theta\Delta = 3\Theta\Delta$. Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3} A\Delta, \text{ οπότε } A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta.$$

Όμοια προκύπτει ότι $B\Theta = \frac{2}{3} BE$ και $\Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma Z$.



Σχήμα 26

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.



5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

Λήμμα

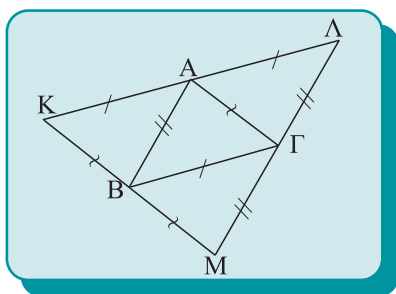
Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

Από τις κορυφές A, B, Γ τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο $ΚΛΜ$ (σχ.27).

Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων $ΚΑΓΒ$, $ΛΑΒΓ$ και $ΜΒΑΓ$ έχουμε: $ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ$, $ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ$ και $ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ$.

Επομένως τα σημεία A, B, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΚΛΜ$.



Σχήμα 27

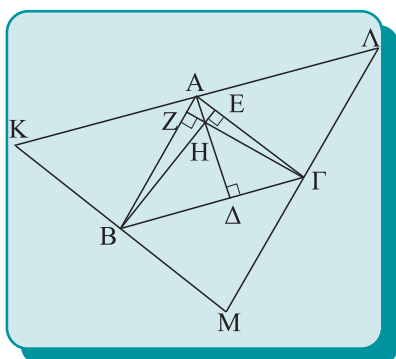
Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα ύψη του $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$. Από τις κορυφές του A, B, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο $ΚΛΜ$ τα σημεία A, B, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$ είναι κάθετες στις $ΚΛ$, $ΚΜ$ και $ΜΛ$ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις $ΒΓ$, $ΑΓ$ και $ΑΒ$) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες $ΑΔ$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου $ΚΛΜ$, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο H .

Το σημείο H λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου $ΑΒΓ$.



Σχήμα 28

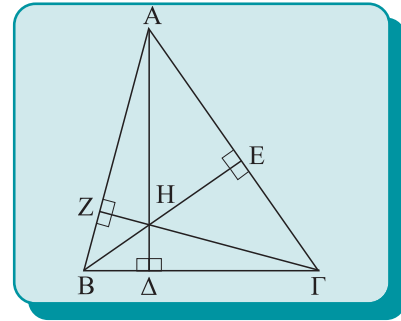
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές A, B, Γ , τριγώνου $ΑΒΓ$ και το ορθόκεντρό του H αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β,Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ.
Τα ύψη ΗΔ,ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.



Σχήμα 29

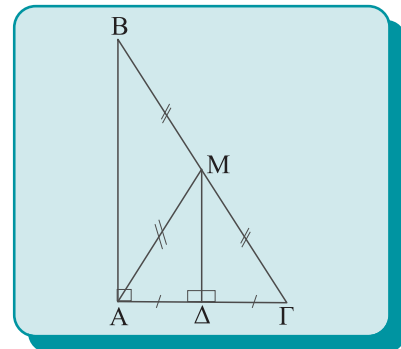
5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

Θεώρημα Ι

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{BG}{2}$.
Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $MD \parallel AB$. Αλλά $AB \perp AG$, επομένως και $MD \perp AG$. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε $AM = MG$, δηλαδή $AM = \frac{BG}{2}$.



Σχήμα 30

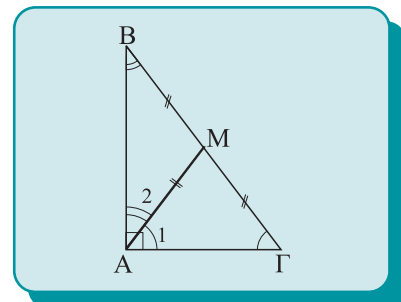
Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Θεώρημα ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη

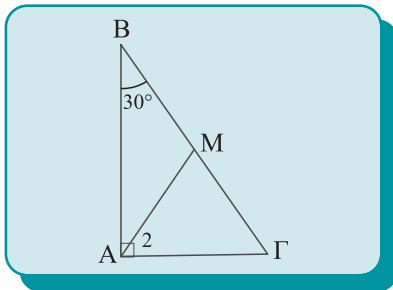
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31). Αν $AM = \frac{BG}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.
Επειδή $AM = \frac{BG}{2}$ έχουμε $AM = MG$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{G}$ (1) και $AM = MB$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{G}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{G}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{G} = 2L$, οπότε $2\hat{A} = 2L$ ή $\hat{A} = 1L$.



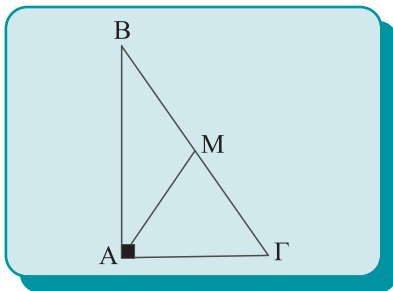
Σχήμα 31

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.



Σχήμα 32



Σχήμα 33

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$ (σχ.32).

Θα αποδείξουμε ότι $AG = \frac{B\Gamma}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσο AM και είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG$. Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε

το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Επομένως $AG = MG = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AG = \frac{B\Gamma}{2}$

Απόδειξη

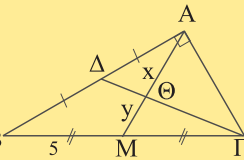
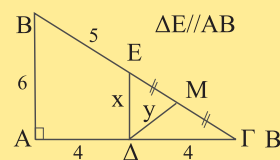
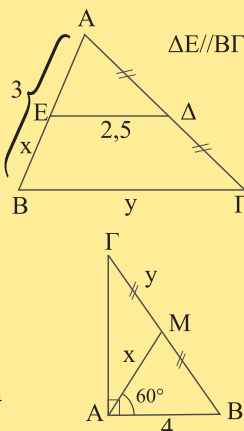
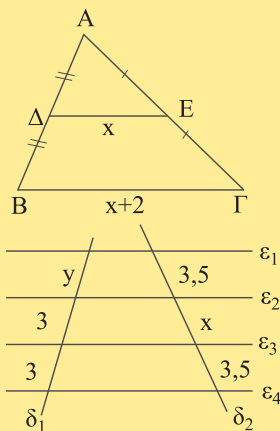
(σχ.33), θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$.

Φέρουμε τη διάμεσο AM , οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG = AG$ (αφού $AG = \frac{B\Gamma}{2}$). Άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

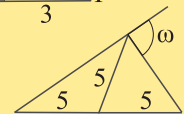
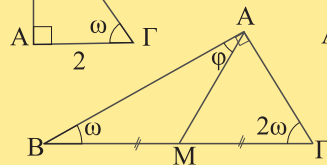
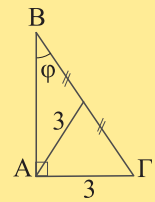
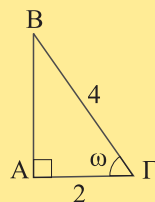
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y .

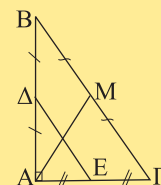


2. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .



3. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;

4. Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα $AM = AE$.



5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ο κύκλος διαμέτρου $B\Gamma$ διέρχεται από το A ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ και Z τυχαίο σημείο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η ΔE διχοτομεί την AZ .

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμέσός του AD . Αν E , Z και H είναι τα μέσα των BD , AD και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη BD και GE . Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $MD = ME$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν E , Z είναι τα μέσα των AB και AG , να αποδείξετε ότι $EZ = AG$.

5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Προεκτείνουμε τη GA κατά τυχαίο τμήμα AD . Από το Δ φέρουμε $\Delta H \perp B\Gamma$, η οποία τέμνει την AB στο E . Να αποδείξετε ότι $GE \perp AB$.

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$ και Δ , E τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την $E\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = E\Delta$. Να αποδείξετε ότι το $AG\Delta Z$ είναι ρόμβος.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD .

i) Αν E , Z είναι τα μέσα των AB και AG , να αποδείξετε ότι $\hat{E\Delta Z} = \hat{A} = 90^\circ$.

ii) Αν M είναι το μέσο της EZ , να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E και Z των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν η EZ τέμνει τη διαγώνιο AG στο H , να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{AG}{4}$.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διάμέσό του AM και το ύψος του AD . Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

4. Αν E , Z τα μέσα των πλευρών AB , $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο AG .

5. Αν E , Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι AE και AZ τριχοτομούν τη διαγώνιο BA .

6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, Δ είναι το μέσο της διαμέσου AM .

Αν η $B\Delta$ τέμνει την πλευρά AG στο E , να αποδείξετε

$$\text{ότι } AE = \frac{E\Gamma}{2}.$$

7. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE = AB$. Αν η ΔE τέμνει την AG στο H και τη $B\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι

$$\text{i) } BZ = Z\Gamma, \quad \text{ii) } \Gamma H = \frac{AH}{2}.$$

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 30^\circ$ η κάθετος στο μέσο M της υποτεινουσας $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } M\Delta = AD, \quad \text{ii) } M\Delta = \frac{AB}{3}.$$

9. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και E , Z τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν H , K οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EH \perp KZ$.

10. Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;

Σύνθετα θέματα

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του AD . Αν E και Z τα μέσα των AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\hat{E\Delta Z} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε το ύψος του AD . Να αποδείξετε ότι αν $\hat{B} = 15^\circ$, τότε $AD = \frac{B\Gamma}{4}$ και αντίστροφα. (Υπόδειξη: Φέρουμε τη διάμεσο AM).

3. Σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε το βαρύκεντρο K του τριγώνου $AB\Gamma$ και τα μέσα E , Z και H των AB , $\Gamma\Delta$ και $K\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $EH \parallel KZ$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90^\circ$ και το ύψος του AD . Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE = BA$. Να αποδείξετε ότι η ΔE διχοτομεί την πλευρά AG .

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$, η διχοτόμος του AD και M το μέσο της $B\Gamma$. Αν E είναι η προβολή του B στη διχοτόμο AD , να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \text{i) } EM &\parallel AG, \\ \text{ii) } EM &= \frac{AG - AB}{2}, \\ \text{iii) } \hat{E\Delta M} &= \frac{\hat{A}}{2}. \end{aligned}$$

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος του BD και M το μέσο του τμήματος $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη ΔB κατά τμήμα $BE = \Delta B$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το M στην AB , η κάθετη από το A στην $E\Gamma$ και η $B\Delta$ συντρέχουν.



7. Αν K και Λ είναι οι προβολές της κορυφής A τριγώνου $AB\Gamma$ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- ο $AK\Lambda$ είναι ορθογώνιο.
 - Η ευθεία $K\Lambda$ διέρχεται από το μέσο της AG .
8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) το ύψος

του AD και η διάμεσός του AM . Αν E, Z οι προβολές του Λ στις AB και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

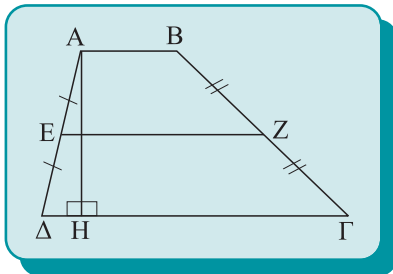
- $AD = EZ$,
- $AM \perp EZ$,
- Η διάμεσος AM το τμήμα AZ και η παράλληλη προς την EZ από το B συντρέχουν.

Τραπεζία

5.10 Τραπεζίο

Ορισμός

Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές AB και GD (σχ.34) του τραπεζίου $ABGD$ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα EZ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.

Θεώρημα I

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν EZ διάμεσος του τραπεζίου $ABGD$, τότε:

$$\text{i) } EZ \parallel AB, GD \text{ και ii) } EZ = \frac{AB + GD}{2}.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τραπεζίο $ABGD$ ($AB \parallel GD$) (σχ.35), τη διαγώνιο του BD και E το μέσο της AD . Από το E φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των AB και GD που τέμνει τις BD και BG στα K και Z αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο ABD το E είναι μέσο της AD και $EK \parallel AB$, οπότε

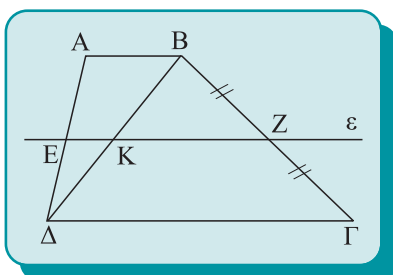
$$\text{το } K \text{ είναι το μέσο της } BD \text{ και } EK = \frac{AB}{2} \quad (1).$$

Επίσης στο τρίγωνο BGD το K είναι μέσο της BD και $KZ \parallel GD$,

$$\text{οπότε το } Z \text{ είναι το μέσο της } BG \text{ και } KZ = \frac{GD}{2} \quad (2).$$

Επομένως η EZ είναι διάμεσος του τραπεζίου και

i) $EZ \parallel AB, GD$ (από κατασκευή).



Σχήμα 35

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

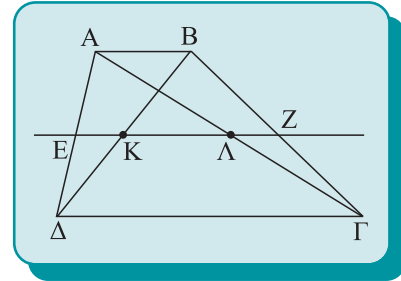
Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ

$$\text{και } EL = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (3).$$

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$EL - EK = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} \quad \text{ή} \quad KL = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \quad (\text{με } \Gamma\Delta > AB).$$



Σχήμα 36

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

• Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

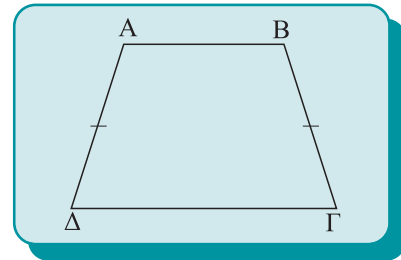
Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

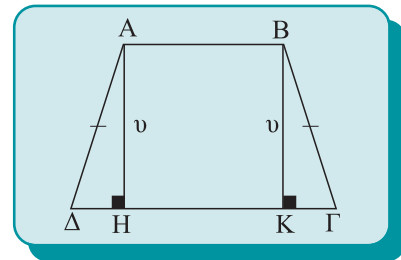
Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.

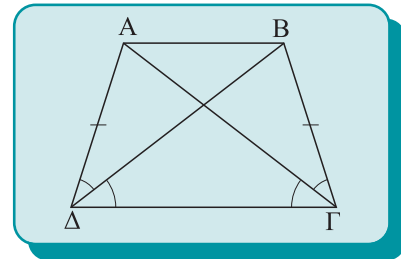
(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 37



Σχήμα 38



Σχήμα 39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

• Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

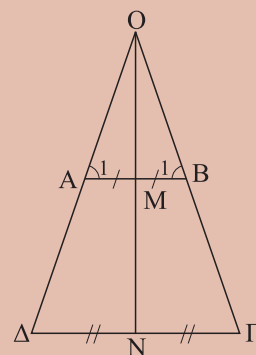
Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:

- (i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,
- (ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.

Απόδειξη

(i) Έστω $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ ($AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τραπέζιο).

(ii) Η μεσοκάθετος ϵ της βάσης AB διέρχεται από το O , επειδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές. Η ϵ είναι κάθετος και στη $\Gamma\Delta$ επειδή $\Gamma\Delta \parallel AB$. Αφού η ϵ διέρχεται από το O , είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $O\Delta\Gamma$, άρα μεσοκάθετος και στη $\Gamma\Delta$.

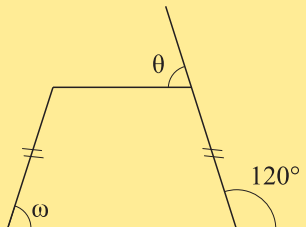
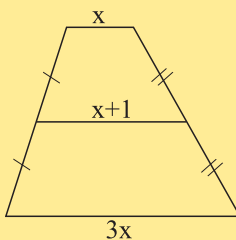
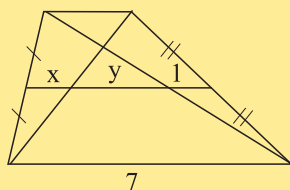
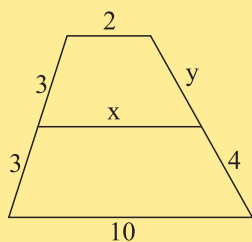


Σχήμα 40

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

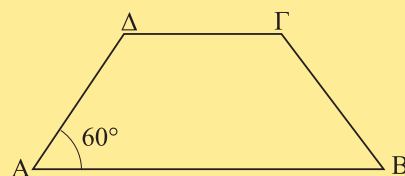
1. Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x , y , ω και θ .



2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι ισοσκελές τραπέζιο;

3. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπέζιου; Ποιες ιδιότητες έχει;

4. Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι: $AB = 5x$, $\Delta\Gamma = 3x$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Η περίμετρος του τραπέζιου είναι:



i) $10x$

ii) $11x$

iii) $12x$

iv) $13x$

v) $14x$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και η διάμεσός του

EZ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του $ΑΔ$, $ΒΓ$ τέμνονται στο K και H , $Θ$ είναι τα μέσα των $ΚΑ$ και $ΚΒ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα E , Z , H , $Θ$ είναι κορυφές τραπέζιου.

2. Αν $Δ$ και E είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$), να αποδείξετε ότι το $ΔΕΓΒ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπέζιου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) τέμνονται στο O . Αν E , Z , H , $Θ$ είναι τα μέσα των $ΟΑ$, $ΟΒ$, $ΟΓ$, $ΟΔ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $EZHΘ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και το ύψος του $ΑΕ$. Αν K , $Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΚΛΓΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) με $ΑΒ < ΓΔ$ και τα ύψη του $ΑΕ$ και $ΒΖ$. Να αποδείξετε ότι

$$ΔΕ = ΓΖ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}.$$

6. Από την κορυφή A τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε ευθεία $ε$ που δεν τέμνει το τρίγωνο και $α$ ς είναι $ΒΒ'$ και $ΓΓ'$ οι αποστάσεις των B και $Γ$ από την ευθεία $ε$. Αν M είναι το μέσο της $Β'Γ'$ και K το μέσο της διαμέσου $ΑΔ$ να αποδείξετε ότι $MK = \frac{ΑΔ}{2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) η διχοτόμος της γωνίας του B τέμνει τη διάμεσο του EZ στο H . Να αποδείξετε ότι $ΒΗΓ = 90^\circ$.

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) M είναι το μέσο της $ΑΒ$. Αν η μεσοκάθετος της $ΑΒ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο Z και η παράλληλη από το Z προς τη $ΒΓ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο H , να αποδείξετε ότι $ΓΗ = ΑΖ$.

3. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{A} = \hat{Δ} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 120^\circ$. Αν $ΑΒ = 2α$ και $ΒΓ = α$ να υπολογίσετε τη διάμεσο EZ , ως συνάρτηση του $α$.

4. Σε ένα τραπέζιο $ΑΒΓΔ$, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του $ΑΔ$ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν M είναι το μέσο της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΜΔ = 90^\circ$.

5. Από το μέσο E της πλευράς $ΒΓ$ ισοσκελούς τραπέζιου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) φέρουμε παράλληλη προς την $ΑΔ$ που τέμνει τη $ΔΓ$ στο M . Να αποδείξετε ότι $ΒΜ \perp ΔΓ$.

6. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το ύψος του $ΑΗ$. Αν $Δ$, E , Z είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα, να απο-

δείξετε ότι το $ΔΕΖΗ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

7. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

8. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) με $ΓΔ = 3ΑΒ$ και K , $Λ$ τα μέσα των διαγωνίων του $ΔΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΑΚΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;

9. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) με $ΓΔ = \frac{3}{2} ΑΒ$. Αν E , Z , H είναι τα μέσα των $ΑΒ$, $ΒΓ$ και $ΔΕ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΑΒΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της $ΑΗ$ τέμνει τη $ΓΔ$ στο $Θ$, τότε $ΘΔ = ΔΓ - ΑΒ$.

10. Αν A' , B' , $Γ'$, $Δ'$, K' είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου K παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ αντίστοιχα σε ευθεία $ε$ που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι $ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' + ΔΔ' = 4ΚΚ'$.

Σύνθετα θέματα

1. Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) έχουμε $ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{Δ}$ τέμνονται στη $ΒΓ$.

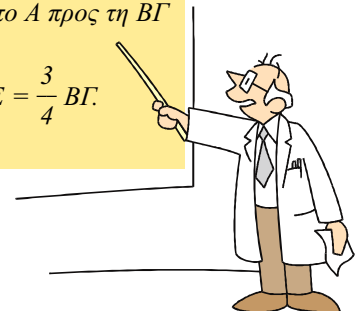
2. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{A} = \hat{Δ} = 90^\circ$ και $ΒΓ = 2ΓΔ$. Αν M είναι το μέσο της $ΒΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΜΓ = 3ΜΑΒ$.

3. Μια ευθεία $ε$ διέρχεται από την κορυφή $Δ$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές B και $Γ$. Αν A' , B' και $Γ'$ οι προβολές των A , B και $Γ$ αντίστοιχα στην ευθεία $ε$, να αποδείξετε ότι $ΑΑ' - ΓΓ' = ΒΒ'$ (με $ΑΑ' > ΓΓ'$).

4. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $Δ$, E τα μέσα των $ΑΒ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Από το μέσο Z του $ΑΔ$ φέρουμε παράλληλη προς την $ΑΓ$ που τέμνει τη $ΒΓ$ στο H . Αν $ZH = \frac{3}{8} ΒΓ$, να υπολογισθεί η γωνία $\hat{B}$.

5. Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ//ΓΔ$) με $ΑΒ < ΓΔ$, έστω M το μέσο της $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι
i) αν $ΔΜ = ΔΓ$ και η παράλληλη από το A προς τη $ΒΓ$ τέμνει τη $ΔΜ$ στο E , τότε $ΑΜ = ΒΕ$,

ii) αν E είναι το μέσο της $ΔΜ$, τότε $ΑΕ = \frac{3}{4} ΒΓ$.





5.12 Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

ΣΧΟΛΙΟ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν κάποια από τα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου (βαρύκεντρο, ορθόκεντρο κτλ.) καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία των παραλληλογράμμων που στηρίζεται στο αίτημα παραλληλίας (§ 4.2).

Είδαμε προηγούμενα (§4.5 και §5.7 - §5.8) ότι σε ένα τρίγωνο οι μεσοκάθετοι των πλευρών του, οι διχοτόμοι των γωνιών του, οι διάμεσοι και τα ύψη του αποτελούν τριάδες συντρεχουσών ευθειών.

Ανακεφαλαιώνοντας, σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ αποδείξαμε ότι **διέρχονται από το ίδιο σημείο**:

- Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών του. Το κοινό σημείο O λέγεται **περίκεντρο** του $AB\Gamma$ και ο κύκλος (O, OA) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.
- Οι διχοτόμοι των τριών γωνιών του. Το κοινό σημείο I λέγεται **έγκεντρο** του $AB\Gamma$ και ο κύκλος με κέντρο το I και ακτίνα την κοινή απόσταση του I από τις τρεις πλευρές του, λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.
- Οι τρεις διάμεσοί του. Το κοινό σημείο τους Θ λέγεται **βαρύκεντρο** του $AB\Gamma$.
- Τα τρία ύψη του. Το κοινό σημείο τους H λέγεται **ορθόκεντρο** του $AB\Gamma$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\beta \neq \gamma$) με $\hat{A} = 60^\circ$, τα ύψη του BD , GE και τα μέσα M , N των AB , AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ME = ND$.

2. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 , ε_2 και σημείο A της ε_1 . Φέρουμε $AK \perp \varepsilon_2$. Αν B σημείο της ε_2 και μια ευθεία, που διέρχεται από το B , τέμνει τις AK και ε_1 στα Δ και E αντίστοιχα, ώστε $\Delta E = 2AB$, να αποδείξετε ότι $\hat{ABK} = 3\hat{EBK}$.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$, Δ το μέσο της AB και σημείο E της ημιευθείας ΔB , ώστε $\Delta E = \frac{AG}{2}$. Από τα B και E φέρουμε κάθετες στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, οι οποίες τέμνουν την AG στα B' και E' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) $B'E' = \frac{AG - AB}{2}$.

ii) Η ευθεία EE' διέρχεται από το μέσο της $B\Gamma$.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$, $\hat{B} > 60^\circ$ και το ύψος του AE προς τη $B\Gamma$ ($AE \perp B\Gamma$). Αν

Z , H είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) το $H\beta\Gamma Z$ είναι ρόμβος,

ii) η ZE είναι διχοτόμος της $\hat{HE\Gamma}$,

iii) το $HE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

iv) $\hat{\Delta ZE} = 3\hat{ZE\Gamma}$.

5. Ευθεία ε αφήνει τις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ προς το ίδιο μέρος της. Αν A' , B' , Γ' , K' οι προβολές των A, B, Γ και του βαρυκέντρου K αντίστοιχα στην ε , να αποδείξετε ότι $AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3KK'$.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και Δ το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Delta E \perp AG$. Αν Z το μέσο του $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

i) $\Delta Z \parallel BE$,

ii) $AH \perp BE$, όπου H το μέσο του ΔE .

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $AGZH$. Αν K και Λ είναι τα κέντρα των $AB\Delta E$ και $AGZH$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda\Lambda$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

8. Δίνεται τετράγωνο πλευράς a και κέντρον O . Στη διαγώνιο $ΑΓ$ παίρνουμε σημείο M , ώστε $GM = \frac{AG}{4}$. Φέρουμε τη BM που τέμνει τη $ΓΔ$ στο E και OH κάθετη στη $BΓ$, η οποία τέμνει τη BE στο Z . Να αποδείξετε ότι:

i) $OZ = \frac{a}{3}$,

ii) το $OZGE$ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Οι μη παράλληλες πλευρές $ΑΔ$ και $BΓ$ τραπέζιου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται κάθετα στο O . Αν $K, Λ$ τα μέσα των

βάσεων AB και $ΔΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία $O, K, Λ$ είναι συνευθειακά,

ii) $KΛ = \frac{ΔΓ - AB}{2}$ (με $ΔΓ > AB$).

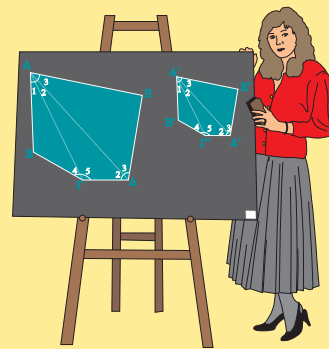
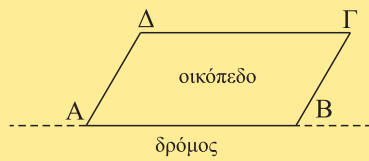
iii) αν E, Z είναι τα μέσα των διαγωνίων $ΑΓ$ και $BΔ$ αντίστοιχα, τότε το $ΚΕΛΖ$ είναι ορθογώνιο.

10. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, οι διχοτόμοι του $BΔ$ και $ΓΕ$ και το μέσο M του $ΕΔ$. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από τη $BΓ$ είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεών του από τις $AB, ΑΓ$.



Δραστηριότητες

1. Δύο αδέρφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου, το οποίο έχει την πλευρά AB παράλληλη προς δημόσιο δρόμο που διέρχεται μπροστά από το οικόπεδο. Πώς θα μοιρασθεί δίκαια το οικόπεδο μεταξύ των δύο αδελφών;



2. Έχουμε 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Τοποθετώντας κατάλληλα το ένα τρίγωνο δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.

3. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα έχουν κέντρο συμμετρίας, ποια έχουν άξονες συμμετρίας και πόσους. Να γίνουν τα σχήματα και να βρεθεί το συμμετρικό των κορυφών τους και των πλευρών τους.

i) παραλληλόγραμμο

iv) τετράγωνο

ii) ορθογώνιο

v) τραπέζιο

iii) ρόμβος

vi) ισοσκελές τραπέζιο

4. Θεωρούμε ευθεία $ε$ και ευθύγραμμο τμήμα AB . Να υπολογίσετε την απόσταση του μέσου M του τμήματος, ως συνάρτηση των αποστάσεων των άκρων του A και B από την ευθεία $ε$ (**Υπόδειξη**: Να διακρίνετε περιπτώσεις για τις διάφορες θέσεις των A και B ως προς την ευθεία $ε$).

Εργασία

Σε μια πεδιάδα υπάρχει λόφος $Λ$, τον οποίο πρόκειται να διασχίσει **ευθεία** σιδηροδρομική γραμμή $ΑΒΓΔ$. Πώς ο μηχανικός θα χαράξει την προέκταση $ΓΔ$ αυτής πίσω από το λόφο, πριν να γίνει η διάνοιξη της σήραγγας;



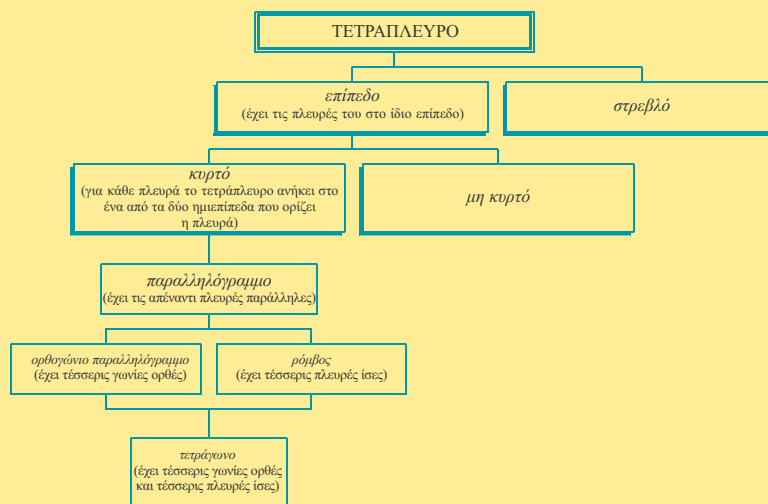
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια του τετραπλεύρου

Η πρώτη υποδιαίρεση των τετραπλεύρων σήμερα είναι σε *επίπεδα* και *στρεβλά*, ανάλογα με το αν οι κορυφές τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή όχι. Τα επίπεδα τετράπλευρα, με τη σειρά τους, υποδιαιρούνται σε *κυρτά* και *μη κυρτά*, ανάλογα με το αν η κάθε πλευρά τους αφήνει το

σχήμα εξ ολοκλήρου στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η πλευρά αυτή ή όχι. Μία ειδική περίπτωση επιπέδου κυρτού τετραπλεύρου είναι το παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες.

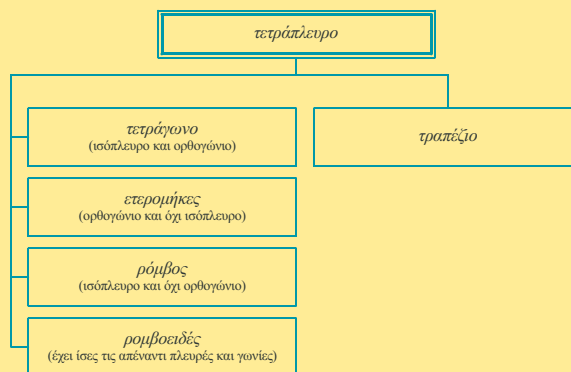
Τέλος, διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων (Διάγραμμα 1):



Διάγραμμα 1: Η σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων

- (α) το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές,
- (β) ο ρόμβος που έχει τέσσερις πλευρές ίσες,
- (γ) το τετράγωνο, που έχει τέσσερις γωνίες ορθές και τέσσερις πλευρές ίσες.

Όμως η ταξινόμηση αυτή δε διαμορφώθηκε εξ αρχής στην ιστορία της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης π.χ. στα «Στοιχεία» του προτείνει μια άλλη ταξινόμηση (Διάγραμμα 2).



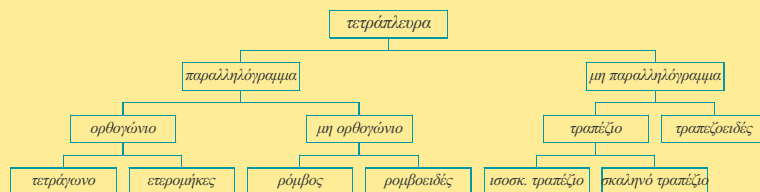
Διάγραμμα 2: Η Ευκλείδεια ταξινόμηση των τετραπλεύρων

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

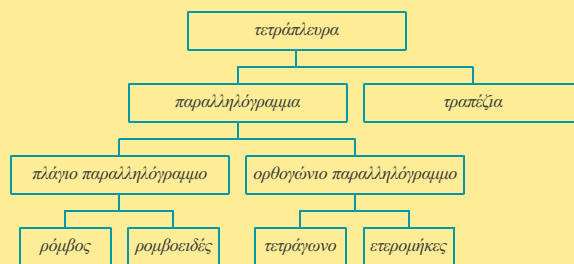
Η ταξινόμηση αυτή δε χρησιμοποιεί ως κριτήριο την έννοια της παραλληλίας, η οποία στα «Στοιχεία» εισάγεται αργότερα. Επίσης δε φαίνεται να στηρίζεται σε κάποια ενιαία αρχή. Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις φαίνεται ότι λαμβάνει ως βάση τα κατηγορήματα «έχει ίσες πλευρές» και «έχει ορθές γωνίες» και τις αρνήσεις τους: ορθογώνιο και ισόπλευρο είναι το *τετράγωνο*, ορθογώνιο και όχι ισόπλευρο το *ετερομήκες* (δηλαδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), ισόπλευρο και όχι ορθογώνιο ο *ρόμβος*. Όμως, η έννοια του *ρομβοειδούς* (δηλαδή του πλάγιου παραλληλογράμμου) στηρίζεται στην έννοια της ισότητας των απέναντι πλευρών και των γωνιών και όχι στην παραλληλία των απέναντι πλευρών. *Τραπεζίο* ονομάζει όχι ό,τι σήμερα εννοούμε με τον όρο αυτό, δηλαδή τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Ο όρος *τραπέζιο*, με τη σύγχρονη έννοια, απαντάται αργότερα στον Αρχιμήδη.

Η ταξινόμηση όμως αυτή αποδεικνύεται μη λειτουργική και μάλλον άβολη. Ο ίδιος ο Ευκλείδης μάλιστα δε χρησιμοποιεί ποτέ στα «Στοιχεία» του τις έννοιες του ετερομήκους, του ρόμβου και του ρομβοειδούς. Παρόλα αυτά, η ταξινόμηση αυτή απαντάται και σε μεταγενέστερους μαθηματικούς, ακόμα και του Αραβικού κόσμου, όπως π.χ. στη διαπραγμάτευση της Γεωμετρίας του αλ-Χουαρίζμι. Όμως υπήρχαν και μαθηματικοί που προσπάθησαν να τροποποιήσουν την ταξινόμηση του Ευκλείδη. Ο Πρόκλος αποδίδει στον Ποσειδώνιο μια πιο ολοκληρωμένη ταξινόμηση, η οποία απαντάται επίσης στον Ήρωνα (Διάγραμμα 3).

Μια άλλη προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται το 16ο αι. στη «Γεωμετρία» (1569) του Πέτρου Ράμου (Petrus Ramus ή Pierre de la Ramée) (Διάγραμμα 4). Η ταξινόμηση του Ράμου φαίνεται να στηρίζεται στη διχοτομική διαίρεση του πλάτους των εννοιών.

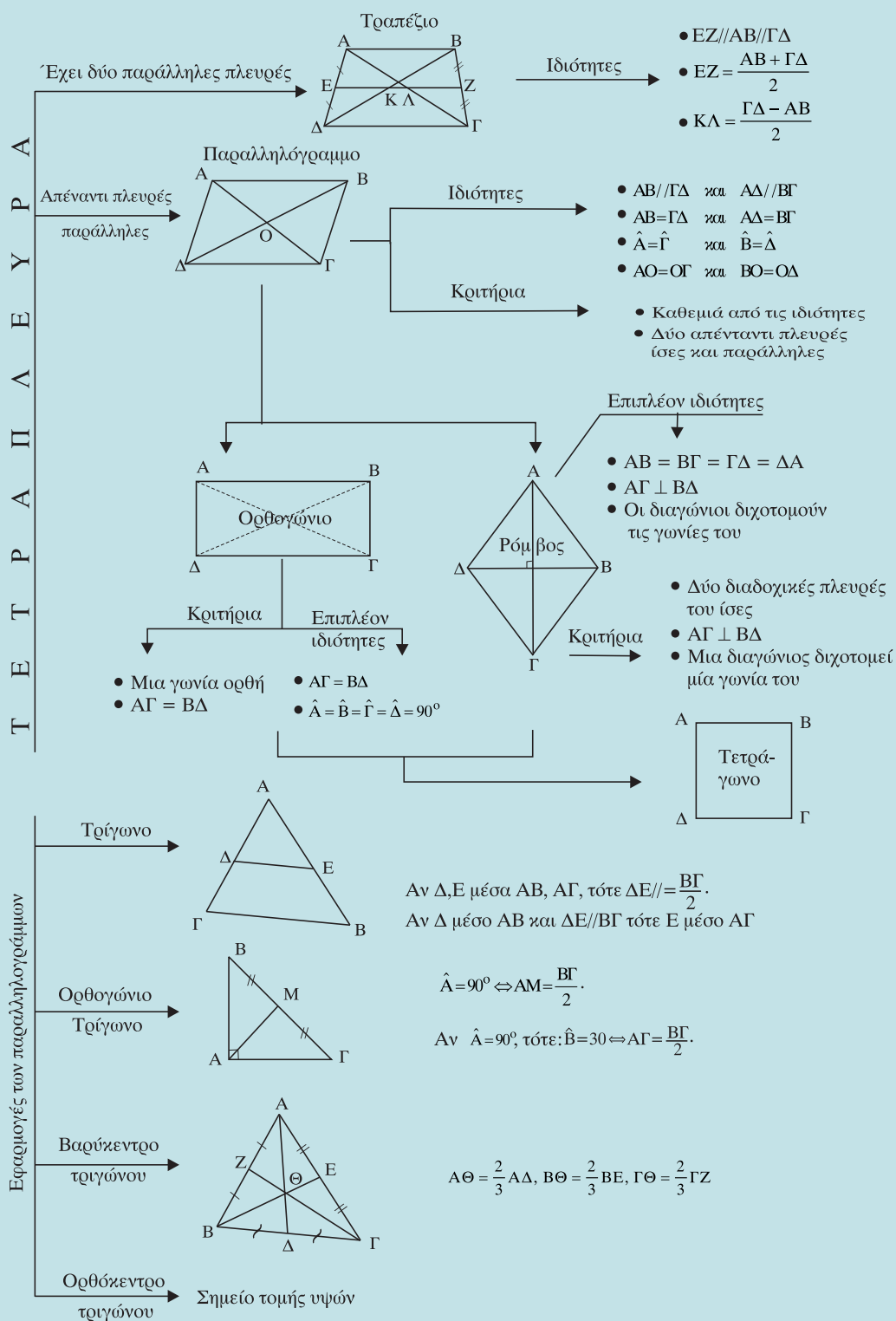


Διάγραμμα 3: Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα



Διάγραμμα 4: Η ταξινόμηση του Ράμου

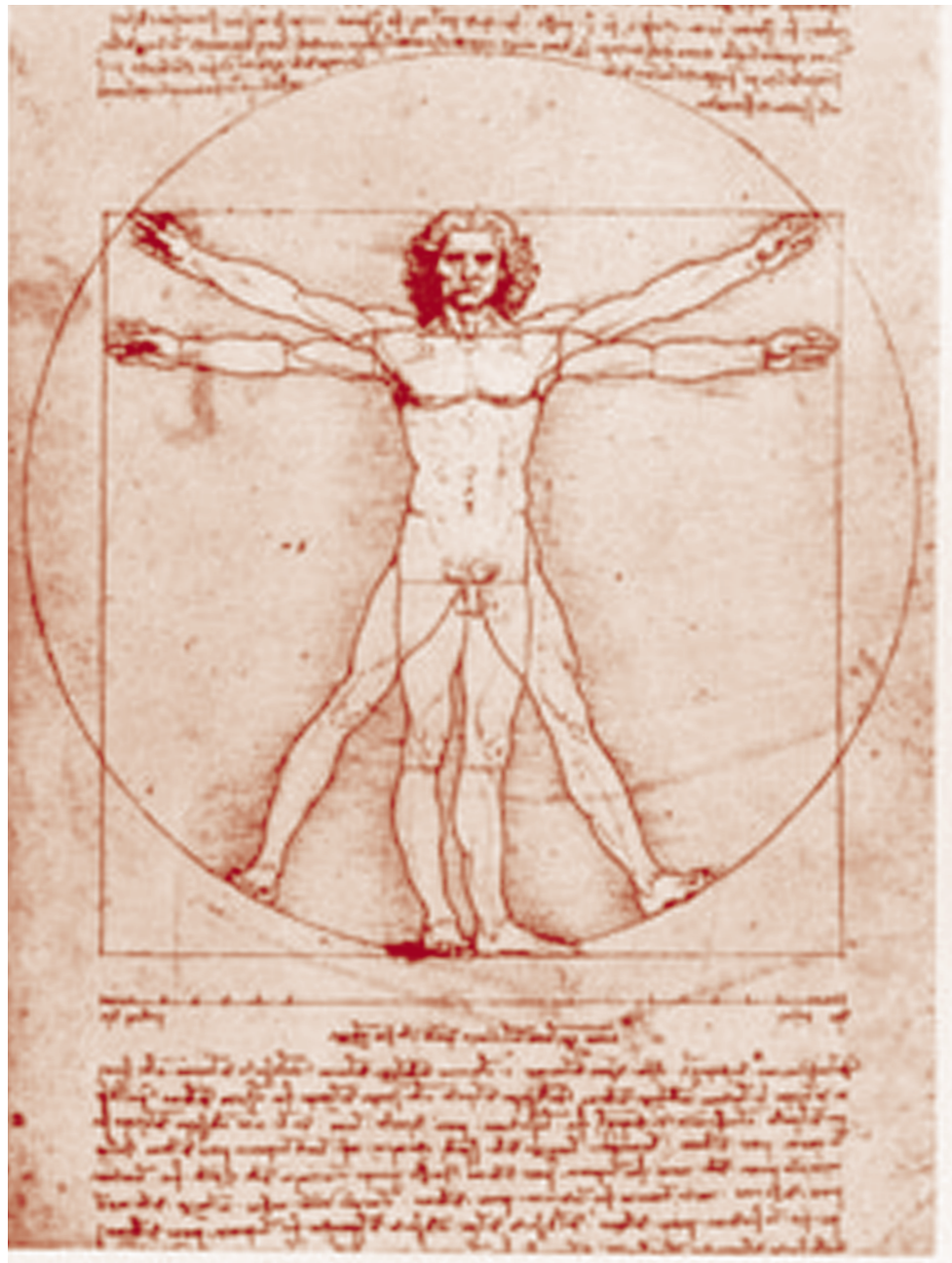
ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ



Εγγεγραμμένα Σχήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη καθώς και με τη γωνία χορδής και εφαπτομένης. Έτσι, θα μας δοθεί η δυνατότητα αναλυτικής μελέτης βασικών γεωμετρικών τόπων στον κύκλο.

Τέλος, θα μελετήσουμε τα εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα καθώς και συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές που γίνονται με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.



Σχέδιο και σημειώσεις του Ιταλού ζωγράφου της Αναγέννησης Leonardo da Vinci (1452-1519), από το *Architectura de Vitruve*, περίπου 1492.

Εγγεγραμμένη γωνία

6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί

Δίνεται μία κυρτή γωνία $\hat{x}\hat{A}y$ και ένας κύκλος (O,R) . Οι σχετικές θέσεις τους καθορίζονται από τη θέση της κορυφής της και των πλευρών της:

(i) Αν η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου (σχ.1), τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη, όπως είδαμε στη § 2.18.

(ii) Αν η κορυφή (σχ.2) είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** γωνία του κύκλου.

Το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ **βαίνει** στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

(iii) Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου (σχ.3), τότε η γωνία λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.

6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

Η σχέση μίας εγγεγραμμένης και μίας επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

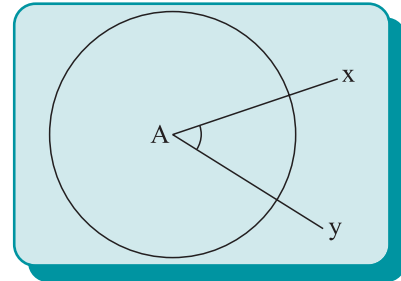
Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

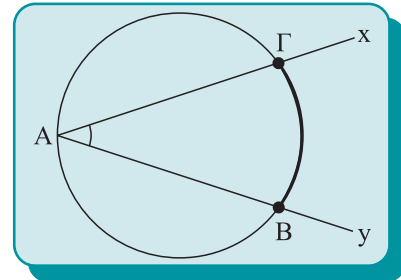
Απόδειξη

Έστω κύκλος (O,R) και ένα τόξο του $\widehat{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\hat{AOB}$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\widehat{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $\hat{AOB} = 2\hat{AGB}$.

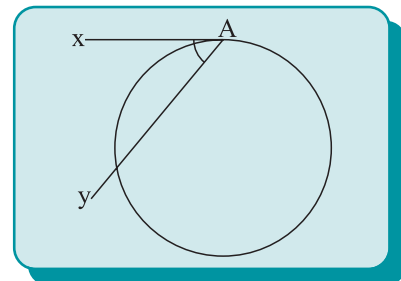
(i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $\hat{AGB}$ (σχ.4α). Έστω Γ' το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ . Το τρίγωνο $AO\Gamma$ είναι ισοσκελές, επομένως $\hat{OAG} = \hat{OGA}$. Η $\Gamma'\hat{O}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AO\Gamma$, επομένως $\Gamma'\hat{O}A = 2\hat{OGA}$ και όμοια έχουμε ότι $\Gamma'\hat{O}B = 2\hat{OGB}$.



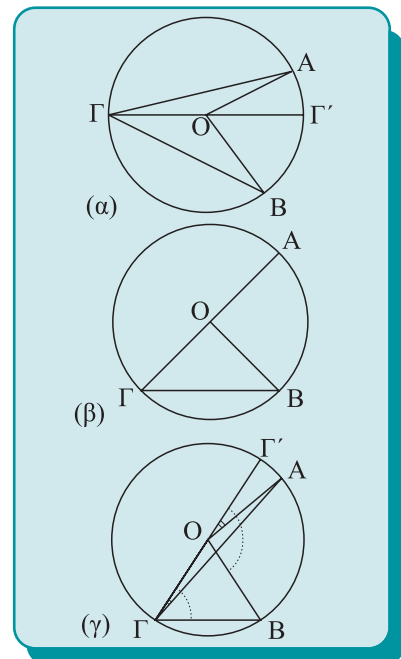
Σχήμα 1



Σχήμα 2



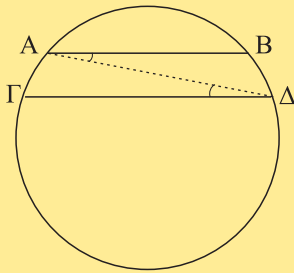
Σχήμα 3



Σχήμα 4

ΣΧΟΛΙΟ

Από το πόρισμα (iii) συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα (σχ.5) και αντίστροφα.



Σχήμα 5

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$$\hat{A}OB = 2\hat{A}B.$$

(ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το Ο ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $\hat{A}B$ (σχ.4β). Η επίκεντρη γωνία $\hat{A}OB$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΓOB , οπότε $\hat{A}OB = 2\hat{A}B$.

(iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ.4γ).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- (ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- (iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

Η σχέση μίας γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

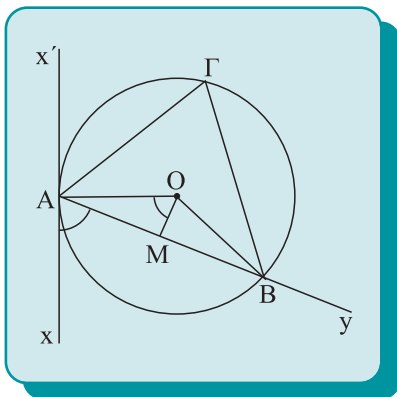
Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $\angle xAy$ είναι οξεία (σχ. 6) και $\hat{A}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής AB . Γνωρίζουμε ότι $\hat{A}B = \frac{\hat{A}OB}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα OM , οπότε $\hat{A}OM = \hat{MOB} = \frac{\hat{A}OB}{2} = \hat{A}B$.

Αλλά $\angle xAy = \hat{A}OM$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $\angle xAy = \hat{A}B$.

Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.



Σχήμα 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Μία γωνία που η κορυφή της ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου λέγεται **γωνία δύο τεμνουσών** και εκφράζεται ως συνάρτηση των εγγεγραμμένων γωνιών, που σχηματίζουν οι πλευρές της με τον κύκλο.

(i) Ας θεωρήσουμε γωνία $\hat{x}\hat{A}y$, όπου η κορυφή της A είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.7). Οι πλευρές της Ax , Ay και οι προεκτάσεις τους τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1, Γ_1 και B_2, Γ_2 αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι η γωνία $\hat{x}\hat{A}y$ ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχει η $\hat{x}\hat{A}y$ και η κατακορυφήν της, δηλαδή:

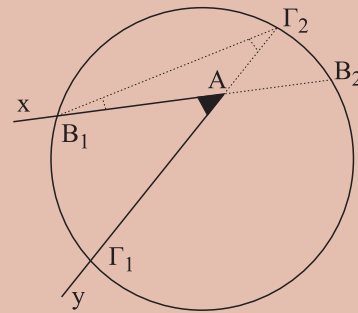
$$\hat{x}\hat{A}y = \hat{A}B_1\Gamma_2 + \hat{B}_1\Gamma_2A.$$

(ii) Ας θεωρήσουμε γωνία $\hat{x}\hat{A}y$ όπου η κορυφή της A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.8). Οι πλευρές της Ax , Ay τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι η γωνία $\hat{x}\hat{A}y$ ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών, που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η $\hat{x}\hat{A}y$, δηλαδή

$$\hat{x}\hat{A}y = \hat{B}_2\hat{B}_1\Gamma_2 - \hat{B}_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1, \text{ όπου } \hat{B}_2\hat{B}_1\Gamma_2 > \hat{B}_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1.$$

Απόδειξη

(i) Η $\hat{x}\hat{A}y$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή $\hat{x}\hat{A}y = \hat{A}B_1\Gamma_2 + \hat{B}_1\Gamma_2A$.

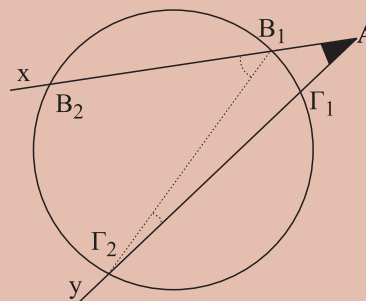


Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

$$\hat{x}\hat{A}y = \frac{\widehat{B_1\Gamma_1}}{2} + \frac{\widehat{B_2\Gamma_2}}{2}.$$

(ii) Η γωνία $\hat{B}_2\hat{B}_1\Gamma_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως $\hat{B}_2\hat{B}_1\Gamma_2 = \hat{x}\hat{A}y + \hat{A}\hat{\Gamma}_2B_1$ ή $\hat{x}\hat{A}y = \hat{B}_2\hat{B}_1\Gamma_2 - \hat{B}_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$.



Σχήμα 8

ΣΧΟΛΙΟ

$$\hat{x}\hat{A}y = \frac{\widehat{B_2\Gamma_2}}{2} - \frac{\widehat{B_1\Gamma_1}}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους και φέρουμε τις εφαπτόμενές τους σε καθένα από τα κοινά σημεία τους.

(i) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων σε καθένα από τα κοινά σημεία τους σχηματίζουν ίσες γωνίες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται **γωνία των δύο κύκλων**.

(ii) Αν η γωνία των δύο κύκλων είναι ορθή, λέμε ότι **οι κύκλοι τέμνονται ορθογώνια** ή ότι είναι **ορθογώνιοι**. Να αποδειχθεί ότι, αν οι δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι, οι εφαπτόμενες του ενός κύκλου στα κοινά σημεία τους διέρχονται από το κέντρο του άλλου κύκλου.

Απόδειξη

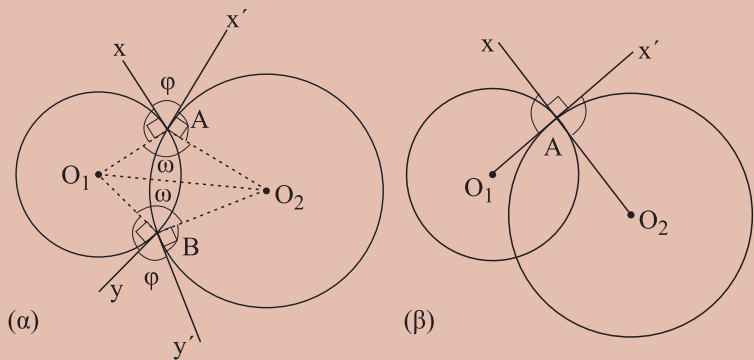
(i) Ας θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους με κέντρα O_1 και O_2 και A, B τα σημεία τομής τους. Από την ισότητα των τριγώνων O_1AO_2 και O_1BO_2 θα έχουμε ότι

$$\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = \omega \text{ (σχ.9α).}$$

Ας φέρουμε τώρα τις εφαπτόμενες των δύο κύκλων στο σημείο A και στο σημείο B . Οι

εφαπτόμενες στο A σχηματίζουν γωνία $\angle x'Ax = 2L - \omega$ (γιατί $\angle O_1Ax = \angle O_2Ax' = 1L$) και όμοια οι εφαπτόμενες στο B σχηματίζουν γωνία $\angle y'By = 2L - \omega$. Επομένως, $\angle x'Ax = \angle y'By$.

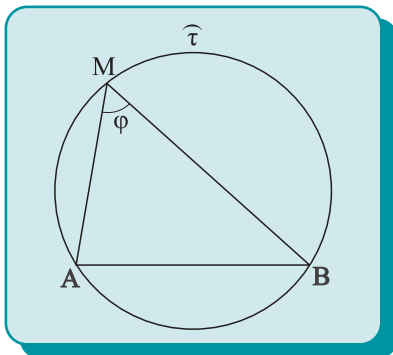
(ii) Αν δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αν $\phi = 1L$ (σχ.9β), έχουμε ότι $\angle O_1AO_2 + \angle O_1Ax = 2L$, οπότε οι ημιευθείες Ax και AO_2 είναι αντικείμενες.



Σχήμα 9

6.4

Βασικοί γεωμετρικοί τύποι στον κύκλο
Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία



Σχήμα 10

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M που δεν ανήκει στην ευθεία AB (σχ.10). Αν ϕ είναι η γωνία $\angle AMB$ τότε λέμε ότι το σημείο M **βλέπει το τμήμα AB** υπό γωνία ϕ ή ισοδύναμα το AB **φαίνεται** από το σημείο M υπό γωνία ϕ . Αν τ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την AB και διέρχεται από το M , τότε λέμε ότι το τόξο τ **δέχεται γωνία ϕ** .

Θα δούμε τώρα πως κατασκευάζεται ένα τόξο που να δέχεται γωνία ϕ .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

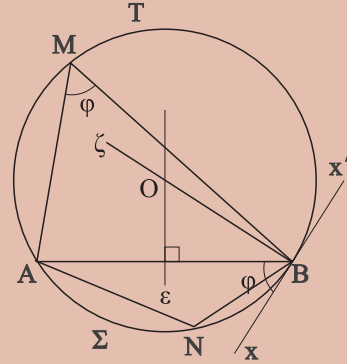
Δίνεται ένα τμήμα AB και μία γωνία φ . Να κατασκευασθεί τόξο κύκλου που να έχει χορδή το AB και να δέχεται γωνία φ .

- Έστω $\varphi < 1L$

Ανάλυση

Αν το ευθύγραμμο τμήμα AB φαίνεται από ένα σημείο M υπό γωνία φ , δηλαδή $\hat{AMB} = \varphi$, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AMB (βλ. Πρόγραμμα (iii), § 6.2).

Έστω AB ένα τόξο κύκλου, κέντρου O , με χορδή την AB τέτοιο, ώστε για κάθε σημείο του M διαφορετικό των A, B να ισχύει $\hat{AMB} = \varphi$ (σχ.11). Αν φέρουμε την ημιευθεία Bx εφαπτόμενη του κύκλου στο B θα έχουμε $\hat{ABx} = \hat{AMB} = \varphi$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και επομένως η Bx είναι μία σταθερή, ανεξάρτητη του M , ημιευθεία. Επειδή $OB \perp Bx$, το κέντρο O θα βρίσκεται στη σταθερή ευθεία ζ που είναι κάθετη στη Bx στο B . Αλλά το O βρίσκεται επίσης και στη μεσοκάθετο ε του AB , άρα είναι η τομή των ε και ζ .



Σχήμα 11

Σύνθεση

Θεωρούμε το δοσμένο τμήμα AB και φέρουμε ημιευθεία Bx έτσι, ώστε $\hat{ABx} = \varphi$. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία ζ κάθετη της Bx στο B , που τέμνει τη μεσοκάθετο ε του AB στο O . Γράφουμε τον κύκλο (O, OA) και το τόξο $\widehat{ATB}$ (σχ.11) (χωρίς τα άκρα του) είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Για κάθε σημείο M του τόξου $\widehat{ATB}$ έχουμε $\hat{AMB} = \hat{ABx} = \varphi$, αφού η $\hat{ABx}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{AMB}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, ενώ για κάθε σημείο N του τόξου $\widehat{ASB}$ έχουμε

$$\hat{ANB} = \hat{ABx'} = 2L - \hat{ABx} = 2L - \varphi,$$

όπου Bx' η αντικείμενη ημιευθεία της Bx .

Διερεύνηση

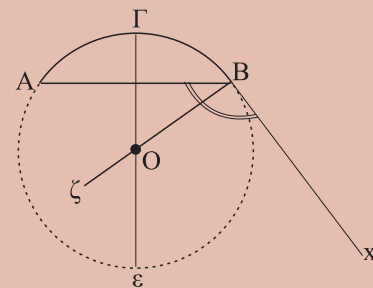
Για να υπάρχει λύση πρέπει η ευθεία ζ να τέμνει την ε , το οποίο συμβαίνει πάντοτε, αφού $\hat{ABx} = \varphi \neq 0$.

- Έστω $\varphi > 1L$

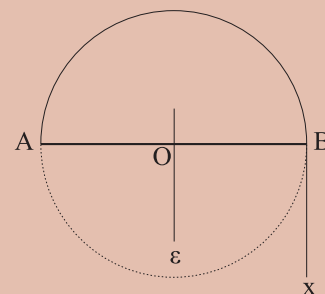
Τότε με τον ίδιο, όπως παραπάνω, τρόπο κατασκευάζουμε τον κύκλο κέντρου O και το τόξο $\widehat{AGB}$ (σχ.12) που είναι το ζητούμενο (χωρίς τα άκρα του).

- Έστω $\varphi = 1L$

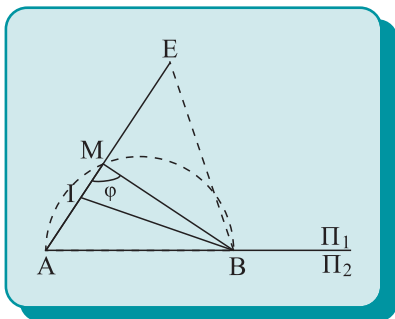
Τότε το σημείο τομής των ευθειών ε, ζ είναι το μέσο O του AB (σχ.13). Επομένως, το ζητούμενο τόξο είναι καθένα από τα ημικύκλια διαμέτρου AB , χωρίς τα άκρα τους A και B .



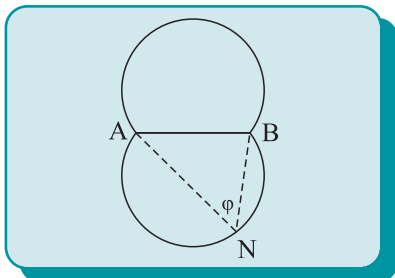
Σχήμα 12



Σχήμα 13



Σχήμα 14



Σχήμα 15

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω τόξο $\widehat{AB}$ που δέχεται γωνία φ και Π_1 το ημιεπίπεδο στο οποίο περιέχεται (σχ.14). Για κάθε σημείο M του $\widehat{AB}$ έχουμε $\widehat{AMB} = \varphi$, ενώ για κάθε σημείο I του τμήματος AM ή σημείο E της προέκτασης του AM έχουμε αντίστοιχα $\widehat{AIB} > \varphi$ και $\widehat{AEB} < \varphi$.

Άρα τα μοναδικά σημεία του Π_1 από τα οποία το AB φαίνεται υπό γωνία φ είναι τα σημεία του $\widehat{AB}$ εκτός από τα άκρα του. Όμοια αποδεικνύεται ότι τα μοναδικά σημεία του Π_2 που βλέπουν το AB υπό γωνία φ είναι τα σημεία του τόξου $\widehat{ANB}$ συμμετρικού του $\widehat{AB}$ ως προς την ευθεία AB (σχ.15).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Ο γεωμετρικός τύπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό γωνία φ είναι δύο τόξα κύκλων, χορδής AB , χωρίς τα άκρα τους A, B , συμμετρικά ως προς την ευθεία AB , καθένα από τα οποία δέχεται γωνία φ .

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου είναι ότι:

Ο γεωμετρικός τύπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος με διάμετρο AB , χωρίς τα σημεία A και B .

ΣΧΟΛΙΟ

Στη λύση του παραπάνω προβλήματος, εκτός από τα γνωστά μας βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση αναφέραμε πριν από αυτά και το βήμα της **ανάλυσης**. Το βήμα αυτό το κάνουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή και περιλαμβάνει τα εξής: Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο σχήμα και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν την κατασκευή του σε γεωμετρικές κατασκευές που μας είναι ήδη γνωστές. Στη σύνθεση ή αλλιώς κατασκευή έχοντας οδηγό την ανάλυση κάνουμε όλες εκείνες τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που τελικά θα μας οδηγήσουν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Τα παραπάνω βήματα ακολουθούν, όπως είναι γνωστό, το βήμα της απόδειξης και το βήμα της διερεύνησης (§ 3.17).

Η μέθοδος αυτή των τεσσάρων βημάτων: ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση είναι γνωστή ως **αναλυτική - συνθετική** μέθοδος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.

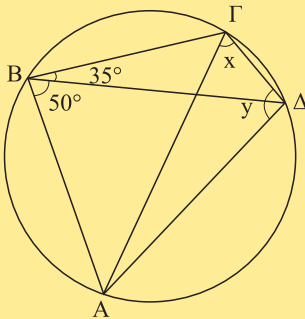
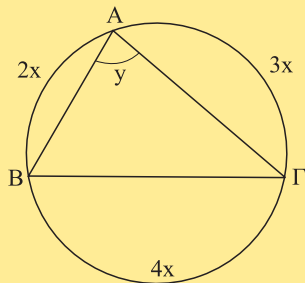
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

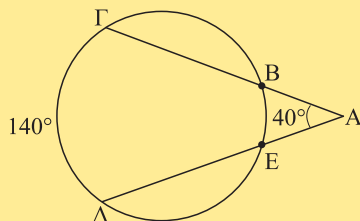
1. Πότε μια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;
2. Αν φ και ω είναι αντίστοιχα η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε:
α. $\varphi = \omega$, β. $\varphi = 2\omega$, γ. $\omega = 2\varphi$, δ. $\varphi = 90^\circ + \omega$,
ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Συμπληρώστε το κενό στην επόμενη πρόταση:
“Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με”
4. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βλέπουν ένα γνωστό τμήμα υπό γωνία $\varphi < 180^\circ$ ή $\varphi = 180^\circ$;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

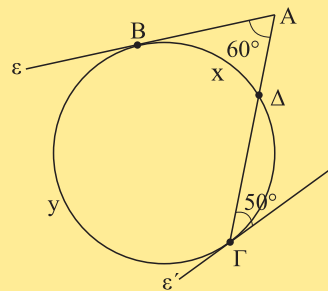
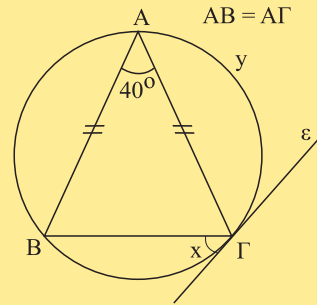
1. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y .



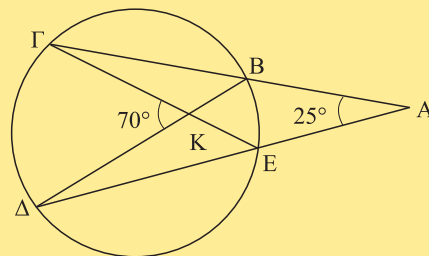
2. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 40^\circ$, να βρείτε το μέτρο του τόξου BE.



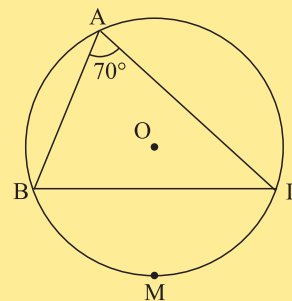
3. Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε' είναι εφαπτόμενες να βρεθούν τα x και y .



4. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 25^\circ$, να βρείτε τα μέτρα των τόξων EB και ΓΔ.



5. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\widehat{BM} = \widehat{MG}$ και $\hat{A} = 70^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων OBG και MBΓ.

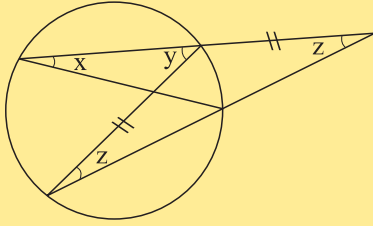


6. Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;
i) $x - y + z = 0$,
ii) $x - 2y + z = 0$,
iii) $x - y + z = 0$,

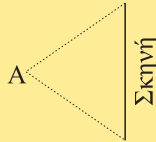
iv) $x + y = 2z$,

v) καμία από τις παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7. Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα "Α". Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α.

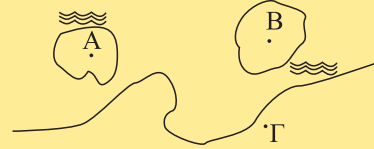


Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή AB κύκλου (K) είναι παράλληλη στη χορδή AB και αντίστροφα.
2. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το B.
3. Δύο κάθετες χορδές AB, ΓΔ κύκλου (K) τέμνονται στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος PM του τριγώνου PBΓ είναι κάθετη στην AD.
4. Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου I είδε τρεις

σημαδούρες για υφάλους στα σημεία A, B, Γ. Με μία πυξίδα διόπτρευσης μέτρησε ότι

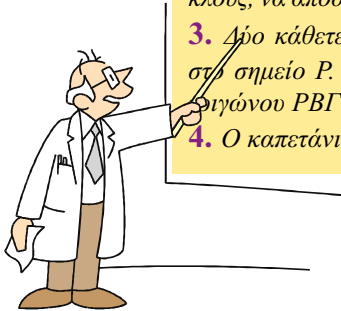
$$\hat{AIB} = 100^\circ, \hat{BIG} = 125^\circ, \hat{GIA} = 135^\circ.$$



Εντόπισε τα σημεία A, B, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Σύνθετα Θέματα

1. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο A και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το A τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία B, B' και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BB' \parallel \Gamma\Gamma'$.
2. Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο A. Μία χορδή BΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η AD διχοτομεί τη γωνία $\hat{BAG}$.
3. Δίνεται κύκλος (K), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του A και ένα σημείο P της ε. Από το P φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα B και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{BAG}$ τέμνει τη χορδή BΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι $PA = PD$.



Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα



6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τετραπλεύρου.

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ABΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- (ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma\Delta}$, ενώ η $\hat{\Gamma}$ στο $\widehat{BA\Delta}$, με $\widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{BA\Delta} = 4\angle$ (σχ.16). Επομένως $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$.

(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ (π.χ. οι A, B) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά $\Gamma\Delta$ (σχ.17).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

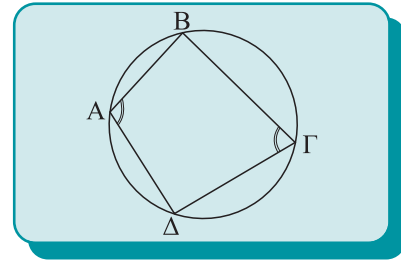
Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.

Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές. Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (**κριτήρια**) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

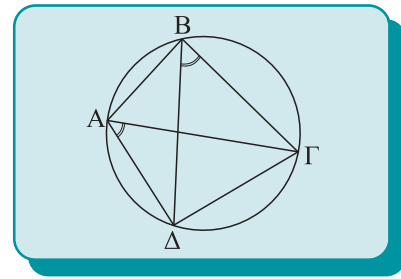
Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

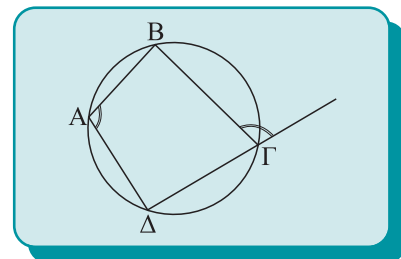
- (i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- (ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- (iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



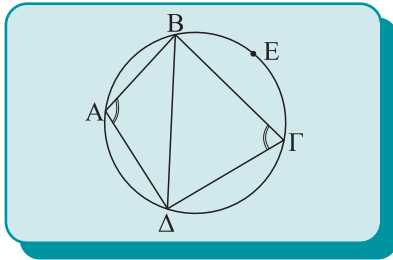
Σχήμα 16



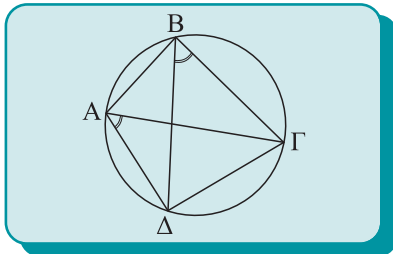
Σχήμα 17



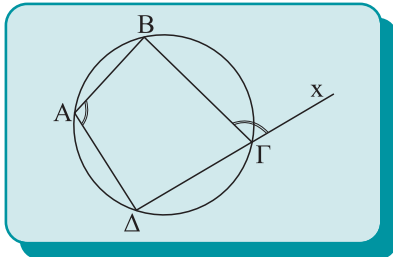
Σχήμα 18



Σχήμα 19



Σχήμα 20



Σχήμα 21

Απόδειξη

(i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία A, B, Δ και τη χορδή του BΔ. Τα σημεία A, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της BΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο BΔΔ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο BΕΔ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του BΕΔ και ομοκυκλικό με τα A, B, Δ.

(ii) Έστω τετράπλευρο ABΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = \varphi.$$

Τότε τα A,B ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. § 6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα A,B όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

(iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}B = \hat{A}$ (σχ. 21), τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου (i).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η Περιγεγραμμένο και περιγράψιμο τετράπλευρο σε κύκλο

Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται *περιγεγραμμένο* στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται *εγγεγραμμένος* στο τετράπλευρο αυτό.

(A) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ABΓΔ:

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

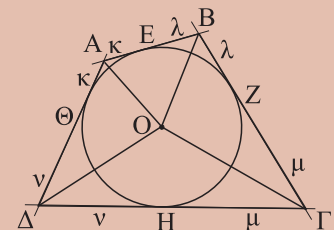
(B) Να αποδείξετε ότι για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις :

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

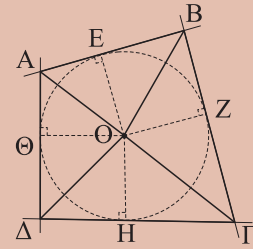
Απόδειξη

(A) Απλή (βλ. σχ.22).



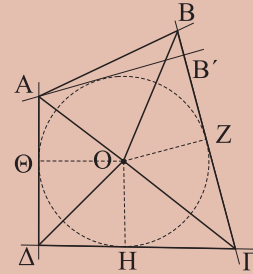
Σχήμα 22

(B) (i) Από το σημείο τομής O των διχοτόμων φέρουμε τις κάθετες $OE, OZ, OH, O\Theta$ στις πλευρές του τετραπλεύρου $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα (σχ. 23). Το O ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ ισαπέχει από τις πλευρές της $AB, \Delta A$, συνεπώς $OE=O\Theta$. Ανάλογα έχουμε ότι $OE=OZ=OH$, οπότε τα σημεία E, Z, H, Θ ανήκουν σε κύκλο (O, OE) και το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο.



Σχήμα 23

(ii) Έστω ότι $AB+\Gamma\Delta = \Delta A+B\Gamma$ (1). Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο O και από το O φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές των γωνιών αυτών, $O\Theta \perp \Delta A$, $OH \perp \Gamma\Delta$ και $OZ \perp B\Gamma$ (σχ.24). Τότε $O\Theta = OH = OZ$ και ο κύκλος $(O, O\Theta)$ εφάπτεται στις τρεις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$. Έστω ότι δεν εφάπτεται στην AB . Φέρουμε την εφαπτομένη από το A στον κύκλο $(O, O\Theta)$ η οποία τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ σε σημείο B' . Το τετράπλευρο $AB'\Gamma\Delta$ είναι περιγεγραμμένο, οπότε



Σχήμα 24

$$AB' + \Gamma\Delta = \Delta A + B'\Gamma \quad (2).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$AB - AB' = B\Gamma - B'\Gamma \quad \text{ή} \quad AB = AB' + BB',$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως ο κύκλος εφάπτεται και στην πλευρά AB .

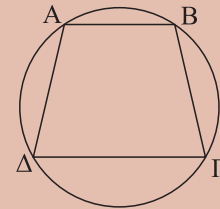
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Αν το $AB\Gamma\Delta$ (σχ.25) είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} + \hat{\Delta} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$.

Επομένως θα είναι και $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2L$, οπότε είναι εγγράψιμο.



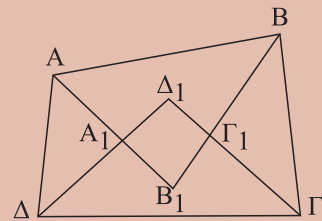
Σχήμα 25

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Απόδειξη

Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του (σχ. 26). Τότε έχουμε ότι



Σχήμα 26

$$B_1\hat{A}_1\Delta_1 = A\hat{A}_1\Delta = 2L - \left(\frac{\hat{A} + \hat{\Delta}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 = B\hat{\Gamma}_1\Gamma = 2L - \left(\frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$B_1\hat{A}_1\Delta_1 + \Delta_1\hat{\Gamma}_1B_1 = 4L - \left(\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}\right) = 2L,$$

επομένως το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:

i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα.

Σ Δ

ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Σ Δ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Δ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Αν $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:

$$\alpha. \hat{A} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta} = 2\angle \quad \beta. \hat{A} = \hat{\Gamma} \quad \gamma. \hat{A} = \hat{\Delta}_{\varepsilon\zeta}$$

$$\delta. \hat{A} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta} \quad \varepsilon. \hat{B} = \hat{\Delta}$$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;

4. i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;

ii) Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;

6. Ποια από τα τετράπλευρα: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο και τραπέζιο είναι εγγράψιμα;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$ και $\hat{B}_{\varepsilon\zeta} = 80^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου.

2. Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.

3. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από τα A και B φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλο στα Δ και Δ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

2. Ένας κύκλος (K) διέρχεται από τις κορυφές B και Γ τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ στα σημεία Δ , E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο A .

3. Να αποδείξετε ότι τα ύψη AD , BE , ΓZ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔEZ .

4. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (O, R). Αν BD και ΓE είναι ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι $OA \perp \Delta E$ (Θεώρημα Nagel).

2. Δίνεται μία χορδή $B\Gamma$ ενός κύκλου (O, R) και οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο M της $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στην OM , που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $DM = ME$.

3. Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).

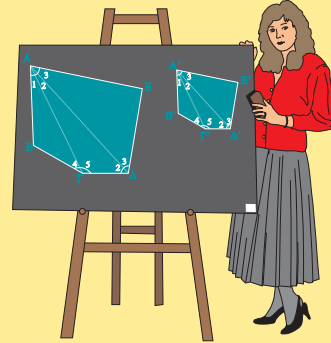
4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του AD . Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ADB και $AD\Gamma$ τέμνουν τις πλευρές $A\Gamma$ και AB στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Gamma E = BZ$.



Δραστηριότητα

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:

- i) δύο δοσμένα σημεία,
 - ii) τρία δοσμένα σημεία,
 - iii) τέσσερα δοσμένα σημεία,
- και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.



6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής AB , τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα AB υπό δοσμένη γωνία φ .

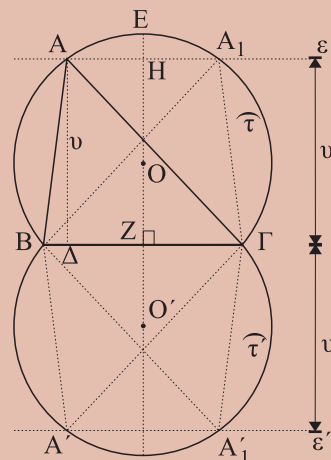
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει $B\Gamma = \alpha$, ύψος $AD = v$ και γωνία $\hat{A} = \omega$, όπου α, v γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω $AB\Gamma$ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει $B\Gamma = \alpha$, ύψος $AD = v$ και γωνία $\hat{A} = \omega$. Επειδή $\hat{A} = \omega$ η κορυφή A βλέπει γνωστό τμήμα $B\Gamma$ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\widehat{\tau}$ και $\widehat{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη $B\Gamma$ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω . Επίσης, αφού το A απέχει από τη $B\Gamma$ γνωστή απόσταση v , είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη $B\Gamma$ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση v . Άρα η κορυφή A είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2 .



Σχήμα 27

• **Σύνθεση.** Με χορδή τμήμα $B\Gamma = \alpha$ γράφουμε τα τόξα $\widehat{\tau}$ και $\widehat{\tau}'$ που δέχονται γωνία ω . Στη συνέχεια σε απόσταση $ZH = \upsilon$ από τη $B\Gamma$ και εκατέρωθεν αυτής φέρουμε ευθείες $\varepsilon, \varepsilon' // B\Gamma$ που τέμνουν τα τόξα $\widehat{\tau}$ και $\widehat{\tau}'$. Αν A είναι ένα από τα σημεία τομής των T_1, T_2 , το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο $AB\Gamma$, από την κατασκευή έχει $B\Gamma = \alpha$, ύψος $AD = \upsilon$ και γωνία $\hat{A} = \omega$, αφού το A είναι σημείο π.χ. του τόξου $\widehat{\tau}$ τα σημεία του οποίου βλέπουν το $B\Gamma$ υπό γωνία ω .

• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι γεωμετρικοί τόποι T_1 και T_2 να έχουν κοινά σημεία. Έτσι, αν $AD < EZ$ η ευθεία ε τέμνει το τόξο $\widehat{\tau}$ σε δύο σημεία A και A_1 και η ε' τέμνει το $\widehat{\tau}'$ στα A' και A'_1 , οπότε έχουμε τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους (τρεις πλευρές ίσες), οπότε θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση. Αν $AD = EZ$, η ε έχει ένα κοινό σημείο με το $\widehat{\tau}$, το E , οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο $EB\Gamma$ και η ε' έχει ένα κοινό σημείο με το $\widehat{\tau}'$, το E' , οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο $E'B\Gamma$. Τα τρίγωνα αυτά όμως είναι ίσα, οπότε έχουμε μία μόνο λύση. Τέλος, αν $AD > EZ$ δεν υπάρχουν κοινά σημεία των T_1, T_2 και το πρόβλημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Στο παραπάνω πρόβλημα, για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου γνωρίζουμε την πλευρά $B\Gamma = \alpha$, πρέπει να προσδιορίσουμε ακόμα την κορυφή A . Η κορυφή αυτή έχει δύο ιδιότητες:

- (i) βλέπει το τμήμα $B\Gamma$ υπό γνωστή γωνία ω και
- (ii) απέχει από την πλευρά $B\Gamma$, γνωστή απόσταση υ .

Επομένως το A είναι η τομή των δύο γεωμετρικών τόπων, τόξου και ευθείας αντίστοιχα.

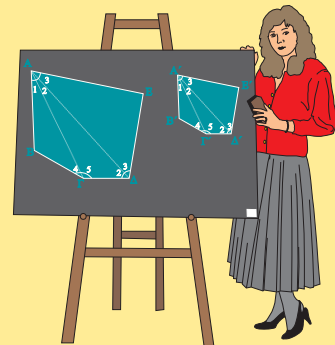
Γενικά, όταν ένα πρόβλημα είναι ή ανάγεται στον προσδιορισμό ενός σημείου, τότε βρίσκουμε δύο γεωμετρικούς τόπους T_1, T_2 στους οποίους οφείλει, σύμφωνα με τα δεδομένα, να βρίσκεται το σημείο αυτό και η τομή των T_1, T_2 είναι το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος της χρησιμοποίησης των γεωμετρικών τόπων στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών ανάγεται στον Πλάτωνα.

Δραστηριότητες

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δοσμένου κύκλου που:

- i) είναι παράλληλες σε δοσμένη ευθεία ή
- ii) ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ή
- iii) συντρέχουν σε ένα σημείο.



Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα ακόμα παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

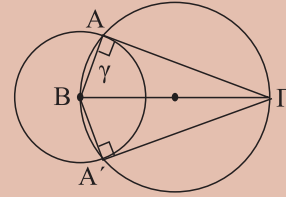
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα $B\Gamma = a$ και μία κάθετη πλευρά του $AB = \gamma$, όπου a και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1\perp$, $B\Gamma = a$ και $AB = \gamma$ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά $B\Gamma$. Το σημείο A :

- (i) απέχει απόσταση γ από το B , άρα ανήκει στον κύκλο (B, γ) , και
- (ii) βλέπει το $B\Gamma$ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου $B\Gamma$.



Σχήμα 28

• **Σύνθεση.** Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα A και A' . Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'\Gamma B$ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1\perp$, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και $AB = \gamma$ ως ακτίνα του κύκλου (B, γ) .

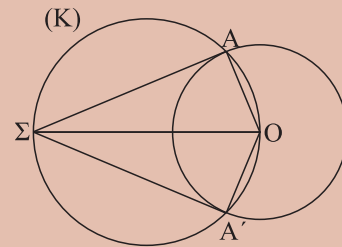
• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν $a > \gamma$. Όταν $a \leq \gamma$, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ .

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΣA είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ , όπου A το σημείο επαφής (σχ.29). Φέρουμε την ακτίνα OA , τότε η γωνία $\hat{OAS}$ είναι ορθή και επομένως το A είναι σημείο του γνωστού κύκλου (K) με διάμετρο το γνωστό τμήμα OS . Άρα το A είναι κοινό σημείο του (O, R) και του (K) . Επομένως το A προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣA .



Σχήμα 29

• **Σύνθεση.** Με διάμετρο OS γράφουμε κύκλο (K) , ο οποίος τέμνει τον (O, R) στα σημεία A και A' . Φέρουμε τις ευθείες ΣA και $\Sigma A'$ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

• **Απόδειξη.** Είναι $\hat{OAS} = \hat{OA'S} = 1\perp$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (K) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες OA και OA' είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣA και $\Sigma A'$ και επομένως οι ΣA και $\Sigma A'$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (O, R) .

• **Διερεύνηση.** Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (K) και (O,R) τέμνονται αφού ο (K) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο O και από το εξωτερικό σημείο Σ του (O,R) .

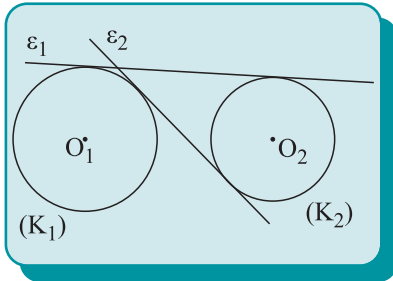
Συμπέρασμα:

Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δύο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

• **Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων**

Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (K_1) και (K_2) . Μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους λέγεται **κοινή εφαπτομένη** τους. Μία κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (σχ.30) χαρακτηρίζεται ως **εξωτερική**, όπως η ε_1 , όταν οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της και ως **εσωτερική**, όπως η ε_2 , όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.

Στο επόμενο πρόβλημα δίνουμε την κατασκευή των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων.



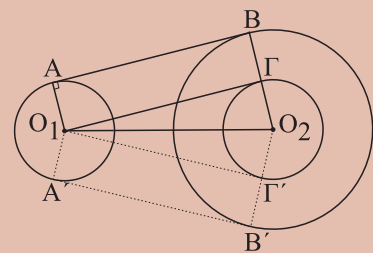
Σχήμα 30

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, ρ) , (O_2, R) με $R > \rho$ και $O_1O_2 > R - \rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενές τους.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω AB μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (O_1, ρ) , (O_2, R) , όπου A, B τα σημεία επαφής της με τους κύκλους αυτούς αντίστοιχα (σχ.31). Τότε οι ακτίνες O_1A , O_2B είναι κάθετες στην AB και επομένως παράλληλες. Από το O_1 φέρουμε την παράλληλη προς την AB , που τέμνει την O_2B στο Γ , οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma O_1$ είναι ορθογώνιο. Έτσι $O_1\Gamma \perp O_2\Gamma$ οπότε ο κύκλος κέντρου O_2 και ακτίνας $O_2\Gamma = O_2B - B\Gamma = O_2B - O_1A = R - \rho$ εφάπτεται στην $O_1\Gamma$ στο Γ .



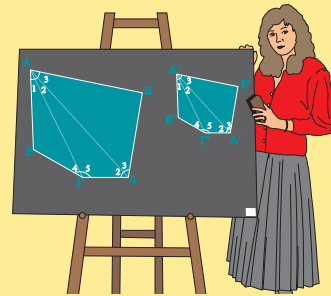
Σχήμα 31

• **Σύνθεση.** Με κέντρο O_2 και ακτίνα $R - \rho$ γράφουμε κύκλο και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες του $O_1\Gamma$ και $O_1\Gamma'$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις $O_2\Gamma$, $O_2\Gamma'$ που τέμνουν τον κύκλο (O_2, R) στα B, B' και στη συνέχεια φέρουμε τις ακτίνες O_1A, O_1A' του κύκλου (O_1, ρ) παράλληλες προς τις O_2B, O_2B' αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες AB και $A'B'$ είναι οι ζητούμενες κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων.

- **Απόδειξη.** Το τετράπλευρο $AB\Gamma O_1$ έχει, από την κατασκευή, $O_1A \parallel \Gamma B$ και $\Gamma B = O_2B - O_2\Gamma = R - (R - \rho) = O_1A$, δηλαδή $O_1A \parallel \Gamma B$, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή η γωνία του $\hat{\Gamma}$ είναι ορθή, αφού η $O_1\Gamma$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(O_2, R - \rho)$ το $AB\Gamma O_1$ είναι ορθογώνιο. Άρα οι ακτίνες O_1A και O_2B είναι κάθετες στην AB και επομένως η AB είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Η AB είναι εξωτερική εφαπτομένη αφού οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η $A'B'$ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη.
- **Διερεύνηση.** Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση όταν είναι δυνατή η χάραξη των εφαπτομένων $O_1\Gamma$ και $O_1\Gamma'$ από το O_1 προς τον κύκλο $(O_2, R - \rho)$. Αυτό όμως είναι δυνατό όταν το O_1 είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου $(O_2, R - \rho)$, το οποίο ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε ότι $O_1O_2 > R - \rho$. Επομένως, όταν $O_1O_2 > R - \rho$ υπάρχουν δύο εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες των κύκλων (O_1, ρ) και (O_2, R) .

Δραστηριότητα

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, ρ) και (O_2, R) με $O_1O_2 > R + \rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενές τους. Στη συνέχεια να εξετάσετε το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων ανάλογα με τις σχετικές θέσεις τους.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που
 - i) έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο O ,
 - ii) ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία A και B ,
 - iii) έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ϵ ,
 - iv) ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας,
 - v) ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες,
 - vi) ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες,
 - vii) βλέπουν ένα δοσμένο τμήμα AB υπό ορισμένη γωνία ω .

2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ κατασκευάζεται όταν δίνονται:

- | | | |
|---|----------|-----------|
| i) δύο κάθετες πλευρές του. | Σ | Λ |
| ii) μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα. | Σ | Λ |
| iii) μία οξεία γωνία του. | Σ | Λ |
| iv) η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του. | Σ | Λ |
| v) η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και η υποτείνουσα. | Σ | Λ |

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων:
 - i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του,

ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης που κινείται σε απόσταση 10km πάνω από αυτή.

2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας:

i) που κυλίνουν στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,

ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

3. Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δέντρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δέντρα A και B . Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.

4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ που έχει δοσμένη υποτείνουσα.

2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του δοσμένου σημείου A πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο B .

3. Δίνεται ορθή γωνία $\chi\hat{O}\gamma$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Οι κορυφές B και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) κινούνται πάνω στις $O\gamma$ και $O\chi$ αντί-

στοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της υποτείνουσας $B\Gamma$.

4. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) του οποίου δίνονται:

i) η διάμεσος $AM=\mu$ και μία κάθετη πλευρά.

ii) η διάμεσος $AM=\mu$ και το ύψος $AD = \lambda$.

Σύνθετα Θέματα

1. Από ένα μεταβλητό σημείο P της πλευράς $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ που τέμνουν τις $A\Gamma$ και AB στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M του ZE .

2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίνονται:

i) η πλευρά $B\Gamma=\lambda$, η γωνία $\hat{A} = \omega$ και η διάμεσος $AM = \mu$.

ii) η πλευρά $B\Gamma=\lambda$, η γωνία $\hat{A} = \omega$ και η διάμεσος $BN = \mu$.

3. Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που έχει πλευρές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA ίσες με τα γνωστά τμήματα κ , λ , μ , ν αντίστοιχα, και η γωνία του $\hat{A}$ είναι ίση με δοσμένη γωνία ω .



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ορθογώνιο στο A . Από τα άκρα B, Γ της υποτείνουσας $B\Gamma$ φέρουμε κάθετες Bx και Γy στη $B\Gamma$ και προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$, που τέμνει την Γy στο E και κάθετη στην AB που τέμνει την Bx στο Δ . Να αποδειχθεί ότι:

i) τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά,

ii) τα τετράπλευρα $A\Delta B M$ και $A M \Gamma E$ είναι εγγράφιμα σε κύκλο,

iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\Delta M E$ εφάπτεται στη $B\Gamma$.

2. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει σταθερή την πλευρά $B\Gamma$ και η κορυφή A μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών AB και $A\Gamma$ να είναι σταθερή. Αν M είναι η προβολή της κορυφής B πάνω στη διχοτόμο $A\Delta$ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M .

3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ από τις γωνίες $\hat{B} = \omega$, $\hat{\Gamma} = \phi$ και την περίμετρό του δ .

4. Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο A εκτός αυτού. Από το A να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα B, Γ ώστε το B να είναι μέσο του $A\Gamma$.

5. Δίνεται εγγράφιμο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία E, Z, H, Θ . Να αποδείξετε ότι το $EZH\Theta$ είναι εγγράφιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).

6. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AZE, BZ\Delta$ και $\Gamma E\Delta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7. Έστω $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος και E, Z σημεία των $A\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $BE, \Delta E, \Gamma Z$ και AZ σχηματίζουν εγγράφιμο τετράπλευρο.

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ορθόκεντρο του H . Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα, $AH_1, BH_2, \Gamma H_3$ τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των $HA, HB, H\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο $H_1 M_1 M_2 M_3$ είναι εγγράφιμο,

ii) το τετράπλευρο $Z_1 H_1 M_1 M_2$ είναι εγγράφιμο,

iii) τα σημεία $M_i, H_i, Z_i, i = 1, 2, 3$ είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

• Εγγεγραμμένη γωνία

- i) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.
- ii) Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

• Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

- i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- iii) Κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

• Εγγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

- i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

• Περιγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

- i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.
- ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

• Περιγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

- i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

• Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές

Αναλογίες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά τα ευθύγραμμα τμήματα. Θα εισάγουμε την έννοια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων, απ' όπου θα προκύψει η έννοια της μέτρησης και του μέτρου ευθύγραμμου τμήματος.

Στη συνέχεια θα αποδειχθούν οι βασικές προτάσεις του κεφαλαίου που είναι το θεώρημα του Θαλή και το θεώρημα των Διχοτόμων ενός τριγώνου.



Βασίλη Καντίνσκυ, (Ρώσος, 1866 - 1944), «Μέσα στο μαύρο τετράγωνο» 1923.

7.1 Εισαγωγή

Μέγεθος γενικά λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. **Γεωμετρικά μεγέθη** λέγονται τα μεγέθη που εξετάζονται από τη Γεωμετρία. Τέτοια είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα τόξα, οι επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, οι όγκοι των στερεών κτλ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα απλούστερα γεωμετρικά μεγέθη, τα ευθύγραμμα τμήματα.

Αρχικά θα διαιρέσουμε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα σε n ίσα μέρη.

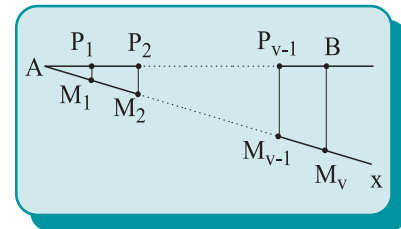
7.2 Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε n ίσα μέρη

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB , το οποίο θέλουμε να διαιρέσουμε σε n ίσα μέρη ($n \geq 2$).

Φέρουμε τυχαία ημιευθεία Ax , διαφορετική από την AB και παίρνουμε με το διαβήτη πάνω σε αυτή n διαδοχικά ίσα τμήματα $AM_1 = M_1M_2 = \dots = M_{n-1}M_n$.

Έπειτα φέρουμε το τμήμα M_nB και από τα σημεία $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ φέρουμε παράλληλες προς τη M_nB που τέμνουν το AB στα σημεία $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ αντίστοιχα. Οι παράλληλες αυτές, σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, § 5.6, ορίζουν n ίσα τμήματα πάνω στην AB . Επομένως τα n ίσα ευθύγραμμα τμήματα $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$ είναι τα ζητούμενα.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε, γενικά, το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με οποιοδήποτε ρητό αριθμό και το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

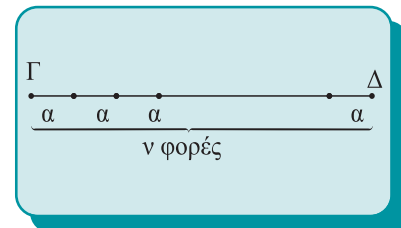


Σχήμα 1

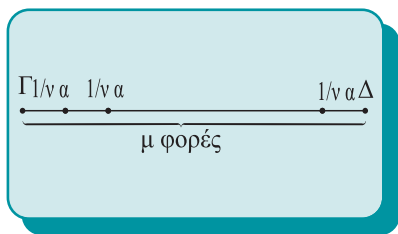
7.3 Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό – Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων.

• Όπως είδαμε στην §2.8, αν $AB=a$ ευθύγραμμο τμήμα και n φυσικός αριθμός, ονομάζουμε γινόμενο του τμήματος AB επί το φυσικό αριθμό n το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, το οποίο είναι το άθροισμα n ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το $AB=a$. Γράφουμε $\Gamma\Delta=n \cdot AB$.

• Αν χωρίσουμε, όπως παραπάνω, το ευθύγραμμο τμήμα $AB=a$ σε n ίσα μέρη καθένα από τα n ίσα τμήματα τα παριστάνουμε



Σχήμα 2



Σχήμα 3

με $\frac{AB}{v}$ ή $\frac{1}{v} \cdot AB$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ λέγεται **υποδι-αίρεση** (ή **υποπολλαπλάσιο**) του ΑΒ αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός v ώστε $EZ = \frac{AB}{v}$.

• Αν μ είναι ένας θετικός ακέραιος και προσθέσουμε μ τέτοια τμήματα προκύπτει το τμήμα $\Gamma\Delta = \mu\left(\frac{1}{v}AB\right) = \frac{\mu}{v}AB$.

Ονομάζουμε λοιπόν **γινόμενο** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ επί το **θετικό ρητό** αριθμό $q = \frac{\mu}{v}$ το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, το οποίο είναι το άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\frac{1}{v}AB$.

Γράφουμε $\Gamma\Delta = q \cdot AB$.

Ορίζουμε ότι το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος επί τον αριθμό $q = 0$ είναι το **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.

Αποδεικνύεται ότι για ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα **θετικό άρρητο** αριθμό ρ υπάρχει πάντοτε ένα ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $\Gamma\Delta = \rho \cdot AB$. Η κατασκευή όμως, τέτοιων ευθύγραμμων τμημάτων με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι πάντοτε δυνατή.

• Έστω δύο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και $\Gamma\Delta$. Αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και φυσικοί αριθμοί μ, v τέτοιοι ώστε να ισχύει: $AB = v \cdot K\Lambda$ και $\Gamma\Delta = \mu \cdot K\Lambda$ τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **σύμμετρα**. Το ΚΛ λέγεται **κοινό μέτρο** των ΑΒ και $\Gamma\Delta$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν τα τμήματα ΑΒ και $\Gamma\Delta$ είναι σύμμετρα, τότε θα υπάρχει ένας θετικός ρητός αριθμός

$q = \frac{\mu}{v}$ τέτοιος, ώστε $\Gamma\Delta = q \cdot AB$. Ο αριθμός q λέγεται **λόγος** των δύο τμημάτων και γράφεται με μορφή κλάσματος, δηλαδή $q = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η γραφή $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ δεν σημαίνει διαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων αλλά είναι συμβολική γραφή της ισότητας $\Gamma\Delta = q \cdot AB$. Σημαίνει διαίρεση όταν τα θεωρήσουμε πάνω στην ίδια ευθεία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το κοινό μέτρο δεν είναι μοναδικό γιατί κάθε υποδιαίρεση του ΚΛ είναι κοινό υποπολλαπλάσιο των ΑΒ και $\Gamma\Delta$. Επίσης είναι φανερό ότι **δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι (ακέραια) πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου**.

Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται **ασύμμετρα**. Θα λέμε επίσης ότι ο λόγος τους είναι **άρρητος** αριθμός. Τέτοιες περιπτώσεις δεν είναι σπάνιες. Θα δούμε αργότερα ότι η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο.



7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται **ανάλογα** προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ , δηλαδή όταν ισχύει:

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (1). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ , ώστε να ισχύει $\alpha = \lambda \cdot \beta$ και $\gamma = \lambda \cdot \delta$.

Η παραπάνω ισότητα (1) λέγεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ και δ . Τα τμήματα α και β λέγονται **ομόλογα** ή **αντίστοιχα**. Το ίδιο και τα γ και δ .

Τα α, δ λέγονται **άκροι όροι**, ενώ τα β, γ **μέσοι όροι** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ της αναλογίας λέγεται και **τέταρτη ανάλογος** των α, β και γ .

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέση ανάλογος** των α και γ . Το β λέγεται επίσης **γεωμετρικός μέσος** των α και γ . Συχνά είναι χρήσιμο να αντικαταστήσουμε μια αναλογία με μια ισοδύναμη έκφραση. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των αναλογιών, που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, τις οποίες παίρνουμε χωρίς απόδειξη. Οι σπουδαιότερες από αυτές είναι οι εξής:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν εφαρμόζουμε ιδιότητες σε αναλογίες με όρους ευθύγραμμα τμήματα, θεωρούμε ότι έννοιες που δεν έχουν οριστεί για ευθύγραμμα τμήματα (π.χ. "πολλαπλασιασμός ευθύγραμμων τμημάτων"), αναφέρονται αποκλειστικά στα μήκη τους.

7.5 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Όταν λέμε ότι θα **μετρήσουμε** ένα ευθύγραμμο τμήμα AB σημαίνει ότι θα το συγκρίνουμε με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, το οποίο παίρνουμε ως **μονάδα μέτρησης**. Η επιλογή της μονάδας μέτρησης είναι αυθαίρετη.

Στο 2^ο κεφάλαιο αναφέραμε την έννοια του μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Εδώ θα διατυπώσουμε τον ορισμό με τη βοήθεια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το μέτρο του τμήματος είναι μη αρνητικός αριθμός και θα συμβολίζεται όπως και το τμήμα. Έτσι, **με το σύμβολο AB θα εννοούμε και το μέτρο του τμήματος AB .**
- Όσα αναφέραμε για το **λόγο** και το **μέτρο** τμήματος ισχύουν γενικά και για άλλα γεωμετρικά μεγέθη, όπως η γωνία, το τόξο κτλ.

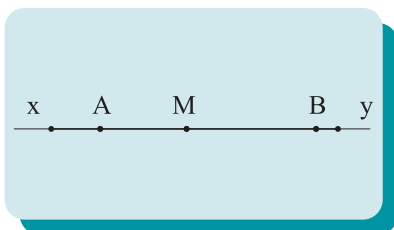
Ορισμός

Μέτρο ή μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του μέτρου τμήματος είναι οι παρακάτω προτάσεις:

- Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα, ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης.
- Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων και είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.

7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο



Σχήμα 4

Είδαμε στην § 7.2 πώς διαιρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε n ίσα μέρη. Θα δούμε στη συνέχεια πότε ένα σημείο M διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δοσμένο λόγο. Σε ευθεία xy δίνονται δύο ορισμένα σημεία A και B . Έστω σημείο M της ευθείας xy , διαφορετικό του B . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Αν το M είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB τότε ο λόγος των αποστάσεών του από τα A και B ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι το M **διαίρει εσωτερικά** το ευθύ-

γραμμο τμήμα AB σε λόγο λ , αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB} = \lambda$. Για το σημείο M ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Το σημείο M είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Πράγματι, αν M' εσωτερικό σημείο του AB ώστε $\frac{M'A}{M'B} = \lambda$, τότε έχουμε:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MA}{M'B} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA + MB} = \frac{MA}{M'A + M'B} \Leftrightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{MA}{AB} \Leftrightarrow MA = M'A,$$

οπότε το σημείο M ταυτίζεται με το σημείο M' .

Αν $\frac{MA}{MB} = \lambda$, τότε

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA + MB} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \Leftrightarrow MA = \frac{\lambda}{\lambda + 1} AB \text{ και}$$

$$MB = AB - MA = AB - \frac{\lambda}{\lambda + 1} AB \Leftrightarrow MB = \frac{1}{\lambda + 1} AB.$$

2) Αν M σημείο στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος AB , τότε πάλι ο λόγος των αποστάσεών του από τα A και B ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι **το M διαιρεί εξωτερικά το ευθύ-**

γραμμο τμήμα AB σε λόγο λ , αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB} = \lambda$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση, **το σημείο M είναι μοναδικό.**

Διερεύνηση

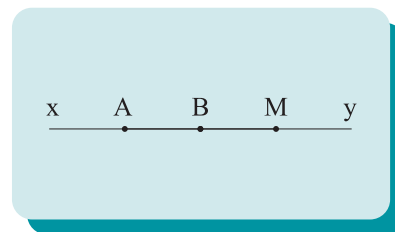
(i) Αν $\lambda=1$, τότε προφανώς δεν υπάρχει σημείο M που να διαιρεί εξωτερικά το AB σε λόγο $\lambda=1$, αφού $MA \neq MB$. Στην περίπτωση αυτή το M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.

(ii) Αν $\lambda > 1$, τότε $\frac{MA}{MB} > 1 \Leftrightarrow MA > MB$, οπότε το M βρίσκεται στην προέκταση του AB , προς το μέρος του B (σχ.5). Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\frac{MA}{MB} = \lambda \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA - MB} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \Leftrightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \Leftrightarrow$$

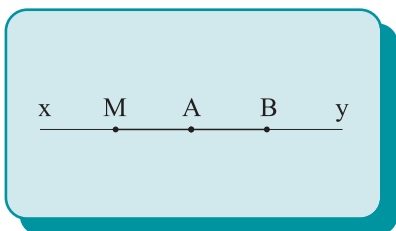
$$MA = \frac{\lambda}{\lambda - 1} AB \text{ και } MB = MA - AB = \frac{\lambda}{\lambda - 1} AB - AB \Leftrightarrow$$

$$MB = \frac{1}{\lambda - 1} AB.$$



Σχήμα 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7



Σχήμα 6

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δεχόμαστε συμβατικά πως, όταν λέμε ότι το σημείο M διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λόγο λ , εννοούμε

$$\frac{MA}{MB} = \lambda \text{ και όχι } \frac{MB}{MA} = \lambda.$$

(iii) Αν $\lambda < 1$ τότε $\frac{MA}{MB} < 1 \Leftrightarrow MA < MB$, οπότε το M βρίσκεται στην προέκταση του AB , προς το μέρος του A (σχ.6). Όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$MA = \frac{\lambda}{1-\lambda} AB \quad \text{και} \quad MB = \frac{1}{1-\lambda} AB.$$

(iv) Οριακές θέσεις

α) Όταν το σημείο M τείνει στο A , το τμήμα MA τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο μηδέν.

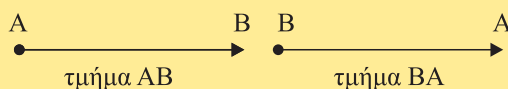
β) Όταν το σημείο M τείνει στο B , το τμήμα MB τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο άπειρο.

γ) Όταν το σημείο M απομακρύνεται απεριόριστα, τα τμήματα MA και MB τείνουν να ταυτιστούν, οπότε ο λόγος λ τείνει στη μονάδα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

• Αν O είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , τότε το σημείο M τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB} = \lambda$ βρίσκεται μεταξύ O και A όταν $\lambda < 1$ και μεταξύ O και B όταν $\lambda > 1$.

• Αν $\frac{MB}{MA} = \lambda$, λέμε ότι το M διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα BA σε λόγο λ . Δηλαδή θεωρούμε ότι τα άκρα A και B του τμήματος είναι **διατεταγμένα**. Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται **προσανατολισμένο**.



Σχήμα 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να ορίσετε τους παρακάτω λόγους:

- i) της υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου προς την αντίστοιχη διάμεσο,
- ii) μιας εγγεγραμμένης γωνίας προς την αντίστοιχη επίκεντρη,
- iii) της διαμέτρου ενός κύκλου, προς την ακτίνα του,
- iv) μιας ορθής γωνίας προς μια γωνία ισόπλευρου τριγώνου.

2. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = 10a$ και $AG = 2a$. Να βρεθούν οι λόγοι:



i) AB προς AG , ii) AG προς AB ,

iii) BG προς AB , iv) AG προς BG .

3. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο του Γ έτσι ώστε $\frac{AG}{GB} = \frac{1}{2}$

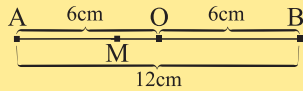


Τότε ο λόγος $\frac{BG}{AB}$ είναι: i) 2 ii) 3 iii) $\frac{3}{2}$ iv) $\frac{2}{3}$

v) κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 12 \text{ cm}$ και το μέσο του O . Να βρεθεί σημείο M του AO , ώστε τα σημεία M και B να διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το τμήμα AO στον ίδιο λόγο.

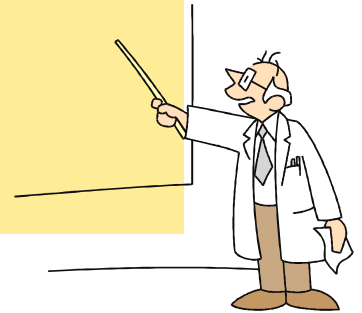


Ασκήσεις Εμπέδωσης

- 1.** Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.
- 2.** Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η γωνία ω .
- 3.** Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 65 cm , να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- 1.** Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.
- 2.** Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ και Δ , ώστε $AB = 6 \text{ cm}$, $B\Gamma = 12 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 2 \text{ cm}$. Να βρεθεί σημείο M του $B\Gamma$, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ στον ίδιο λόγο.
- 3.** Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, να διαιρέσετε δοσμένο τμήμα $AB = a$ σε δύο τμήματα, τα οποία έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.



7.7 Θεώρημα του Θαλή

Είδαμε στην § 5.6 ότι αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν **ίσα** τμήματα πάνω στη μία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη. Τα παραπάνω γενικεύονται για οποιονδήποτε λόγο στο επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως θεώρημα του Θαλή.

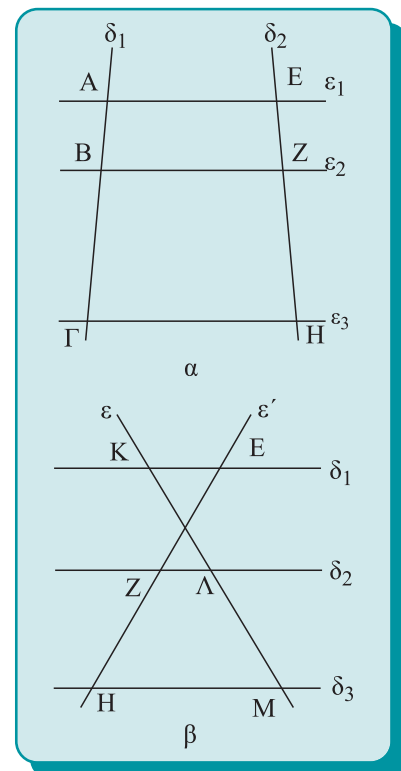
Θεώρημα

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

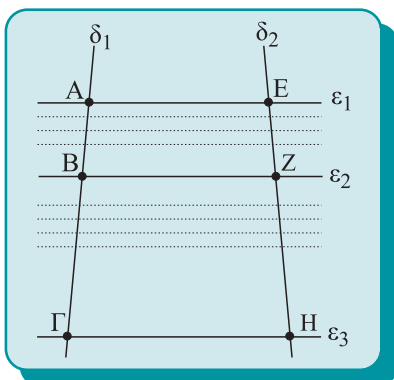
Δηλαδή:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$ (σχ.8α).

Αν $\delta_1 // \delta_2 // \delta_3$, τότε $\frac{KL}{EZ} = \frac{LM}{ZH} = \frac{KM}{EH}$ (σχ.8β).



Σχήμα 8



Σχήμα 9

Απόδειξη

(i) Αν τα τμήματα AB και BΓ (σχ.9) είναι σύμμετρα, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα μ τέτοιο, ώστε $AB = κμ$ και $BΓ = λμ$ (1), όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί. Διαιρούμε το τμήμα AB σε κ τμήματα ίσα με το μ και το BΓ σε λ τμήματα ίσα με το μ.

Από τα σημεία που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την $ε_1$, οι οποίες τέμνουν τη $δ_2$.

Επειδή τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη $δ_1$ είναι ίσα μεταξύ τους, τότε και τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη $δ_2$ θα είναι ίσα τμήματα, που το μήκος του καθενός ας είναι ν. Τότε θα έχουμε $EZ = κν$ και $ZH = λν$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{AB}{BΓ} = \frac{κμ}{λμ} = \frac{κ}{λ}$ και

$$\frac{EZ}{ZH} = \frac{κν}{λν} = \frac{κ}{λ}, \text{ οπότε } \frac{AB}{BΓ} = \frac{EZ}{ZH} \text{ ή } \frac{AB}{EZ} = \frac{BΓ}{ZH} \quad (3).$$

Από την αναλογία (3) παίρνουμε:

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{BΓ}{ZH} = \frac{AB+BΓ}{EZ+ZH} \text{ ή } \frac{AB}{EZ} = \frac{BΓ}{ZH} = \frac{AΓ}{EZ}.$$

(ii) Αν τα τμήματα AB και BΓ είναι ασύμμετρα, ο λόγος $\frac{AB}{BΓ}$ είναι ασύμμετρος αριθμός. Αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η προηγούμενη αναλογία.

Ισχύει και το **αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή**.

Θεώρημα

Θεωρούμε δύο ευθείες $δ_1$ και $δ_2$ που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ στα σημεία A, B και E, Z αντίστοιχα.

Αν Γ και H είναι σημεία των ευθειών $δ_1$ και $δ_2$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{AB}{BΓ} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε η ευθεία ΓH είναι παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$ (σχ.9).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.10).

Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία ε//ΒΓ//ΔΕ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}.$$

Μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΔΕ//ΒΓ (σχ.12). Θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}.$$

Επειδή ΔΕ//ΒΓ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad (1).$$

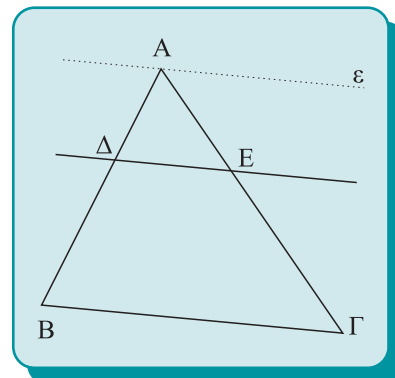
Φέρουμε την ΕΖ παράλληλη της ΑΒ, οπότε το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΔΕ=ΒΖ (2).

Επειδή ΕΖ//ΑΒ, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΒΖ}{ΒΓ} \quad \text{ή} \quad \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}.$

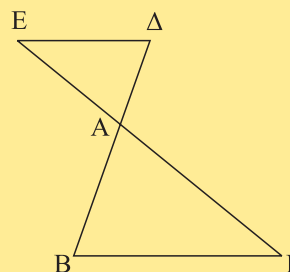
• Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή γίνονται ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές. Δύο από τις σπουδαιότερες είναι τα παρακάτω προβλήματα.



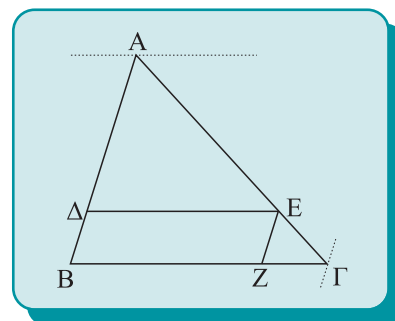
Σχήμα 10

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η ΔΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 11



Σχήμα 12

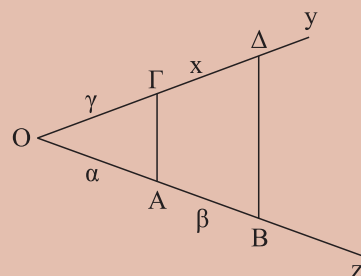
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (Κατασκευή τέταρτης αναλόγου)

Αν δοθούν τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ , να κατασκευασθεί το τμήμα x , που ορίζεται από την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.

Λύση

Έστω μια γωνία $z\hat{O}y$. Πάνω στη μία πλευρά της Oz παίρνουμε διαδοχικά τα τμήματα $OA = \alpha$, $AB = \beta$ και πάνω στην Oy το τμήμα $OG = \gamma$. Από το B φέρουμε την παράλληλη προς την AG , που τέμνει την Oy στο Δ . Τότε $\Gamma\Delta = x$ γιατί

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OG}{\Gamma\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}.$$



Σχήμα 13

Είναι φανερό ότι με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται το τμήμα x αν $\frac{x}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma}$ ή $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{\gamma}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{\gamma}$, αρκεί κάθε φορά να γράφουμε το x ως τέταρτο όρο της αναλογίας.

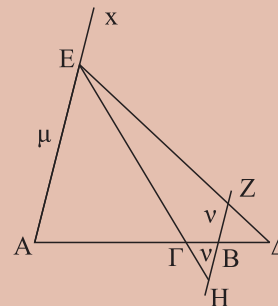
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 (Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε δοσμένο λόγο)

Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα AB , εσωτερικά και εξωτερικά, σε δοσμένο λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν γνωστά τμήματα.

Λύση

Από το A φέρουμε μια ημιευθεία Ax , πάνω στην οποία παίρνουμε τμήμα $AE = \mu$. Από το B φέρουμε ευθεία παράλληλη της Ax και παίρνουμε πάνω σε αυτή εκατέρωθεν του B τμήματα $BZ = BH = \nu$. Τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες EH και EZ τέμνουν την ευθεία AB είναι τα ζητούμενα. Πράγματι, τα τρίγωνα ΔAE και ΓHB έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{AE}{BH} = \frac{\mu}{\nu}.$$

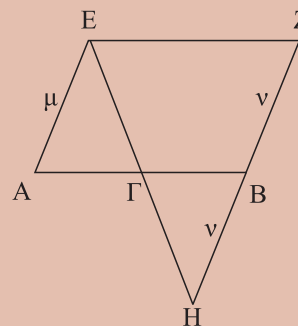


Σχήμα 14

Όμοια τα τρίγωνα ΔAE και ΔBZ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{A E}{B Z} = \frac{\mu}{\nu}.$$

• Αν $\mu=\nu$, το τετράπλευρο ABZE είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η EZ **δε** δίνει σημείο Δ πάνω στην AB, ενώ το Γ είναι το **μέσο** του AB.



Σχήμα 15

Δύο σημεία Γ και Δ, που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα AB στον ίδιο λόγο, λέγονται **συζυγή αρμονικά** των A και B (σχ.16).

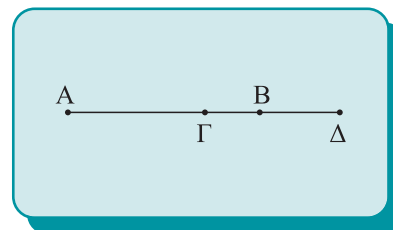
Δηλαδή τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των A και B, αν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά και

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε την αναλογία

$$\frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{\Gamma B}{\Delta B} \quad \text{ή} \quad \frac{A \Gamma}{A \Delta} = \frac{B \Gamma}{B \Delta},$$

από την οποία προκύπτει ότι και τα A και B είναι συζυγή αρμονικά των Γ και Δ. Τα τέσσερα σημεία (A,B) και (Γ,Δ) λέμε ότι αποτελούν **αρμονική τετράδα**.



Σχήμα 16

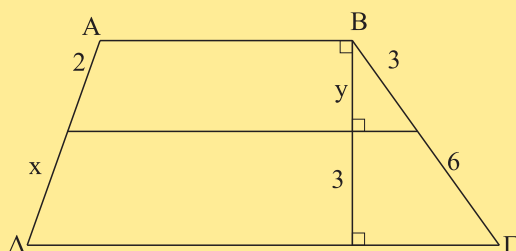
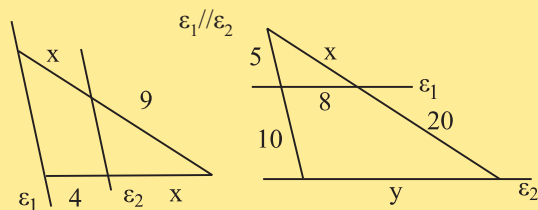
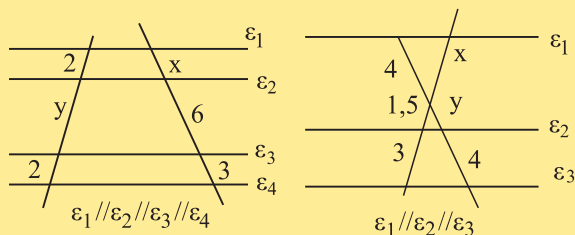
Σημείωση

Το Δ λέγεται **αρμονικό συζυγές** του Γ ως προς τα A και B. Όπως είδαμε παραπάνω, αν το Γ είναι το μέσο του AB, το Δ **δεν** υπάρχει.

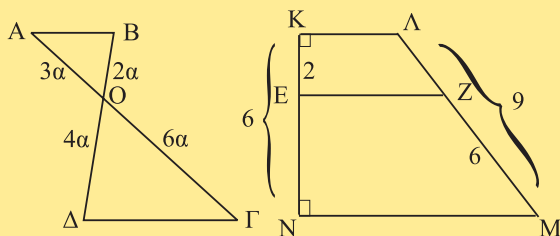
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y .



2. Να δικαιολογήσετε γιατί $AB//ΓΔ$ και $EZ//ΚΛ//MN$ στα παρακάτω σχήματα.

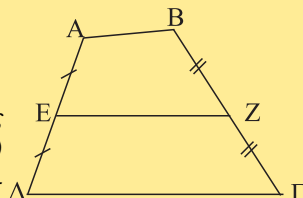


3. Στο διπλανό σχήμα είναι:

i) $\frac{AE}{EΔ} = \frac{BZ}{ZΓ}$ Σ Λ

ii) $EZ//ΓΔ$ Σ Λ

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες σχέσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



4. Δίνεται τμήμα AB και δυο σημεία $Γ$ και $Δ$ ώστε

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}.$$

Αρκεί η προηγούμενη σχέση ώστε τα $Γ$ και $Δ$ να είναι συζυγή αρμονικά των A και B ;

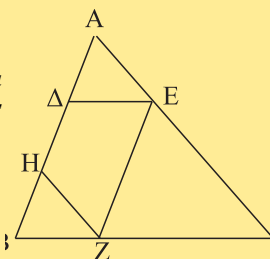
5. Στο παρακάτω σχήμα είναι $ΚΛ = 4$, $ΛΕ = 2$. Να βρεθεί σημείο Z τέτοιο, ώστε τα σημεία (Z, E) να είναι συζυγή αρμονικά των $(K, Λ)$.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο διπλανό σχήμα είναι $ΔΕ//ΒΓ$, $EZ//AB$ και $ZH//ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{HB}{HA}.$$



2. Από την κορυφή A παραλληλογράμμιον $ABΓΔ$ φέρουμε ευθεία $ε$ η οποία τέμνει τη διαγώνιο $ΒΔ$ στο E , την πλευρά $ΒΓ$ στο Z και την προέκταση της $ΔΓ$ στο H . Να αποδείξετε ότι

i) $\frac{AZ}{AH} = \frac{AB}{ΔH}$, ii) $AE^2 = EA \cdot EH$.

3. Οι μη παράλληλες πλευρές $ΑΔ$, $ΒΓ$ τραπέζιου $ABΓΔ$ τέμνονται στο O . Η παράλληλη από το B προς την $ΑΓ$ τέμνει την $ΑΔ$ στο E . Να αποδείξετε ότι το OA είναι μέσο ανάλογο των OD και OE .

4. Από σημείο $Δ$ της πλευράς $ΒΓ$ τριγώνου $ABΓ$ φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμέσο του AM , που τέμνει τις ευθείες AB και $ΑΓ$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\frac{AE}{AZ} = \frac{AB}{ΑΓ}$.

5. Δίνεται τετράπλευρο $ABΓΔ$ και σημείο E της διαγώνιου $ΑΓ$. Οι παράλληλες από το E προς τις $ΒΓ$, $ΓΔ$ τέμνουν τις AB , $ΑΔ$ στα Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ZH//ΔΒ$.

6. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και σημεία $Δ$, E της πλευράς

$ΒΓ$, ώστε $ΒΔ = ΓΕ < \frac{ΒΓ}{2}$. Οι παράλληλες από τα $Δ$

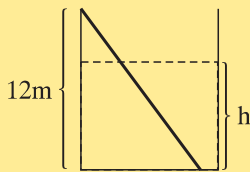
και E προς τις $ΑΓ$ και AB αντίστοιχα τέμνουν την AB στο Z και την $ΑΓ$ στο H . Να αποδείξετε ότι $ZH//ΒΓ$.

7. Από τυχαίο σημείο K της διαμέσου AM τριγώνου

$AB\Gamma$ φέρουμε παράλληλες προς τις AB και AG , που τέμνουν τη $B\Gamma$ στα Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

8. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) και E το μέσο της μικρής βάσης AB . Αν η ΔE τέμνει την AG στο Z και την προέκταση της ΓB στο H , να αποδείξετε ότι τα Z, H είναι συζυγή αρμονικά των Δ, E .

9. Δεξαμενή ύψους $v=12m$ περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος h . Ράβδος μήκους $15m$ τοποθετείται στη δεξαμενή, όπως στο διπλανό σχήμα. Βγάζουμε τη ράβδο και παρατηρούμε ότι το τμήμα που βρέχτηκε έχει μήκος $10m$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h του νερού;



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των A, B και O είναι το μέσο του AB , να αποδείξετε ότι τα Γ και Δ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του O .

2. Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα $AB = a$ σε τμήματα x, y, ω τέτοια, ώστε $4x = 6y = 3\omega$.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω Δ η τομή της διαμέτρου AE με τη $B\Gamma$. Αν Z και H είναι οι προβολές του Δ στις AB και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ZH//B\Gamma$.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E της ΔB τέτοιο, ώστε $\Delta E = \frac{1}{5} \Delta B$. Αν η ΓE τέμνει την $A\Delta$ στο Z , να αποδείξετε ότι $AZ = 3\Delta Z$.

5. Από την κορυφή B παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε ευθεία ε , που τέμνει την πλευρά $A\Delta$ στο E και την προέκταση της $\Gamma\Delta$ στο Z . Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta A}{\Delta E} - \frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = 1.$$

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E της $B\Gamma$ ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τη διάμεσο AM στο K . Να αποδείξετε ότι:

i) Το K είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

ii) $KE//AG$.

7. Τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) οι διαγώνιες $AG, B\Delta$ τέμνονται στο O . Από το O φέρουμε παράλληλες προς τις $A\Delta, B\Gamma$ που τέμνουν τη $\Delta\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Gamma Z$.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα, ώστε $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{EA}$.

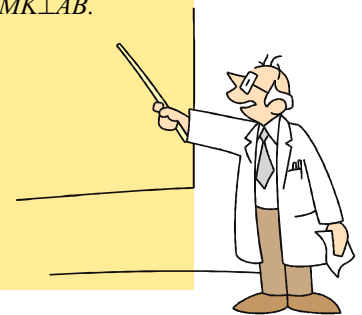
Να αποδείξετε ότι τα μέσα K, Λ, M των AB, AG και ΔE αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.

2. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις AB και AG στα Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ZA \cdot H\Gamma = HA \cdot ZB$.

3. Δίνεται ευθεία ε , τέσσερα διαδοχικά σημεία της A, Γ, B, Δ και σημείο O εκτός αυτής. Από το B φέρουμε παράλληλη προς την OA , η οποία τέμνει τις $OG, O\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των A, B , αν και μόνο αν $BE = BZ$.

4. Αν ένα σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ σε λόγο λ και ένα σημείο E χωρίζει εσωτερικά το $A\Delta$ σε λόγο κ , να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία BE την πλευρά AG .

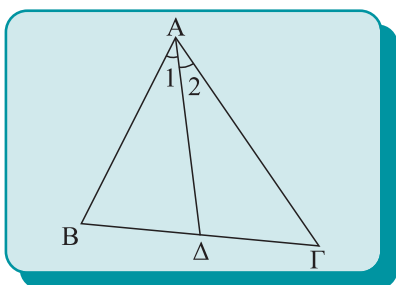
5. Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του M τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα A, B μιάς διαμέτρου του AB , στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν K είναι το σημείο τομής των $B\Gamma, A\Delta$, να αποδείξετε ότι $MK \perp AB$.





7.8 Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

Θα μελετήσουμε εδώ, ως εφαρμογές του θεωρήματος του Θαλή, βασικές ιδιότητες της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου γωνίας τριγώνου.



Σχήμα 17

Θεώρημα (εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

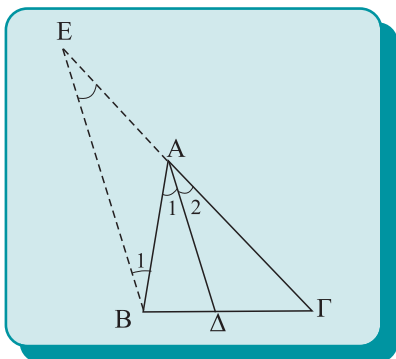
Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Δηλαδή, αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ (σχ.18). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Ε. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο



Σχήμα 18

ΓΕΒ έχουμε $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$ (1).

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΕ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος),

οπότε $\hat{B}_1 = \hat{E}$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Επειδή το σημείο Δ που διαιρεί την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{AB}{A\Gamma}$ είναι μοναδικό, το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το Δ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ τότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων, στα οποία διαιρεί η διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α, β, γ .

Στο σχ.18 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Δ από τα B και Γ.

Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{\Delta B + \Delta \Gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

οπότε $\Delta B = \frac{\alpha \gamma}{\beta + \gamma}$. Όμοια βρίσκουμε $\Delta \Gamma = \frac{\alpha \beta}{\beta + \gamma}$.

Θεώρημα (εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Δηλαδή, αν η AE είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ABΓ, ισχύει ότι:

$$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ABΓ και η εξωτερική διχοτόμος του AE (σχ.20). Από το B φέρουμε παράλληλη προς την AE, που τέμνει την AΓ στο Z. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓAE έχουμε

$$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AZ}{A\Gamma} \quad (1).$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $AZ = AB$. Πράγματι:

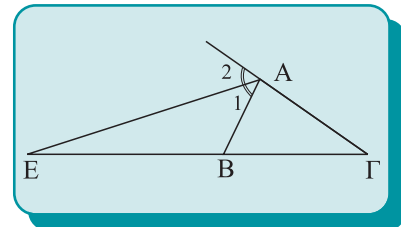
$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και BZ),}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{Z}_1 \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων AE και BZ),}$$

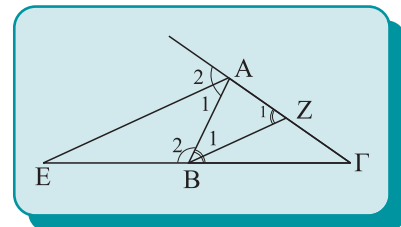
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (AE εξωτερική διχοτόμος),}$$

$$\text{οπότε } \hat{B}_1 = \hat{Z}_1 \text{ άρα } AE = AB \quad (2).$$

$$\text{Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι } \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$



Σχήμα 19



Σχήμα 20

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σημείο E βρίσκεται προς το μέρος της **μικρότερης** πλευράς.

Πράγματι αν $\beta > \gamma$ τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{\Gamma} = \varphi > 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{B}_2 < 180^\circ$.

Έχουμε $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}_{εξ}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}$ και $\hat{B}_2 = 180^\circ - \hat{B}$, οπότε

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ - \hat{B} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} \right) = 180^\circ - \frac{\varphi}{2} < 180^\circ.$$

Αν $AB = AG$, τότε το E **δεν** υπάρχει. (Εφαρμογή 1 – § 4.8)

Το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το E είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς $B\Gamma$ και

ισχύει $\frac{BE}{EG} = \frac{AB}{AG}$, τότε η AE είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία διαιρεί η εξωτερική διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α, β, γ .

Στο σχ.20 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του E από τα B και Γ .

Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

$$\frac{EB}{EG} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{EB}{EG - EB} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{EB}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma},$$

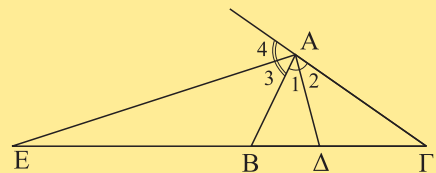
οπότε $EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $EG = \frac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν Δ και E είναι τα ίχνη της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου $AB\Gamma$, στην απέναντι πλευρά, θα

$$\text{είναι } \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{AG} \text{ και } \frac{EB}{EG} = \frac{AB}{AG}, \text{ οπότε } \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{EB}{EG}.$$

Δηλαδή τα ίχνη Δ και E των δύο διχοτόμων είναι σημεία **συζυγής αρμονικά** ως προς τις κορυφές B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.



Σχήμα 21

7.9 Απολλώνιος Κύκλος

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

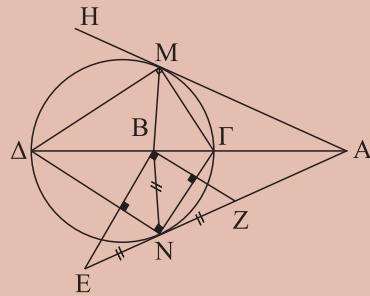
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία A και B του επιπέδου έχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

Λύση

Έστω δύο δεδομένα σημεία A, B και M τυχαίο σημείο του τόπου με την ιδιότητα $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (1).

Φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο MΓ και την εξωτερική διχοτόμο MΔ του τριγώνου MAB. Τότε

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \quad (2) \quad \text{και} \quad \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \quad (3).$$



Σχήμα 22

Δηλαδή, τα σημεία Γ και Δ είναι ορισμένα, αφού χωρίζουν το

AB εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$. Ακόμα είναι $\hat{\Gamma M \Delta} = 90^\circ$, επειδή οι MΓ και MΔ είναι διχοτόμοι των δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών $\hat{A M B}$ και $\hat{B M H}$. Άρα το M ανήκει σε κύκλο με διάμετρο το τμήμα ΓΔ.

Αντίστροφα: Έστω N ένα σημείο του κύκλου με διάμετρο το τμήμα ΓΔ. Τότε $\hat{\Gamma N \Delta} = 90^\circ$.

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Από το B φέρουμε BE//ΓN, οπότε στο τρίγωνο ABE είναι

$$\frac{NA}{NE} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} \quad \text{ή λόγω της (2)} \quad \frac{NA}{NE} = \frac{\mu}{\nu} \quad (4).$$

Επίσης φέρουμε BZ//ΔN, οπότε στο τρίγωνο AΔN είναι

$$\frac{NA}{NZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \quad \text{ή λόγω της (3)} \quad \frac{NA}{NZ} = \frac{\mu}{\nu} \quad (5).$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι $\frac{NA}{NE} = \frac{NA}{NZ}$, οπότε NE=NZ, δηλαδή το N είναι μέσο του EZ.

Επειδή $\hat{\Gamma N \Delta} = 90^\circ$ και BE//ΓN, BZ//ΔN, θα είναι και $\hat{E B Z} = 90^\circ$, δηλαδή το τρίγωνο EBZ είναι ορθογώνιο στο $\hat{B}$ με διάμεσο BN, οπότε NB = NE = NZ (6).

Από τις σχέσεις (4) και (6) έχουμε $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ.

Κατασκευή

Αν δοθούν τα σημεία Α και Β και ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, διαιρούμε το τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπως στο πρόβλημα 2, § 7.7 και βρίσκουμε τα Γ και Δ. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο ΓΔ.

Διερεύνηση

Αν είναι $\frac{\mu}{\nu} = 1$, τότε $\frac{MA}{MB} = 1$ ή $MA = MB$. Άρα το Μ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο προηγούμενος γεωμετρικός τόπος λέγεται **Απολλώνιος κύκλος**, από το όνομα του Έλληνα μαθηματικού Απολλωνίου που πρώτος μελέτησε το θέμα.

Γενικά υπάρχουν άπειροι απολλώνιοι κύκλοι ως προς δύο σημεία Α και Β. Για να ορισθεί κάποιος από αυτούς, όταν δοθούν τα Α και Β, χρειάζεται να δοθεί ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ ή ένα από τα σημεία Γ, Δ, ή ισοδύναμα, ένα τυχαίο σημείο του απολλώνιου κύκλου, ώστε ο λόγος να είναι προσδιορισμένος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

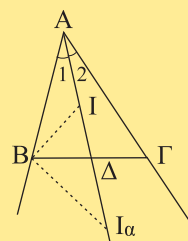
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να εξηγήσετε γιατί τα ίχνη Δ, Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α, τριγώνου ΑΒΓ, είναι συζυγή αρμονικά των Β και Γ.

2. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ και $AB = \frac{\gamma}{2}$, να δικαιολογήσετε γιατί $\beta + \gamma = 2\alpha$.

3. Τι ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος ως προς δυο σημεία Α και Β; Πόσοι τέτοιοι Απολλώνιοι κύκλοι υπάρχουν; Με ποιους τρόπους μπορεί να ορισθεί κάποιος από αυτούς;

4. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΔ η διχοτόμος, Ι το έγκεντρο και Ι_α το παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία (Α, Δ) και (Ι, Ι_α) αποτελούν αρμονική τετράδα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



5. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β έχουν λόγο $\lambda = 1$ είναι:

- i) Κύκλος διαμέτρου ΑΒ
- ii) Η μεσοκάθετος του ΑΒ
- iii) Το μέσο Μ του ΑΒ
- iv) Κανένα από τα παραπάνω.

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Η διάμεσος AM και η διχοτόμος BD τριγώνου $ABΓ$ τέμνονται στο E . Να αποδείξετε ότι $\frac{AE}{EM} = 2 \frac{AD}{ΔΓ}$.

2. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $AB=6$, $ΒΓ=10$, $ΑΓ=9$. Αν $ΑΔ$, $ΑΕ$ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να υπολογισθεί το $ΔΕ$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και η διάμεσός του AM . Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$ τέμνει την AB στο Δ και την προέκταση της $ΓΑ$ στο E , να αποδείξετε ότι $EA \cdot \Delta B = EΓ \cdot A\Delta$.

4. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $ΒΓ$ ενός τριγώνου $ABΓ$ και οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{AMB}$ και $\hat{AMΓ}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $ΑΓ$ στα Δ και E αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΔΕ // ΒΓ$.

5. Αν $ΑΔ$, BE και $ΓΖ$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου $ABΓ$, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\Delta B}{\Delta Γ} \cdot \frac{EΓ}{EA} \cdot \frac{ΖΑ}{ΖB} = 1.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για τις εξωτερικές διχοτόμους.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = ΑΓ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) . Αν Δ τυχαίο σημείο του τόξου $ΒΓ$ και η $ΑΔ$ τέμνει την πλευρά $ΒΓ$ στο E , να αποδείξετε ότι $E\Delta \cdot \Delta Γ = EΓ \cdot \Delta B$.

7. Σε ένα ημικύκλιο διαμέτρου AB φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου, καθώς και μία εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο του E , που τέμνει την ευθεία AB στο Z και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα Γ και Δ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των E, Z .

8. Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 20m και 36m. Η διχοτόμος της γωνίας, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών, διαιρεί την τρίτη πλευρά σε δύο μέρη, τα οποία διαφέρουν κατά 12m. Να υπολογισθεί η τρίτη πλευρά.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45^\circ$ και τα σημεία A, Δ των Ox, Ot αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = O\Delta$. Αν B, Γ είναι τα σημεία τομής της $ΑΔ$ με τις Oy, Oz αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = BΓ \cdot A\Delta$.

2. Από το μέσο M της πλευράς $ΒΓ$ ενός τριγώνου $ABΓ$ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του $ΑΔ$, που

τέμνει τις $AB, ΑΓ$ στα E, Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE = ΓΖ$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, η διχοτόμος του $ΑΔ$ και το έγκεντρό του I .

i) Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{AI}{I\Delta}$, ως συνάρτηση των πλευρών a, β, γ του τριγώνου.

ii) Αν $\beta + \gamma = 2a$ και K το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε:

α) $IK // ΒΓ$ β) $ZE = \frac{\beta + \gamma}{3}$, όπου Z, E τα σημεία

τομής των $AB, ΑΓ$ αντίστοιχα με την ευθεία IK .

4. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου $ABΓ$, τέμνουν τη διάμεσό του AM στα Δ και E αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} > 2$.

5. Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου $ABΓ\Delta$ ($AB // \Gamma\Delta$) τέμνονται στο O . Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\hat{O}B}$ τέμνει τις $AB, \Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $Z\Delta \cdot BΓ = ΖΓ \cdot A\Delta$,

ii) $EA \cdot BΓ = EB \cdot A\Delta$.

Σύνθετα θέματα

1. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) . Αν η κάθετη διάμετρος $K\Lambda$ στη $ΒΓ$ τέμνει τις $AB, ΑΓ$ στα E, Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα E, Z είναι συζυγή αρμονικά των K, Λ .

2. Αν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου $ABΓ\Delta$ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του, τότε είναι $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot BΓ$. Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

3. Δίνεται τόξο $\widehat{AB}$ κύκλου (O,R) . Να ορίσετε σημείο M του τόξου $\widehat{AB}$, τέτοιο ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓ\Delta$ και τα σημεία E, Z των πλευρών του $ΑΔ, AB$ αντίστοιχα, ώστε $ΔΕ = BZ$. Αν H είναι το σημείο τομής των BE και ΔZ , να αποδείξετε ότι η $ΓH$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\hat{\Gamma}\Delta}$.

5. Να κατασκευάσετε τρίγωνο $ABΓ$ με βάση $BΓ=a$, ύψος $AH=\nu$ και $\frac{AB}{ΑΓ} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο A . Φέρουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους ΔE και την AB κάθετη στη ΔE . Να αποδείξετε ότι

$$AB = \frac{2R\rho}{R + \rho}.$$

2. Μια μεταβλητή ευθεία ε , διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ στα Δ , E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA} = 1.$$

3. i) **Θεώρημα Μενελάου.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ε που τέμνει τις ευθείες AB , $B\Gamma$, ΓA στα Δ , E , Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} \cdot \frac{E\Gamma}{E\Gamma} \cdot \frac{Z\Gamma}{ZA} = 1.$$

ii) **Θεώρημα Ceva.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των ευθειών $B\Gamma$, ΓA , AB , αντίστοιχα. Αν οι ευθείες $A\Delta$, BE και ΓZ συντρέχουν, τότε ισχύει:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

Να εξετασθεί και για τα δύο θεωρήματα, αν ισχύει το αντίστροφο.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ τέμνει τη $B\Delta$ στο E και τη $B\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι $\frac{EA}{EZ} - \frac{A\Gamma}{AB} = 1$.

5. Δίνεται κύκλος διαμέτρου AB και χορδή $\Gamma\Delta$ κάθετη στην AB . Αν M είναι σημείο της χορδής και οι ευθείες MA και MB τέμνουν τον κύκλο στα E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EZ \cdot ZA = EA \cdot Z\Gamma$.

6. Αν τα σημεία (A, B) και (Γ, Δ) αποτελούν αρμονική τετράδα και το B είναι μεταξύ των Γ, Δ , να αποδείξετε ότι:

i) $OA^2 = OG \cdot OD$, όπου O το μέσο του AB .

$$ii) \frac{2}{AB} = \frac{1}{AG} + \frac{1}{AD}.$$

7. Να κατασκευαστεί εσωτερική ημιευθεία Ax της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου $AB\Gamma$ τέτοια, ώστε αν Δ , E είναι οι προβολές των B , Γ στην Ax αντίστοιχα, να είναι $\frac{A\Delta}{AE} =$

$$\frac{\mu}{\nu}, \text{ όπου } \mu, \nu \text{ είναι γνωστά τμήματα.}$$

8. Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και σταθερό σημείο A στο εσωτερικό της γωνίας. Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το A και να τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία B και Γ , ώστε:

i) το A να είναι μέσο του $B\Gamma$,

$$ii) \text{ να είναι } AB = \frac{2}{3} B\Gamma \text{ και}$$

$$iii) \text{ να είναι } \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}, \text{ όπου } \mu, \nu \text{ είναι γνωστά τμήματα.}$$

9. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία A και A' . Να κατασκευασθεί ευθεία, που να διέρχεται από το A και να τέμνει τους κύκλους στα σημεία B και Γ , ώστε να είναι:

$$i) AB = A\Gamma, \quad ii) \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3}{4}.$$

10. Αν $A\Delta$, BE , ΓZ είναι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και I είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να αποδείξετε ότι

$$\frac{IA}{IA} + \frac{IB}{IE} + \frac{IG}{IZ} \geq 6.$$



Δραστηριότητες

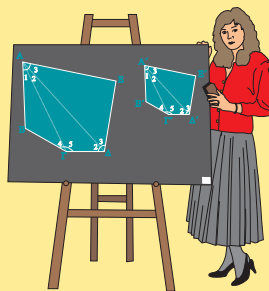
1. Να αποδείξετε το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή.

2. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ και τυχαίο σημείο A του επιπέδου, διαφορετικό των B και Γ . Να κατασκευάσετε τον Απολλώνιο κύκλο ως προς τα B και Γ , ο οποίος διέρχεται από το A .

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Να εξετάσετε αν τα B και Γ ανήκουν στον ίδιο Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Δ και A . Να κατασκευάσετε τον παραπάνω κύκλο και να βρείτε το λόγο $\frac{M\Delta}{MA}$ ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου, όπου M τυχαίο σημείο του κύκλου.

Εργασία

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο Γ της ευθείας AB . Να βρεθεί το αρμονικό συζυγές του Γ ως προς τα A και B (δύο περιπτώσεις).



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μέτρηση

Στα πρώτα στάδια ανάπτυξης της κοινωνίας η μέτρηση γινόταν «με το μάτι», αφού το μέτρο δεν είχε διακριθεί ως ανεξάρτητη ιδιότητα ενός αντικειμένου. Στην πορεία ανάπτυξης της κοινωνίας, όταν τέτοιου είδους «ποιοτικά» μέτρα κρίθηκαν ανεπαρκή, εμφανίστηκαν κάποια φυσικά μέτρα, που ήταν συνήθως μέρη του ανθρώπινου σώματος, όπως το μήκος του ποδιού, το πλάτος της παλάμης κ.ά. Για την ύπαρξη τέτοιων μέτρων μαρτυρούν και οι ονομασίες των μέτρων μήκους που διατηρήθηκαν μέχρι σήμερα, όπως «πόδι», «δάκτυλος», «παλάμη» κ.α. Τα μέτρα αυτά χρησιμοποιούνταν αρχικά για τον προσδιορισμό της ισότητας των μετρούμενων μεγεθών ή της ισοδυναμίας των σχημάτων. Το μέτρο ενός μεγέθους A ήταν το πλησιέστερο ακέραιο πολλαπλάσιο της μονάδας E .

Η ανάγκη για πιο ακριβείς μετρήσεις οδήγησε στη χρήση υποδιαϊρέσεων της μονάδας μέτρου. Έτσι εμφανίστηκαν τα πρώτα «συγκεκριμένα κλάσματα», ως μέρη των συγκεκριμένων μέτρων από όπου προήλθαν. Η ιστορική διαδικασία γένεσης των συγκεκριμένων κλασμάτων ως αποτέλεσμα της ανάγκης μέτρησης επιβεβαιώνεται από την ανομοιομορφία του συμβολισμού των κλασμάτων αυτού του τύπου. Στη Βαβυλώνα τα σύμβολα για το $1/2$, το $1/3$ και το $2/3$ είναι ταυτόχρονα και σύμβολα δοχείων, δηλαδή συγκεκριμένων μέτρων όγκου. Στην αρχαία Αίγυπτο διακρίνονται τα *φυσικά κλάσματα* ($1/2$, $1/3$, $1/4$ και $2/3$), που διαμορφώθηκαν από άμεσες πρακτικές ανάγκες και έχουν ιδιάζουσα ονοματολογία και ιερογλυφικό συμβολισμό, και τα *αλγοριθμικά κλάσματα*, που ήταν της μορφής $1/n$, και εμφανίστηκαν ως προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας.

Η ανεξαρτητοποίηση του κλάσματος από το συνυφασμένο πεδίο μεγεθών ήταν πολύ πιο αργή από τη διαμόρφωση της έννοιας του φυσικού αριθμού. Δεν έγινε γρήγορα αντιληπτό ότι οι αριθμητικές ιδιότητες των κλασμάτων δεν εξαρτώνται από τις ιδιότητες του πεδίου μεγεθών, στο οποίο ανήκουν.

Η πρώτη Ελληνική θεωρία μέτρησης. Μία από τις σημαντικές διαφορές της Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης από την Αιγυπτιακή και τη Βαβυλωνιακή είναι ότι τα προβλήματα της μέτρησης συνεχών μεγεθών τίθενται σε νέα θεωρητική βάση. Οι μαθηματικοί αρχίζουν να αναζητούν μεθόδους μέ-

τρησης με βάση κάποια αφηρημένη μονάδα μέτρου μήκους, επιφανείας ή όγκου. Και εδώ δεν εννοούμε εμπειρικές μεθόδους (προσεγγιστικού) προσδιορισμού του μέτρου που να ικανοποιούν πρακτικές ανάγκες. Απαιτείται η απόδειξη της ύπαρξης ενός τέτοιου μέτρου. Η νέα αυτή προσέγγιση απαιτούσε την εισαγωγή νέων θεωρητικών εννοιών και νέων τρόπων συλλογισμού. Κάθε συγκεκριμένο είδος μεγεθών είναι συνυφασμένο με ορισμένο τρόπο σύγκρισης των φυσικών αντικειμένων ή σωμάτων. Τα ευθύγραμμα τμήματα, π.χ. μπορούν να συγκριθούν με τη βοήθεια της έννοιας της «εφαρμογής» του ενός επί του άλλου, η οποία οδηγεί στην έννοια του μήκους: δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος αν με τη μεταφορά του ενός επί του άλλου «εφαρμόζουν», ενώ το ένα υπολείπεται του άλλου τότε το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου. Τα βάρη είναι μεγέθη άλλου είδους. Δεν έχει νόημα το ερώτημα αν το βάρος του σώματος είναι μεγαλύτερο, ίσο, ή μικρότερο από το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Έτσι, τα μήκη, τα εμβαδά, οι όγκοι, είναι διαφορετικά είδη μεγεθών. Το πρόβλημα της μέτρησης ενός μεγέθους A με τη βοήθεια της μονάδας E συνίσταται αρχικά, στην αρχαία Ελλάδα στο να βρεθεί πόσες φορές περιέχεται η μονάδα στο A , δηλαδή ζητείται ο αριθμός a τέτοιος, ώστε $A = aE$, όπου A και E είναι μεγέθη του αυτού είδους. Ένα μέγεθος X είναι κοινό μέτρο δύο μεγεθών A και B , όταν περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών στα μεγέθη αυτά, δηλ. $A = aX$, $B = bX$. Τότε τα μεγέθη λέγονται *σύμμετρα*.

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες είχαν βρει μια αποτελεσματική διαδικασία με την οποία μπορούσαν να βρουν το κοινό μέτρο δύο μεγεθών A και B , αν υπάρχει. Πρόκειται για τη διαδικασία της *ανθυφαίρεσης* ή *αντανάιρεσης* (γνωστής σήμερα ως *αλγόριθμος του Ευκλείδη*), η οποία εκτίθεται στις δύο πρώτες προτάσεις του Βιβλίου VII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Αν υποθέσουμε ότι $A > B$, τότε αφαιρούμε το B από το A όσες φορές γίνεται. Αν δεν περισσεύει υπόλοιπο, τότε το B μετρά ακριβώς το A και είναι το κοινό μέτρο. Ειδεμή έχουμε υπόλοιπο B_1 , με $B > B_1$. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στα B , B_1 . Αν δεν προκύπτει υπόλοιπο, το B_1 είναι το κοινό μέτρο, ειδεμή έχουμε ένα νέο υπόλοιπο B_2 . Αν η επανάληψη

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

αυτής της διαδικασίας τερματίζεται σε κάποιο B_v που μετρά ακριβώς το A_v τότε το B_v είναι το ζητούμενο κοινό μέτρο. Αν ο αλγόριθμος δεν τερματίζεται τα δύο μεγέθη είναι *ασύμμετρα*. Πιθανότατα στο Θεώρημα να ανήκει η ιδέα να εφαρμοστεί η ανθυφαίρεση ως κριτήριο ασυμμετρίας δύο τμημάτων. Το κριτήριο αυτό αποδεικνύεται στην Πρόταση 2 του Βιβλίου X των «Στοιχείων».

Η ανακάλυψη ότι *δεν υπάρχει κοινό μέτρο της διαγωνίου και της πλευράς του τετραγώνου* αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Το πώς ακριβώς έγινε αυτή η ανακάλυψη παραμένει θέμα ανοικτό για το οποίο έχουν προταθεί ποικίλες ερμηνείες. Όμως η ανακάλυψη αυτή, καθώς και οι δυσκολία λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*) έδωσαν νέα ώθηση στα μαθηματικά των μετρούμενων μεγεθών.

Η γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Η ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών οδήγησε στη διατύπωση μιας νέας θεωρίας από τον Ευδόξο τον Κνίδιο που εκτίθεται στο Βιβλίο V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Η νέα θεωρία των αναλογιών στηρίζεται στη γενική έννοια του μεγέθους, περιλαμβάνοντας έτσι και τους αριθμούς και τα άλλα συνεχή μεγέθη (μήκη, επιφάνειες, όγκοι). Η έννοια αυτή εισάγεται αξιωματικά με τη βοήθεια των *Κοινών Εννοιών* στο Βιβλίο I που ορίζουν τις σχέσεις ισότητας και ανισότητας.

Ο Ευδόξος ορίζει πότε δύο ζεύγη Αρχιμήδειων μεγεθών α, β και γ, δ έχουν τον ίδιο λόγο με τη βοήθεια των πολλαπλασίων αυτών των μεγεθών, δηλαδή όταν: 1) $\mu\alpha > \nu\beta$ και $\mu\gamma > \nu\delta$ ή 2) $\mu\alpha = \nu\beta$ και $\mu\gamma = \nu\delta$, ή 3) $\mu\alpha < \nu\beta$ και $\mu\gamma < \nu\delta$. Στην περίπτωση αυτή τα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ λέγονται *ανάλογα*. Η σχέση της αναλογίας είναι σχέση τύπου ισότητας, δηλαδή συμμετρική και μεταβατική, και έτσι τα ζεύγη μεγεθών διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών που έχουν τον ίδιο λόγο. Έτσι, ο λόγος μπορεί να εισαχθεί ως το κοινό χαρακτηριστικό που έχουν τα ζεύγη μεγεθών μιας κλάσης.

Η γενική θεωρία των αναλογιών αποτελεί τη βάση της μεθόδου της *εξάντλησης*, η οποία εφαρμόστηκε από τους αρχαίους Έλληνες στη μέτρηση (μη στοιχειωδών) επιφανειών και όγκων. Στηρίζεται στην ιδέα ότι αν από κάποιο μέγεθος αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό, από το υπόλοιπο επίσης κ.ο.κ., τότε μετά

από πεπερασμένο αριθμό βημάτων παίρνουμε υπόλοιπο μικρότερο από οποιοδήποτε δεδομένο μέγεθος («Στοιχεία», Βιβλίο X, Πρόταση 1). Με άλλα λόγια, η διαφορά ανάμεσα σε μία μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε ένα όριο, και στο όριο αυτό, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε με υποδιπλασιασμό της. Με τη βοήθεια της μεθόδου της εξάντλησης ο Ευδόξος απέδειξε τα παρακάτω θεωρήματα:

1. Τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.
2. Ο όγκος πυραμίδας ισούται με το $1/3$ του όγκου του πρίσματος με την ίδια βάση και ύψος.
3. Ο όγκος του κώνου ισούται με το $1/3$ του όγκου του κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος.

Με την ίδια μέθοδο ο Αρχιμήδης βρήκε ένα πλήθος νέων εμβαδών και όγκων, όπως το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου και κώνου, το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας, τον όγκο της σφαίρας κ.ά.

Αρχιμήδεια και μη Αρχιμήδεια μεγέθη. Για να ισχύει η θεωρία των αναλογιών πρέπει να ορίζεται ο λόγος ανάμεσα στα συγκρινόμενα μεγέθη α, β . Αυτό εξασφαλίζεται αν υπάρχουν ακέραιοι μ και ν τέτοιοι, ώστε $\mu\alpha > \nu\beta$ και $\nu\beta > \mu\alpha$ («Στοιχεία», Βιβλίο V, Ορισμός 4). Η συνθήκη αυτή ονομάζεται σήμερα *αξίωμα του Ευδόξου* (ή, συχνότερα, *αξίωμα Αρχιμήδη – Ευδόξου*). Τα μεγέθη για τα οποία ικανοποιείται το αξίωμα αυτό λέγονται σήμερα *Αρχιμήδεια*.

Ας σημειωθεί πως μη Αρχιμήδεια μεγέθη ήταν γνωστά στην Ελληνική αρχαιότητα, όπως οι λεγόμενες *κερατοειδείς γωνίες*. Πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζεται π.χ. από το τόξο περιφέρειας και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της, δηλαδή το μέρος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ του τόξου και της εφαπτομένης στο σημείο επαφής. Οσοδήποτε και αν μεγαλώσει μια τέτοια γωνία δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί τη γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και οποιαδήποτε τέμνουσα του τόξου στο σημείο τομής. Ένα τέτοιο μέγεθος α , το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό ν παραμένει μικρότερο του μεγεθους β , ονομάζεται *ενεργεία άπειροστό* ως προς το β , ή αντίθετα, το β λέγεται *ενεργεία άπειρο* μέγεθος ως προς το α .

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

• **Μέγεθος** λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. Στη Γεωμετρία έχουμε τα **γεωμετρικά μεγέθη**.

• Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται **υποδιαίρεση** του ΑΒ, αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν, ώστε $\Gamma\Delta = \frac{AB}{\nu}$.

• Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ λέγεται **γινόμενο** του ΑΒ επί το **θετικό ρητό** αριθμό $q = \frac{\mu}{\nu}$ ($\mu > 0, \nu > 0$), αν είναι άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\frac{AB}{\nu}$.

• Αν για δυο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει ρητός $q = \frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ώστε $\Gamma\Delta = qAB$, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **σύμμετρα** και ο αριθμός $q = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$ λέγεται **λόγος** των δύο τμημάτων.

• Μια κοινή υποδιαίρεση $K\Lambda = \frac{AB}{\nu} = \frac{\Gamma\Delta}{\mu}$ λέγεται και **κοινό μέτρο** των ΑΒ και ΓΔ. Δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ακέραια πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.

• Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται **ασύμμετρα** και ο λόγος τους είναι ένας **άρρητος** αριθμός.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ, λέγονται **ανάλογα** προς τα τμήματα β, δ όταν είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

• **Αναλογία** τμημάτων λέγεται κάθε ισότητα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, όπου α, β, γ, δ είναι ευθύγραμμα τμήματα.

• **Μέτρο** ενός ευθύγραμμου τμήματος α είναι ο λόγος του α προς ένα άλλο τμήμα που παίρνουμε αυθαίρετα ως **μονάδα μέτρησης**. Έτσι:

- Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα.

- Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων.

• Αν για τα διαφορετικά συνευθειακά σημεία Α, Β, Μ ισχύει $\frac{MA}{MB} = \lambda$, τότε λέμε ότι το **Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ** σε λόγο λ.

- Το Μ διαιρεί **εσωτερικά** ή **εξωτερικά** το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν το Μ είναι αντίστοιχα μεταξύ των Α και Β ή στην προέκταση του ΑΒ.

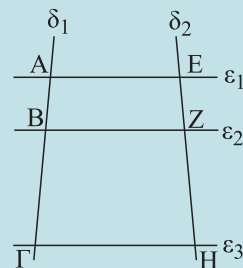
- Το σημείο Μ που διαιρεί ή εσωτερικά ή εξωτερικά το τμήμα ΑΒ σε λόγο λ είναι **μοναδικό**.

• **Θεώρημα Θαλή**

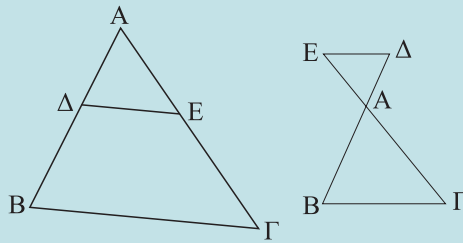
- **Τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες:**

Αν $\epsilon_1 // \epsilon_2 // \epsilon_3$, τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{BG}{ZH} = \frac{AG}{EH}$.

Αντίστροφο: Αν $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και $\frac{AB}{BG} = \frac{EZ}{ZH}$, τότε $\Gamma\Delta // \epsilon_1 // \epsilon_2$.



- Στο τρίγωνο



Αν $ΔΕ // ΒΓ$, τότε $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$ και $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Αντίστροφο: Αν $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ}$, τότε $ΔΕ // ΒΓ$.

• **Γεωμετρικές κατασκευές**

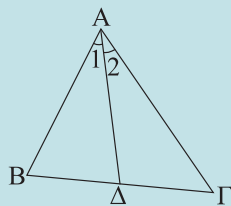
- Κατασκευή τετάρτης αναλόγου
- Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο

• **Συζυγή αρμονικά**

Δύο σημεία Γ και Δ που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α και Β.

• **Θεωρήματα διχοτόμων**

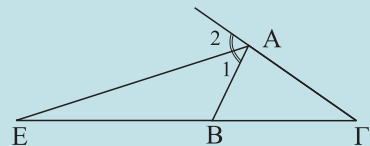
Εσωτερικής διχοτόμου



$$ΑΔ \text{ διχοτόμος} \Leftrightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

$$ΔΒ = \frac{αγ}{β + γ}, ΔΓ = \frac{αβ}{β + γ}$$

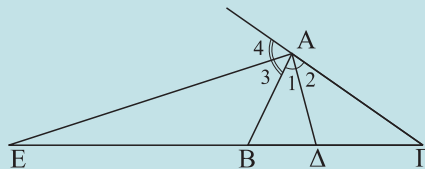
Εξωτερικής διχοτόμου



$$ΑΕ \text{ εξωτ. διχοτόμος} \Leftrightarrow \frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

$$ΕΒ = \frac{αγ}{β - γ}, ΕΓ = \frac{αβ}{β - γ}$$

- Τα ίχνη Δ και Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{Α}$ τριγώνου ΑΒΓ, είναι σημεία συζυγή αρμονικά ως προς τα Β και Γ.



- **Απολλώνιος κύκλος** ως προς τα σημεία Α και Β λέγεται κάθε κύκλος διαμέτρου ΓΔ, όπου τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β.

Ομοιότητα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι ιδιότητες των όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και ειδικότερα των όμοιων τριγώνων για τα οποία διατυπώνονται κατάλληλα κριτήρια ομοιότητας. Η ομοιότητα επεκτείνεται στο σύνολο των στοιχείων των ευθύγραμμων σχημάτων ενώ δίνονται πρακτικές εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα και σημειώνεται ότι αποτελεί βασικό συνδετικό κρίκο Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Τέλος, παρουσιάζεται η στενή σχέση της ομοιότητας με την τριγωνομετρία.



Ναός στο Khajuraho της Βορειοκεντρικής Ινδίας, 10ος - 11ος αιώνας.

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και από τα μέσα B' και Δ' των πλευρών AB και $A\Delta$ αντίστοιχα, ας φέρουμε παράλληλες προς τις $A\Delta$ και AB , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ' . Τότε το παραλληλόγραμμο $AB'\Gamma'\Delta'$ έχει τις γωνίες του ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του $AB\Gamma\Delta$, ενώ ισχύει ότι

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta'}{A\Delta} = \frac{1}{2}.$$

Ας θεωρήσουμε κατόπιν ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και ας προεκτείνουμε τις πλευρές του AB και $A\Gamma$ προς τα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο B' στην προέκταση της AB , έτσι, ώστε $AB' = 3AB$. Από το B' φέρουμε παράλληλη προς την τρίτη πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Γ' .

Τότε παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, ενώ επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = 3.$$

Τα δύο παραλληλόγραμμα, όπως και τα δύο τρίγωνα που κατασκευάστηκαν προηγουμένως λέγονται **όμοια**, ενώ ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους (δηλαδή των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες) λέγεται **λόγος ομοιότητας**. Γενικότερα για τα όμοια ευθύγραμμα σχήματα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

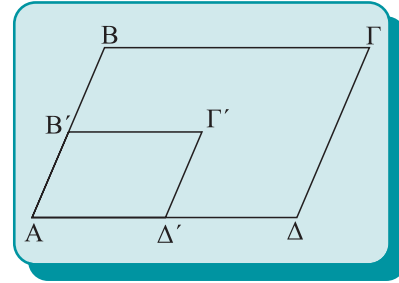
Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ . Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με $\approx$.

Θεώρημα

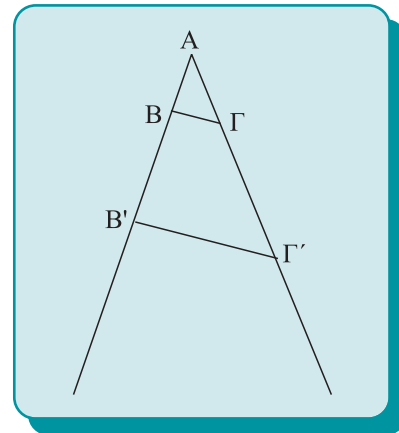
Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Απόδειξη

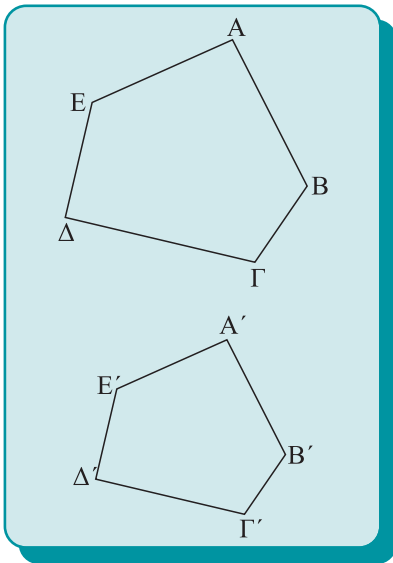
Ας θεωρήσουμε δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα $AB\Gamma\Delta E$ και $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ (ανάλογα αποδεικνύεται για ευθύγραμμα σχήματα



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

με περισσότερες κορυφές). Λόγω της ομοιότητας θα έχουμε ότι

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = \lambda,$$

και από τις ιδιότητες των αναλογιών, το άθροισμα των αριθμητών προς το άθροισμα των παρανομαστών ισούται με λ , δηλαδή:

$$\frac{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}{AB+BC+CD+DE+EA} = \lambda.$$

8.2 Κριτήρια ομοιότητας

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την ομοιότητα των τριγώνων, καθώς αποδεικνύεται (εφαρμογή 3) ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

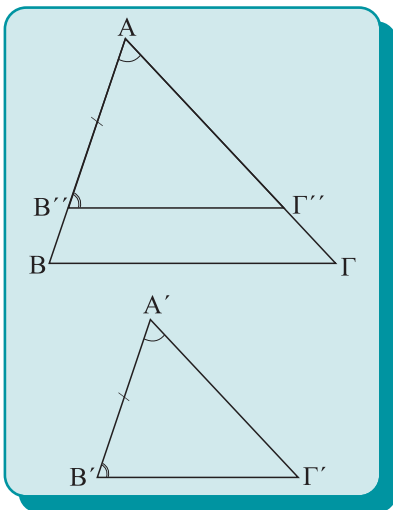
Θεώρημα I (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, οπότε και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $A'B' < AB$, επομένως υπάρχει σημείο B'' στην AB τέτοιο, ώστε $AB'' = A'B'$. Από τη B'' φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Γ'' . Τότε τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, αφού ισχύει ότι $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$, οπότε $\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma}$ και η $\hat{A}$ είναι κοινή, ενώ $\hat{B}'' = \hat{B}$ οπότε και $\hat{\Gamma}'' = \hat{\Gamma}$.

Όμως τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, καθώς έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες. Συνεπώς τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι όμοια.



Σχήμα 4

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
- (ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
- (iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

Θεώρημα II (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.4) έτσι, ώστε $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο B'' στην AB , με $AB'' = A'B'$. Από το B'' φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Γ'' . Επομένως, τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια. Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}.$$

Όμως, από την υπόθεση ισχύει ότι $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$.

Επομένως καταλήγουμε ότι $\frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ ή $A\Gamma'' = A'\Gamma'$.

Τελικά τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, καθώς έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Θεώρημα III (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ. 4), ώστε

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $A'B' < AB$, επομένως θα υπάρχει σημείο B'' στην AB , με $AB'' = A'B'$. Από το B'' φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Γ'' , οπότε τα τρίγωνα $AB''\Gamma''$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

Επειδή $AB\Gamma \approx AB''\Gamma''$ είναι

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma''}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Το θεώρημα που εκφράζει ότι δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελούν τους βασικούς συνδετικούς κρίκους της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική, καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την εποπτεία της Γεωμετρίας σε αλγεβρικά προβλήματα και την ευχέρεια των πράξεων της Άλγεβρας σε γεωμετρικά προβλήματα. Τα όμοια τρίγωνα και το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτέλεσαν τα θεμέλια της Τριγωνομετρίας. Χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαστάσεις ενός αντικειμένου μετρώντας τις διαστάσεις ενός μικρότερου μοντέλου του. Το μοντέλο αυτό θα έχει τις ίδιες γωνίες με το αρχικό, επομένως οι διαστάσεις του αρχικού προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μοντέλου με το λόγο ομοιότητας των δύο σχημάτων.

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'G'}{AG} = \frac{B'G'}{BG}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\frac{AG''}{AG} = \frac{A'G'}{AG} \quad \text{και} \quad \frac{B''G''}{BG} = \frac{B'G'}{BG},$$

οπότε $AG'' = A'G'$ και $B''G'' = B'G'$.

Άρα τα τρίγωνα $AB''G''$ και $A'B'G'$ είναι ίσα γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ας θεωρήσουμε δύο όμοια τρίγωνα ABG , $A'B'G'$ με λόγο ομοιότητας λ και σημεία M

της BG , M' της $B'G'$ τέτοια, ώστε $\frac{BM}{MG} = \frac{B'M'}{M'G'}$.

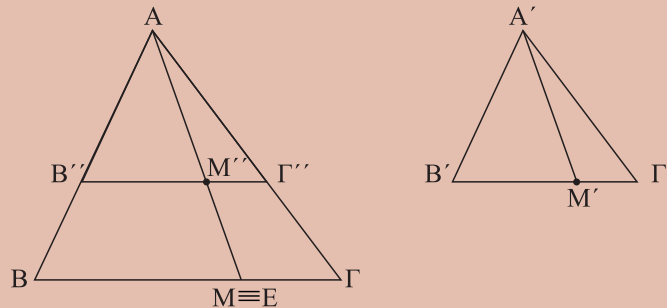
Τότε ισχύει ότι $\frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'} = \frac{GM}{G'M'} = \lambda$.

Απόδειξη

Έστω ότι $A'B' < AB$, οπότε θα υπάρξει σημείο B'' της AB τέτοιο, ώστε $AB'' = A'B'$ και σημείο G'' της AG τέτοιο, ώστε $AG'' = A'G'$, με $B''G'' \parallel BG$. Έστω σημείο M'' της $B''G''$ τέτοιο, ώστε $B''M'' = B'M'$.

Προεκτείνουμε την AM'' ώστε να τμήσει τη BG σε σημείο E . Τότε τα τρίγωνα $AB''M''$ και ABE είναι όμοια, οπότε

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{B''M''}{BE} = \frac{AM''}{AE} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{B'M'}{BE} = \frac{A'M'}{AE}.$$



Σχήμα 5

Όμοια έχουμε ότι $\lambda = \frac{M'G'}{EG} = \frac{A'M'}{AE}$.

Οπότε $\frac{B'M'}{M'G'} = \frac{BE}{EG} = \frac{BM}{MG}$, συνεπώς τα E και M ταυτίζονται.

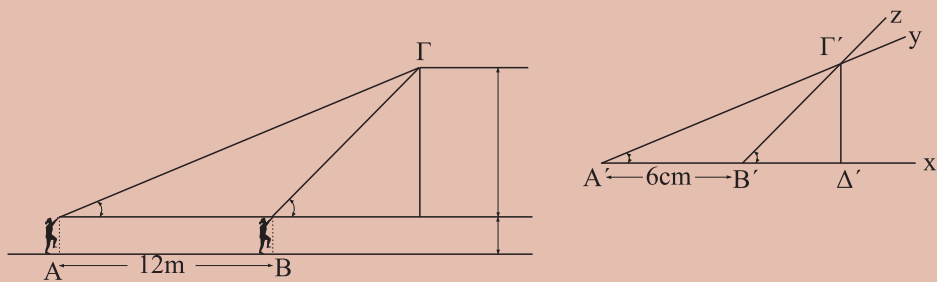
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.
- (ii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.
- (iii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Πόσο ύψος έχει το σχολείο σας;

Λύση



Σχήμα 6

Ένας μαθητής βλέπει την κορυφή Γ του σχολείου από δύο σημεία A και B στο έδαφος (σχ. 6). Χρησιμοποιώντας έναν εξάντα (βλ. επόμενη παράγραφο) μετράει τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ με τις οποίες φαίνεται το σχολείο, π.χ. $\hat{A} = 19^\circ$ και $\hat{B} = 43^\circ$.

Κατόπιν μετράει την απόσταση από το σημείο A ως το B , π.χ. $AB = 12$ μέτρα. Η μέτρηση των γωνιών έγινε από κάποια απόσταση από το έδαφος ίση με το ύψος του μαθητή, ας υποθέσουμε ότι έχει ύψος 1,8 μέτρα. Για να υπολογίσουμε το ύψος του σχολείου κατασκευάζουμε σε μία κόλλα χαρτί το αντίστοιχο μοντέλο. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B' = 6$ cm. Προεκτείνουμε την $A'B'$ προς το μέρος του B' και σχηματίζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο γωνίες $\hat{x}A'y = 19^\circ$ και $\hat{x}B'z = 43^\circ$. Οι ημιευθείες $A'y$ και $B'z$ τέμνονται στο σημείο Γ' . Από το σημείο Γ' φέρουμε την κάθετη $\Gamma'D'$ στην $A'B'$ και έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο μας. Μετράμε ότι το $\Gamma'D'$ ισούται με 3,3 cm.

Ο λόγος ομοιότητας είναι $\lambda = \frac{AB}{A'B'} = 200$.

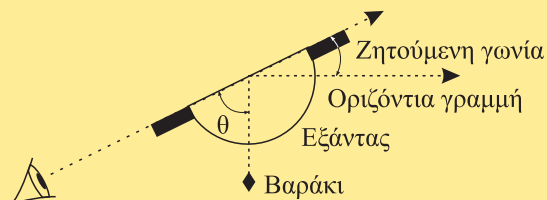
Επομένως το πραγματικό μήκος του $\Gamma\Delta$ είναι $\Gamma\Delta = \lambda\Gamma'D' = 6,6$ μέτρα. Προσθέτοντας και το ύψος του μαθητή, έχουμε ότι το πραγματικό ύψος του σχολείου είναι 8,4 μέτρα.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τη χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθύγραμμων τμημάτων που είναι απρόσιτα.

Ο ΕΞΑΝΤΑΣ

Το διπλανό σχήμα εκφράζει τη λειτουργία του εξάντα, δηλαδή μας παρουσιάζει έναν απλό μηχανισμό για να μετράμε τις γωνίες υπό τις οποίες φαίνεται ένα σχήμα. Για να κατασκευασθεί χρειάζεται ένα ίσιο ξύλο, ένα μοιρογνώμονιο, μία χορδή (κιθάρας) ή πετονιά, ένα βαράκι (νήμα της στάθμης) και δύο ανθρώπους, έναν για να βλέπει το αντικείμενο και έναν για να διαβάσει τη μέτρηση.

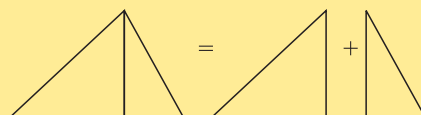


Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

Παλιά οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν ότι για να επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα ήταν αρκετό να έχουν έναν πίνακα με τρίγωνα και τις διαστάσεις τους, οπότε θα αρκούσε να μελετούν τον πίνακα παρά να κατασκευάζουν μοντέλα των τριγώνων που προέκυπταν από φυσικά προβλήματα.

Παρατήρησαν ότι αρκεί ο πίνακας αυτός να έχει μόνο ορθογώνια τρίγωνα αφού κάθε τρίγωνο διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια (σχ. 8). Ένας τέτοιος πίνακας είναι οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων : τα ημίτονα και συνημίτονα των γωνιών ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 1. Πρακτικά τα αποτελέσματα από την τριγωνομετρία είναι ακριβέστερα από αυτά που προκύπτουν από μέτρηση και κατασκευή μοντέλου, όπως προηγουμένως. Ωστόσο οι τριγωνομετρικοί πίνακες δεν είναι τίποτε άλλο, παρά πίνακες όμοιων τριγώνων.



Σχήμα 8

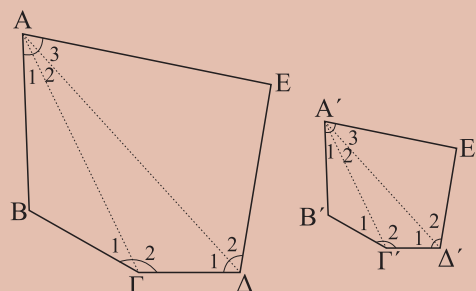
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδείξετε ότι δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε ισάριθμα όμοια τρίγωνα.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την εφαρμογή για δύο πεντάγωνα $ABΓΔΕ$ και $A'B'Γ'D'E'$, καθώς η απόδειξη είναι ανάλογη για κάθε πολύγωνο.

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο πεντάγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ . Από τις κορυφές A, A' των πενταγώνων φέρουμε τις διαγωνίους $ΑΓ, ΑΔ$ και $A'Γ', A'Δ'$ αντίστοιχα, οπότε καθένα πεντάγωνο χωρίσθηκε σε τρία τρίγωνα $ABΓ, AΓΔ, AΔΕ$ και $A'B'Γ', A'Γ'Δ', A'Δ'E'$ αντίστοιχα.



Σχήμα 9

Τότε έχουμε ότι $ABΓ \approx A'B'Γ'$ και $AΔΕ \approx A'Δ'E'$. Επομένως, θα είναι και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}'_1$ και $\frac{AΓ}{A'Γ'} = \lambda$. Τότε όμως θα έχουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}'_2$ (αφού $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$) και $\frac{AΔ}{A'Δ'} = \lambda$.

Επομένως και τα τρίγωνα $AΓΔ$ και $A'Γ'Δ'$ θα είναι όμοια.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

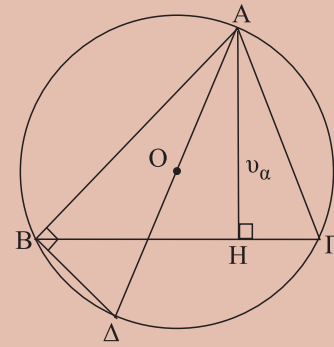
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $v_a = AH$. Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma = 2Rv_a$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη διάμετρο AD . Τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια, αφού $\hat{B} = \hat{H} = 1\perp$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Επομένως είναι

$$\frac{AH}{AB} = \frac{A\Gamma}{AD} \quad \text{ή} \quad \beta\gamma = 2Rv_a.$$



Σχήμα 10

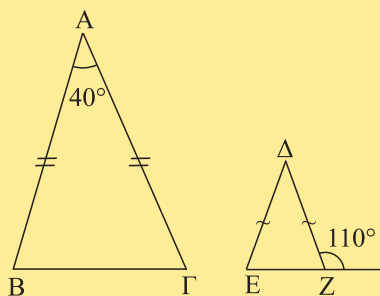
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 1\perp$, τότε είναι $\beta\gamma = av_a = 2Rv_a$.

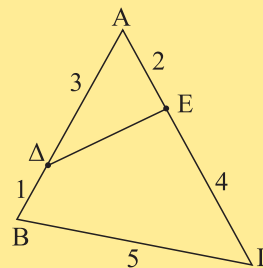
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

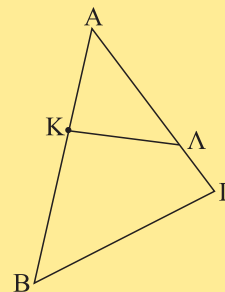
1. i) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια;
ii) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με ένα τρίτο τρίγωνο, τότε είναι και μεταξύ τους όμοια;
2. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια;
3. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = 3AE$. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{EZ}{B\Gamma}$.



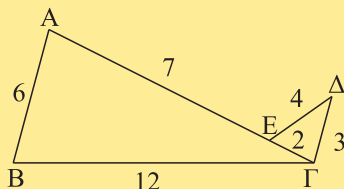
4. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί το μήκος του DE .



5. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3cm, 4cm και 5cm. Ένα τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 24cm. Ποια είναι τα μήκη των πλευρών του;
6. Αν στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $BK\Lambda\Gamma$ είναι εγγράμιμο, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Lambda$ είναι όμοια; Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές τους;



7. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\perp$). Από τυχαίο σημείο Δ της AG φέρουμε $\Delta E \perp BG$. Να αποδείξετε ότι:

- i) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια,
- ii) $AG \cdot \Delta\Gamma = AB \cdot E\Gamma$.

2. Στις πλευρές AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $\Delta\Gamma = \frac{1}{3} AB$ και

$\Gamma E = \frac{2}{3} AG$. Να αποδείξετε ότι:

- i) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma E$ είναι όμοια,
- ii) $B\Gamma = 3\Delta E$.

3. Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές α, β, γ . Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;

4. Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

5. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD . Να αποδείξετε ότι :

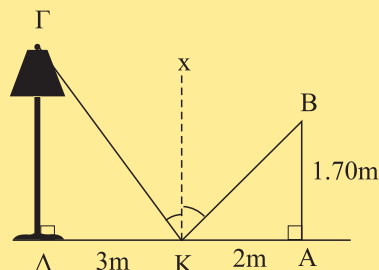
- i) $AD^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$,
- ii) $AB^2 = \Delta B \cdot B\Gamma$,
- iii) $AB \cdot AG = AD \cdot B\Gamma$.

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και οι ευθείες Ax και Ay που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις AB και AG και τέμνουν τη $B\Gamma$ και τον κύκλο αντίστοιχα στα Δ και E . Να αποδείξετε ότι $AD \cdot AE = AB \cdot AG$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Ο παρατηρητής AB βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη K . Να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη $\Delta\Gamma$, όταν είναι $\Delta K = 3m$, $AK = 2m$ και το

ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).



2. Να αποδείξετε ότι:

- i) δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες,
- ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

3. Θεωρούμε τους κύκλους (O_1, R_1) και (O_2, R_2) που τέμνονται στα σημεία A και B . Αν οι εφαπτόμενες στο A τέμνουν τους κύκλους στα A_1 και A_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = BA_1 \cdot BA_2$.

4. Αν AD , BE και ΓZ είναι τα ύψη και H το ορθόκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι

$$HD \cdot HA = HB \cdot HE = H\Gamma \cdot HZ.$$

5. Από το μέσο M του τόξου $\widehat{AB}$ φέρουμε τις χορδές MA και MZ , που τέμνουν τη χορδή AB στα Δ' και Z' αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι

$$MA \cdot MA' = MZ \cdot MZ'.$$

6. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\perp$) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.

Σύνθετα Θέματα

1. Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

2. Έστω δοσμένη γωνία $\chi\hat{O}\gamma$ και σημείο M . Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από τα O και M τέμνει τις πλευρές Ox , Oy στα B και Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{d}{d'}$, όπου d , d' είναι οι αποστάσεις του M από τις Ox , Oy , αντίστοιχα.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\perp$) και το ύψος του AD . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει το AD



ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

στο Z και η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι $ZE \parallel AB$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 1^\circ$ και το ύψος του AA . Να αποδείξετε ότι $AA^2 = AB \cdot A\Gamma$.

5. Η διχοτόμος AA ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο E . Να αποδείξετε ότι :

i) $AB \cdot A\Gamma = AA \cdot AE$,

ii) $EB^2 = EA \cdot EA$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω δοσμένος κύκλος (O, R) και σημείο A στο εξωτερικό του κύκλου. Από το A φέρουμε την εφαπτομένη AT και την τέμνουσα $AB\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{TB^2}{T\Gamma^2}$.

2. Από σημείο A φέρουμε τις εφαπτόμενες AB και $A\Gamma$ κύκλου (O, R) και τυχαία τέμνουσα ADE . Να αποδειχθεί ότι $BA \cdot GE = BE \cdot GA$.

3. Αν E, Z είναι οι προβολές των κορυφών B, Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ (με $\beta \neq \gamma$) στη διχοτόμο του AA να αποδείξετε ότι τα E, Z είναι συζυγή αρμονικά των A, Δ .

4. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ να αποδειχθεί ότι οι αποστάσεις τυχαίου σημείου της διαγωνίου $A\Gamma$ από τις πλευρές AB και $A\Delta$ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.

5. Αν M τυχαίο σημείο κύκλου (O, R) , να αποδείξετε ότι :

i) η απόσταση d του M από χορδή AB του κύκλου είναι $d = \frac{MA \cdot MB}{2R}$,

ii) η απόσταση d' του M από την εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο A του κύκλου είναι $d' = \frac{MA^2}{2R}$,

iii) αν d, d_1, d_2 οι αποστάσεις του M από μία χορδή $\Gamma\Delta$ του κύκλου και από τις εφαπτόμενες στα Γ, Δ αντίστοιχα, τότε $d^2 = d_1 \cdot d_2$.

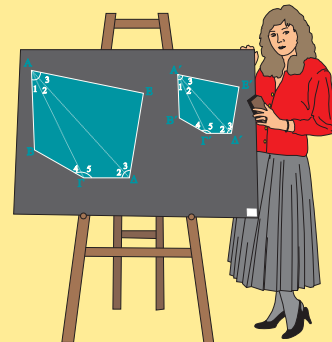
6. **Θεώρημα Πτολεμαίου:** Σε κάθε εγγράφημο τετράπλευρο το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών είναι ίσο με το γινόμενο των διαγωνίων του.

Δραστηριότητες

1. Να κατασκευασθούν δύο τετράπλευρα των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες μία προς μία, αλλά δεν είναι όμοια.
2. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Να κατασκευασθεί τετράπλευρο $A'B'\Gamma'\Delta'$ το οποίο να αποτελείται από τρίγωνα ίσα με τα τρίγωνα στα οποία χωρίζει η διαγώνιος $A\Gamma$ το ορθογώνιο έτσι, ώστε το $A'B'\Gamma'\Delta'$ να μην είναι όμοιο με το $AB\Gamma\Delta$.

Εργασία

Κατασκευάστε έναν εξάντα και υπολογίστε το ύψος μίας πολυκατοικίας στη γειτονιά σας ακολουθώντας τη διαδικασία της εφαρμογής 2.



ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- **Όμοια ευθύγραμμα σχήματα**

- Ανάλογες πλευρές
- Ίσες γωνίες

- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

- **Κριτήρια Ομοιότητας τριγώνων**

- Δύο ίσες γωνίες
- Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες
- Τρεις πλευρές ανάλογες

- Σε δύο όμοια τρίγωνα ο λόγος δύο ομόλογων στοιχείων τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Η αξιωματική μέθοδος

Η αξιωματική μέθοδος είναι ένας τρόπος κατασκευής μιας επιστημονικής θεωρίας, κατά τον οποίο ορισμένες προτάσεις (τα λεγόμενα *αξιώματα* ή *αιτήματα*) λαμβάνονται ως αρχή και από αυτά συνάγονται όλα τα θεωρήματα της θεωρίας με μια ακολουθία συλλογισμών που ονομάζεται *απόδειξη*. Οι κανόνες που ακολουθούν οι συλλογισμοί αυτοί είναι αντικείμενο της επιστήμης της λογικής. Όλες οι έννοιες που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της απόδειξης (εκτός από ένα μικρό αριθμό αρχικών εννοιών) εισάγονται με *ορισμούς*, οι οποίοι επεξηγούν το νόημα των εννοιών αυτών με βάση γνωστές έννοιες ή άλλες έννοιες που έχουν οριστεί προηγουμένως. Οι επιστήμες που κατασκευάζονται με την μέθοδο αυτή ονομάζονται *αποδεικτικές* ή *παραγωγικές επιστήμες*.

Η γένεση της αξιωματικής μεθόδου στην κλασσική Ελληνική αρχαιότητα

Η ιδέα της αρχής στην Ελληνική φιλοσοφική σκέψη

Η γένεση της αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά είναι φαινόμενο όχι μόνο μαθηματικού χαρακτήρα. Μαθηματικές γνώσεις είχαν πολλοί λαοί και μεγάλοι πολιτισμοί. Όμως μόνο στην αρχαία Ελλάδα γεννήθηκε η ιδέα να κατασκευαστεί η Γεωμετρία ξεκινώντας από ένα πεπερασμένο αριθμό αρχικών προτάσεων.

Η ιδέα της ενιαίας αρχής του κόσμου εντοπίζεται ήδη στα φιλοσοφικά σχήματα των Ιώνων φιλοσόφων, με τα οποία επιχειρούσαν να ερμηνεύσουν τον κόσμο. Ο Εμπεδοκλής ανέπτυξε τη θεωρία των στοιχείων, από την αλληλεπίδραση των οποίων γεννιέται ο κόσμος. Οι αρχαίοι ατομιστές επεχείρησαν επίσης να ερμηνεύσουν τον κόσμο ξεκινώντας από κάποιες ελάχιστες αδιαίρετες οντότητες. Έτσι η τάση να εξηγηθεί ο κόσμος ξεκινώντας από ένα πεπερασμένο αριθμό αρχικών στοιχείων με κάποιους ορθολογικούς κανόνες δέσποζε στην πνευματική ατμόσφαιρα της αρχαίας Ελλάδας.

Στους κύκλους των φιλοσόφων της Πλατωνικής Ακαδημίας και των Περιπατητικών συζητείται το θέμα των αρχών πάνω στις οποίες πρέπει να κατασκευάζεται μια αποδεικτική επιστήμη. Σύμφωνα με τη θεωρία της επιστήμης του Πλάτωνα, η επιστήμη

1. είναι ένα σύνολο απόλυτων αληθειών,
2. ξεκινά από κάποιες αρχές, από τις οποίες συνάγονται οι αλήθειες της επιστήμης,
3. μελετά ιδεατά αντικείμενα που είναι σταθερά και αμετάβλητα στην πορεία του χρόνου. Απόλυτες αλήθειες μπορούν να διατυπωθούν μόνο για αντικείμενα αυτού του τύπου.

Τα μαθηματικά, κατά τον Πλάτωνα, επιτυγχάνουν την τελειότητα στο βαθμό που οι αρχές τους προκύπτουν από τη λεγόμενη Ιδέα του Αγαθού, που στο φιλοσοφικό σύστημα του Πλάτωνα παίζει ρόλο καθαρού Απολύτου.

Ο Αριστοτέλης, από την άλλη μας άφησε στα «Αναλυτικά Ύστερα» μια αρκετά επεξεργασμένη θεωρία αποδεικτικής επιστήμης. Η γενική λογική δομή μιας αποδεικτικής επιστήμης αποτελείται από όρους και προτάσεις που έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

(I) Η αποδεικτική επιστήμη είναι μια ακολουθία προτάσεων για τα στοιχεία ενός πεδίου αντικειμένων, του γένους (αρχή της ομογένειας).

Οι προτάσεις αυτές διαιρούνται σε *αναπόδεικτες* ή *αρχικές* (*αξιώματα*, *αιτήματα*, *αρχές*, *τα πρώτα*), και *αποδείξιμες* ή *παράγωγες* (*θεωρήματα*).

Οι όροι της πρότασης διαιρούνται σε *μη οριζόμενους* ή *αρχικούς* όρους (*αρχές*, *τα πρώτα*), και *ορίσιμους* ή *παράγωγους* όρους (*τα εκ τούτων*).

Ωστόσο, ο Αριστοτέλης δεν απαιτεί τη ρητή απαρίθμηση όλων των αρχικών προτάσεων και όρων.

(II) Από τις αρχικές προτάσεις, τα *αξιώματα* είναι *προφανή* και *αναπόδεικτα*, ενώ τα *αιτήματα* είναι υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη, αν και δεν είναι πάντοτε προφανείς.

(III) Οι αρχικοί όροι είναι άμεσα νοητοί και δεν ορίζονται.

(IV) Από τις αρχικές προτάσεις, τα *αξιώματα* είναι *αληθείς* και *αναγκαίες* προτάσεις. Η αλήθεια των αιτημάτων όμως δεν είναι λογικά αναγκαία, αλλά γίνεται δεκτή χωρίς απόδειξη.

Οι αναζητήσεις πάνω στις αρχές της αποδεικτικής επιστήμης στην Ακαδημία του Πλάτωνα και το Λύκειο, συνέτειναν πιθανότατα στη δημιουργία ενός ενιαίου συστήματος αρχών, που αποτέλεσε τη βάση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη

Η πρωταρχική ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου έχει αφετηρία στα έργα των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών. Η πρώτη προσπάθεια να γραφούν «Στοιχεία» της Γεωμετρίας ανήκει στον Ιπποκράτη το Χίο. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου, διάφοροι γεωμέτρες επιχείρησαν να γράψουν «Στοιχεία». Στην πορεία της κατασκευής των «Στοιχείων» της Γεωμετρίας τέθηκε πιθανότατα το θέμα να διευκρινιστεί ποιες είναι οι προτάσεις εκείνες από τις οποίες όλες οι άλλες προτάσεις προκύπτουν ως συμπεράσμα. Αν και τα «Στοιχεία» των γεωμετρών αυτών δε διασώθηκαν, είναι ωστόσο λογικό να υποθέσουμε ότι η έκθεση της Γεωμετρίας διέφερε από έργο σε έργο κι ότι οι αρχικές προτάσεις σ' αυτά δεν ήταν οι ίδιες.

Το Βιβλίο I των «Στοιχείων» αρχίζει με 23 Ορισμούς οι οποίοι εισάγουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, γραμμή, επιφάνεια, ευθεία, επίπεδο, γωνία, σύνορο, σχήμα) και παράγωγες έννοιες με τη βοήθεια των οποίων ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (ορθή, οξεία και αμβλεία γωνία, κύκλος, τρίγωνο, τετράπλευρο, παράλληλες ευθείες). Ωστόσο, ο ορισμός της έννοιας π.χ. του σημείου ή της ευθείας που δίνει ο Ευκλείδης δε χρησιμοποιείται ποθενά στη συνέχεια στις αποδείξεις των «Στοιχείων».

Τα τρία πρώτα Αιτήματα⁽¹⁾ διασφαλίζουν την εκτέλεση γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη. Το τέταρτο αίτημα

- (1) 1. 'Ηιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Παράρτημα Α΄

εξασφαλίζει ότι μια ευθεία μπορεί να προεκταθεί κατά μονοσήμαντο τρόπο, και το πέμπτο αίτημα εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείου τομής δύο ευθειών υπό τις συνθήκες του αιτήματος.

Οι Κοινές Έννοιες^(*) είναι προτάσεις που περιγράφουν γενικές ιδιότητες της ισότητας ή ανισότητας μεγεθών. Όλες οι Κοινές Έννοιες εκτός της τέταρτης αφορούν όχι μόνο γεωμετρικά μεγέθη, αλλά και αριθμούς. Μόνον η τέταρτη έχει κατ' εξοχήν γεωμετρικό χαρακτήρα. Γι' αυτό θεωρείται από ορισμένους ιστορικούς των μαθηματικών ότι πιθανόν είναι μεταγενέστερη παρεμβολή.

Η επιλογή των αιτημάτων και των Κοινών Εννοιών είναι εν γένει εύστοχη. Όλες σχεδόν οι προτάσεις αυτές διατηρήθηκαν στο σύγχρονο αξιωματικό σύστημα της Γεωμετρίας. Ωστόσο, δεν είναι επαρκή, από σύγχρονη άποψη, για να θεμελιώσουν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Αποσιδιάζουν εντελώς έννοιες όπως του «μεταξύ», «από το ίδιο μέρος», «εντός (εκτός) ενός γεωμετρικού σχήματος», και πολλές άλλες που ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί στη συνέχεια κατά τη διαδικασία των αποδείξεων. Όμως αυτό δεν αποτελεί μειονέκτημα από την Αριστοτελεια άποψη της αποδεικτικής επιστήμης, αφού δεν επιβάλλεται η πλήρης απαρίθμηση όλων των αρχικών προτάσεων, κι επομένως επιτρέπεται η χρήση «προφανών», μη ρητά διατυπωμένων υποθέσεων στην πορεία της απόδειξης.

Η εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου έδωσε τη δυνατότητα της συστηματοποίησης του σώματος των γεωμετρικών προτάσεων κατά την αρχαιότητα και την αποφυγή λογικών λαθών όπως π.χ. οι φαύλοι κύκλοι. Επίσης συνέβαλε στην αποσαφήνιση της λογικής αλληλουχίας των εννοιών, πράγμα που προσέδωσε στη Γεωμετρία ανυπέρβλητη για την εποχή λογική αυστηρότητα.

Η γένεση της νέας αντίληψης της αξιωματικής μεθόδου στα τέλη του 19^{ου} αι.

Ο διαχωρισμός της έννοιας του αξιωματικού συστήματος από την ερμηνεία του

Με την κατάρρευση του αρχαίου Ελληνικού πολιτισμού τα επιστημονικά κέντρα μετατοπίζονται στην Ανατολή και αργότερα στην Ευρώπη. Στη διάρκεια όλων αυτών των αιώνων το σύστημα των «Στοιχείων» παραμένει το ιδεώδες της μαθηματικής αυστηρότητας και το πρότυπο της επιστημονικής μεθόδου. Όμως η αξιωματική μέθοδος δε γνώρισε κάποια ιδιαίτερη ανάπτυξη μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αι. Ούτε υπήρξε κάποια σημαντική προσπάθεια βελτίωσης των εγγενών αδυναμιών της. Ο ρόλος της αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά αρχίζει να αλλάζει σημαντικά από τα μέσα του 19^{ου} αι. όταν ο Λομπατσέφσκι και ο Μπόλνται απέδειξαν ότι μπορεί να κατασκευασθεί μια Γεωμετρία με αξιώματα διαφορετικά από τα Ευκλείδεια.

Οι σημαντικότερες ίσως αδυναμίες της Ευκλείδειας αξιωματικής μεθόδου σήμερα είναι ότι δεν παρέχει ακριβή περιγραφή του τι συνιστά λογική απόδειξη. Έτσι στους συλλογισμούς υπεισέρχεται

το στοιχείο της γεωμετρικής εποπτείας, ιδιαίτερα σε προτάσεις που αφορούν τη συνέχεια των γεωμετρικών σχημάτων και τη σχετική τους θέση στο χώρο. Επίσης δεν υπάρχει σαφήνεια στον ορισμό των εννοιών. Η εισαγωγή των αρχικών εννοιών π.χ. από τον Ευκλείδη γίνεται με επεξηγήσεις που δίνουν την εντύπωση προσπάθειας ορισμού, αλλά παραμένουν μη λειτουργικοί.

Το πιο σημαντικό όμως χαρακτηριστικό του ιδεώδους αυτού είναι ότι η γεωμετρική θεωρία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το μοναδικό της μοντέλο – το φυσικό χώρο – και οι βασικές υποθέσεις της θεωρίας κατανοούνται ως οι χαρακτηριστικές ιδιότητες αυτού του μοντέλου. Ακόμα και με την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας οι μαθηματικοί δε συνειδητοποίησαν αμέσως τη διαμορφούμενη νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου, η οποία μας επιτρέπει να θεωρούμε τη Γεωμετρία ως επιστήμη που κατασκευάζεται από υποθέσεις που δε συνδέονται κατ' ανάγκη με το μοντέλο του φυσικού χώρου. Η Υπερβολική Γεωμετρία φάνταζε στα μάτια των μαθηματικών του 19^{ου} αι. περισσότερο σαν ιδιοφυές παράδοξο στο σώμα της μαθηματικής γνώσης, παρά σαν εναλλακτικό σύστημα Γεωμετρίας, ισότιμο μάλιστα προς το Ευκλείδειο. Για να νομιμοποιηθεί η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία χρειάστηκε να συνδεθεί με τις συνήθεις αντιλήψεις του χώρου στα έργα του Μπελτράμι, του Κλάιν και του Πουανκαρέ, να επινοηθούν ερμηνείες (μοντέλα) της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο πλαίσιο της κλασσικής Γεωμετρίας.

Εκτός όμως από τη Γεωμετρία, τον 19^ο αι. εισάγονται και μια σειρά νέες έννοιες, όπως οι ιδανικοί αριθμοί του Κούμμερ, οι υπερμυγαδικοί αριθμοί και τα γεωμετρικά τους ισοδύναμα, οι πολυδιάστατοι χώροι κτλ., η ερμηνεία των οποίων στο πλαίσιο των κλασσικών μαθηματικών θεωριών γινόταν όλο και πιο πολύπλοκη. Εκτός από αυτό οι ερμηνείες αυτές αποδεικνυόταν ότι δεν είναι μοναδικές. Αυτό έδειχνε ότι οι θεωρίες αυτές πρέπει να εξετάζονται ανεξάρτητα από κάποια συγκεκριμένη ερμηνεία.

Έτσι στη διάρκεια του δεύτερου μισού του 19^{ου} αι. προτείνονται αξιωματικοί ορισμοί μιας σειράς νέων εννοιών. Το 1854 ο Καίλεν προτείνει τον αξιωματικό ορισμό της αφηρημένης έννοιας της ομάδας (σε μορφή που είναι ορθή μόνο για πεπερασμένες ομάδες), το 1870 ο Κρόνκερ προτείνει ένα σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων και, εν γένει πολλά έργα μαθηματικών του 19^{ου} αι. – του Χ. Χάνκελ (Hermann Hankel, 1839-1873), του Χ. Βέμπερ (Heinrich Weber, 1842-1913), του Ντέντεκιντ (Richard Dedekind, 1831-1916), και άλλων – είναι αφιερωμένα στην αξιωματικοποίηση τμημάτων της άλγεβρας.

Το 1882 ο Πας (Pasch M.) επιχειρεί την αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας. Στο αξιωματικό σύστημα του Πας εμφανίζονται για πρώτη φορά αξιώματα που χαρακτηρίζουν την έννοια του «μεταξύ», και εισάγεται η αρχή με τη βοήθεια της οποίας μπορεί ένα επίπεδο να διααιρεθεί από μία ευθεία και ο χώρος από ένα επίπεδο. Το 1889 ο Πεάνο (Giuseppe Peano, 1858-1932) στο έργο του για τα λογικά θεμέλια της Γεωμετρίας καταφέρνει να αξιωματικοποιήσει το τμήμα της Γεωμετρίας που μελετά τη σχετική θέση σημείων, ευθειών και επιπέδων. Το σύστημα του Πεάνο θυμίζει αυτό του Πας, όμως ο Πεάνο επιτυγχάνει να αποφύγει συλλογισμούς εποπτικού χαρακτήρα. Στο πλαίσιο της Ιταλικής σχολής, οι μαθητές του Πεάνο, Αμοδέο, Φανό (Gino Fano, 1871-1952), Ενρίκε (Federigo Enriques, 1871-1946) και Πιερί (Mario Pieri, 1860-1913), επιτυγχάνουν τη θεμελίωση της προβολικής Γεωμετρίας.

Παράλληλα γίνονται μελέτες για την αξιωματικοποίηση της αριθμητικής στα έργα του Χ. Γκράσμαν (Hermann Grassmann, 1809-1877), του Γκ. Κάντορ (Georg Cantor, 1845-1918), του Γκ. Φρέγκε

^(*) 1. Τὰ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

2. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.

4. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

5. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον [ἐστὶν].

Παράρτημα Α'

(Gottlob Frege, 1848-1925) και του Μπ. Ράσσελ (Bertrand Russell, 1872-1970). Τα πρώτα πλήρη συστήματα αξιωμάτων της αριθμητικής προτείνονται το 1888 από το Ντέντεκιντ και το 1891 από τον Πιάνο.

Το αξιωματικό σύστημα του Χίλμπερτ

Σε όλες αυτές τις έρευνες που αναφέραμε δεσπόζει η τάση να διαχωριστεί η μαθηματική θεωρία από την ερμηνεία (το μοντέλο) με βάση το οποίο κατασκευάζεται. Η τάση αυτή οδήγησε και στην αξιωματική κατασκευή της Γεωμετρίας στο έργο του Ντ. Χίλμπερτ «Τα θεμέλια των μαθηματικών», το οποίο αντανάκλα τη νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου. Πώς όμως εκδηλώνεται αυτή η τάση στο πεδίο της Γεωμετρίας και σε τι συνίσταται η καινοτομία του Χίλμπερτ;

Πριν την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας, όταν η Γεωμετρία του Ευκλείδη θεωρείτο ως η μόνη δυνατή Γεωμετρία των σχέσεων του φυσικού χώρου, ήταν νόμιμο να επιχειρήσει κανείς να ορίσει τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, ερμηνεύοντάς τις με βάση τα πραγματικά αρχέτυπα των εννοιών αυτών στο φυσικό χώρο. Αυτή ακριβώς ήταν η προσέγγιση του Ευκλείδη και των μετέπειτα γεωμετρών μέχρι το 19^ο αι. Ο ίδιος ο Ευκλείδης επιχειρεί να ορίσει π.χ. το σημείο ως «κάτι το οποίο δεν έχει μέρη», δηλαδή ως οντότητα χωρίς εσωτερική δομή ή άτομο. Ο ορισμός αυτός, που επιχειρεί να επεξηγήσει τη μαθηματική έννοια καταφεύγοντας σε αρχέτυπα του φυσικού χώρου, κατανοείται ποικιλοτρόπως από τους σχολιαστές του Ευκλείδη και τους μετέπειτα μαθηματικούς.

Όμως μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών έγινε σαφές ότι η προσέγγιση του Ευκλείδη κατά τον ορισμό των αρχικών εννοιών είναι αδύνατη. Κάθε δυνατή Γεωμετρία έχει τις δικές της αρχικές έννοιες, οι οποίες εξαρτώνται από τα αξιώματα του γεωμετρικού συστήματος. Οι ορισμοί των αρχικών εννοιών έτσι συνδέονται με το δεδομένο γεωμετρικό σύστημα κι όχι πλέον με το φυσικό χώρο.

Αφού λοιπόν δεν είναι δυνατόν να δοθεί ορισμός των αρχικών βασικών εννοιών για όλες τις δυνατές γεωμετρίες, οι αρχικές έννοιες έπρεπε να οριστούν ως αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης που ικανοποιούν τα αξιώματα της Γεωμετρίας. Τα αξιώματα αυτά ορίζουν έμμεσα τις αρχικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό τα αξιώματα παύουν πλέον να θεωρούνται προφανείς αλήθειες που δε χρήζουν απόδειξης. Η έννοια του «προφανούς» αντικαθίσταται τώρα από την έννοια της «απλότητας» του αξιωματικού συστήματος.

Στο σύστημα του Χίλμπερτ τα αρχικά μαθηματικά αντικείμενα είναι τριών ειδών: τα «σημεία», οι «ευθείες» και τα «επίπεδα», που συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις του «ανήκειν», του «μεταξύ» και της «ισοδυναμίας». Το σύστημα του Χίλμπερτ εξετάζει τις αρχικές αυτές έννοιες και τις σχέσεις τους και οι πέντε ομάδες αξιωμάτων που εισάγει συνιστούν έμμεσο ορισμό των αρχικών αντικειμένων και των σχέσεών τους.

- (I) Τα αξιώματα συνδέσεως («ανήκειν») ορίζουν τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης μεταξύ σημείων, ευθειών και επιπέδων¹.

- (II) Τα αξιώματα διάταξης ορίζουν τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης σημείων πάνω σε μια ευθεία ή ένα επίπεδο².
(III) Τα αξιώματα ισοδυναμίας ορίζουν την έννοια της «ισότητας» δύο τμημάτων ή γωνιών³.
(IV) Τα αξιώματα συνέχειας⁴.
(V) Το αξίωμα παραλληλίας⁵.

(I₆) Αν δύο σημεία βρίσκονται σε ένα επίπεδο, τότε και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά βρίσκεται σ' αυτό το επίπεδο.

(I₇) Αν δύο επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο.

(I₈) Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

² Τα αξιώματα διάταξης είναι τέσσερα:

(II₁) Από τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας ένα και μόνον ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.

(II₂) Για οποιαδήποτε δύο σημεία A και Γ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο B στην ευθεία $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε το σημείο Γ να βρίσκεται μεταξύ του A και του B .

(II₃) Για οποιαδήποτε τρία σημεία μιας ευθείας υπάρχει όχι περισσότερο από ένα σημείο που βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.

Η σχέση του «μεταξύ» για σημεία σε μια ευθεία μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του *ευθύγραμμου τμήματος*.

(II₄) Έστω A, B, Γ τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία και έστω ε ευθεία στο επίπεδο των A, B, Γ που δε διέρχεται από κανένα από τα σημεία A, B, Γ . Αν η ευθεία ε διέρχεται από ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB , τότε πρέπει να διέρχεται κι από ένα σημείο του τμήματος $A\Gamma$ ή από ένα σημείο του τμήματος $B\Gamma$ (αξίωμα του Πας).

³ Τα αξιώματα αυτά είναι πέντε:

(III₁) Αν A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία στην ευθεία ε και A' είναι ένα σημείο της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας ε' , τότε μπορεί πάντοτε να βρεθεί σημείο B' που βρίσκεται στο δεδομένο από το σημείο A' μέρος της ευθείας ε' τέτοιο, ώστε το τμήμα AB να είναι ισοδύναμο (ισο) με το τμήμα $A'B'$.

(III₂) Αν δύο τμήματα είναι ισοδύναμα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.

(III₃) Έστω AB και $B\Gamma$ δύο τμήματα της ευθείας ε που δεν έχουν κοινό σημείο και έστω επίσης $A'B'$ και $B'\Gamma'$ δύο τμήματα της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας ε' που επίσης δεν έχουν κοινό σημείο. Αν τώρα $AB=A'B'$, $B\Gamma=B'\Gamma'$, τότε και $A\Gamma=A'\Gamma'$.

Η *γωνία* ορίζεται ως το σχήμα που αποτελείται από δύο διαφορετικές ημιευθείες με κοινό αρχικό σημείο.

(III₄) Από δεδομένη ημιευθεία σε δεδομένο ημιεπίπεδο που ορίζεται από αυτή την ημιευθεία και την προέκτασή της, μπορεί να σχηματιστεί μια μοναδική γωνία ισοδύναμη με τη δεδομένη γωνία.

(III₅) Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν $AB=A_1B_1$, $A\Gamma=A_1\Gamma_1$ και $\angle A=\angle A_1$, τότε και $\angle B=\angle B_1$, $\angle \Gamma=\angle \Gamma_1$.

⁴ Τα αξιώματα συνέχειας είναι δύο:

(IV₁) Έστω AB και ΓA δύο οποιαδήποτε τμήματα. Τότε στην ευθεία AB υπάρχει πεπερασμένος αριθμός σημείων $A_1, A_2, \dots, A_n$, τέτοιων ώστε τα τμήματα $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ να είναι ισοδύναμα με το τμήμα ΓA και το σημείο B να βρίσκεται μεταξύ A και A_n (αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη).

(IV₂) Τα σημεία μιας ευθείας σχηματίζουν σύστημα, το οποίο, τηρουμένης της γραμμικής διάταξης, του πρώτου αξιώματος ισοδυναμίας και του αξιώματος Ευδόξου-Αρχιμήδη δεν είναι επεκτάσιμο, δηλ. σ' αυτό το σύστημα σημείων δεν είναι δυνατόν να προστεθεί ένα ακόμα σημείο, έτσι ώστε στο επεκτεταμένο σύστημα που αποτελείται από το αρχικό σύστημα και το συμπληρωματικό σημείο να ικανοποιούνται τα παραπάνω αξιώματα (αξίωμα γραμμικής πληρότητας).

¹ Τα αξιώματα αυτά είναι οκτώ:

(I₁) Από οποιαδήποτε δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία.

(I₂) Σε κάθε ευθεία υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία.

(I₃) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία.

(I₄) Από οποιαδήποτε τρία σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία, διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.

(I₅) Σε οποιαδήποτε επίπεδο υπάρχει πάντοτε ένα σημείο που ανήκει σ' αυτό.

Παράρτημα Α'

Η έννοια της ερμηνείας (μοντέλου)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα γεωμετρικό σύστημα δίνεται με τη βοήθεια ενός συστήματος αξιωμάτων. Τα αντικείμενα που ικανοποιούν τα αξιώματα αυτού του γεωμετρικού συστήματος μπορεί να είναι διάφορα. Τα διάφορα αυτά αντικείμενα συνιστούν διαφορετικές ερμηνείες ή μοντέλα του γεωμετρικού συστήματος.

Έστω, π.χ. ότι ερμηνεύουμε τα αρχικά αντικείμενα ως εξής: ως «σημείο» θεωρούμε οποιαδήποτε σφαίρα ακτίνας R , ως «ευθεία» κάθε άπειρο κυκλικό κύλινδρο ακτίνας R , και ως «επίπεδο» οποιοδήποτε τμήμα του χώρου που περιέχεται μεταξύ δύο επιπέδων που βρίσκονται σε απόσταση $2R$ το ένα από το άλλο. Θα λέμε ότι ένα «σημείο» κείται επ' «ευθείας» αν η αντίστοιχη σφαίρα περιέχεται στον κύλινδρο. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων μπορεί να ορισθεί ως η απόσταση μεταξύ των κέντρων των αντίστοιχων σφαιρών. Με ανάλογο τρόπο μπορούν να οριστούν διάφορα «σχήματα». Τότε όλα τα αξιώματα (και επομένως και τα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας) θα πρέπει να ικανοποιούνται στην ερμηνεία (μοντέλο) αυτή.

Με τον παραπάνω τρόπο κατασκευάσαμε ένα μοντέλο του Ευκλείδειου γεωμετρικού συστήματος. Όλες οι ιδιότητες και τα θεωρήματα που προκύπτουν από το αφηρημένο σύστημα των αξιωμάτων «μεταφέρονται» στα συγκεκριμένα αντικείμενα που είναι ερμηνείες των βασικών εννοιών του αξιωματικού συστήματος. Επομένως, οποιασδήποτε φύσης κι αν είναι τα αντικείμενα αυτά και σε οποιοδήποτε κλάδο της επιστήμης κι αν ανήκουν οι ιδιότητές τους μπορούν να θεωρηθούν γνωστές εκ των προτέρων, επειδή προκύπτουν από τις ιδιότητες του αφηρημένου αξιωματικού συστήματος. Έτσι δεν απαιτείται να μελετηθούν τα αντικείμενα αυτά ξεχωριστά. Αυτό όμως διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της Γεωμετρίας και καθιστά τη σύγχρονη αξιωματική μέθοδο ισχυρότατο επιστημονικό εργαλείο.

Εκτός από τη Γεωμετρία, η μέθοδος του μοντέλου χρησιμοποιείται και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, αλλά και σε άλλους κλάδους της επιστήμης. Στην άλγεβρα, π.χ. γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων είναι μοντέλο της αφηρημένης έννοιας της ομάδας. Ένα άλλο μοντέλο της ομάδας είναι το σύνολο των ρητών, το οποίο είναι ταυτόχρονα και μοντέλο της αφηρημένης έννοιας του σώματος.

Η νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου που διαμορφώθηκε στα τέλη του 19^{ου} αι. είναι συνοψασμένη με την ιδέα του *μοντέλου* και συνίσταται στο ότι αντικείμενο μιας αξιωματικής θεωρίας αποτελεί οποιοδήποτε μοντέλο (ερμηνεία) της θεωρίας αυτής.

Το πρόβλημα της μη αντιφατικότητας της Γεωμετρίας

Η αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας από τον Χίλμπερτ επέτρεψε στον Φ. Κλάιν και τον Α. Πουανκαρέ να αποδείξουν τη σχετική μη αντιφατικότητα της Γεωμετρίας Λομπατσέφσκι-Μπόλουϊ ως προς τη Γεωμετρία του Ευκλείδη. Αυτή η απόδειξη, που βασίζεται στην ιδέα του μοντέλου της αξιωματικής θεωρίας, συνίσταται στο να δείξει κανείς έναν τρόπο ερμηνείας των εννοιών και

προτάσεων της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με όρους της Ευκλείδειας (στην περίπτωση της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας η μέθοδος απέδειξε ότι αν η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι μη αντιφατική, τότε και η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι επίσης μη αντιφατική).

Όσον αφορά την μη αντιφατικότητα της ίδιας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αυτή ανάγεται στη μη αντιφατικότητα της αριθμητικής των φυσικών αριθμών. Ωστόσο, δεν υπάρχει απόλυτη απόδειξη της μη αντιφατικότητας της αριθμητικής (αν και υπάρχουν αποδείξεις μη αντιφατικότητας υποσυστημάτων της αριθμητικής). Έτσι δεχόμαστε ότι μια αξιωματική θεωρία είναι μη αντιφατική αν μπορεί να κατασκευαστεί αριθμητικό μοντέλο της θεωρίας αυτής. Τα παραπάνω αποκαλύπτουν τον ιδιαίτερο ρόλο της αριθμητικής στο πρόβλημα της μη αντιφατικότητας, δεδομένου ότι το ανάλογο πρόβλημα για μια σειρά άλλες μαθηματικές θεωρίες ανάγεται επίσης στο πρόβλημα της μη αντιφατικότητας της αριθμητικής. Η μέθοδος της απόδειξης της σχετικής μη αντιφατικότητας μιας θεωρίας με τη βοήθεια της κατασκευής ενός μοντέλου εφαρμόζεται σήμερα ευρύτατα στα θεμέλια των μαθηματικών και τη μαθηματική λογική για την απόδειξη της σχετικής μη αντιφατικότητας διάφορων μαθηματικών και λογικών θεωριών.

Το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της Γεωμετρίας

Η μέθοδος του μοντέλου μας επιτρέπει επίσης να λύσουμε το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων. Προκειμένου να αποδειχθεί ότι ένα αξίωμα A της θεωρίας T δεν είναι αποδείξιμο από τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας αυτής, αρκεί να κατασκευαστεί ένα μοντέλο της θεωρίας T , στο οποίο το αξίωμα A είναι ψευδές, ενώ τα υπόλοιπα αξιώματα είναι αληθή.

Η ύπαρξη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύει την ανεξαρτησία του αξιώματος παραλληλίας από τα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Το σύστημα αξιωμάτων της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι ένα σύστημα που λαμβάνεται από το παραπάνω αξιωματικό σύστημα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη με την αλλαγή του αξιώματος παραλληλίας με το παρακάτω αξίωμα:

«Έστω ε τυχούσα ευθεία και σημείο A εκτός αυτής. Στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο A άγονται περισσότερες από μία ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και δεν τέμνουν την ευθεία ε ».

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί η ανεξαρτησία των αξιωμάτων συνέχειας. Η ανεξαρτησία του αξιώματος Ευδόξου-Αρχιμήδη αποδεικνύεται με τη βοήθεια της κατασκευής ενός μοντέλου «μη Αρχιμήδειας Γεωμετρίας».

Ιδιαίτερο ρόλο έχει το αξίωμα (I_7), το οποίο στην ουσία εξασφαλίζει ότι ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις. Η ανεξαρτησία αυτού του αξιώματος από τα υπόλοιπα αποδεικνύεται, π.χ. με την κατασκευή ενός μοντέλου τετραδιάστατου Ευκλείδειου χώρου.

Έτσι το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας οδηγεί στη μελέτη νέων «γεωμετρικών χώρων», που διαφέρουν σημαντικά ως προς τις ιδιότητές τους από το συνήθη χώρο του Ευκλείδη.

⁵ Έστω ε τυχούσα ευθεία και σημείο A εκτός αυτής. Στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο A υπάρχει όχι περισσότερο από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και δεν τέμνει την ευθεία ε .

Παράρτημα Β'

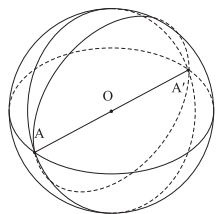
Γεωμετρία της σφαίρας

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

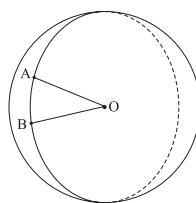
Στο Παράρτημα αυτό θα παρουσιαστεί μία σύντομη εισαγωγή στη Γεωμετρία της σφαίρας, θα μελετήσουμε δηλαδή, κατ' αναλογία με την γεωμετρία του επιπέδου, ιδιότητες σχημάτων στην επιφάνεια της σφαίρας.

2. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Σε μια σφαίρα κέντρου O (σχ. 1), υπάρχουν άπειροι μέγιστοι κύκλοι, που περνάνε από ένα σημείο της A . Οι μέγιστοι αυτοί κύκλοι ορίζονται ως τομή της σφαίρας με τα επίπεδα που περνάνε από την ακτίνα OA . Παρατηρούμε όμως ότι αυτοί οι κύκλοι διέρχονται και από ένα δεύτερο σημείο A' , το αντιδιαμετρικό σημείο του A .



Σχήμα 1



Σχήμα 2

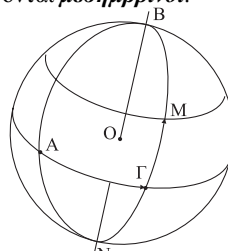
Δύο σημεία A και B μη αντιδιαμετρικά στην επιφάνεια της σφαίρας (σχ. 2), ορίζουν έναν και μόνο ένα μέγιστο κύκλο που περιέχει τα σημεία αυτά. Αποδεικνύεται ότι το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου είναι η συντομότερη απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων, μετρημένη πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Κάθε άλλη γραμμή που συνδέει τα δύο αυτά σημεία, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας έχει μήκος μεγαλύτερο από αυτό του τόξου AB . Έχουμε λοιπόν τις προτάσεις:

- Από κάθε σημείο μιας σφαίρας διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι.
- Δύο τυχόντες μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία.
- Δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία σε μία σφαίρα ορίζουν ένα μέγιστο κύκλο.

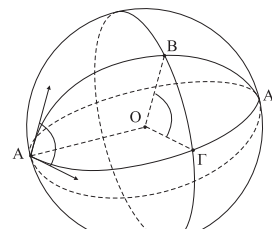
Ονομάζουμε **γωνιακή απόσταση** ή **απόσταση** μεταξύ δύο σημείων A και B μιας σφαίρας το μικρότερο από τα δύο τόξα AB του μέγιστου κύκλου που αυτά ορίζουν. Είναι το ίδιο αν ορίσουμε την απόσταση ως την επίκεντρη κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ (σχ.2), που ορίζουν τα δύο σημεία A και B , με το κέντρο O της σφαίρας. Το τόξο ή η γωνία μπορεί να μετρηθεί σε ορθές, μοίρες ή ακτίνια. Εάν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, τότε τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους και επιλέγουμε ένα από τα δύο για να μετρήσουμε την απόστασή τους.

Ονομάζουμε **γωνία δύο μέγιστων κύκλων** τη διεδρη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα των δύο κύκλων. **Άξονας** ενός μέγιστου κύκλου λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου, στο κέντρο της σφαίρας. **Πόλοι** ενός κύκλου λέγονται τα σημεία τομής του άξονα του κύκλου με τη σφαίρα. Οι πόλοι είναι προφανώς αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας. Όταν αναφερόμαστε στον πόλο ενός μέγιστου κύκλου θα εννοούμε έναν από τους δύο πόλους.

Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου επάνω στη σφαίρα, χρησιμοποιείται το εξής σύστημα αναφοράς. Θεωρούμε ένα μέγιστο κύκλο, που τον λέμε **ισημερινό**, τους **παράλληλους** μικρούς κύκλους και τους **πόλους** του B και N (σχ.3). Ο ένας πόλος λέγεται **βόρειος** και ο άλλος **νότιος**. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνάνε από τους πόλους B και N λέγονται **μεσημβρινοί**.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

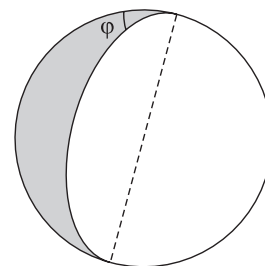
Το σημείο τομής A του ισημερινού με έναν συγκεκριμένο μεσημβρινό θεωρείται αρχή των μετρήσεων. Ένα σημείο της σφαίρας M βρίσκεται στην τομή ενός παραλλήλου και ενός μεσημβρινού (σχ.3). Το τόξο GM από τον ισημερινό μέχρι τον παράλληλο του σημείου M λέγεται **πλάτος** ενώ το τόξο επί του ισημερινού από την αρχή A των μεσημβρινών μέχρι του μεσημβρινού GM του σημείου M λέγεται **μήκος**. Το πλάτος παίρνει τιμές από -90° (νότιος πόλος) μέχρι $+90^\circ$ (βόρειος πόλος) ενώ το μήκος $+180^\circ$ προς τη μία κατεύθυνση του ισημερινού και -180° προς την άλλη. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται στη Γεωγραφία την Αστρονομία και τα Μαθηματικά με διάφορα ονόματα.

Προτάσεις

- Η γωνία δύο μέγιστων κύκλων ισούται με τη γωνία των εφαπτομένων των μέγιστων κύκλων σ' ένα σημείο τομής και έχει μέτρο ίσο με το τόξο του μέγιστου κύκλου που έχει ως πόλους τα κοινά σημεία των δύο κύκλων (σχ 4).
- Η γωνία δύο μέγιστων κύκλων ισούται με την απόσταση των πόλων τους (σχ 4).
- Δύο μέγιστοι κύκλοι είναι κάθετοι αν και μόνον αν καθένας από αυτούς περιέχει τον πόλο του άλλου.
- Από τον πόλο ενός μέγιστου κύκλου άγονται άπειρα τόξα, κάθετα στο μέγιστο κύκλο.
-

3. ΑΤΡΑΚΤΟΙ ΚΑΙ ΟΝΥΧΕΣ

Το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ δύο ημιπεριφερειών μέγιστων κύκλων λέγεται **άτρακτος** (σχ 5). Η γωνία των ημιπεριφερειών λέγεται **γωνία του άτρακτου**. **Σφαιρικός όνυχας** λέγεται το μέρος του όγκου της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ των δύο ημικυκλίων μέγιστων κύκλων. **Βάση του σφαιρικού όνυχας** λέγεται ο άτρακτος που περιέχεται μεταξύ των ημικυκλίων.



Σχήμα 5

Παράρτημα Β'

Γωνία σφαιρικού όνυχα λέγεται η γωνία της βάσης του όνυχα.

Αποδεικνύονται οι εξής προτάσεις:

- Δύο άτρακτοι, στην ίδια σφαίρα, με ίσες γωνίες είναι ίσοι.
- Ο λόγος των εμβαδών δύο ατράκτων στην ίδια σφαίρα, ισούται με το λόγο των γωνιών τους.

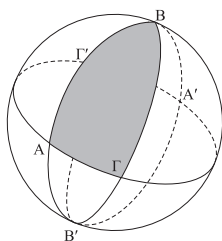
4. ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Σφαιρικό τρίγωνο λέγεται το μέρος της σφαίρας το οποίο περικλείεται μεταξύ των τόξων τριών μέγιστων κύκλων, με την προϋπόθεση ότι τα τόξα είναι μικρότερα από ημικύκλια.

Παράδειγμα

Το σχήμα ΑΒΓ (σχ.6), είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο. Τα σημεία τομής των μέγιστων κύκλων Α, Β, Γ λέγονται **κορυφές** και τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγονται **πλευρές** του σφαιρικού τριγώνου. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ανά δύο λέγονται **γωνίες** του σφαιρικού τριγώνου και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα των κορυφών Α, Β, Γ. Τις πλευρές του τριγώνου τις συμβολίζουμε συνήθως με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών, δηλαδή συμβολίζουμε με α, β, γ τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η γεωμετρία στη σφαίρα δεν επηρεάζεται από την ακτίνα της, διότι όλα τα μετρούμενα μεγέθη, μήκη πλευρών και γωνίες κορυφών, μετρώνται με τόξα μέγιστων κύκλων και όχι με μήκη.



Σχήμα 6

Είδη σφαιρικών τριγώνων

Ένα σφαιρικό τρίγωνο χαρακτηρίζεται αναλόγως των πλευρών ή των γωνιών του ως εξής:

ως προς τις γωνίες:
(μονο)ορθογώνιο: μία γωνία ορθή
δισορθογώνιο: δύο γωνίες ορθές
τρισορθογώνιο: τρεις γωνίες ορθές

ως προς τις πλευρές:
(μονο)όρθοπλευρο: μία πλευρά ορθή
δισορθόπλευρο: δύο πλευρές ορθές
τρισορθόπλευρο: τρεις πλευρές ορθές
ισοσκελές: δύο πλευρές ίσες
ισόπλευρο: τρεις πλευρές ίσες

Θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης γωνιών και πλευρών την **ορθή γωνία** και ως μονάδα μέτρησης των εμβαδών αυτό του **τρισορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου**, δηλαδή το $\frac{1}{8}$ της σφαίρας. Με αυτές τις μονάδες μέτρησης προκύπτουν οι ακόλουθες προτάσεις:

- Το εμβαδόν ενός ατράκτου ισούται με το διπλάσιο της γωνίας του.

Απόδειξη

Θεωρούμε τον άτρακτο ΒΟΑ, σχ. 5, με γωνία φ και τον ορθογώνιο άτρακτο ΒΟΓ. Ο λόγος των εμβαδών τους είναι όπως ο λόγος των γωνιών τους, δηλαδή:

$$\frac{\text{ατρ.ΒΟΑ}}{\text{ατρ.ΒΟΓ}} = \frac{\widehat{ΒΟΑ}}{\widehat{ΒΟΓ}} = \varphi \quad (1)$$

Αλλά ο άτρακτος ΒΟΓ ισούται με δύο τρισορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, επομένως, η σχέση (1) γράφεται: $\text{ατρ}(ΒΟΑ)=2\varphi$.

Σφαιρική υπεροχή ενός τριγώνου ΑΒΓ λέγεται η διαφορά $(A+B+G-2)$.

- Το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου ισούται με τη σφαιρική υπεροχή του τριγώνου.

Απόδειξη

Ο άτρακτος που σχηματίζει η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ, (σχ.6), χωρίζεται από τη ΒΓ σε δύο τρίγωνα, επομένως, για τα εμβαδά τους ισχύει:

$$\text{ατρ. } \hat{A} = \varepsilon\mu.(ΑΒΓ) + \varepsilon\mu.(Α'ΒΓ) \quad (1)$$

Όμοια:

$$\text{ατρ. } \hat{B} = \varepsilon\mu.(ΑΒΓ) + \varepsilon\mu.(ΑΒ'Γ) \quad (2)$$

$$\text{ατρ. } \hat{G} = \varepsilon\mu.(ΑΒΓ) + \varepsilon\mu.(ΑΒΓ') = \varepsilon\mu.(ΑΒΓ) + \varepsilon\mu.(Α'Β'Γ) \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\text{ατρ. } \hat{A} + \text{ατρ. } \hat{B} + \text{ατρ. } \hat{G} = \eta\mu\sigma\varphi AB + 2 \varepsilon\mu.(ΑΒΓ),$$

και επειδή η μονάδα είναι η ορθή γωνία, έχουμε:

$$2A + 2B + 2G = 4 + 2\varepsilon\mu\beta.(ΑΒΓ) \Rightarrow \varepsilon\mu.(ΑΒΓ) = A + B + G - 2.$$

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- κάθε πλευρά είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων.
- το άθροισμα των τριών πλευρών είναι μικρότερο των τεσσάρων ορθών.
- το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών.
- απέναντι άνισων πλευρών βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.
- αν είναι ισοσκελές έχει τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι των ίσων πλευρών ίσες. Επίσης, η διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- αν είναι ισόπλευρο είναι και ισογώνιο.
- τα κάθετα τόξα μέγιστων κύκλων στα μέσα των πλευρών του (μεσοκάθετοι), περνάνε από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
- τα τόξα μέγιστων κύκλων που διχοτομούν τις γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου (διχοτόμοι), περνάνε από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.
- τα τόξα μέγιστων κύκλων που περνάνε από τις κορυφές και είναι κάθετα στις απέναντι πλευρές (ύψη) περνάνε από το ίδιο σημείο.
- ισχύουν τα Θεωρήματα του συνημιτόνου και ημιτόνου:

$$\sin \alpha = \sin \beta \sin \gamma + \eta\mu \beta \eta\mu \gamma \sin A$$

$$\frac{\eta\mu \alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu \beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu \gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Παράρτημα Β΄

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η Σφαιρική Γεωμετρία έχει εφαρμογές στην Αστρονομία, Ναυσιπλοία, Χαρτογραφία και αλλού.

Στην Αστρονομία, εφαρμόζεται στη μελέτη προβλημάτων που δεν μας ενδιαφέρει η απόσταση των ουρανίων σωμάτων από τη Γη αλλά η θέση τους στον ουράνιο θόλο που θεωρείται σφαιρικός με κέντρο το κέντρο της Γης.

Η Γη θεωρείται κατά προσέγγιση σφαιρική, επομένως η σφαιρική γεωμετρία έχει εφαρμογές και στις επιστήμες που σχετίζονται με το σχήμα της Γης. Μία από αυτές είναι η Ναυσιπλοία και χρησιμεύει για να γίνονται υπολογισμοί πορείας.

Είναι γνωστό από την αρχαιότητα ότι η επιφάνεια της σφαίρας δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Δηλαδή, δεν μπορούμε να αναπτύξουμε τη σφαίρα στο επίπεδο όπως κάναμε με τον κύλινδρο και τον κώνο. Εάν προσπαθήσουμε να κάνουμε αυτό το ανάπτυγμα, θα τσαλακώσουμε ή θα σκίσουμε την επιφάνεια της σφαίρας. Αυτό συμβαίνει διότι η σφαίρα έχει καμπυλότητα που διαφέρει

ποιοτικά από αυτήν του κυλίνδρου ή του κώνου. Λόγω αυτής της ιδιότητας οι χάρτες δεν μπορεί να είναι ακριβείς.

6. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι στη γεωμετρία της σφαίρας, το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές, σε αντίθεση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία όπου το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές. Η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την μη ύπαρξη παράλληλων «ευθειών», δηλαδή κάθε δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται. Η γεωμετρία αυτή λέγεται σφαιρική ή Ελλειπτική Γεωμετρία.

Υπάρχουν επίσης γεωμετρίες στις οποίες το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων τους είναι μικρότερο από δύο ορθές, που είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη πολλών παράλληλων ευθειών που άγονται από σημείο εκτός ευθείας. Οι γεωμετρίες αυτές λέγονται Υπερβολικές Γεωμετρίες.

Α

Ακμή διέδρης 277
 Ακμές πολυέδρου 290
 Ακμές τριέδρης 289
 Ακτίνιο 244
 Ακτίνα κύκλου 21
 Ακτίνα σφαίρας 314
 Άκρα ευθύγραμμου τμήματος 10
 Αμβλεία γωνία 16
 Αμβλεία διέδρη 279
 Αμβλυγώνιο 35
 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα 147
 Ανάλυση 66
 Αναλυτική-συνθετική μέθοδος 128
 Ανάπτυγμα κυλίνδρου 308
 Ανάπτυγμα κώνου 311
 Ανάπτυγμα πυραμίδας 301
 Ανάπτυγμα πρίσματος 294
 Αντιδιαμετρικό σημείο 22
 Αντικείμενες ημιευθείες 10
 Αντίστοιχη επίπεδη διέδρης 278
 Άξονας συμμετρίας 17,51
 Αξίωμα 4
 Απαγωγή σε άτοπο 17
 Απλή τεθλασμένη γραμμή 28
 Απλό πολυέδρο (πολυέδρο) 290
 Απόδειξη 66
 Απολλώνιος κύκλος 161
 Απόστημα 22
 Απόστημα καν. πολυγώνου 234
 Απόστημα κανονικής πυραμίδας 301
 Απόσταση ασύμβατων ευθειών 274
 Απόσταση παράλληλων επιπέδων 274
 Απόσταση σημείου 13
 Απόσταση σημείου από επίπεδο 274
 Απόσταση σημείου 13
 Αρμονική τετράδα 155
 Αρχή ημιευθείας 10
 Αρχικό επίπεδο 262
 Ασύμβατες ευθείες 264
 Ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα 167

Β

Βάση 35
 Βάση κυλίνδρου 307
 Βάση κώνου 310
 Βάσεις παραλληλογράμμου 98
 Βάσεις πρίσματος 291
 Βάση πυραμίδας 300

Βαρύκεντρο (κέντρο βάρους) τριγώνου 107

Γ

Γενέτειρα κυλίνδρου 307
 Γενέτειρα κώνου 310
 Γεωμετρική κατασκευή 11
 Γεωμετρικά όργανα 11
 Γεωμετρικός τόπος 21
 Γεωμετρικός μέσος 147
 Γραμμές 3, 9
 Γωνία 15
 Γωνία δύο ασυμβάτων 269
 Γωνία δύο επιπέδων 278
 Γωνία δύο κύκλων 126
 Γωνία κυρτή 15
 Γωνία ευθείας και επιπέδου 283
 Γωνία δύο τεμνουσών 125
 Γωνία χορδής και εφαπτομένης 123
 Γωνίες εκτός 75
 Γωνίες εναλλάξ 75
 Γωνίες εντός 75
 Γωνίες επί τα αυτά μέρη 75

Δ

Δευτερεύοντα στοιχεία 35
 Διαβήτη 11
 Διαγώνιος 29
 Διαγώνια επίπεδα πολυέδρου 290
 Διαγώνιοι πολυέδρου 290
 Διάκεντρος 63
 Διάκεντρο ευθεία 62
 Διάμεσος τραπεζίου 112
 Διάμεσος τριγώνου 35
 Διάμετρος κύκλου 22
 Διαστάσεις ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου 293
 Διέδρη γωνία 277
 Διέδρη γωνία δύο τεμνόμενων επιπέδων 278
 Διερεύνηση 66
 Διχοτόμο επίπεδο διέδρης 283
 Διχοτόμο ημιεπίπεδο διέδρης 283
 Διχοτόμος 16,35
 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο 201

Ε

Εγγεγραμμένη γωνία 123
 Εγγεγραμμένος κύκλος 80
 Εγγεγραμμένο τετράπλευρο 130
 Εγγράψιμο τετράπλευρο 131
 Έγκεντρο 80
 Έδρες διέδρης 277
 Έδρες πολυέδρου 290
 Έδρες τριέδρης 289

Εμβαδόν 211
 Εξάντας 176
 Εξωτερική 60
 Εξωτερική γωνία 29
 Εξωτερικό σημείο διέδρης 278
 Εξωτερικό σημείο σφαίρας 315
 Επίκεντρο γωνία 23
 Επίπεδο 9
 Επίπεδο προβολής 282
 Επίπεδο σχήμα 9
 Επιφάνεια 9
 Εσωτερικό διέδρης 277
 Εσωτερικό σημείο διέδρης 277
 Εσωτερικό σημείο σφαίρας 315
 Ευθεία 9
 Ευθεία γωνία 15
 Ευθεία κάθετη σε επίπεδο 270
 Ευθεία παράλληλη σε επίπεδο 263
 Ευθεία πλάγια σε επίπεδο 270
 Εφαπτομένη 60
 Εφεξής γωνίες 17
 Εφεξής διέδρες 279

Η

Ημιεπίπεδο 14
 Ημιευθεία 10
 Ημικόκλιο 24
 Ημιχώρος 262

Θ

Θεώρημα 4

Ι

Ισοδύναμα 212, 295
 Ισόπλευρο τρίγωνο 35
 Ισόπλευρο 35
 Ισοσκελές 35
 Ισοσκελής κούρρη πυραμίδα 304
 Ίχνος ευθείας σε επίπεδο 263

Κ

Κανονικό πολύγωνο 233
 Κανονική πυραμίδα 301
 Κανονικό τετράεδρο 301
 Κάθετα επίπεδα 279
 Κάθετη ευθεία 16
 Κάθετες πλευρές 35
 Κάθετη ευθεία σε επίπεδο 270
 Κάθετη τομή πρίσματος 291
 Κανόνας 11
 Κατακορυφήν γωνίες 19
 Κατακορυφήν διέδρες 278
 Κατασκευή 66
 Κεντρική γωνία 267
 Κέντρο 234
 Κέντρο παραλληλογράμμου 98
 Κέντρο συμμετρίας 13

Κεντρική συμμετρία 50
Κέντρο σφαίρας 314
Κλειστή τεθλασμένη γραμμή 29
Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων 138
Κοινή χορδή 64
Κοινό μέτρο ευθύγραμμων τμημάτων 146
Κόλουρη πυραμίδα 304
Κόλουρος κώνος 312
Κορυφή 35
Κορυφή πολυέδρου 290
Κορυφή πυραμίδας 300
Κορυφή τριέδρης 289
Κύκλος 21
Κύβος (κανονικό εξάεδρο) 292
Κυκλικό τμήμα 247
Κυκλικός δίσκος 246
Κυκλικός τομέας 278
Κύλινδρος 307
Κύρια στοιχεία 35
Κυρτή γωνία 15
Κυρτή διέδρη γωνία 277
Κυρτή τεθλασμένη γραμμή 28
Κυρτό πολύεδρο 290
Κυρτό πρίσμα 291
Κώνος 310

Λ

Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 146
Λόγος ομοιότητας 171

Μ

Μέγεθος 145
Μέγιστος κύκλος σφαίρας 316
Μέση ανάλογος 147,187
Μεσοκάθετο επίπεδο 274
Μεσοκάθετος 17
Μεσοπαράλληλος 106
Μεσοπαράλληλο επίπεδο 275
Μέσο τόξου 24
Μέσο τμήματος 11
Μέτρο γωνίας 27
Μέτρο τόξου 26
Μέτρο ή μήκος τμήματος 148
Μη κυρτή γωνία 15
Μη κυρτή τεθλασμένη γραμμή 29
Μηδενική γωνία 15
Μήκος 13
Μικρός κύκλος σφαίρας 316
Μοίρα 26

Ο

Ομόκεντροι κύκλοι 25
Οξεία γωνία 16

Οξεία διέδρη 279
Οξυγώνιο 35
Ορθογώνιο 35, 100
Ορθογώνιοι κύκλοι 126
Όμοια σχήματα 171
Ορθή γωνία 16
Ορθή διέδρη 279
Ορθή προβολή (προβολή) σχήματος σε επίπεδο 274
Ορθογώνιες (ασυμβάτως κάθετες) ευθείες 270
Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο 292
Ορθόκεντρο τριγώνου 108
Ορθό παραλληλεπίπεδο 292
Ορθό πρίσμα 291

Π

Παρεγγεγραμμένος κύκλος 81
Παράκεντρο 81
Παράλληλα επίπεδα 263
Παράλληλες ευθείες 10,75
Παράλληλη ευθεία σε επίπεδο 263
Παραλληλεπίπεδο 292
Παραλληλόγραμμο 97
Παράπλευρες ακμές πρίσματος 291
Παράπλευρες ακμές πυραμίδας 300
Παράπλευρες έδρες πρίσματος 291
Παράπλευρη (κυρτή) επιφάνεια κυλίνδρου 307
Παράπλευρη επιφάνεια πρίσματος 294
Παράπλευρη επιφάνεια πυραμίδας 300
Παράπλευρη επιφάνεια κώνου 310
Παραπληρωματικές γωνίες 18
Παραπληρωματικές διέδρες 279
Πεντάγωνο 29
Περιγεγραμμένος κύκλος 80,130
Περίμετρος 28
Περίκεντρο 80
Περιγεγραμμένο τετράπλευρο 132
Περιγράψιμο τετράπλευρο 132
Περίκεντρο τριγώνου 94
Πλάγια ευθεία σε επίπεδο 270
Πλάγιο πρίσμα 291
Πολύγωνο 29
Πολυεδρική γωνία 289
Πολυγωνικό χωρίο-επιφάνεια 211
Πόρισμα 4
Πρισματική επιφάνεια 291
Πρίσμα 291

Προβολή 36,183
Πυραμίδα 300

Ρ

Ρόμβος 100

Σ

Σημεία 3, 9
Σημείο τομής (ίχνος) ευθείας και επιπέδου 263
Σκαληνό τρίγωνο 35
Συζυγή αρμονικά 155
Συμπληρωματικές γωνίες 18
Σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα 146
Συμμετρικό σημείο 13
Συνεπίπεδα σχήματα 260
Συνεχής αναλογία 147
Σφαίρα 314
Σχήμα 3

Τ

Τεθλασμένη 28
Τέμνουσα κύκλου 61
Τέταρτη ανάλογος 147
Τεταρτοκύκλιο 24
Τετράγωνο 100
Τετράεδρο 301
Τετράπλευρο 29
Τετραγωνισμός 255
Τομή πρίσματος 291
Τόξο κύκλου 22
Τραπέζιο 97
Τριέδρη γωνία 289
Τριγωνική ανισότητα 54
Τρίγωνο 29

Υ

Υποτείνουσα 35
Ύψος 36, 42
Ύψος πρίσματος 291
Ύψος κυλίνδρου 307
Ύψος πυραμίδας 300
Ύψος κώνου 310

Φ

Φορέας 10

Χ

Χορδή τόξου 22
Χορδή σφαίρας 314
Χρυσή τομή 203
Χώρος 3

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ

A

- Αβικέννα (Avicenna)
Βλ. Ιμπν Σίνα
- Αγάνης (Āghānis, περ. 5ος-6ος αι.)..... 91
- αλ-Αμπχαρί ή αλ-Αμπαχρί (Athīr al-Dīn
al-Abharī, πέθανε το 1263) 91
- Αλφόνσο του Βαλλαντολίντ (Alfonso of
Valladolid, 1270-1346) 91
- Αμοδέο Φ. (Amodeo F.) 329
- Αμπού Καμίλ (Abū Kāmil Shujā ibn Aslam ibn
Muhammad ibn Shujā, περ. 850-930) 165
- Αμπούλ-Ουάφα (Mohammad Abū al-Wafā'
al-Būzjānī, 940-997/8) 165
- Απόλλων 252
- Απολλώνιος ο Περγαίος (περ. 262-190 π.Χ.)... 6, 324
- Αρισταίος (περ. 370-300 π.Χ.) 234
- Αριστοτέλης ο Σταγειρίτης
(384-322 π.Χ.) 90, 188, 325
- Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (περ. 287-212 π.Χ.).....
..... 5, 90-1, 119, 166, 253-4, 324
- Αρχύτας ο Ταραντίνος (περ. 400-360 π.Χ.) 252-3

B

- Βάντσελ Πιερ Λοράν (Wantzell Pierre Laurent,
1814-1848) 253-4
- Βέμπερ Χέινριχ (Weber Heinrich, 1842-1913) 326
- Βιέτ Φρανσουά (Viète François, 1540-1603) 254
- Βιτέλο (Vitelo, περ. 1225-1280) 91

Γ

- Γερσωνίδης (Gersonides ή Levi ben Gerson,
1288-1344) 91
- Γκαλουά Εβαρίστ (Galois Évariste, 1811-1832).. 254
- Γκούριεφ Σιμεόν Ε. (Gur'ev S.E. 1764?-1813) 92
- Γκρισογκόνο Φεντερίκ Μπ. (Grisogono Federik
B., 1472-1538) 91

Δ

- Διόδωρος (1ος αι. π.Χ.) 91
- Διοκλής (περ. 240-180 π.Χ.) 253

E

- Εμπεδοκλής (περ. 492-432 π.Χ.) 325
- Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (περ. 276-194 π.Χ.)... 253
- Ερμίτ Σαρλ (Charles Hermite, 1822-1901) 254
- Εύδοξος ο Κνίδιος (περ. 408-355 π.Χ.)..... 166, 254
- Ευκλείδης (περ. 325-265 π.Χ.) 5, 6, 66, 90-1, 118-19,

165, 228, 252-3, 324-8

Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης (περ. 480-540 μ.Χ.) 253

Z

Ζιράρ Αλμπέρ (Girard Albert, 1595-1632) 165

H

Ήρων ο Αλεξανδρινός (περ. 10-75 μ.Χ.) 119, 165

Θ

Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα (Al-Sabi Thābit ibn
Qurra al-Harrani, 826-901) 90-1, 254

Θεαίτητος (περ. 415-368 π.Χ.) 166, 189, 324

Θεόδωρος ο Κυρηναίος (465-398 π.Χ.) 189

I

Ιμπν αλ Χαϊθάμ (Abu Ali al-Hasan ibn al
Haytham, περ. 965-1039) 91-2

Ιμπν Σίνα (Abu Ali al-Husain ibn Abdallah
ibn Sīnā, 980-1037) 91

Ιππίας ο Ηλείος (460-400 π.Χ.) 253

Ιπποκράτης ο Χίος (περ. 470-410 π.Χ.) 5, 252-4, 325

K

Καμπανός του Νοβάρα (Johannes Campanus
of Novara, ακμ. περ. 1260) 165

Κάντορ Γκέοργκ (Cantor Georg, 1845-1918) 326

Καρντάνο Ιερώνυμος (Cardano Hieronimo,
1501-1576) 254

αλ-Κασί (Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud
Al-Kashī, περ. 1380- 1429) 254

Κατάλντι Πιέτρο Α. (Cataldi P.A., 1548-1626) 92

Κέπλερ Ιωάννης (Kepler Johann, 1571-1630) 165

Αλ-Κιντί (Abu Yusuf Yaqub ibn Ishaq
al-Sabbah al-Kindi, περ. 801-873) 91

Κλάβιος Χριστόφορος (Clavius
(Schlüssel), 1537-1612) 91

Κλάουζεν Τόμας (Clausen Thomas, 1801-1885). 254

Λ

Λάμπνιτς Γκότφριντ Βίλχελμ (Leibniz
Gottfried Wilhelm, 1646-1714) 254

Λάμπερτ Γιόχαν Χάινριχ (Lambert Johann
Heinrich 1728-1777) 92, 254

Λεζάντρ Αντριέν Μαρί (Legendre Adrien
Marie, 1752-1833) 92, 254

Λεονάρδος της Πίζας (Leonardo of
Pisa = Fibonacci, περ. 1180-1250) 165, 253

Λεονάρντο ντα Βίντσι (Leonardo da Vinci,

1452-1519).....	165
Λίντεμαν Καρλ Λουίς Φερντινάντ φον (Lindemann Karl Luis Ferdinand von, 1852-1939)	254
Λομπατσέφσκι Νικολάι Ι. (Lobachevsky Nikolai I., 1793-1856)	6
Λούκας Φρανσουά Εντουάρντ Ανατόλ (Lucas François Edouard Anatole, 1848-1891)	165

M

αλ-Μαγκριμπί (Muhyi l'din al-Maghribi, περ. 1220-1283)	91
Μέναιχμος (περ. 380-320 π.Χ.).....	253
Μιρίτ Τσελεμπί (Mirit Chelebi πέθανε το 1525 περίπου)	254
Μόνζ Γκασπάρ (Monge Gaspard, 1746-1818)	6
Μπερτράν Λουί (Bertrand Louis, 1731-1812).....	92
Μπινέ Ζακ Φιλίπ Μαρί (Binet Jacques Philippe Marie, 1786-1856)	165
αλ-Μπιρουνί (Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Bīrūnī, 973-περ. 1048).....	91
Μπόλνυαϊ Γιάνος (Bolyai Janos, 1802-1860).....	6, 326, 328
Μπόλνυαϊ Φαρκάς (Bolyai Farkas, 1775-1856).....	92
Μπορέλλι Τζιοβάνι Αλφόνσο (Borelli Giovanni Alfonso, 1608-1679).....	92

N

αλ-Ναϊριζί (Abu'l Abbas al-Fadl ibn Hatim al-Nayrīzī, περ. 865-922).....	91
αλ-Ναντίμ, Ιμπν (Muhammad ibn Ishāq ibn Abī Ya'qūb al-Nadīm, πέθανε το 993).....	90
Νασίρ αντ-Ντιν αλ Τουσί (Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī, 1801-1274)	91-2
Νικομήδης (280-210 π.Χ.)	253
ντα Βίντσι βλ. Λεονάρντο ντα Βίντσι	
Ντεζάργκ Ζιράρ (Desargues Gérard, 1593-1662)....	6
Ντεκάρτ Ρενέ ή Καρτέσιος (Descartes René, 1596-1650).....	6, 253-4
ντελλα Φραντσέσκα Πιέρο (della Francesca Piero, περ. 1414-1492).....	324
Ντοροντόφ Α.Β. (Dorodnov A.V.).....	254

O

Όυλερ Λεονάρντ (Euler Leonhard, 1707-1783) 6, 92	
Ουλουγκμπέκ Μ.Τ. (Ulugh Beg Mohammed Targai, 1394-1449)	254
Ουώλλις Τζον (Wallis John, 1616-1703).....	92

Π

Πάππος (περ. 290-350 μ.Χ.)	66, 165, 324
Πασκάλ Μπλαιζ (Pascal Blaise, 1623-1662).....	6
Πατσόλι Λουκά (Pacioli Luca, 1445-περ. 1514).....	165, 324
Πλάτων (429-348 π.Χ.).....	253, 324, 325
Πλούταρχος (ακμ. περ. 50-100 μ.Χ.).....	252
Πονσελέ Βίκτωρ (Poncelet Victor, 1788-1867)	6
Ποσειδώνιος ο Ρόδιος (135-51 π.Χ.).....	90-1
Πρόκλος (412-485)	90, 119
Πτολεμαίος Κλαύδιος (περ. 85-165)	90
Πυθαγόρας ο Σάμιος (περ. 569-475 π.Χ.)	166

P

Ράμος Πέτρος (Petrus Ramus ή Pierre de la Ramée).....	119, 324
Αλ-Ρουμί (Jalāl ad-Dīn al-Rūmī ή Mawlānā, 1207-1273)	254

Σ

Σακκέρι Τζιρόλαμο (Saccheri Girolamo, 1667-1733)	92
Σιμπλίκιος (490-560)	90-1
Σίμπσον Τόμας (Simpson Thomas, 1710-1761)...	165
αντ-Ντιν ασ-Σιραζί (Šadr ad-Din as-Shirazi, 1236-1311)	91

T

αλ-Τζαουχαρί (al-Abbas ibn Said al-Jawharī, 9ος αι.)	90
Τζορντάνο Βιτάλε (Giordano Vitale, 1633-1711) ..	92
Τσεμποταριόφ Νικολάι Γκ. (Chebotarev N.G., 1894-1947)	254

Υ

Υψικλής (2ος αι. π.Χ.)	165, 324
------------------------------	----------

Φ

Φιμπονάτσι (Fibonacci) βλ. Λεονάρδος της Πίζας	
Φιν Ορόνς ή Φινέος Ορόντιος (Fine Oronce ή Finaeus Orontius, 1494-1555).....	324

X

αλ-Χαγιάμ Ομάρ (al-Khayyām Omar, περ. 1050-1130)	90-2
αλ-Χαναφί (al-Hanafi, 1178-1258).....	91
αλ-Χουαρίζμι (Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī, περίπου 780-850) ..	119, 165

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- 1) Αλιμπινίση Α., Δημάκου Γ., κ.ά., Θεωρητική γεωμετρία Β' Λυκείου, ΟΕΔΒ.
- 2) F.G.-M., Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών), μετάφραση στα ελληνικά Δ. Γκιόκα, Εκδόσεις Καραββία, τόμοι 1-4, Αθήνα, 1952.
- 3) Ιωαννίδη Ι., Γεωμετρία, Εκδόσεις Κορφιάτη, τόμοι 1-12, Αθήναι, 1973.
- 4) Ιωαννίδη Ι., Επίπεδος Γεωμετρία, Εκδόσεις Π. Γρηγορόπουλου.
- 5) Κανέλλου Σ. Γ., Ευκλείδειος Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, 1976.
- 6) Κισκύρα Ν.Α., Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας, 1957.
- 7) Νικολάου Ν., Θεωρητική Γεωμετρία, ΟΕΔΒ, 1973.
- 8) Νικολάου Ν., Μεγάλη Γεωμετρία, Αθήναι.
- 9) Ντάνη Ι., Γεωμετρία Τεύχη 1-2.
- 10) Πάλλα Α., Μεγάλη Γεωμετρία.
- 11) Πανάκη Ι. Ρ., Γεωμετρία του Τριγώνου, Εκδόσεις Gutenberg.
- 12) Παπαμιχαήλ Δ., Σκιαδά Α., Θεωρητική Γεωμετρία, ΟΕΔΒ.
- 13) Παπανικολάου Γ., Θεωρητική Γεωμετρία, Αθήναι.
- 14) Σταμάτη Ε., Ευκλείδεια Γεωμετρία, τόμοι I - III, ΟΕΣΒ, αρχαίο κείμενο και μετάφραση των Στοιχείων του Ευκλείδη, ΟΕΣΒ, Αθήνα, 1975.
- 15) Τσαρούχη Χ., Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας, 1969.
- 16) Τόγκα Π. Γ., Θεωρητική Γεωμετρία.
- 17) Τόγκα Π. Γ., Ασκήσεις και Προβλήματα Γεωμετρίας.
- 18) Τσίντσιφα Γ., Γεωμετρία, Εκδόσεις Σύγχρονου Βιβλιοπωλείου.

ΞΕΝΗ

- 1) Berger M., Pansu P., Berry J., Saint-Raymond X., Problems in Geometry, Springer-Verlag, 1984.
- 2) Blumenthal L.M., A modern view of geometry, Dover, N.Y 1961.
- 3) Bonola R., Non-Euclidean Geometry, Dover, 1955.
- 4) Caronnet Th., Exercices de Geometrie, 8eme edition, Librairie Vuibert, 1-7 livres, Paris.
- 5) Coxeter H., Introduction to Geometry, Wiley & Sons Inc, N.Y. 1969.
- 6) Coxeter H. and Greitzer S., Geometry Revisited, MAA, 1975.
- 7) Dorrie H., 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover Pub. Inc, N.Y., 1965.
- 8) Eves H., A survey of Geometry, Allyn of Bacon Inc, Boston, 1974.
- 9) Forder H., The Foundations of Euclidean Geometry, Dover, 1958.
- 10) Hollinger A., Problemes de Geometrie, Bucurest.
- 11) Jacobs H., Geometry, W. H. Freeman & Co.
- 12) Knorr W.R., The Ancient Tradition of Geometric Problems, Dover, N.Y. 1986.
- 13) Lebosse G., Hemery G., Geometrie, 1960.

- 14) Ogilvy C.S., Excursions in Geometry, Dover Pub. Inc., N.Y. 1969.
- 15) Posamentier A., Salkid Ch., Challenging Problems in Geometry, Dover Pull. Inc., 1970.
- 16) Sved M., Journey into Geometries, MAA, 1991.
- 17) Tuller A., Introduction to Geometries, Van Nostrand Reinhold, 1967.
- 18) Yale P. B., Geometry and Symmetry, Dover Pub. Inc., N.Y., 1968.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

§ 2.1 - 2.10

Ασκήσεις εμπέδωσης

- i) 6 τμήματα, ii) 10 τμήματα.
- i) 3 σημεία, ii) 3 τμήματα και 12 ημιευθείες.
- $AG=AB+BG=...$
- $AG=AM+MB+BN+NG=...$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- Υπολογίστε τα AD, BG ως συνάρτηση του EZ .
- Υπολογίστε τα GA, GB ως συνάρτηση του GM .
- α) Να διακρίνετε περιπτώσεις.
β) προκύπτει από το (α).

Σύνθετα θέματα

- Να εξετάσετε δύο περιπτώσεις. Αν το A είναι μεταξύ των B, G ή όχι.
- 6 τροχονόμοι.

§ 2.11 - 2.16

Ασκήσεις εμπέδωσης

- Αφαιρούμε την $y\hat{O}z$
- $\frac{1}{2}$ ορθής.
- Ορθή γωνία. Μετά από 6 ώρες.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}y + y\hat{O}E = \dots$
- Υπολογίστε τις $G\hat{O}A, G\hat{O}B$ ως συνάρτηση της $G\hat{O}D$.
- Όμοια με την προηγούμενη άσκηση.

Σύνθετα θέματα

- Υπολογίστε τις $A\hat{O}D, B\hat{O}G$ ως συνάρτηση της $x\hat{O}y$.
- $\Delta\hat{O}E = B\hat{O}D - B\hat{O}E = \dots$

§ 2.17 - 2.18

Ασκήσεις εμπέδωσης

- Άπειροι.
- Απλή

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- Είναι $OA=OD$ και $OB=OG$.
- Η OG είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$.

§ 2.19

Ασκήσεις εμπέδωσης

- i) Είναι:

$$PA = PM - AM \text{ και } PB = PM + MB$$

ii) Είναι:

$$\hat{SA} = \hat{SM} + \hat{MA} \text{ και } \hat{SB} = \hat{MB} - \hat{SM}$$

- α) $(A\hat{G}) = 130^\circ, (G\hat{B}) = 50^\circ$
- 30° και 60°
- 72°

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- 45°
- 35° και 55°
- $A\hat{O}B = 36^\circ$ κτλ.

Γενικές Ασκήσεις

- Αν O μέσο AB τότε $EZ=OZ-OE$ κτλ.
- Αν O μέσο BZ αρκεί $AB=ZE$.
- $AE = AB + \frac{BA}{2}, BD = BG + GA$ κτλ.
- Αποδείξτε ότι $A\hat{O}x = 180^\circ$
- 45°

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

§ 3.1 - 3.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

- Τα τρίγωνα ABE και ADG είναι ίσα.
- Τα τρίγωνα MAK, KBA και AGM είναι ίσα.
- Συγκρίνετε τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ όπου M, M' τα μέσα των BG και $B'T'$ αντίστοιχα
- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα AGE και ABZ

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- Είναι $A\hat{K}B = A\hat{K}E$ και $A\hat{K}G = A\hat{K}Z$.
- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα MAB και MEG .
- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα OAG και OBA .

§ 3.3 - 3.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

- i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ABD και $A'B'D'$ καθώς και τα ABE και $A'BE'$.
- ii) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ABE και $A'BE'$.

- α) Είναι $A\hat{A}G = A'\hat{A}'G'$
β) Χρησιμοποιήστε το α).
- Να βρείτε τρεις πλευρές ίσες.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- Εφαρμογή του κριτηρίου ΓΠΓ.
- Εφαρμογή των κριτηρίων ΠΓΠ και ΠΠΠ.

- Τα τρίγωνα ABG και BGD είναι ίσα.

Σύνθετα θέματα

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ABD και $A'B'D'$.
- β) $ABM = A'B'M'$
- γ) $AB\hat{O} = A'B'\hat{O}'$.
- Χαρακτηριστική ιδιότητα μεσοκαθέτου.
- α) Απλό, β) Αποδείξτε ότι $E\hat{A}G = A\hat{B}D$.

§ 3.5 - 3.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ABG και EBG, BD και GE τα ύψη.
- α) Αν $KD, LE \perp BG$, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ABK και EGL .
- β) Αν $KH \perp AG$ και $LZ \perp AB$, να συγκρίνετε τα τρίγωνα HAK και ZAL .
- Να συγκρίνετε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα που προκύπτουν.
- Αν $AD \perp BG$ και $A'D' \perp B'T'$ να συγκρίνετε τα τρίγωνα ABD και $A'B'D'$.

Αποδεικτικές ασκήσεις

- Αν $ME \perp AB$ και $MD \perp AG$, να συγκρίνετε τα τρίγωνα AME και AMD .
- Το τρίγωνο με πλευρές u_a, u_b είναι ίσο με το τρίγωνο που έχει πλευρές u_a, u_b .
- Αν $BD \perp AG, B'D' \perp A'T', GE \perp AB$ και $GE' \perp A'B'$ αποδείξτε ότι $B\hat{E}G = B'\hat{E}'G'$ και $B\hat{A}G = B'\hat{A}'G'$.
- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα AAB και EAB και στη συνέχεια τα ABG και EBZ .
- Σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Σύνθετα θέματα

- i) Είναι $AB = DG$ και $DE = AZ$
ii) Είναι $AE = AZ$ και $GZ' = BE'$.
- Αν $\gamma = \gamma'$ προεκτείνετε τις $AG, A'T'$ κατά τμήματα $GD = \alpha, G'D' = \alpha'$ αντίστοιχα.

§ 3.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- Είναι ο κύκλος (M, MA) χωρίς τα σημεία τομής του με την ευθεία BG .
- Είναι ο κύκλος $(O, 2R)$.

§ 3.8 - 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Εφαρμογή § 3.8.
3. Να λάβετε υπόψη την προηγούμενη άσκηση.
4. Εφαρμογή § 3.8.
5. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό κάθε σημείου της γωνίας ως προς τη διχοτόμο είναι σημείο της γωνίας.
6. Ιδιότητες μεσοκάθετου.

§ 3.10 - 3.11 - 3.12

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεώρημα εξωτερικής γωνίας.
2. Είναι $\widehat{B\hat{A}G} = \widehat{B\hat{G}A}$.
3. Διακρίνετε περιπτώσεις για τη θέση του ίχνους του ύψους στη ΒΓ.
4. Θεώρημα εξωτερικής γωνίας
5. $\widehat{AMB} > \hat{\Gamma}$ κτλ.
6. Φέρουμε $\Delta E \perp BG$.
7. Τα τρίγωνα OBM και OΓΛ είναι ίσα.
8. Είναι $BD = \Gamma\Delta$.
9. Εφαρμογή του: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ συνεπάγεται $\beta = \gamma$.
10. Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Από την $\mu_a < \frac{a}{2}$ προκύπτουν $AM < BM$ και $AM < MG$.
2. Εφαρμογή § 3.12.
3. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα MA'.
4. Αν τα Σ, Ο, Μ δεν είναι συνευθειακά, εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο $\triangle SOM$.
5. Αν Μ το μέσο της ΑΓ, το $\triangle ABM$ είναι ισοσκελές.
6. Παίρνουμε το μέσο του $\widehat{AB}$.
7. Εφαρμογή § 3.12.

Σύνθετα θέματα

1. i) τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα AOB, BOΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ.
ii) Όταν το Ο ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαγωνίων.
2. Αποδείξτε ότι $\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$.
3. Εφαρμόστε την τριγωνική ανισότητα.
4. Θεωρήστε τα συμμετρικά του Γ ως προς τις πλευρές της γωνίας.

§ 3.13

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Σύγκριση πλαγίων τμημάτων.
2. Σύγκριση πλαγίων τμημάτων.

3. Σύγκριση κάθετου και πλάγιου τμήματος.

§ 3.14 - 3.15

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να συγκρίνετε τα αποστήματα των χορδών.
 2. Ιδιότητες διακεντρικής ευθείας ενός σημείου.
 3. Ισότητα εφαπτόμενων τμημάτων
- #### Αποδεικτικές ασκήσεις
1. Βρείτε ισοσκελή τρίγωνα
 2. Φέρτε τη ΜΟ και αποδείξτε ότι $\widehat{OMB} = \widehat{BMG}$.
 3. Η ΟΡ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

§ 3.16

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων.
2. Εφάπτονται εσωτερικά.
3. Εφάπτονται εξωτερικά.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. i) Αποδείξτε ότι $PO - 2R < PO < PO + 2R$
ii) Το Α είναι μέσο του ΟΓ.
2. i) απλό, ii) $O_1O_2 < O_1A + AB + BO_2$ iii) $AB < AO_1 + O_1O_2 + O_2B$.
3. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων.

§ 3.17 - 3.18

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Διχοτομούμε μια ορθή γωνία.
2. Απλή.
3. Κατασκευή 3 § 3.18.
4. Αρχικά κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του ΒΓ = α.
5. i), ii) Αρχικά κατασκευάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{A}y$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Στη $\Gamma B'$ παίρνουμε σημείο B'' τέτοιο ώστε $\Gamma B'' = \Gamma B$.
2. Ισότητα τριγώνων.
3. Πάνω στον κύκλο παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Gamma E = AB$.
4. Είναι $\triangle ABE = \triangle \Gamma Z$ κτλ.
5. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΓ.
6. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ και παίρνουμε το μέσο Μ της ΒΓ.
7. Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΑΜ και Α'Μ' κατά ίσα τμήματα.
8. Ιδιότητα μεσοκάθετου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

§ 4.1 - § 4.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Αποδείξτε ότι $\hat{A} = \hat{E}$.
2. Αποδείξτε ότι $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$
3. Αποδείξτε ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$
4. Βρείτε δύο κατάλληλες γωνίες ίσες.
5. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση.
6. Είναι $OM \perp AB$,

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $AM \perp BG$ οπότε $AM \parallel \Gamma x$.
2. Αποδείξτε ότι $AB = AE$.
3. Αποδείξτε ότι $AD = AB$.
4. $\Delta E = \Delta I + IE = \dots$
5. $B\Gamma = BA + \Delta E + \Delta \Gamma = \dots$

Σύνθετα Θέματα

1. Αποδείξτε ότι $EZ \parallel BG$ και $MK \parallel BG$.
2. Φέρουμε $\Gamma Z \parallel Ax \parallel By$.
3. $\Delta E = IaE - Ia\Delta$
4. α) απλό
β) $BE + \Gamma Z = BA + A\Gamma =$ σταθερό γ)
Προεκτείνουμε την ΕΜ κατά ίσο τμήμα.

§ 4.6 - § 4.8

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. α) $\hat{B} = 60^\circ, \hat{\Gamma} = 30^\circ$
β) $\hat{B} = 36^\circ, \hat{\Gamma} = 54^\circ$
2. $\hat{A} = 36^\circ$ οπότε $\widehat{B\hat{I}\Gamma} = 108^\circ$
3. $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^\circ$
4. Οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.
5. $\hat{A} = 36^\circ$
6. $\omega = 45^\circ, \varphi = 55^\circ$
7. $v = 7$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\hat{B}_{εξ} = \hat{A} + \hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
2. Παρατηρήστε ότι είναι εξωτερικές γωνίες τριγώνου
3. $\Delta \hat{A}E + A\hat{E}\Delta = 90^\circ, A\hat{E}\Delta$ εξωτερική στο τριγ. ΑΕΓ
4. $A\hat{E}B + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 180^\circ$ κτλ.
5. Υπολογίστε την $\hat{A}$ από τριγ. ΑΒΓ και την $E\hat{\Delta}\Gamma$ από τριγ. ΔΕΓ.
6. Αποδείξτε ότι $\hat{Z} = \hat{E}$.

7. Αποδείξτε ότι $\hat{Z} = \hat{H}$.

Σύνθετα θέματα

1. Αν η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Κ αποδείξτε ότι το τριγ. ΒΔΚ είναι ορθογώνιο.

2. Παρατηρήστε ότι το τριγ. ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

3. Αρκεί $\Delta\hat{A}B + \hat{A} + \Gamma\hat{A}E = 180^\circ$.

4. α) Αποδείξτε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{E}$ β) Προκύπτει από τα τριγ. ΒΔΓ και ΔΓΕ.

5. i) απλό ii) $Z\hat{A}H = Z\hat{A}A + \Gamma\hat{A}H$, κτλ.

6. Αν η διχοτόμος της Β τέμνει την ΔΓ στο Ε, από τριγ. ΔΖΕ...

7. Αποδείξτε ότι α/β .

Γενικές Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις $B\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{E}A$ ως συνάρτηση των $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$. Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ ($\hat{A} = 60^\circ$)

2. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΕΓ.

3. Φέρουμε $ΔΗ \perp AB$ και $ΔΚ \perp AG$

4. Είναι $\hat{B} + \hat{A} = 180^\circ$

(αφού $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$)

5. i) Είναι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ ($AB < AG$) ii) προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ίσο τμήμα iii) $B\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$ οπότε από i) και ii)

....

6. Έχουμε τρία ισοσκελή τρίγωνα.

7. Παρατηρήστε τα ίσα εφαπτόμενα τμήματα που σχηματίζονται.

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΓΗΖ

ii) Τα παραλληλόγραμμα, ανά δύο έχουν μια κοινή διαγώνιο

2. Αποδείξτε ότι ΓΖ, ΓΕ διχοτόμοι

3. Αρκεί $\hat{\Gamma} + B\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$

4. Φέρουμε από το Δ παράλληλη στην ΑΒ

5. Αν ΓΔ η θέση της γέφυρας φέρουμε $BE // \Gamma\Delta$.

§ 5.3 - 5.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. $AE // \Gamma Z$

2. $ZE = \frac{B\Delta}{2} = AG$

3. Να λάβετε υπόψη σας την εφαρμογή της § 4.4

4. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΓΖ

5. Να βρείτε τις ιδιότητες των διαγωνίων του

6. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΜΓΛ και ΜΑΝ

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο και η ΒΔ διχοτόμος

2. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ

ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο

3. Φέρουμε την ΕΖ

4. Αν $ΚΛ \perp EZ$, φέρουμε $ΕΗ \perp ΔΓ$ και $ΚΜ \perp ΒΓ$

Σύνθετα θέματα

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΜΖΓ

2. Αρκεί γων. ΒΖΓ = γων. ΖΒΓ.

3. i) Το άθροισμα ισούται με το ύψος ΒΗ (σταθερό). ii) Από το τυχαίο σημείο Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ και εφαρμόζουμε το (i)

§ 5.6 - 5.9

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ

2. Τα Δ, Η και Ζ, Ε είναι μέσα πλευρών

3. Οι ΕΜ, ΔΜ είναι διάμεσες ορθογωνίων τριγώνων

4. Τα Ε, Ζ είναι μέσα πλευρών και $AG = \frac{B\Gamma}{2}$.

5. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρύκεντρου

6. Το Ε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ

7. Το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο και $AG = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΕΖ

ii) Η ΔΜ διάμεσος και τα Ε, Ζ μέσα πλευρών

2. Φέρουμε την ΔΒ

3. Είναι $M\hat{A}\Delta + \Delta\hat{M}A = 90^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$

4. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο

5. Φέρουμε την ΑΓ. Τα Κ, Η είναι βαρύκεντρα τριγώνων

6. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΑΓ

7. i) Να αποδείξετε ότι το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

ii) Το Η είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΓ

8. Είναι $M\Delta = A\Delta$ και $M\Delta = \frac{AB}{2}$

9. Αν Μ το σημείο τομής των ΕΗ και ΚΖ, αρκεί $\hat{M} = 90^\circ$.

10. Ο δρόμος συνδέει τα μέσα των αποστάσεων.

Σύνθετα θέματα

1. Είναι $EZ \parallel AB$ και $DE = EG$

2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $A\hat{M}\Gamma = 30^\circ$

3. Είναι $ZH // \frac{KG}{2}$ και Κ βαρύκεντρο.

4. Παρατηρήστε ότι $\hat{B} = 2\hat{E} = 2\hat{\Gamma}$

5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ

6. Είναι $BM \parallel EG$ και Η ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ

7. i) Απλό ii) Αν Ο το μέσο του ΑΒ, αρκεί $OK \parallel B\Gamma$.

8. i) Απλό ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο. iii) Αν Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ αρκεί $BK \parallel EZ$.

§ 5.10 - 5.11

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η ΕΖ διάμεσος τραπεζίου και Η, Θ μέσα πλευρών τριγώνου.

2. $DE \parallel B\Gamma$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

§ 5.1-5.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Τριγ. ΑΔΕ ισοσκελές

2. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται

3. i) $AE // \Gamma Z$ ii) Τα παραλληλόγραμμα έχουν μια κοινή διαγώνιο

4. Τριγ. ΑΕΔ ισοσκελές

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. $ME = AD$ και τριγ. ΜΔΒ ισοσκελές

2. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΓ

3. Φέρουμε την ΑΓ

4. Τα ΑΖΒΓ και ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμα.

5. Γράφουμε κύκλο (Ο, λ), όπου Ο τυχαίο σημείο της μιας ευθείας.

Σύνθετα θέματα

3. $EH=OZ$ και E,Z,H,O μέσα πλευρών τριγώνου.

4. $KE = \frac{A\Delta}{2}$ και $KL//\Delta\Gamma$

5. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔDE και $BZ\Gamma$.

6. Η MD είναι διάμεσος του τραπέζιου $BB'TT'$.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αρκεί $HZ=BZ$

2. Το Z είναι σημείο της μεσοκαθέτου και το $ZHB\Gamma$ ισοσκελές τραπέζιο.

3. Φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$, οπότε

$$\widehat{B\Gamma} = 30^\circ$$

4. Παίρνουμε το μέσο E της AD .

5. Αρκεί $ME = \frac{B\Gamma}{2}$

6. Είναι $\Delta H = \frac{AB}{2}$ και Δ, E, Z μέσα πλευρών τριγώνου.

7. Να λάβετε υπόψη σας το πόρισμα.

8. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση. Για να είναι ορθογώνιο πρέπει $AG=BD$.

9. Η ZH είναι διάμεσος του τραπέζιου $EB\Gamma\Delta$.

10. Βρείτε κατάλληλα τραπέζια με διάμεσο την KK' .

Σύνθετα θέματα

1. Αν η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την $B\Gamma$ στο E αρκεί ΔE διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

2. Φέρουμε $ME \perp AD$

3. Αν K το κέντρο του $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε $KK' \perp \epsilon$

4. Η ZH είναι διάμεσος του τραπέζιου $\Delta E\Gamma A$, οπότε $\hat{B} = 30^\circ$

5. i) Αποδείξτε ότι το $ABME$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ii) Η προέκταση της AE τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο Z

Γενικές ασκήσεις

1. Αν $AB < A\Gamma$ είναι

$$A\Delta = \frac{AB}{2} < \frac{A\Gamma}{2} \text{ και}$$

$$AE = \frac{A\Gamma}{2} > \frac{AB}{2}$$

2. Παίρνουμε το μέσο M του ΔE .

3. α) Τα τρίγωνα $AB'B$ και AEE είναι ισοσκελή β) Αποδείξτε ότι $BE' = \Gamma E'$.

4. α) απλό β) Αρκεί $H\hat{E}Z = Z\hat{E}\Gamma$

γ) $HE = \frac{AB}{2} = Z\Gamma$ δ) Από το (γ)

προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = 2\hat{Z}\hat{E}\Gamma$

5. Παίρνουμε το μέσο Δ του BK και φέρνουμε $\Delta'\Delta \perp \epsilon$

6. α) απλό β) Το H είναι ορθόκεντρο του τριγ. $\Delta\Delta Z$

7) Παρατηρήστε ότι

$$M\Delta // = \frac{BH}{2} \text{ και } M\Gamma // = \frac{E\Gamma}{2}$$

8) α) Το M είναι το μέσο του $O\Gamma$ και το Z βαρύκεντρο του τριγ. $BO\Gamma$

β) Να λάβετε υπόψη σας το (α)

9) i) Φέρουμε OK διάμεσο στο τριγ. OAB . Αρκεί να τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο μέσο Δ

10) Φέρουμε από τα Δ και E κάθετες στις $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

§ 6.1 - 6.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Για το 1ο σχήμα είναι $x=40^\circ$ και $y=2x=80^\circ$.

Για το 2ο σχήμα είναι $x=50^\circ$ και $y=180^\circ-x-35^\circ=105^\circ$.

2. Είναι: $\widehat{BE} = 120^\circ$ (Εφαρμογή § 6.3).

3. Είναι $x = 40^\circ$ (γωνία χορδής και εφαπτ.). Επίσης $2y + \widehat{B\Gamma} = 180^\circ$ οπότε $y = 140^\circ$. Για το 2ο σχήμα, είναι $y-x=120^\circ$. Από $\hat{\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$ προκύπτει $x+y=260^\circ$ οπότε $x=70^\circ$ και $y=190^\circ$.

4. Είναι: $\widehat{\Delta\Gamma} = 95^\circ$ και $\widehat{BE} = 45^\circ$.

5. Είναι $\widehat{B\Gamma} = \widehat{Z\hat{A}} = 140^\circ$ και $\widehat{O\hat{B}\Gamma} = \widehat{O\hat{\Gamma}B} = 20^\circ$.

Επίσης $\widehat{M\hat{B}\Gamma} = \widehat{M\hat{\Gamma}B} = \frac{1}{2} 70^\circ = 35^\circ$

οπότε $\widehat{B\hat{M}\Gamma} = 110^\circ$.

6. Είναι y εξωτερική γωνία τριγώνου. Σωστή η α).

7. Βλέπε «τόξο που δέχεται γνωστή γωνία».

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Έστω M το μέσο του $\widehat{AB}$. Για το ευθύ αποδείξτε ότι η εφαπτομένη στο M και η AB τεμνόμενες από την MB , σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Για το **αντίστροφο** αποδείξτε ότι $\widehat{M\hat{A}B} = \widehat{M\hat{B}A}$.

2. Αποδείξτε ότι $\widehat{A\hat{B}\Gamma} + \widehat{A\hat{B}\Delta} = 1\text{L}$.

3. Αν η MP τέμνει την AD στο N , δείξτε ότι: $\widehat{N\hat{P}\Delta} + \widehat{P\hat{A}\Delta} = 1\text{L}$.

4. Είναι η τομή δύο κατάλληλων τόξων.

Σύνθετα Θέματα

1. Φέρτε την κοινή εσωτερική (ή εξωτερική) εφαπτομένη και δείξτε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

2. Έστω Z, H τα δεύτερα κοινά σημεία των $AB, A\Gamma$ με το μικρότερο

κύκλο. Αρκεί Δ μέσο $\widehat{ZH}$.

3. Αποδείξτε ότι $\widehat{A\hat{\Delta}P} = \widehat{A\hat{A}P}$

§ 6.5 - 6.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων.

$$\hat{B} = 120^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ \text{ και } \hat{\Delta} = 80^\circ$$

2. Αρκεί $\hat{A} = 90^\circ$.

3. Αποδείξτε μια γωνία ορθή.

4. Εφαρμογή 1 § 6.6.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Φέρτε την κοινή χορδή AB και αποδείξτε ότι: $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_{\epsilon\varsigma}$.

2. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\epsilon, \Delta E$ τεμνόμενες από την $A\Gamma$ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

3. Αν τα ύψη $AD, BE, \Gamma Z$ τέμνονται στο H , παρατηρήστε ότι τα τετράπλευρα $BZHD, \Delta HE\Gamma$ και $BZEG$ είναι εγγράψιμα.

4. Αποδείξτε ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180^\circ$. Γι' αυτό λάβετε υπόψη ότι τα τρίγωνα $KA\Delta$ και $MB\Gamma$ είναι ισοσκελή. ($KLMN$ είναι το τετράπλευρο που σχηματίζεται).

Σύνθετα θέματα

1. Αποδείξτε ότι $\widehat{E\hat{A}O} + \widehat{A\hat{E}\Delta} = 90^\circ$ ή φέρτε την εφαπτομένη στο A .

2. Αρκεί $\widehat{E\hat{\Delta}O} = \widehat{O\hat{E}\Delta}$. Παρατηρήστε ότι $OB\Delta M$ και $OM\Gamma E$ είναι εγγράψιμα.

3. Αν Δ, E, Z είναι οι προβολές ενός σημείου M του περιγύρου κύκλου στις $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι:

$\widehat{Z\hat{E}M} + \widehat{M\hat{E}\Delta} = 180^\circ$. (παρατηρήστε ότι τα $MZAE, ME\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμα).

4. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $B\Delta Z$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.

§ 6.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. i) Μεσοπαράλληλη ii) Κύκλος με κέντρο το κέντρο της γης
2. i) Ο κύκλος (O,R-ρ) ii) Ο κύκλος (A,ρ).
3. Η θέση του θησαυρού είναι κοινό σημείο της μεσοκαθέτου του AB και του κύκλου (Δ,4m).
4. Αν (O,R) είναι ο δοσμένος κύκλος ο γ.τ είναι ο κύκλος (O,R/2).

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αν O το μέσο του BΓ είναι $AO = \frac{B\Gamma}{2}$ = σταθ. οπότε ο γ.τ. του

A είναι ο κύκλος $\left(O, \frac{B\Gamma}{2}\right)$.

2. Αν M η προβολή του A πάνω σε ευθεία ε, που διέρχεται από το B, τότε $\hat{A}MB = 1 \text{ L}$.
3. Είναι $OM=MA$.
4. i) Είναι: $B\Gamma = 2AM = 2\mu$, ii) Το τρίγωνο AΔM κατασκευάζεται.

Σύνθετα θέματα

1. Το M είναι και μέσο του AP.
2. i) Το A είναι τομή δύο γ.τ. ii) Από το A φέρουμε AK//BN οπότε B μέσο KΓ.
3. Το AΒΔ κατασκευάζεται, οπότε το Γ είναι στη τομή δύο γ.τ.

Γενικές ασκήσεις

1. i) Αρκεί $\hat{\Delta}\hat{A}E = 180^\circ$, ii) Αποδείξτε ότι δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, iii) Είναι $\hat{\Delta}\hat{M}E = 90^\circ$.

2. Ο Κύκλος $\left(K, \frac{\delta}{2}\right)$, όπου $\delta=AG-$

AB και K το μέσο της BΓ.

3. Προεκτείνουμε εκατέρωθεν τη BΓ.

4. Το B ανήκει σε κύκλο ακτίνας $\frac{R}{2}$.

5. Αρκεί $\hat{E} + \hat{H} = 180^\circ$.

6. Βρείτε κατάλληλα εγγράφημα τετράπλευρα

7. Μια εξωτερική γωνία ισούνται με την απέναντι εσωτερική.

8. i) $H_1M_1M_2M_3$ ισοσκελές τραπέζιο.

- ii) Αποδείξτε ότι δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

- iii) Προκύπτει με συνδυασμό των i) και ii).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

§ 7.1-7.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$
2. $\omega = 45^\circ$
3. $\alpha=30 \text{ cm}$, $\beta=20 \text{ cm}$, $\gamma=15 \text{ cm}$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. $\hat{A} = 100^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 20^\circ$
2. Να λάβετε υπόψη σας τις ιδιότητες των αναλογιών
3. $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA+MB} = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow \dots$

§ 7.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Θεώρημα Θαλή
2. i) Θεώρημα Θαλή ($Z\Gamma \parallel A\Delta$), ii) Θεώρημα Θαλή ($A\Delta \parallel BZ$ και $AB \parallel \Delta H$)
3. Θεώρημα Θαλή ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $BE \parallel A\Gamma$)
4. Θεώρημα Θαλή και $BM=MG$
5. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Delta}$
6. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$
7. Αρκεί $\frac{M\Delta}{MB} = \frac{ME}{MG}$
8. Αρκεί $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{H\Delta}{HE}$
9. $h = 8m$.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Να εξετάσετε 2 περιπτώσεις. Το Γ μεταξύ O και B ή O και A

2. Αρκεί $\frac{x}{3\mu} = \frac{y}{2\mu} = \frac{\omega}{4\mu}$, όπου μ αυθαίρετο τμήμα

3. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$

4. Θεώρημα Θαλή ($\Delta Z \parallel B\Gamma$) και ιδιότητες αναλογιών

5. Θεώρημα Θαλή ($\Delta E \parallel B\Gamma$)

6. i) Αρκεί $AK=2MK$

- ii) Αρκεί $\frac{ME}{E\Gamma} = \frac{MK}{AK}$

7. Αρκεί $\frac{\Delta E}{\Delta \Gamma} = \frac{Z\Gamma}{\Delta \Gamma}$

Σύνθετα θέματα

1. Φέρουμε $\Delta Z \parallel B\Gamma$
2. Φέρουμε $A\Gamma \parallel B\Gamma$
3. Θεώρημα Θαλή ($BE \parallel OA$ και $BZ \parallel OA$)
4. Φέρουμε $\Delta H \parallel BZ$. Από θεώρημα Θαλή προκύπτει ότι $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{\kappa \cdot \lambda}{\lambda + 1}$
5. Να αποδείξετε ότι $\frac{K\Gamma}{KB} = \frac{M\Gamma}{MA}$

§ 7.8-7.9

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Θεώρημα διχοτόμου στα τρίγ. ABM και AMΓ
2. $\Delta E = \Delta B + EB = \dots$
3. Παρατηρήστε ότι ME εξωτερική διχοτόμος του τριγ. AMΓ
4. Αρκεί $\frac{\Delta\Delta}{\Delta B} = \frac{\Delta E}{E\Gamma}$
5. Θεώρημα διχοτόμου για τις AΔ, BE και ΓZ
6. Αποδείξτε ότι BE διχοτόμος της BΔΓ.
7. Παρατηρήστε ότι OΓ, OΔ διχοτόμοι
8. Είναι $\Delta B < \Delta \Gamma$ και $B\Gamma = 42m$ (AΔ διχοτόμος του τριγώνου ABΓ).

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Παρατηρείστε ότι OA εξωτερική διχοτόμος του τριγ. OBA
2. Θεώρημα Θαλή ($A\Delta \parallel EM$) και AΔ διχοτόμος
3. i) Η BI διχοτόμος στο τριγ. ABA και

$$BA = BI = \frac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}, \text{ ii) Αρκεί}$$

$$\frac{AI}{IA} = \frac{AK}{KM} \text{ iii) Προκύπτει από το (ii)}$$

4. Θεώρημα διχοτόμου και τριγωνική ανισότητα

5. i) Θεώρημα διχοτόμου στο τρίγωνο OΔΓ και Θαλή ii) όμοια

Σύνθετα θέματα

1. Αποδείξτε ότι AK, AL διχοτόμοι στο τρίγ. EAZ
2. Θεώρημα διχοτόμου. Για το αντίστροφο αν η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την BΔ στο E αρκεί ΓE διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.
3. Φέρουμε τη διχοτόμο MΔ του τριγ. AMB, που τέμνει τον κύκλο στο E
4. Αν η ΔZ τέμνει τη BΓ στο K αρκεί

$$\frac{HK}{HA} = \frac{KG}{AG}$$

5. Η άγνωστη κορυφή ανήκει σε ευθεία και κύκλο

Γενικές ασκήσεις

1. Να λάβετε υπόψη σας ότι $KD \parallel AB \parallel LE$

2. Φέρουμε $Ax \parallel BG$. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρυκέντρου

3. i) Φέρουμε $GH \parallel AB$ ii) Εφαρμόζουμε το (i) για το τρίγ. ABD και την ευθεία ZG

4. Θεώρημα Θαλή ($AD \parallel BZ$) και διχοτόμου (AZ διχοτόμος)

5. Αποδείξτε ότι οι EM και ZM είναι διχοτόμοι

6. i) Να εκφράσετε τα τμήματα ως συνάρτηση των OA, OG, OD

ii) Όμοια με το (i)

7. Αν η BD τέμνει την AG στο Z , το Z προσδιορίζεται

8. Αν η παράλληλη από το A προς την Ox τέμνει την Oy στο Δ , το Δ προσδιορίζεται (και στις τρεις περιπτώσεις).

9. Φέρουμε τα αποστήματα των χορδών

10. Να λάβετε υπόψη σας, ότι το άθροισμα δυο αντίστροφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Παρατηρήστε ότι $ABG \approx \Delta EG$.

2. Παρατηρήστε ότι $ABG \approx \Delta DE$.

3. Το τρίγωνο που προκύπτει είναι όμοιο με το αρχικό (πλευρές ανάλογες).

4. Παρατηρήστε ότι σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

5. Παρατηρήστε ότι $ABD \approx \Delta DG$ και $ABD \approx \Delta BG$.

6. Παρατηρήστε ότι $ABD \approx \Delta EG$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

2. Αποδείξτε ότι έχουν ίσες γωνίες και ανάλογες πλευρές.

3. Παρατηρήστε ότι $ABA_1 \approx ABA_2$.

4. Παρατηρήστε ότι $HAE \approx HBD$ και $HBZ \approx HEG$.

5. Παρατηρήστε ότι $M\Delta Z \approx M\Delta'Z'$.

6. Παρατηρήστε ότι $ABD \approx \Delta AG$.

Σύνθετα θέματα

1. Φέρτε παράλληλες ώστε να δημιουργηθούν δύο παραλληλόγραμμα και δύο τρίγωνα.

2. Παρατηρήστε ότι σχηματίζεται εγγράψιμο τετράπλευρο.

3. Εφαρμόστε θεώρημα διχοτόμων και παρατηρήστε ότι $ABD \approx \Delta DG$.

4. Αποδείξτε ότι $ADB \approx \Delta DG$.

5. Παρατηρήστε ότι $ABD \approx \Delta EG$ και $ABE \approx \Delta DE$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι $ABT \approx \Delta GT$.

2. Παρατηρήστε ότι $ABD \approx \Delta BE$, $ADG \approx \Delta EG$.

3. Παρατηρήστε ότι $BDE \approx \Delta GZ$, $ABE \approx \Delta GT$.

4. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Θαλή στις παραλληλίες που προκύπτουν από τα κάθετα τμήματα.

5. (i) Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 4.(ii) Θεωρήστε το αντιδιαμετρικό σημείο του M (iii) Χρησιμοποιήστε τα (i), (ii).

6. Θεωρήστε σημείο E της AG , ώστε: $E\hat{D}G = A\hat{D}B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

§ 9.1 - 9.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

2. Παρατηρήστε ότι $\hat{G} = 30^\circ$

3. Να συγκρίνετε τα AD και GD .

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

2. Παρατηρήστε ότι $AGB = ADB = 1L$.

$A\hat{G}B = A\hat{D}B = 1L$

3. Σχηματίστε τη BD και εργασθείτε στα τρίγωνα EBD και EGD .

4. (i) Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο στα ABD και $A'B'D'$.

5. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και παρατηρήστε ότι $\beta = \gamma$.

Σύνθετα θέματα

1. Εργαστείτε στα τρίγωνα ΔAB και ΔAG .

2. i) Θεωρήστε $LD \perp KB$ ii) Χρησιμοποιήστε το i)

3. Αποδείξτε ότι το $ABKD$ είναι ορθογώνιο. (ii) Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο.

4. Χρησιμοποιήστε ότι $\mu_a = \frac{a}{2}$.

5. Θεωρήστε τις προβολές των G και Δ στην AB .

6. Παρατηρήστε ότι $\Delta AB \approx \Delta BG$ και $\Delta AG \approx \Delta BG$.

§ 9.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εξετάστε ποια είναι η μεγαλύτερη γωνία.

2. Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 1.

3. Εφαρμόστε το θεώρημα οξείας γωνίας ή το νόμο των συνημιτόνων.

4. Παρατηρήστε ότι $\hat{A} = 60^\circ$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1 Εφαρμόστε γενικευμένο Πυθαγόρειο ως προς τη $\hat{B}$.

(Παρατηρήστε ότι $\hat{B} > 90^\circ$).

2. Εργασθείτε στα τρίγωνα AGD και BGD για τις $\hat{G}, \hat{A}$.

3. Εφαρμόστε το θεώρημα οξείας γωνίας για τις $\hat{B}, \hat{G}$.

4. Εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου.

5. Φέρτε κάθετες από τα Δ και E στη BG .

6. Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα και υψώστε στο τετράγωνο.

Σύνθετα θέματα

1. Χρησιμοποιήστε ότι $\hat{A} = 30^\circ$.

2. Εργασθείτε στα τρίγωνα AMG και $BM\Delta$.

3. Χρησιμοποιήστε Πυθαγόρειο.

§ 9.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Χρησιμοποιήστε 1ο και 2ο θεώρημα Διαμέσων.

2. Χρησιμοποιήστε το 1° θεώρημα Διαμέσων

3. Χρησιμοποιήστε το 1° θεώρημα Διαμέσων

4. Χρησιμοποιήστε τους τύπους των Διαμέσων.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα και το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

2. Χρησιμοποιήστε το 2° θεώρημα Διαμέσων.

3. (i) Χρησιμοποιήστε την τομή των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ (ii) Χρησιμοποιήστε το (i).

4. Χρησιμοποιήστε διαδοχικά το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

5. Φέρτε τη διάμεσο ΑΜ.

6. Χρησιμοποιήστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

Σύνθετα θέματα

1. Φέρτε κατάλληλες παράλληλες από το μέσο μιας πλευράς.

2. Εργασθείτε με το μέσο του ΜΝ.

3. Εφαρμόστε το 1^ο θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΓΔ.

4. Εφαρμόστε το 1^ο θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ.

5. Εφαρμόστε το 1^ο θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΡΑΓ και ΓΑΔ.

§ 9.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Υπολογίστε το γινόμενο ΑΒ · ΑΓ.

2. Παρατηρήστε ότι

$$ME = \frac{BA}{2}, NE = \frac{AG}{2}$$

3. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών.

4. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Πυθαγόρειο Θεώρημα ii) Θεώρημα Τεμνουσών.

2. Θεώρημα διχοτόμου και τέμνουσας - εφαπτομένης.

3. i) Θεώρημα Τεμνουσών, ii) Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

4. Παρατηρήστε ότι το ΓΝΗΜ είναι εγγράνιμο, όπου Η το σημείο τομής των ΑΒ και ΟΜ.

5. Παρατηρήστε ότι ΒΔΜΗ εγγράνιμο.

Σύνθετα Θέματα

1. Παρατηρήστε ότι ΔΕΓ ≈ ΑΕΓ.

2. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Διαμέσων και υπολογίστε τη μ_α.

3. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Διαμέσων.

4. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών για τις ΒΕΑ και ΓΖΑ.

Γενικές ασκήσεις

1. (i) Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο (ii) Με απαγωγή σε άτοπο.

2. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών και όμοια τρίγωνα.

3. Υπολογίστε όλους τους όρους ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.

4. Θεωρήστε το ύψος και εφαρμόστε τα θεώρημα οξείας και αμβλείας γωνίας.

5. i) ΘΜ=α/2, όπου Θ βαρύκεντρο, ii) αν ΒΚ ύψος το ΔΗΚΓ είναι εγγράνιμο

6. Εφαρμόστε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα και το θεώρημα Διαμέσων.

7. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων (ΑΒ² + ΑΓ² = 4R² = σταθερό).

8. Αποδείξτε ότι ισχύει το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΕΔΗ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

§ 10.1 - 10.3

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. (ΑΒΓΔ)=16 τ.μ., (ΔΑΖ)=4√3 .

Αν ΖΙ⊥ΑΒ τότε ΖΙ=2 οπότε

(ΑΒΖ)=4τ.μ.=(ΔΓΖ) και

(ΒΖΓ) = 8 - 4√3

2. Εφαρμόστε τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \nu_{\alpha} \text{ . Σωστό το Γ.}$$

3. α) ν_β = 3√3 μ.μ

β) (ΑΒΓ) = 12√3 τ.μ.

γ) Βρίσκουμε πρώτα το ΒΓ.

4. Αν α,β οι διαστάσεις του ορθογώνιου, έχουμε: α+β=7 και α²+β²=25 και προκύπτει Ε=12τ.μ.

5. α) (ΑΒΓΔ)=50τ.μ.

β) (ΑΕΖΒ)=(ΕΖΓΔ)=25τ.μ.

6. Φέρουμε ΔΗ⊥ΒΓ και βρίσκουμε ότι ΔΓ=13, οπότε το εμβαδόν της λωρίδας είναι 3·13=39τ.μ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Φέρουμε ΑΗ, ΔΖ⊥ΒΓ και εφαρμόζουμε τον τύπο $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \nu_{\alpha}$.

2. i) Εφαρμογή 3 π10.3

ii) Είναι $(ΑΒΔ) = \frac{1}{2} (ΑΒΓ) = (ΒΕΓ)$

και (ΑΔΓ)=(ΒΕΓ).

3. i) Εφαρμόστε την εφ. 3 π10.3 στα

τρίγωνα Δ ΑΒΓ και Δ ΣΒΓ ii) Χρησιμοποιήστε το i). Για το υπόλοιπο χρησιμοποιήστε πάλι το i) για Σ=Θ.

4. Φέρουμε από το Μ παράλληλο προς τη ΔΓ.

5. Επίσης από το Μ φέρουμε παράλληλο προς τη ΔΓ

6. i) Φέρουμε ΕΗ⊥ΑΘ και εφαρμόζουμε θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΕΘ και βρίσκουμε

$$ΕΘ = \sqrt{3}$$

ii) Διαπιστώνουμε ότι

$$ΕΘ^2 + ΑΕ^2 = ΑΘ^2$$

iii) $(ΑΒΓ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau.μ. = (ΕΑΘ)$ οπότε

$$(ΒΓΖΘΕΔ) = 5 + \sqrt{3}$$

7. Φέρουμε ΒΜ, ΔΔ⊥ΑΓ και είναι (ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)

8. 58m και 76m.

Σύνθετα θέματα

1. i) ΘΙ, ΑΔ διάμεσοι στα Δ ΙΘΔ , Δ ΑΘΓ αντίστοιχα

ii) (ΙΘΔ)=2(ΑΔΓ)

ii) Χρησιμοποιήστε το ii).

2. Διαδοχική εφαρμογή της εφαρ. 3 της π 10.3.

3. i) Αποδείξτε ότι

$$\hat{B}AK + \hat{A}BK = 90^\circ$$

ii) Από το Δ ΑΒΖ βρίσκουμε πρώτα

$$AZ = \frac{5\alpha}{4} \text{ και ακολουθώσ}$$

$$AK = \frac{4\alpha}{5} \text{ . Επίσης βρίσκουμε ότι}$$

$$AH = \frac{\alpha}{4} \sqrt{17} \text{ και } KH = \frac{13}{20} \alpha$$

iii) $(ΑΚΗΔ) = \frac{77}{200} \alpha^2 \tau.μ.$

4. i) Από το Ο φέρουμε κάθετες στις ΑΒ, ΓΔ και εφαρμόζουμε τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \nu_{\alpha} \text{ ii) Από το i) είναι}$$

$$(ΑΒΓ)-(ΟΑΒ)=(ΟΓΔ).$$

5. Αν δ₁, δ₂ τα μήκη των διαγωνίων,

$$\text{είναι: } \alpha^2 = \frac{1}{4} (\delta_1^2 + \delta_2^2) \text{ και στη συνέ-}$$

χεια χρησιμοποιήστε την

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \quad x, y \in \mathcal{R}$$

§ 10.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να βρείτε το εμβαδόν του (ΑΒΓ) με τον τύπο του Ήρωνα.

2. Φέρουμε ΔΖ||ΑΒ και με τον τύπο του Ήρωνα βρίσκουμε (ΔΖΓ)=84τ.μ. και αν ΔΗ⊥ΒΓ είναι ΔΗ=12 οπότε (ΑΒΓΔ)=216 τ.μ.

$$3. (AB\Gamma) = 7\sqrt{3}$$

$$4. i) E=24 \quad ii) v_a = \frac{24}{5}$$

$$iii) E=\tau\rho, \text{ οπότε } \rho=2$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\beta\gamma = \alpha \cdot v_a, E = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_a \text{ και } E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

2. i) Από τη δοθείσα με τύπο Ήρωνα καταλήγουμε στην $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ ii) και iii) όπως το i).

3. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν τον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο.

4. Με $A < 90^\circ$, $AH = \beta \sin A$ και $AZ = \gamma \sin A$ οπότε.....

Όμοια για $\hat{A} > 90^\circ$.

5. Χρησιμοποιούμε τους τύπους $E = \tau \cdot \rho$ και $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_a$.

Σύνθετα Θέματα

1. i) Είναι

$$\frac{1}{(OKM)} + \frac{1}{(OKN)} = \frac{(OMN)}{(OKM)(OKN)}$$

ii) Οι ευθείες BKB' και $ΓΚΓ'$ είναι τέμνουσες των πλευρών της $\hat{A}$ οπότε από το i).....

$$2. (AB\Gamma) = (ABI_a) + (AGI_a) - (BGI_a)$$

3. Παρατηρήστε ότι $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta)$ και εφαρμόστε τον τύπο $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

§ 10.5

1. Εφαρμογή του τύπου $\frac{E}{E'} = \frac{v_a}{v_{a'}}$

οπότε $(A'B'\Gamma') = 20$ τ.μ.

2. $(BM\Gamma) = 5$ τ.μ.

3. Θεώρημα III της π 10.5. Είναι $(A\Delta Z) = 10$ τ.μ.

4. Θεώρημα I της π 10.5 και είναι $(BEZ\Gamma) = 48$ τ.μ.

5. Εφαρμογή του θεωρήματος III § 10.5.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Τα τρίγωνα $PB\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή βάση $B\Gamma$.

ii) Εφαρμόζουμε το i).

$$iii) \frac{PA}{AA} = \frac{AA - PA}{AA} = 1 - \frac{PA}{AA}$$

2. Θεώρημα III της π 10.5.

3. Αποδείξτε πρώτα ότι

$$A\hat{O}\Gamma + A\hat{O}B = 2L$$

4. Γράψτε την αποδεικτέα σε μορφή αναλογίας.

5. Είναι $M\hat{A}Z + B\hat{A}\Delta = 2L$ άρα θεώρημα III § 10.5.

6. Θεώρημα I § 10.5.

Σύνθετα Θέματα

1. $A\hat{O}B + A\hat{O}\Delta = 2L$ οπότε θεώρημα. III § 10.5

i) Είναι $(AB\Gamma) = (B\Delta\Gamma)$ ii) Απλό

iii) $E = 2E_1 + E_2 + E_4$,

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad x, y \geq 0.$$

$$2. i) \text{ Απλό } ii) \frac{E_1}{E} = \left(\frac{\Delta E}{B\Gamma} \right)^2.$$

3. i) $(\Delta EZ) = (AB\Gamma) - (AZE) - (BZ\Delta) - (\Delta GE)$

$$ii) x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad x, y \geq 0$$

4. Αν KM και AN οι ζητούμενες ευθείες τα τρίγωνα AKM και $AB\Gamma$ έχουν κοινή γωνία A . Το ίδιο για τα τρίγωνα ALN και $AB\Gamma$.

§ 10.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η πλευρά x του τετραγώνου ικανοποιεί την $x^2 = \alpha\beta$.

2. Αν x η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου τότε $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

3. Πρόβλημα 1 § 10.6.

4. Πρόβλημα 1 § 10.6.

Γενικές ασκήσεις

1. i) Τα τρίγωνα έχουν ίσα ύψη και την ίδια βάση iii) Εφαρμογή 3 § 10.1

2. i) Σύγκριση εμβαδών,

$$ii) \text{ Αρκεί } \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4} \leq \frac{1}{4}.$$

3. Βρείτε με δύο τρόπους το λόγο $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

4. i) Θεώρημα III § 10.5 ii) τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή E , iii) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν κοινή τη γωνία Γ .

5. i) Απλό, ii) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν τη γωνία Γ κοινή, iii) Τα τρίγωνα AEZ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια.

6. i) Απλό, ii) MK διάμεσος στο $\Delta AM\Delta$ και ML διάμεσος στο $\Delta BM\Gamma$.

7. i) Αν $d = \frac{\gamma}{v}$ εκφράστε ως συνάρτηση του d τα εμβαδά του τριγώνου και των τραπεζίων που σχηματίζονται.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου και των τραπεζίων δίνουν το εμβαδόν του $(AB\Gamma)$

8. Είναι $(ABMZH\Delta) = (AB\Gamma\Delta) + (\Delta EZH) - (\Delta EM\Gamma) = 54$

9. Είναι $AG^2 - AB^2 = 17$ οπότε

$$AG = 9 \text{ και } AB = 8, \quad AB^2 = 64,$$

$$AD^2 = 100$$

10. Τα τρίγωνα ΔDE , ΔZH και $AB\Gamma$ είναι όμοια μεταξύ τους και γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου AG .

11. i) Όπως άσκηση 1 (αποδεικτικές) § 10.5, ii) προκύπτει από το i).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

§ 11.1 - 11.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Είναι:

$$\varphi_5 = 108^\circ, \varphi_6 = 120^\circ, \varphi_{10} = 144^\circ \text{ και}$$

$$\varphi_{12} = 150^\circ, \omega_5 = 72^\circ, \omega_6 = 60^\circ,$$

$$\omega_{10} = 36^\circ \text{ και } \omega_{12} = 30^\circ$$

2. Σωστή η δ

3. § 11.1

4. Λύστε τις εξισώσεις.

5. Λύστε την ανίσωση $\varphi_n < 90^\circ$ ως προς n

6. Θεώρημα I § 11.2.

$$7. i) \hat{AE} = \hat{\Delta\Gamma}$$

$$ii) Z\hat{A}E = Z\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = 90^\circ$$

iii) Αξιοποιήστε το i)

iv) Ξεκινήστε με την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $BH\Gamma$.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Είναι $\varphi_\lambda + \varphi_\mu + \varphi_\nu = 360^\circ$

2. Αποδείξτε ότι έχει πλευρές και γωνίες ίσες.

3. Εφαρμόστε το 2^ο θεώρημα διαμέσων στο $\Delta B\Gamma$

4. Αν $AB = \lambda_n$ και M το μέσο του $\hat{AB}$ το $OAMB$ έχει κάθετες διαγωνίους

5. Τα πολύγωνα είναι όμοια

6. Τα πολύγωνα είναι όμοια.

Σύνθετα θέματα

1. Βρείτε για ποια n υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $k\varphi_n = 360^\circ$

2. Αν $A_1A_2...A_n$ το κανονικό n -γωνο είναι:

$$(\Sigma A_1A_2) + (\Sigma A_2A_3) + \dots + (\Sigma A_nA_1) = (A_1A_2 + \dots + A_nA_1)$$

3. Συγκρίνετε τα τρίγωνα $ΑΓΜ$ και $ΑΓΔ$

§ 11.3.

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. $E_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, $E_4 = 2R^2$,

$$E_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$$

2. Είναι $\lambda_v = R$, $E_v = 150\sqrt{3}cm^2$ ($v = 6$).

3. Είναι $\alpha_v = 4\sqrt{2}$, $v = 4$

$$E_4 = 128cm^2$$

4. $AB = \lambda_6 = R$, $B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$ κτλ

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{R^2}{2}(2 + \sqrt{3})$$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών είναι $(2v-4)$ ορθές, οπότε $v=6$, $R=2$.

2. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $AB=\lambda_6$, $\Delta\Gamma=\lambda_3$, $A\Gamma=B\Delta=\lambda_4$

3. Εφαρμογή 3 § 11.3. Είναι:

$$\lambda_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ και}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

4. Αν $AB = \lambda_6$ και Γ το μέσο του

$\widehat{AB}$ είναι $A\Gamma = \lambda_{12}$ και το $ΟΑΓΒ$ έχει κάθετες διαγωνίους.

Σύνθετα θέματα

1. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων

2. Υπολογίστε το γινόμενο $AB \cdot A\Gamma$.

3. Παρατηρήστε ότι $A\Gamma = 2R$.

§ 11.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εφαρμόστε τον τύπο του μήκους κύκλου.

$$2. L = 10\sqrt{3}cm.$$

$$3. \ell = \pi cm.$$

4. Απλή.

$$5. AB=\lambda_4 \text{ και } B\Gamma=\lambda_3.$$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αν K το κέντρο του κύκλου (K) παρατηρήστε ότι: $\widehat{A\hat{K}\Delta} = 2\widehat{A\hat{O}\Gamma}$

2. Σχέσεις ακτίνων και διακέντρου

3. Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$E = \tau\rho, E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \text{ και τον τύπο του}$$

Ήρωνα

Σύνθετα θέματα

1. Αν K, Λ τα μέσα των $ΟΑ, ΟΒ$ αντίστοιχα και (M, x) ο κύκλος που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια είναι: $OM=R-x$,

$$OK = \frac{R}{2}, KM = \frac{R}{2} + x \text{ και το}$$

$ΟΚΜ$ είναι ορθογώνιο οπότε $x = \frac{R}{3}$

2. Παρόμοια με την 1. Η ακτίνα του κύκλου (K) είναι $\frac{R}{4}$

$$3. 6,2 + \sqrt{61} + 6\pi$$

§ 11.6 - 11.8

Ασκήσεις εμπέδωσης

$$1. E = \pi \frac{R^2}{4}$$

$$2. R=12 \quad E=144\pi \text{ cm}^2$$

$$3. \ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \alpha 60}{180} = \frac{\pi \alpha}{3}, \quad E = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\alpha^2$$

4. Παρόμοια με την εφαρμογή 1 § 11.7.

5. Η περίμετρος είναι πR και το εμβαδόν $\frac{R^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$

Αποδεικτικές ασκήσεις

$$1. \text{Είναι } \widehat{ΟΒ\Gamma} = 30^\circ, \ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi R}{3}$$

$$\text{Περίμετρος} = R(1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$$

$$\text{Εμβαδόν} = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$$

2. Αρκεί να βρούμε το εμβαδόν ενός από τα μη γραμμοσκελισμένα μικτό-γραμμα τρίγωνα. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \frac{\alpha^2}{6}(6 + \pi - 3\sqrt{3})$

3. Αν A, B είναι τα κοινά σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, R) με $\delta = R\sqrt{2}$ αποδείξτε πρώτα ότι το $ΑΚΒΛ$ είναι τετράγωνο.

$$4. E = \frac{\pi}{8}(AB^2 - A\Gamma^2 - \Gamma B^2),$$

$$AB=A\Gamma+\Gamma B$$

5. Αν (K, κ) ο εγγεγρ. στον τομέα κύκλος τότε: $OK=R-\kappa$ $K\Gamma=\kappa$, όπου $K\Gamma \perp OA$ και $\widehat{A\hat{O}K} = 30^\circ$. Είναι

$$\kappa = \frac{R}{3}.$$

Σύνθετα θέματα

1. i) $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 180^\circ$ άρα $A\Gamma=2R$

ii) $\frac{(AB\Gamma)}{E} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, iii) Το κυκλικό τμήμα με χορδή την AB έχει εμβαδόν $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ και το κυκλικό τμήμα με χορδή τη $B\Gamma$ έχει εμβαδόν $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = (\pi - 1)R^2$$

3. Βρίσκουμε πρώτα ότι

$\widehat{ΚΑΛ} = 120^\circ$ (A κοινό σημείο των κύκλων).

4. Εφαρμογή 1 § 11.7.

Γενικές ασκήσεις

1. ii) Τα πολύγωνα είναι όμοια,

$$\text{iii) } L = \frac{3}{2}\pi R.$$

2. α) Διαφορά εμβαδών δύο κυκλικών τομέων. β) Χρησιμοποιούμε και την $\omega_v = \frac{360}{v}$.

3. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών των τομέων είναι 4 ορθές.

4. Η ακτίνα του κάθε κύκλου είναι $\frac{\alpha}{4}$ και το ζητούμενο εμβαδόν

$$(4 - \pi)\frac{\alpha^2}{16}$$

$$5. \text{ii) } \rho = 10(2 - \sqrt{2}).$$

6. Η ακτίνα καθενός από τους τέσσερις κύκλους είναι

$$x = 25(3 - 2\sqrt{2}).$$

7. Γωνία δύο τεμνουσών του κύκλου. Βρίσκουμε $\omega_{\min} = 12^\circ$

$$8. \text{i) } AM^2 = A\Gamma \cdot A\Delta \text{ και } A\Sigma^2 = A\Gamma \cdot AB$$

ii) Το τεταρτοκύκλιο $\widehat{AM}$, του κύκλου με διάμετρο το $A\Delta$

iii) Το μήκος του διαγραφόμενου τόξου είναι $\frac{1}{2}\pi AB$

9. i) $\varepsilon_1 = (\widehat{OAG}) - (\widehat{OAB})$,

$\varepsilon_2 = (\widehat{OAB}) - (\widehat{OAB})$ και η ΟΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, ii) Πάρτε και έναν άλλο εγγεγραμμένο κύκλο και συγκρίνετε τις ακτίνες τους., iii) α) Οι ακτίνες ρ_1, ρ_2 των μέγιστων εγγεγραμμένων κύκλων στα κυκλικά τμήματα χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα είναι:

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(R - \frac{\gamma}{2}), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(R - \frac{\beta}{2})$$

$$\beta) \rho_1 = \frac{R}{4} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} R$$

10. i) Απλό

ii) Χρησιμοποιήστε το i), iii) Το $OBV'O'$ είναι παρ/μο., iv) Προσθέτουμε και αφαιρούμε διαδοχικά από τα μέλη της iii) τα εμβαδά του μικτόγραμμου τριγ. ΑΒΓ και του κυκλικού τμήματος χορδής ΓΒ' αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

§ 12.3

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η ζητούμενη ευθεία είναι η τομή των δύο επιπέδων που ορίζει το σημείο Ο με καθεμία από τις ασύμβατες ευθείες.

2. Φέρουμε το τυχαίο επίπεδο που περιέχει τη μία ευθεία και τέμνει τις άλλες δύο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΒ είναι η ζητούμενη.

3. Το επίπεδο (A, ε') τέμνει τον κύκλο (Κ) σε δύο, ένα ή κανένα σημείο. Επομένως υπάρχουν δύο, μία ή καμία τέτοια ευθεία.

4. Τα επίπεδα (M, X, X') και (M, Ψ, Ψ') έχουν δύο κοινά σημεία. Το Μ και το Ο. Άρα η κοινή ευθεία είναι η ΜΟ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Τέμνουμε το επίπεδο με το επίπεδο του κύκλου.

2. Χρησιμοποιούμε τις προτάσεις: (i) δύο επίπεδα τέμνονται σε ευθεία αν έχουν ένα κοινό σημείο και (ii) μία ευθεία που έχει δύο σημεία της σε επίπεδο τότε ανήκει σ' αυτό.

3. Με απαγωγή σε άτοπο.

4. Η ζητούμενη ευθεία ορίζεται από τα σημεία τομής των ε_3 και ε_4 με το επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

5. Αν οι ευθείες τομής του ενός με τα δύο άλλα τέμνονται, τότε αυτό είναι κοινό σημείο και των τριών επιπέδων. Αν είναι παράλληλες, τότε και η τρίτη είναι παράλληλη σε αυτές.

§ 12.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Από το Ο φέρουμε τις παράλληλες των ασύμβατων και αυτές ορίζουν το ζητούμενο επίπεδο.

2. Τέμνουμε την ευθεία ξ με το επίπεδο το παράλληλο στο π που περνάει από το Α και ενώνουμε αυτό το σημείο με το Α.

3. Φέρουμε επίπεδο παράλληλο στο π που τέμνει τις ασύμβατες σε δύο σημεία. Αυτά ορίζουν μία από τις ευθείες που ικανοποιούν το πρόβλημα.

4. Τότε η ευθεία είναι παράλληλη και στα δύο επίπεδα, διότι είναι παράλληλη μια ευθεία του καθενός.

5. Αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο ότι η κοινή ευθεία δεν μπορεί να τέμνει τις ε και ε' .

6. Φέρουμε τυχαίο επίπεδο από την ξ που τέμνει το π και χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραλληλίας ευθείας και επιπέδου.

7. Φέρουμε από το Ο ευθεία παράλληλη στην ε . Κάθε επίπεδο που περιέχει αυτήν και όχι την ε είναι λύση του προβλήματος.

8. Φέρουμε την παράλληλη στην κοινή ευθεία των δύο επιπέδων.

9. Το ζητούμενο επίπεδο ορίζεται από δύο ευθείες παράλληλες στις δοσμένες, που διέρχονται από το Ο. Αν οι δοσμένες είναι παράλληλες, βρίσκουμε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου τους και αναγόμεστε στην πρώτη περίπτωση.

10. Κατασκευάζουμε τα επίπεδα (ε_1, ξ_1) και (ε_2, ξ_2) , όπου $\xi_1, \xi_2 // \varepsilon$ τέμνουσες των ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αποδεικνύουμε ότι δύο απέναντι πλευρές του σχηματιζόμενου τετραπλεύρου είναι παράλληλες και ίσες.

2. Τα επίπεδα αυτά περνάνε από δύο παράλληλες ευθείες, άρα η τομή είναι παράλληλη σ' αυτές.

3. Καθιστούμε τα τμήματα αυτά διαγωνίους παραλληλογράμμου και προκύπτει το ζητούμενο.

4. Γίνεται χρήση του ορθού του θεωρήματος του Θαλή.

Σύνθετα θέματα

1. Ανά δύο οι παράλληλες πλευρές των τριγώνων ορίζουν τρία επίπεδα που είτε θα τέμνονται σε ένα σημείο ή θα τέμνονται ανά δύο σε τρεις ευθείες παράλληλες.

2. Τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 είναι σημεία της κοινής ευθείας των δύο επιπέδων των τριγώνων. Ανά δύο οι πλευρές των τριγώνων ορίζουν τρία επίπεδα που περνάνε από το ίδιο σημείο ή τέμνονται ανά δύο σε τρεις ευθείες παράλληλες (προηγούμενη άσκηση).

3. Είναι ευθεία παράλληλη στην ε .

§ 12.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Υπάρχει ευθεία του π παράλληλη στην ε .

2. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθετών.

3. Το ζητούμενο επίπεδο είναι αυτό που ορίζεται από μία ευθεία και την κοινή κάθετό τους.

4. Είναι η ευθεία η παράλληλη σε μία κάθετη της ε .

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθετών.

2. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθετών.

3. Εφαρμογή του i) θεωρήματος των τριών καθετών

ii) Τα ΣΓ και ΣΝ είναι τα ύψη των ορθογώνιων τριγώνων ΣΑΜ και ΣΑΒ επομένως ισχύουν οι σχέσεις αυτές.

iii) Από τις προηγούμενες σχέσεις και επειδή έχουν μία κοινή γωνία, είναι όμοια.

iv) Από τα όμοια τρίγωνα, επειδή το ένα είναι ορθογώνιο θα είναι και το άλλο.

v) Η ΣΓ είναι κάθετη στην ΓΝ και ορθογώνια στην ΑΓ.

vi) Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθετών (ii)

vii) Είναι κύκλος διαμέτρου ΑΓ στο επίπεδο που περνάει από το Γ και είναι κάθετο στην ΣΓ.

§ 12.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Είναι η τομή του μεσοκάθετου επιπέδου στο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία με το δοσμένο επίπεδο.
2. Είναι η τομή του μεσοκάθετου επιπέδου στο AB με την ευθεία.
3. Η ζητούμενη κάθετη είναι η ευθεία του π που είναι κάθετη στην προβολή της ε στο π .
4. Ο γ.τ. είναι κύκλος σε επίπεδο κάθετο στην ε , με διάμετρο AB, όπου B η προβολή του A στην ε .
5. Ο γ.τ. είναι κύκλος του π με διάμετρο OO', όπου O' η προβολή του O στο π .
6. Ο γ.τ. είναι η ευθεία η κάθετη στην ε από το O', την προβολή του O στο π .
7. Ο γ.τ. είναι η κάθετη ευθεία στο επίπεδο του τριγώνου, που περνάει από το περίκεντρο.
8. Ο γ.τ. είναι το κοινό σημείο των μεσοκάθετων επιπέδων στα τμήματα που ορίζουν τα τέσσερα δοσμένα σημεία ανά δύο.
9. Ο γ.τ. είναι τα επίπεδα τα παράλληλα στο π , σε απόσταση λ , κείμενα εκατέρωθεν του π .
10. Είναι το επίπεδο το παράλληλο στο (A,B,G), που περνάει από το M.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Ο γ.τ. είναι το επίπεδο το παράλληλο στις δύο ασύμβατες, που διαιρεί την απόσταση των ασύμβατων σε λόγο λ .
2. Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση. Η ζητούμενη ευθεία ε_3 ορίζεται ως η τέμνουσα των δύο ασύμβατων ε_1 και ε_2 που περνάει από το σημείο τομής της ε_3 με το επίπεδο το παράλληλο στις ε_1 και ε_2 το οποίο χωρίζει την απόστασή τους σε λόγο λ .
3. Το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο τομής των δύο κύκλων (A', ρ) και (B', ρ'), όπου A' και B' οι προβολές των A και B στο π και

$$\rho = \sqrt{\mu^2 - AA'^2} \quad \text{και}$$

$$\rho' = \sqrt{\nu^2 - BB'^2}.$$

Σύνθετα θέματα

1. Ο γ.τ. είναι κύκλος του π με κέντρο την προβολή O' του μέσου O του AB και

$$\text{ακτίνα } \rho = \sqrt{\frac{AB^2}{4} - OO'^2}.$$

2. Προβάλλουμε το A στο π και ενώνουμε την προβολή A' με το κέντρο του κύκλου. Τα άκρα της διαμέτρου είναι τα ζητούμενα σημεία.
3. Το επίπεδο ορίζεται από το μέσον O του AB και την ευθεία ε .
4. Ο γ.τ. είναι επίπεδο κάθετο στην AB στο σημείο M' για το οποίο ισχύει $OM' = \frac{A^2}{2AB}$, όπου O το μέσον του AB.
5. Θεωρούμε επίπεδο κάθετο στην ΓΔ που περιέχει την AB και χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
6. Εφαρμογή της άσκησης 5.
7. Τα μεσοκάθετα επίπεδα στα AB, AG, AD τέμνονται σε ένα σημείο O που ανήκει και στα μεσοκάθετα επίπεδα των υπολοίπων.
8. Το σταθερό σημείο είναι το σημείο τομής του π με την ευθεία ξ που είναι κάθετη στο επίπεδο (O, ε) στο O.

§ 12.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Κάθε επίπεδο που περιέχει την κάθετη OO' στο επίπεδο π ικανοποιεί το πρόβλημα.
2. Οι έδρες σ και π περιέχουν την ακμή ε που είναι κάθετη στο π .
3. Γίνεται χρήση των γ.τ. (i) του μεσοκάθετου επιπέδου στο τμήμα BG και (ii) κύκλου με κέντρο το μέσο M του BG και ακτίνα το μισό του BG.
4. Φέρουμε από το O ευθεία παράλληλη στην ε και ευθεία κάθετη στο σ . Αυτές οι δύο ευθείες ορίζουν το επίπεδο π .
5. Από τυχαίο σημείο της ε φέρουμε ευθεία κάθετη στο π . Η ε και η κάθετη ορίζουν το ζητούμενο επίπεδο.

§ 12.8

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εάν $\varepsilon \perp \pi$ τότε κάθε επίπεδο που περιέχει την π είναι κάθετο. Εάν η ε είναι πλάγια στο π , τότε το επίπεδο ($\varepsilon, \varepsilon'$) είναι κάθετο στο π , όπου ε' η προβολή της ε στο π .
2. Εφαρμογή του Θεωρήματος του Θαλή στο επίπεδο που ορίζει η ευθεία με την προβολή της.

3. Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης.
4. Οι παράλληλες ευθείες και οι προβάλλουσες δύο σημεία που βρίσκονται ένα στην καθεμία, ορίζουν επίπεδα παράλληλα, που τεμνόμενα από τρίτο δίνουν τομές ευθείες παράλληλες.
5. Τα ζεύγη των απέναντι πλευρών προβάλλονται ως παράλληλες ευθείες.
6. Κατασκευάζουμε στο επίπεδο της προβολής τρίγωνο AB δ G ίσο με το ABG και συγκρίνουμε αυτό με την προβολή AB'G, όπου B η ορθή γωνία και A δ G οι τομείς των πλευρών της με το επίπεδο.
7. Απλή εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
8. Από τον ορισμό του συνημιτόνου γωνίας έχουμε:

$$\text{i) } AB \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ii) } AB \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{iii) } AB \frac{1}{2}.$$

9. Φέρουμε την κάθετη στο επίπεδο π στο A, η οποία μαζί με την ε ορίζουν επίπεδο, πάνω στο οποίο κατασκευάζουμε ευθεία που σχηματίζει γωνία 60° με την ε .
10. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Θαλή της γεωμετρίας του επιπέδου.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Συγκρίνουμε τις γωνίες που σχηματίζουν η κάθετη και η πλάγια με τις προβολές τους.
2. Παρατηρούμε ότι τα επίπεδα αυτά έχουν κοινό το έκκεντρο του τριγώνου.
3. Το μέσο μιας διαγωνίου με τις δύο άλλες κορυφές συνιστούν ισοσκελές τρίγωνο, άρα η διάμεσος είναι και ύψος. Το ίδιο και για το μέσο της άλλης διαγωνίου και προκύπτει το ζητούμενο.
4. Αν Γ' η προβολή του Γ στο ζητούμενο επίπεδο και ΓΔ το ύψος του τριγώνου ABG, τότε το τρίγωνο ΓΓ'Δ είναι ορθογώνιο στο Γ' και έχει δύο γνωστές πλευρές την ΓΔ και την Γ'Δ άρα κατασκευάζεται.
5. Από το σημείο τομής Γ του τμήματος AB με το διχοτόμο επίπεδο φέρουμε επίπεδο κάθετο στην ακμή της διέδρου και προβάλλουμε σε αυτό τα σημεία A και B.
6. Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου ABG και A'Δ το ύψος του A'BG θα έχουμε ότι τα εμβαδά των δύο τριγώνων είναι όπως ο λόγος των υψών τους. Αλλά τα ύψη είναι γνωστά.

Γενικές ασκήσεις

1. Ο γ.τ. είναι τα επίπεδα που διχοτομούν τις δύο παραπληρωματικές διεδρες γωνίες που έχουν τη γωνία των ϵ και ξ ως αντίστοιχη επίπεδη.

2. Θεωρούμε την ορθή γωνία των ξ και ϵ' (όπου $\epsilon' // \epsilon$), που προβάλλεται στο άλλο επίπεδο ως ορθή. Επειδή η ϵ' προβάλλεται ως παράλληλη στην ϵ , η ξ προβάλλεται ως κάθετη σε αυτή.

3. Οι ευθείες οι παράλληλες στο π που τέμνουν τις ϵ και ξ έχουν προβολές στο π ευθείες που περνάνε από το μέσο του τμήματος που ορίζουν τα ίχνη των ευθειών ϵ και ξ . Άρα οι ευθείες που συναντούν τις ϵ και ξ τέμνονται από την κάθετη στο επίπεδο π στο σημείο αυτό.

4. Προβάλλουμε τα ίχνη της τέμνουσας στις δύο έδρες και στην ακμή της διέδρης και σχηματίζονται δύο ζεύγη ίσων τριγώνων.

5. Προβάλλουμε τα σημεία στις έδρες και την ακμή της διέδρης και προκύπτουν δύο τρίγωνα ίσα.

6. Θεωρούμε ότι οι προβολές δε συμπίπτουν και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των τριών καθέτων οδηγούμαστε σε άτοπο.

7. Τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του στρεβλού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ προβάλλονται στο κέντρο του παραλληλογράμμου και επομένως αυτά ορίζουν τη διεύθυνση των παραλλήλων.

8. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή για τα ΜΜ', ΝΝ' και την κοινή κάθετο των ασύμβατων.

$$E_4 = 4\rho(\rho + \sqrt{2}u),$$

$$E_6 = 3\rho(2u + \sqrt{3}\rho), \quad V_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho^2u$$

$$V_4 = 2\rho^2u, \quad V_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^2u$$

6. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή για τα επίπεδα των εδρών, στα οποία βρίσκονται τα άκρα του τμήματος και το μεσοπαράλληλο επίπεδο σε αυτά.

$$7. E=6a^2 \text{ και } a=6\mu.$$

$$8. \delta = 4\sqrt{29}, E=832, V=1536$$

$$9. E=6a^2 = 3\beta^2 = 2\delta^2, \quad \text{όπου } \alpha=\text{ακμή}, \beta=\text{διαγώνιος βάσης και } \delta=\text{διαγώνιος κύβου}.$$

$$10. \text{Ακμή } a=5, \text{ όγκος } V=150.$$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Συμπληρώνουμε το πρίσμα σε παραλληλεπίπεδο.

2. Εκφράζουμε το εμβαδόν της κάθετης τομής ως συνάρτηση της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου και της περιμέτρου.

3. Ο όγκος πρίσματος εκφράζεται ως γινόμενο μιας κάθετης τομής επί την ακμή και το εμβαδόν με την περίμετρο της κάθετης τομής επί την ακμή.

4. Καθιστούμε το ευθύγραμμο τμήμα διαγώνιο σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τρεις ακμές δια του Α και τρεις δια του Γ'.

5. Καθιστούμε το τμήμα ΑΓ' διαγώνιο σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και προβάλλουμε στις τρεις έδρες του που περνάνε από το Α.

6. (i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ως πλευρές τη διαγώνιο και την ακμή του κύβου. (ii) Υπολογίζουμε το λόγο της υποτείνουσας προς την προβολή της ακμής σε αυτήν.

7. Τέμνουμε το παραλληλεπίπεδο με το διαγώνιο επίπεδο ΒΒ'Δ'Δ και ανάγεται σε γνωστό πρόβλημα της γεωμετρίας του επιπέδου.

Σύνθετα θέματα

1. Παρατηρούμε ότι οι πλευρές του τριγώνου είναι διαγώνιοι των εδρών.

2. Η τομή του επιπέδου (Α',Β,Δ) με την διαγώνιο είναι το κέντρο ισόπλευρου τριγώνου και τα ύψη σχηματίζουν τις αντίστοιχες των διέδρων.

3. Το επίπεδο που περνάει από τα σημεία Κ, Λ και Ν τέμνει τις ακμές Γ'Δ', Δ'Α' και ΑΑ' σε σημεία που αποδει-

κνύουμε ότι είναι μέσα, οπότε οι πλευρές του σχηματιζόμενου εξαγώνου είναι ίσες. Επίσης και οι γωνίες είναι ίσες.

4. Εφαρμόζουμε γνωστή πρόταση της γεωμετρίας του επιπέδου σύμφωνα την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών του.

§ 13.5 - 9

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Το ύψος κανονικής πυραμίδας, το απόστημα και το μισό της πλευράς της βάσης σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Επίσης, το ύψος, το απόστημα της βάσης και το απόστημα της πυραμίδας συνιστούν επίσης ορθογώνιο τρίγωνο.

2. Η αντίστοιχη της διέδρης με έδρες την βάση και μία από τις έδρες κανονικής πυραμίδας έχει αντίστοιχη τη γωνία που σχηματίζουν το απόστημα της πυραμίδας και το απόστημα της βάσης.

3. Εφαρμόζουμε τους τύπους.

4. Απλή εφαρμογή των τύπων.

$$5. E_{\pi}=87.561 \text{ τ.μ}, V=2.664.792 \text{ κ.μ.}$$

$$6. E_o=\mu^2\sqrt{7}, \quad V=\frac{\mu^3}{\sqrt{6}}.$$

$$7. (i) \frac{1}{3}, (ii) \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$8. 3\sqrt{6}.$$

9.

$$V = \frac{7\sqrt{3}}{16}a^2u, \quad V = \frac{9a}{4}\sqrt{\frac{3a^2}{4} + 2^2},$$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Στηριζόμενοι στο ότι ο όγκος μιας πυραμίδας δεν αλλάζει αν η κορυφή της πυραμίδας κινηθεί σε επίπεδο παράλληλο στη βάση της, μετακινούμε μία κορυφή του τετραέδρου παράλληλα σε μία απέναντι ακμή του τετραέδρου, ώστε να γίνει σημείο της απέναντι έδρας του παραλληλεπίπεδου.

2. Προβάλλουμε δύο κορυφές στις απέναντι έδρες και στην ακμή που ορίζουν οι άλλες δύο κορυφές και σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Από τους λόγους των πλευρών τους προκύπτει το ζητούμενο.

3. Θεωρούμε ως βάση ένα τρίγωνο που έχει τη μετακινούμενη ακμή ως πλευρά. Το εμβαδόν της βάσης είναι σταθερό διότι έχει σταθερό μήκος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

§ 13.1-4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Το ύψος είναι κάθετο ενώ η ακμή είναι πλάγια ως προς τα επίπεδα της βάσης.

2. Οι κάθετες τομές ορθού πρίσματος και οι βάσεις είναι παράλληλα σχήματα.

3. Οι ακμές ενός πρίσματος και οι προβολές τους στα επίπεδα των βάσεων σχηματίζουν ίσα ορθογώνια τρίγωνα.

$$4. E = a^2\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right), V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3.$$

$$5. E_3 = 3\sqrt{3}\rho\left(\frac{\rho}{2} + u\right)$$

βάσης και ύψος. Επίσης, το ύψος της πυραμίδας δεν αλλάζει διότι η απέναντι κορυφή προβάλλεται σε σταθερό επίπεδο.

4. Θεωρούμε το λόγο του ενός τετραέδρου ως προς ένα βοηθητικό που έχουν κοινό ύψος, και το λόγο του βοηθητικού ως προς τον όγκο του δεύτερου που έχουν επίσης κοινό ύψος και πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.

5. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη άσκηση δύο φορές και προκύπτει το ζητούμενο.

6. Εφαρμόζουμε την άσκηση 5.

7. Υπολογίζουμε το ύψος της βάσης και από αυτό το απόστημα. Επειδή η γωνία της ακμής και του ύψους της βάσης είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου, υπολογίζεται το ύψος και

από αυτό ο όγκος είναι. $V = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2$.

Σύνθετα θέματα

1. Αν AB είναι η κάθετη σε επίπεδο, στο σημείο B, προβάλλουμε τις κορυφές Δ και Γ στο επίπεδο αυτό και προκύπτει ότι ο αρχικός όγκος του τετραέδρου ισούται με τον όγκο του τετραέδρου που έχει κορυφές τα Α,Β και τις προβολές στο επίπεδο των δύο άλλων.

2. Η κάθετη τομή ενός πρίσματος, από σημείο Μ εσωτερικό του πρίσματος, περιέχει τις αποστάσεις του Μ από τις έδρες και σχηματίζεται ισόπλευρο τρίγωνο στο οποίο το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου Μ από τις πλευρές του τριγώνου είναι σταθερό.

3. Τα μέσα τριών ακμών που περνάνε από την ίδια κορυφή του κύβου, μαζί με την κορυφή αυτή σχηματίζουν ένα τετράεδρο, με ακμές βάσης ίσες με το μισό της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς α. Υπολογίζουμε το ύψος της βάσης, το εμβαδόν της βάσης, το ύψος του τετραέδρου και εν τέλει τον όγκο του, το οκταπλάσιο του οποίου αφαιρείται από τον όγκο του κύβου.

§ 13.10-12

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Απλή εφαρμογή των τύπων.

2. Εφαρμόζουμε τους τύπους.

3. Εφαρμογή των τύπων.

4. Υπολογίζουμε τον όγκο κυλίνδρου ενός εκατοστού ύψους, που έχει την ίδια βάση.

5. Εξισώνουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας με το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας 4 και υπολογίζουμε την ακτίνα του κυλίνδρου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Από τους τύπους του όγκου και του εμβαδού της ολικής επιφάνειας απαλείφουμε την ακτίνα ρ.

2. Υπολογίζουμε τον όγκο των δύο κυλίνδρων που σχηματίζονται. Θέτουμε x την απόσταση του Μ από το Α και διπλασιάζοντας τον όγκο του μικρού κυλίνδρου βρίσκουμε τον όγκο του μεγάλου.

3. Υπολογίζουμε την διαφορά των δύο κυλίνδρων που σχηματίζονται κατά την περιστροφή του ορθογώνιου και βρίσκουμε τον ζητούμενο όγκο. Αθροίζουμε τα εμβαδά, λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις κυρτές επιφάνειες των δύο κυλίνδρων, όσο και τους δύο κυκλικούς δακτυλίους που αποτελούν τις βάσεις των κυλίνδρων.

§ 13.13-15

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Υπολογίζουμε τη γενέτειρα του κώνου από το ύψος και την ακτίνα και εφαρμόζουμε τους τύπους.

2. Απαλείφουμε τη γενέτειρα μεταξύ του τύπου της κυρτής επιφάνειας και της σχέσης που συνδέει την ακτίνα, το ύψος και την ακμή και προσδιορίζουμε την ακτίνα του κώνου.

3. Από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη γενέτειρα και κάθετη πλευρά την ακτίνα βρίσκουμε το ύψος του κώνου. Μετά, με εφαρμογή των τύπων, υπολογίζουμε τα ζητούμενα.

4. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο που παράγεται ο κώνος προκύπτει το ύψος και η γενέτειρα του κώνου. Με αυτά υπολογίζουμε τον όγκο και την επιφάνεια.

5. Υπολογίζουμε την ακμή λ και στη συνέχεια το ύψος υ. Κατόπιν αντικαθιστούμε στους τύπους του όγκου και του εμβαδού.

6. Υπολογίζουμε το λ και μετά το λόγο των εμβαδών που είναι $\sqrt{5}$.

7. Υπολογίζουμε το λόγο των δύο επιφανειών αφού υπολογίσουμε την ακμή από το ύψος και την ακτίνα.

8. Απλή εφαρμογή των τύπων.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χωρίζουμε τον κώνο με επίπεδο παράλληλο στη βάση. Τότε, ο μικρός κώνος που απομένεται είναι το μισό του αρχικού.

2. Ο όγκος που παράγεται κατά την περιστροφή του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με τον όγκο του ΑΜΚ μείον ογκ(ΓΛΚ) μείον όγκ.(ΒΓΜΠ)

3. Αν φέρουμε δύο επίπεδα παράλληλα στη βάση που να χωρίζουν την κυρτή επιφάνεια του κώνου σε τρία ίσα μέρη, ο μικρός κώνος που δημιουργείται θα είναι το $\frac{1}{3}$ του αρχικού.

Επίσης ο μικρός κώνος μαζί με το μεσαίο κόλουρο κώνο αποτελούν τα $\frac{2}{3}$ του αρχικού κώνου.

4. Απλή εφαρμογή του τύπου.

5. Χρησιμοποιούμε την ομοιότητα των δύο τριγώνων.

6. Χρησιμοποιούμε τους τύπους του κώνου.

§ 13.16-18

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η ακτίνα της σφαίρας, η ακτίνα του κύκλου τομής και η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο συνιστούν ορθογώνιο τρίγωνο.

2. Από το εμβαδόν της τομής υπολογίζουμε την ακτίνα της τομής και στη συνέχεια υπολογίζουμε την απόσταση δ του επιπέδου από το κέντρο.

3. Υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου της τομής και μετά βρίσκουμε το εμβαδόν της.

4. Η ζητούμενη ακτίνα είναι ύψος ορθογώνιου τριγώνου που ορίζεται από το κέντρο της σφαίρας, το φωτεινό σημείο και ένα σημείο του κύκλου.

5. Απλή εφαρμογή του τύπου, $E=400\pi$.

6. Αν ρ και ρ' είναι οι ακτίνες των σφαιρών, ο λόγος των επιφανειών τους είναι το τετράγωνο του λόγου των ακτίνων τους

7. Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου της σφαίρας, $V=36\pi$.

8. Ο λόγος των όγκων δύο σφαιρών είναι ίσος με τον κύβο του λόγου των ακτίνων τους.

9. $E=\pi(\rho^2 - \rho'^2)$.

10. Ο συνολικός όγκος του σχήματος αποτελείται από τον όγκο ενός κυλίνδρου

δρου ακτίνας ρ και ύψους ρ και τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας ρ .

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Υπολογίζουμε τους όγκους των τριών στερεών από τους τύπους και αποδεικνύουμε τις σχέσεις του προβλήματος.

2. Αν M τυχόν σημείο της τομής και K και Λ τα κέντρα της σφαίρας, το επίπεδο (K, Λ, M) τέμνει τις σφαίρες κατά μέγιστους κύκλους και το τρίγωνο $K\Lambda M$ έχει γνωστά μήκη πλευρών. Επομένως η προβολή του M στην $K\Lambda$ είναι σταθερό σημείο και επειδή οι σφαίρες είναι σχήματα εκ περιστροφής, το M είναι σημείο κύκλου.

3. Υπολογίζουμε τους όγκους των τριών στερεών και παίρνουμε τους λόγους του κυλίνδρου προς τη σφαίρα και του κώνου προς τη σφαίρα.

Σύνθετα θέματα

1. Εξισώνουμε τα εμβαδά των δύο επιφανειών και βρίσκουμε ότι το ύψος είναι διπλάσιο της ακτίνας.

2. Αν δ είναι η απόσταση της βάσης του κώνου ή του κυλίνδρου από το κέντρο της σφαίρας εκφράζουμε τους όγκους σε συνάρτηση του δ και μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς δ βρίσκουμε τότε ο όγκος γίνεται μέγιστος.

3. Ο κύβος έχει διαγώνιο ίση με τη διάμετρο της σφαίρας. Το οκτάεδρο αποτελείται από δύο τετραγωνικές πυραμίδες, με βάσεις εγγεγραμμένες σε μέγιστο κύκλο της σφαίρας.

4. Από τα δοσμένα μεγέθη υπολογίζουμε τα εμβαδά και τους όγκους των στερεών.

5. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα II, §13.18 για τον υπολογισμό των τριών όγκων. Η ζητούμενη σχέση αποδεικνύεται αντικαθιστώντας τους υπολογισθέντες όγκους και τις προβολές των κάθετων πλευρών στην υποτεινόμενη κατά τα γνωστά από τη γεωμετρία του επιπέδου.

Γενικές Ασκήσεις

1. Σχηματίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του τυχαιού σημείου M από τις κορυφές του τετραέδρου και εφαρμόζουμε το Θεώρημα των διαμέσων στα διάφορα τρίγωνα που σχηματίζονται. Καταλήγουμε σε μία σχέση που περιέχει σταθερά τμήματα εκτός από ένα, το οποίο όταν μηδενιστεί καθιστά την ποσότητα ελάχιστη.

2. Το επίπεδο πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των δύο απέναντι ακμών για να τέμνει τις υπόλοιπες τέσσερις. Οι πλευρές του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από την τομή είναι ανά δύο παράλληλες στις ακμές στις οποίες είναι παράλληλο το επίπεδο. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

3. Από την ευθεία ε φέρουμε επίπεδο παράλληλο στη ζ που τέμνει την ξ σ' ένα σημείο. Από αυτό το σημείο φέρουμε επίπεδο που να περιέχει την ξ και να είναι παράλληλο στην ε , που την τέμνει σε κάποιο σημείο και από αυτό το σημείο φέρουμε επίπεδο που να περιέχει τη ζ και να είναι παράλληλο στην ξ . Τέλος, συμπτώνουμε το παραλληλεπίπεδο με άλλα τρία επίπεδα παράλληλα σ' αυτά που κατασκευάσαμε.

4. Υπολογίζουμε το λόγο των όγκων των δύο τετραέδρων στα οποία χωρίζεται το αρχικό τετράεδρο από το διχοτόμο επίπεδο με δύο τρόπους και εξισώνουμε τα αποτελέσματα. Κατά τον πρώτο τρόπο θεωρούμε ότι έχουν ως βάσεις τα δύο τρίγωνα στα οποία χωρίζεται μία έδρα, οπότε έχουν κοινό ύψος. Στη δεύτερη περίπτωση εκφράζουμε τον όγκο με βάσεις τις έδρες που είναι εκατέρωθεν του διχοτόμου επιπέδου, αλλά και πάλι έχουν κοινό ύψος.

5. Ανά δύο τα τμήματα αυτά διχοτομούνται διότι είναι διαγώνιοι παραλληλογράμμων. Επομένως τα τρία τμήματα διχοτομούνται σ' ένα σημείο.

6. Θεωρούμε δύο από τις διαμέσους. Αυτές είναι συνεπίπεδες διότι ανήκουν στο επίπεδο που περνάει από μία ακμή και από το μέσο της απέναντι ακμής. Επειδή τα κέντρα βάρους των εδρών χωρίζουν τις διαμέσους σε λόγο 1:2, η ευθεία που συνδέει τα κέντρα βάρους είναι παράλληλη στην απέναντι ακμή. Επομένως, στο διάμεσο επίπεδο σχηματίζονται δύο όμοια τρίγωνα και από τις αναλογίες τους προκύπτει ο ζητούμενος λόγος.

7. Θεωρούμε τη διάμεσο NP που κείται στο διάμεσο επίπεδο ABN . Η διάμεσος τέμνει τη διάμεσο AL έστω σε σημείο M' . Από το P φέρουμε ευθεία παράλληλη στη διάμεσο AL και σχηματίζονται όμοια τρίγωνα, που από τις αναλογίες των πλευρών τους προκύπτει ότι το σημείο M' χωρίζει τη διάμεσο σε λόγο 3:1, άρα είναι το σημείο τομής των διαμέσων.

8. Θεωρούμε δύο από τα τετράεδρα που χωρίζεται το αρχικό. Αυτά έχουν κοινή βάση και επειδή θα είναι ισοδύναμα θα έχουν ίσα ύψη. Άρα το σημείο M είναι σε τέτοια θέση ώστε να περιέχει μία ακμή και να τέμνει την απέναντι στο μέσο της. Αλλά αυτό συμβαίνει για κάθε ζεύγος τετραέδρων. Άρα, το M είναι το κέντρο βάρους του τετραέδρου.