ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

***ΔΗΛΩΣΗ**: Η θεωρία αριθμών αφορά ζητήματα είτε ακέραιων είτε φυσικών αριθμών*

Ακέραιοι αριθμοί:

Συμβολίζονται με Z και το σύνολό τους είναι $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Φυσικοί αριθμοί:

Συμβολίζονται με N και το σύνολό τους είναι $\{1, 2, 3, \ldots\}$

Γραμμικός συνδυασμός ακεραίων :

Έστω οι ακέραιοι a, b, . . . , f. Θα εννοούμε –ως γραμμικό τους συνδυασμό- μια παράσταση της μορφής $xa + yb + \cdots + wf$, όπου οι x, y, . . . , w είναι ακέραιοι.

Παράδειγμα γραμμικού συνδυασμού των ακεραίων a , b , c : Λ=3a-12b+c

Άρτιος ακέραιος : Αν n άρτιος, τότε ισχύει $n=2.k$, $k\in Z$

Περιττός ακέραιος : Αν n περιττός, τότε ισχύει $n=2k\pm1$, $k\in Z$

Ιδιότητες ακεραίων (κάποιες!)

- Κάθε ακέραιος n έχει δυο γειτονικούς ακέραιους: τον προηγούμενό του $n-1$ και τον επόμενό του $n + 1$.

- Το πλήθος των ακεραίων που βρίσκονται ανάμεσα σε δυο ακέραιους είναι πεπερασμένο. Μεταξύ των ακεραίων α, β (α>β) υπάρχουν α-β-1 ακέραιοι!

- Το άθροισμα άρτιων αριθμών είναι άρτιος.

$$\textit{πράγματι:}\ \ \Sigma = 2\kappa + 2\mu + 2\lambda + \cdots = 2.(\kappa + \mu + \lambda + \cdots) = 2.\omega = \textit{άρτιος}\,!$$

- Το άθροισμα **περιττού(*)** πλήθους περιττών αριθμών είναι περιττός.

$$\textit{πράγματι:}\ \ \Sigma = (2\kappa + 1) + (2\lambda + 1) + \cdots + (2\mu + 1) = 2(\kappa + \lambda + \cdots + \mu) + \textit{περιττό άθροισμα μονάδων}(*) = 2\omega + (2\varphi + 1) = 2(\omega + \varphi) + 1 = 2x + 1 = \textit{περιττός}\,!$$

- Το γινόμενο άρτιου με περιττό είναι άρτιος.

$$\textit{πράγματι}:\ \ \Gamma = 2k.(2\mu + 1) = 4k\mu + 2\kappa = 2.(2\kappa\mu + \kappa) = 2\varphi = \textit{άρτιος}\,!$$

- Το γινόμενο δυο περιττών είναι περιττός αριθμός

Μόνοι σας...

Μια ιδιαίτερα σημαντική τεχνική για την διαχείριση θεμάτων που αφορούν ακέραιους ή φυσικούς αριθμούς είναι η αρχή της μαθηματικής επαγωγής…

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής :

Έστω μια μαθηματική έκφραση που αναφέρεται στους θετικούς ακεραίους.

Αν :

- Ο ισχυρισμός ισχύει για ν = 1
- Αν το γεγονός ότι ισχύει για το ν, δίνει ότι ισχύει για ν +1, τότε ο ισχυρισμός ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν

Να αποδειχθεί ότι για κάθε ν φυσικό ν≥1 ισχύει : $2 + 4 + 6 + \ldots + 2\nu = \nu(\nu+1)$

Ισχύει για ν=1 : $2.1 = 1(1+1) \rightarrow 2 = 2$

Έστω ότι για ν=κ : $2+4+6+\ldots+2\kappa=\kappa.(\kappa+1)$ (1)

Θα δείξουμε ότι ισχύει ν=κ+1 :

$$2+4+6+\cdots+2\kappa+2(\kappa+1) = \lambda \acute{o} \gamma \omega\ \tau \eta \varsigma\ (1) = \kappa(\kappa+1)+2(\kappa+1) = (\kappa+1)(\kappa+2)$$
$$= (\kappa+1)[(\kappa+1)+1] \quad o.\varepsilon.\delta.$$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)