

Πρώτοι αριθμοί

Ορισμός: Ένας φυσικός αριθμός $P > 1$ λέγεται πρώτος, αν οι μόνοι διαιρέτες του είναι ο 1 και ο ίδιος ο P :

$$P \text{ πρώτος} \Leftrightarrow (\text{αν } \alpha | P, \text{ τότε } \alpha=1 \text{ ή } \alpha=P)$$

Η έκφραση α/P σημαίνει «ο αριθμός α διαιρεί τον αριθμό P , χωρίς να υπάρχει υπόλοιπο»

Παραδείγματα: Πρώτοι αριθμοί: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...

Εκτός του 2, όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί

Σύνθετος αριθμός: Κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο **πρώτων** παραγόντων. (Οι αριθμοί 0 και 1 δεν είναι ούτε πρώτοι, ούτε σύνθετοι)

Παραδείγματα ανάλυσης σύνθετων αριθμών

$$320=32 \times 10=16 \times 2 \times 5 \times 2=4 \times 4 \times 2 \times 5 \times 2=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2=2^6 \cdot 5$$

126	2	
63	3	
21	3	
7	7	
1		$\rightarrow 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Μια σπουδαία πρόταση

Αν κάποιος αριθμός δεν διαιρείται με κανένα από τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από τη τετραγωνική του ρίζα, τότε είναι κατ' ανάγκη πρώτος αριθμός.

Παράδειγμα (I) Είναι πρώτος ο 67;

$\sqrt{67} < 8$, άρα θα εξετάσουμε αν ο αριθμός 67 διαιρείται με τους πρώτους που είναι μικρότεροι του 9, δηλ. τους 2, 3, 5, 7.

Διαπιστώνουμε ότι δεν διαιρείται με κάποιο από τους τέσσερες παραπάνω πρώτους, οπότε ο αριθμός 67 είναι πρώτος.

Παράδειγμα (II) Οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 10 και του 100 είναι ακριβώς όλοι εκείνοι που δεν είναι πολλαπλάσια κανενός από τους πρώτους ως το 10.

Έτσι εύκολα φτιάχνεται το «κόσκινο του Ερατοσθένη», που βοηθά –με την σειρά του στη λύση ιδιαίτερα δύσκολων ασκήσεων.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Εφαρμογή:

Οι ηλικίες πατρός, μητρός και τέκνου είναι πρώτοι αριθμοί. Μετά 6 χρόνια θα είναι πάλι πρώτοι αριθμοί. Ποιες είναι οι ηλικίες τους σήμερα; Βλέποντας το «κόσκινο» προκύπτει μία από τις λύσεις η: 61, 47, 23!

Πρότυπα ή τύποι μαθηματικοί που δίνουν πολλούς (ίσως και άπειρους) πρώτους αριθμούς.

α) Mersenne : Αν P πρώτος, τότε και ο $2^P - 1$ είναι επίσης πρώτος.

β) Euler : Οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = x^2 + x + 41$ είναι πρώτοι αριθμοί, όταν το x παίρνει τιμές $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
Προσοχή ! η τιμή $f(40) = \dots = 41 \times 41 =$ σύνθετος αριθμός.

Να και μια ακολουθία σύνθετων αριθμών : $\alpha + 2, \alpha + 3, \alpha + 4, \dots, \alpha + n$. Όλοι αυτοί είναι σύνθετοι αρκεί ως α να επιλέξουμε τον αριθμό $\alpha = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$

Πχ για $n=3$ έχουμε $(2 \times 3) + 2 = 8$, για $n=5$ έχουμε $5 + (2 \times 3 \times 4 \times 5) = 125$, κ.ο.κ.

Ορολογία

Τέλειος αριθμός : Το άθροισμα των θετικών διαιρετών του (συμπεριλαμβάνεται η μονάδα, αλλά όχι ο ίδιος ο αριθμός), δίνει τον αριθμό.
π.χ. $6 = 1 \times 3 \times 2$ με $1 + 2 + 3 = 6$

Δίδυμοι πρώτοι αριθμοί : Όταν διαφέρουν κατά δυο μονάδες.
π.χ. 3 και 5 , $(5, 7)$, $(11, 13)$,...