

# Θεωρία αριθμών - μ.κ.δ. & ε.κ.π.

Αν δοθούν οι αριθμοί  $\Delta$  και  $\delta$ , τότε υπάρχουν μοναδικοί  $\pi$  και  $\nu$ , ώστε να  $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$  και με τον όρο το  $\nu$  να παίρνει μία από τις τιμές  $0, 1, 2, \dots, (\delta-1)$

Ως παράδειγμα:

Αμα αριθμός διαιρείται με το 3, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης μπορεί να είναι 0 ή 1 ή 2 !

## Διαιρέτες αριθμού

Μας δίνεται ένας αριθμός και ζητείται να βρούμε το πλήθος των διαιρετών του, καθώς και ποιοι είναι οι διαιρέτες αυτού.

Γράφουμε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και σε εκθετική μορφή.

Παράδειγμα:  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Κάθε διαιρέτης του 360 έχει τη μορφή :  $\delta = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$  με :

- $a = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3$
- $b = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2$
- $c = 0 \text{ ή } 1$

Πλήθος διαιρετών :  $\Pi(360) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  ( ο  $a$  έχει 4 επιλογές, ο  $b$  τρεις και ο  $c$  δυο !)

Παράδειγμα:

Αν  $a=1$ ,  $b=0$  και  $c=1$ , τότε ο διαιρέτης του 360 είναι ο  $\delta = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$ .

## Μέγιστος κοινός διαιρέτης (μ.κ.δ.)

Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών  $a$  και  $b$  ονομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης και συμβολίζεται  $(a,b)$

Παραδείγματα :  $(48,72) = 24 \dots$

Προτάσεις που ισχύουν :  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$  ,  $(\alpha, 0) = \alpha$  ,  $(0, 0) = 0$  ,  $(\alpha, \alpha) = \alpha$  ,  
αν  $\beta/\alpha$  τότε  $(\alpha, \beta) = \beta$  !

### Εύρεση μ.κ.δ. (I)

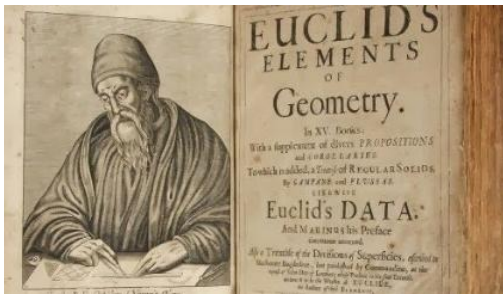
Αν γνωρίζουμε την ανάλυση δυο αριθμών , σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, τότε εύκολα βρίσκουμε τον μ.κ.δ.

|      |  |          |      |  |   |
|------|--|----------|------|--|---|
| 1980 |  | 10 = 2x5 | 1176 |  | 2 |
| 198  |  | 2        | 588  |  | 2 |
| 99   |  | 3        | 294  |  | 2 |
| 33   |  | 3        | 147  |  | 3 |
| 11   |  | 11       | 49   |  | 7 |
| 1    |  |          | 7    |  | 7 |
|      |  |          | 1    |  |   |

Επομένως :  $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 11^1$  και  $1176 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^2$

μ.κ.δ.  $(1980, 1176) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$  δηλ. παίρνουμε υπόψη τους κοινούς όρους αλλά στη μικρότεροι δύναμη.

### Εύρεση μ.κ.δ. (II)



Να και μια πρόταση που αποδίδεται στον Ευκλείδη:

αν  $\alpha = \beta \cdot \pi + \upsilon$  τότε

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon) !$$

Αλγόριθμος Ευκλείδη :

Στηριζόμενοι στη παραπάνω πρόταση

θα υπολογίσουμε τον μ.κ.δ. δυο αριθμών π.χ.  $(46, 18) =$  ;

$$46 = 2 \cdot 18 + 10 \rightarrow (46, 18) = (18, 10)$$

$$18 = 1 \cdot 10 + 8 \rightarrow (18, 10) = (10, 8)$$

$$10 = 1 \cdot 8 + 2 \rightarrow (10, 8) = (8, 2)$$

$$8 = 4 \cdot 2 + 0 \rightarrow (8, 2) = (2, 0) \rightarrow \text{μ.κ.δ.} = 2$$

αφού το ζεύγος  $(\alpha, 0)$  έχει μ.κ.δ. το  $\alpha$

► Ποιος ο μ.κ.δ.  $(\alpha, \beta)$ , αν  $\alpha = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 17 \cdot 23$  και  $\beta = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 19$ ;

Απάντηση:

Είναι προφανές ότι εδώ θα εφαρμόσουμε τη πρώτη μέθοδο...

① Κάθε κλάσμα μπορεί να μετατραπεί σε ανάγωγο, αν απλοποιήσουμε του όρους του (αριθμητή και παρονομαστή) με τον μ.κ.δ. τους (\*)

### Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ε.κ.π.)

Αν α και β είναι δυο θετικοί αριθμοί, τότε το μικρότερο από τα θετικά κοινά τους πολλαπλάσια ονομάζεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και σημειώνεται με το σύμβολο  $[α,β]$

Παραδείγματα

$$[6,8] = 24$$

$$[5,6] = 30$$

$$[5,0] = 0$$

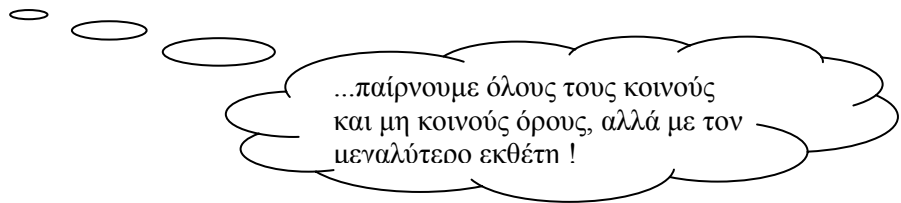
### Εύρεσης ε.κ.π. δυο αριθμών (I)

Όταν γνωρίζουμε τις αναλύσεις τους σε γινόμενο πρώτων παραγόντων...

Παράδειγμα :

$$1980 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 11^1 \quad \text{και} \quad 1176 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^2$$

$$[1980, 1176] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^1 !$$



### Εύρεσης ε.κ.π. δυο αριθμών (II)

(\*) Στηριζόμαστε στη μαθηματική εξίσωση  $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}$ . Η μέθοδος αυτή εδώ, εφαρμόζεται στη περίπτωση που η ανάλυση των δυο αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μοιάζει ιδιαίτερα χρονοβόρα.

$$4757 = 4189 \cdot 1 + 568 \rightarrow 4189 = 568 \cdot 7 + 213 \rightarrow 568 = 2 \cdot 213 + 142 \rightarrow 213 = 142 \cdot 1 + 71 \rightarrow 142 = 71 \cdot 2 + 0$$

$$\text{Άρα } (4757, 4189) = 71 !$$

$$\text{Στη συνέχεια : } 4757 = 71 \cdot 67 \quad \text{και} \quad 4189 = 71 \cdot 59$$

Να και η εφαρμογή της σχέσης :

$$[a,b] = \frac{ab}{(a,b)} \Rightarrow [4757, 4189] = \frac{71 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 59}{71} = 71 \cdot 67 \cdot 59$$

*Άσκηση 1<sup>η</sup> : Να βρεθεί ο ελάχιστος φυσικός  $n$  ο οποίος διαιρούμενος με κάθε στοιχείο του συνόλου  $\{6,8,9,12\}$  δίνει υπόλοιπο 4.*

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει : } n &= \text{πολ.}6+4 = \text{πολ.}8+4 = \text{πολ.}9+4 = \text{πολ.}12+4 \Rightarrow \\ n-4 &= \text{πολ.}6 = \text{πολ.}8 = \text{πολ.}9 = \text{πολ.}12 \end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι το  $n-4$  πρέπει και αρκεί να είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6,8,9,12.

Επειδή ζητείται ο φυσικός  $n$  να είναι ελάχιστος, πρέπει και αρκεί :

$$n-4 = [6,8,9,12]$$

$$\text{Όμως : } 6 = 2 \cdot 3 \qquad 8 = 2^3 \qquad 9 = 3^2 \qquad 12 = 2 \cdot 3^2$$

$$\text{Άρα } n-4 = [6,8,9,12] = 2^3 \cdot 3^2 = 72 \Rightarrow n = 72+4 = \mathbf{76}$$

*Άσκηση 2<sup>η</sup> : Να βρεθεί ο ελάχιστος φυσικός  $n$  ο οποίος διαιρούμενος με 3,7,9 δίνει αντίστοιχα υπόλοιπο 2,6,8.*

Υπόδειξη

$$\begin{aligned} n &= \text{πολ.}3+2 = \text{πολ.}7+6 = \text{πολ.}9+8 \Rightarrow \\ n+1 &= \text{πολ.}3+3 = \text{πολ.}7+7 = \text{πολ.}9+9 \Rightarrow \text{και τελικά} \\ n+1 &= \text{πολ.}3 = \text{πολ.}7 = \text{πολ.}9 \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

*Άσκηση 3<sup>η</sup> : Να εκτελεστεί η πρόσθεση  $\frac{19}{1452} + \frac{176}{1848}$*

Υπόδειξη

- Κάνε τα κλάσματα ομώνυμα ( βρες ε.κ.π. των παρονομαστών)
- Κάνε το κλάσμα –που θα προκύψει από την πρόσθεση- ανάγωγο , με τη βοήθεια του μ.κ.δ. αριθμητή και παρονομαστή.

*Άσκηση 4<sup>η</sup> : Να αποδειχτεί ότι για τον ακέραιο  $a$  ισχύει  $(a, a+1)=1$*

Έστω  $\delta=(a, a+1)$  . Τότε  $\delta/a$  και  $\delta/a+1$  , επομένως ο  $\delta$  διαιρεί κάθε γραμμικό συνδυασμό των  $a$  και  $a+1$ .

Άρα  $\delta/(a+1-a)$  δηλ.  $\delta/1$  και επομένως  $\delta=1$  !!!