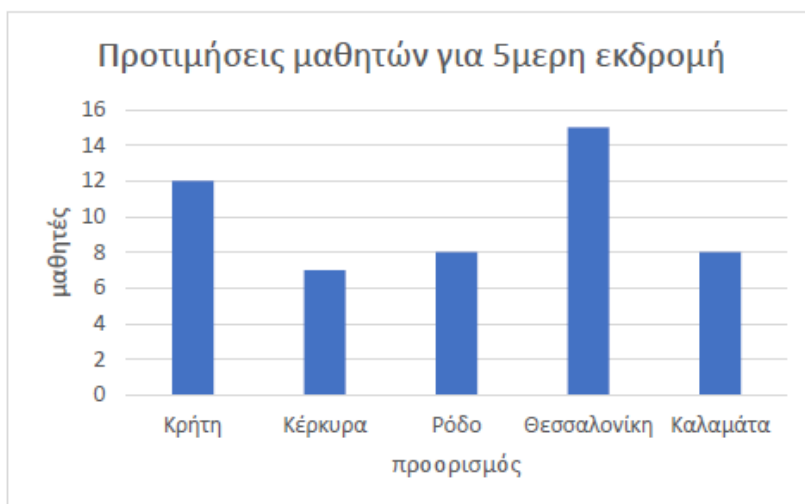


Ενδεικτικά θέματα 2023 για Πρότυπα Γυμνάσια

1. Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώθηκαν οι δηλώσεις προτίμησης των μαθητών της Γ' Λυκείου για την 5μερη εκδρομή τους. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;



α. Σαράντα μαθητές δήλωσαν πού θέλουν να πάνε εκδρομή.

β. Είκοσι μαθητές δήλωσαν ότι θέλουν να πάνε σε νησί.

γ. Το 15% των μαθητών θέλει να πάει στη Θεσσαλονίκη

δ. Είκοσι τρεις μαθητές δήλωσαν ότι δε θέλουν να πάνε σε νησί.

Οποιοδήποτε πλήθος μαθητών, οφείλει να είναι ακέραιος αριθμός. Έτσι διαβάζουμε από το ραβδόγραμμα τα εξής :

Κρήτη == 12 Κέρκυρα == 7 Ρόδος == 8 Θεσσαλονίκη == 15 και Καλαμάτα == 8

Πλήθος μαθητών == $12 + 7 + 8 + 15 + 8 = 50$

Πλήθος μαθητών που προτιμούν νησί == 27

Δεν θέλουν σε νησί == 23

Στους 50 μαθητές θέλουν Θεσ/κη οι 15

Στους 100 //

//

//

x;

}

$$x = 15 \cdot \frac{100}{50} = 15 \cdot 2 = 30\%$$

2. Η Άννα θα προπονείται κάθε μέρα 1 ώρα και 18 λεπτά από Δευτέρα έως Παρασκευή, το Σάββατο θα προπονείται 2,5 ώρες, και την Κυριακή θα ξεκουράζεται. Αν ξεκινήσει το πρόγραμμα της προπόνησης τη Δευτέρα 1^η Μαΐου πόσο χρόνο θα έχει προπονηθεί έως και την τελευταία μέρα του Ιουνίου;

α. 78 ώρες και 30 λεπτά

β. 77 ώρες και 12 λεπτά

γ. 76 ώρες

γ. 73 ώρες και 10 λεπτά

Μάιος και Ιούνιος σημαίνει 61 ημέρες και επομένως 8 εβδομάδες και 5 ημέρες. Πράγματι: $61 = 7 \times 8 + 5$.

Ξεκινά τη προπόνηση Δευτέρα και ολοκληρώνει τις 8 εβδομάδες ημέρα Κυριακή (τελευταία του Ιουνίου). Οι λοιπές πέντε ημέρες είναι Δ – Τ – Τ – Π – Π

Διάρκεια προπόνησης σε μία εβδομάδα = $(1 \text{ ώρα } 18 \text{ λεπτά}) \times 5 + 2,5 \text{ ώρες} = 5 \text{ ώρες} + 90 \text{ λεπτά} + 2,5 \text{ ώρες} = 5 \text{ ώρες} + 1,5 \text{ ώρες} + 2,5 \text{ ώρες} = 9 \text{ ώρες}$.

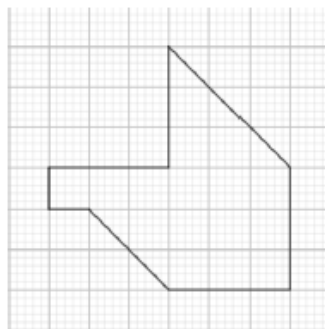
Διάρκεια προπόνησης σε 8 εβδομάδες = $9 \text{ ώρες} \times 8 = 72 \text{ ώρες}$

Διάρκεια προπόνησης τις τελευταίες πέντε ημέρες = $(1 \text{ ώρα } 18 \text{ λεπτά}) \times 5 = 6,5 \text{ ώρες}$

Συνολική διάρκεια προπόνησης Μαΐου-Ιουνίου = $72 + 6,5 = 78,5 \text{ ώρες}$ ή **78 ώρες και 30 λεπτά**

Σχόλιο : Πόσα παιδιά γνωρίζουν ότι δυο διαδοχικοί μήνες (πλην Φεβρουαρίου στη διαδοχή), έχουν άθροισμα 61 ημέρες;

3. Αν κάθε τετραγωνάκι έχει εμβαδόν 2 τότε το πολύγωνο που έχουμε σχεδιάσει έχει εμβαδόν



α. 18

β. 18,5

γ. 36

δ. 37

Εμβαδόν από πλήρη τετραγωνάκια που συμμετέχουν στο εμβαδόν = $(1 + 2 + 6 + 4 + 3) \times 2 = 32$

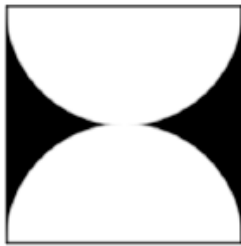
Εμβαδόν από τετραγωνάκια που συμμετέχουν κατά το ήμισυ στο εμβαδόν = $(1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1) \times 1 = 5$

Συνολικό εμβαδόν = $32 + 5 = 37$

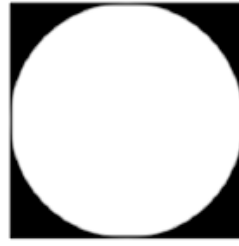
4. Σε τρία ίσα τετράγωνα έχουμε σχεδιάσει στο εσωτερικό τους με διαβήτη τα επόμενα συμμετρικά σχήματα και τα έχουμε βάψει με μαύρη μπογιά.



Σχήμα Α



Σχήμα Β



Σχήμα Γ

Για την ποσότητα της μπογιάς που χρησιμοποιήσαμε ποιο από τα παρακάτω είναι **λάθος**;

- ☒ α. Για το σχήμα Α χρειάστηκε περισσότερη μπογιά από ότι για το Γ
- β. Για τα σχήματα Β και Γ χρειάστηκε η ίδια ποσότητα μπογιάς
- γ. Για τα σχήματα Α και Β χρειάστηκε η ίδια ποσότητα μπογιάς
- δ. Όλα τα σχήματα χρειάστηκαν την ίδια ποσότητα μπογιάς

Ξεκινάμε με την οπτική παρατήρηση ότι οι κύκλοι στα σχήματα έχουν ακτίνα ίση με το μισό της πλευράς των τετραγώνων και τα κέντρα αυτών των κύκλων είναι στις κορυφές του τετραγώνου ή στο μέσο πλευράς ή στο κέντρο του τετραγώνου (σημείο τομής διαγωνίων του)

- Στο πρώτο σχήμα έχουμε τέσσερα τέταρτα του κύκλου λευκή περιοχή, δηλαδή ένα κύκλο!
- Στο δεύτερο σχήμα έχουμε ως λευκή περιοχή, δυο ημικύκλια δηλαδή πάλι ένα κύκλο.
- Στο τρίτο σχήμα έχουμε –ολοφάνερα- ένα κύκλο.

Επομένως οι περιοχές με μαύρο χρώμα είναι σε όλα τα σχήματα ίσου εμβαδού.

5. Σε ένα δοχείο περιέχονται 250 γραμμάρια νερό με οινόπνευμα ανακατεμένα σε αναλογία 60% οινόπνευμα και 40% νερό. Τι πρέπει να κάνω ώστε στο δοχείο να περιέχεται ίση ποσότητα νερού και οινόπνευματος;

- α. Να προσθέσω στο δοχείο 25 γραμμάρια νερό.
- β. Να αφαιρέσω από το δοχείο 25 γραμμάρια οινόπνευμα.
- ☒ γ. Να προσθέσω στο δοχείο 50 γραμμάρια νερό.
- δ. Να αφαιρέσω από το δοχείο 20 γραμμάρια οινόπνευμα.

Ή θα προσθέσω νερό ή θα αφαιρέσω (με κάποιο τρόπο π.χ. εξάτμιση) οινόπνευμα.

Οινόπνευμα 60% στα 250 γραμμάρια σημαίνει : ... 150 γραμμάρια

Νερό 40% σημαίνει : 100 γραμμάρια.

Επομένως –από τις επιλογές που έχω- σωστή είναι η (γ)

6. Οι 6 εργαζόμενες ολοκληρώνουν ένα έργο σε 16 ημέρες. Πόσες εργαζόμενες θα τελειώσουν το ίδιο έργο σε 4 ημέρες;
 α. 16 β. 26 γ. 24 δ. 32

Εδώ τα ποσά (εργάτες – χρόνος ολοκλήρωσης έργου) είναι **αντιστρόφως** ανάλογα!

6 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 16 ημέρες

$$x; \quad // \quad // \quad 4 \quad // \quad x = 6 \cdot \frac{16}{4} = 24 \text{ ημέρες}$$

7. Τα $\frac{2}{6}$ των ατόμων που παρακολούθησαν μια σχολική γιορτή ήταν γονείς, το $\frac{1}{4}$ παππούδες και γιαγιάδες και τα υπόλοιπα παιδιά. Αν παρακολούθησαν τη γιορτή 180 άτομα, πόσα ήταν τα παιδιά;
 α. 54 β. 75 γ. 105 δ. 108

Όταν κλάσματα μιας οντότητας δεν είναι ομώνυμα, επιβάλλεται να φροντίσουμε να γίνουν!

Γονείς == $\frac{2}{6}$ ή καλύτερα $\frac{4}{12}$

Παππούδες == $\frac{1}{4}$ ή καλύτερα $\frac{3}{12}$ και επομένως $\text{παιδιά} == \frac{12}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

Πάμε τώρα γρήγορα-γρήγορα στην απλή μέθοδο των τριών...

$\frac{12}{12}$ του πληθυσμού όλων αντιστοιχεί σε 180 άτομα

$$\frac{5}{12} \quad // \quad // \quad x; \quad x = (180 \cdot 5) : 12 = 75 \text{ παιδιά.}$$

8. Ένα πλοίο κινείται με ταχύτητα 2,4 ναυτικά μίλια την ώρα. Για να διανύσει μια απόσταση 3,6 ναυτικών μιλίων θα χρειαστεί:
 α. 100 λεπτά β. 240 λεπτά γ. 90 λεπτά δ. 2 ώρες

Σε 60 λεπτά διανύει μια απόσταση 2,4 ναυτικά μίλια

$$x; \quad // \quad // \quad 3,6 \quad // \quad x = (60 \cdot 3,6) : 2,4 = 90 \text{ λεπτά}$$

9. Ποιος από τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς είναι πιο κοντά στο κλάσμα $\frac{5}{3}$;

α. 1,66

β. 1,667

γ. 1,67

δ. 1,7

$5/3 = 1,66666...$ και έτσι το κλάσμα διαφέρει :

α. $1,6666... - 1,66 = 0,006666...$

β. $0,0003333...$

γ. $0,003333...$

δ. $0,03333...$

10. Αν τον αριθμό k τον πολλαπλασιάσουμε επί 5, κατόπιν στο γινόμενο προσθέσουμε τη μονάδα και το άθροισμα το διαιρέσουμε δια δυο θα προκύψει ο αριθμός

α. $(5 \cdot k + 1) : 2$

β. $5 \cdot k + 1 : 2$

γ. $5 \cdot (k + 1) : 2$

δ. $(5 \cdot k) : 2 + 1$

Χωρίς σχόλια εδώ...

11. Οι αριθμοί που όταν διαιρούνται με το 3 ή με το 5 αφήνουν υπόλοιπο 1 έχουν την ιδιότητα:

α. είναι πολλαπλάσια του 15

β. όταν διαιρούνται με το 15 αφήνουν υπόλοιπο 1

γ. όταν διαιρούνται με το 15 αφήνουν υπόλοιπο 2

δ. είναι πολλαπλάσια του 8.

Οι αριθμοί που έχουν ως γνώρισμα να δίνουν υπόλοιπο 1, όταν διαιρούνται με το 3 και το 5, οφείλουν να έχουν δομή : **$\alpha = 3 \cdot 5 \cdot v + 1$** με $v=1, 2, 3, \dots$ (1)

Γιατί έτσι; Διότι αυτό διδάσκει η εξίσωση της Ευκλείδειας διαίρεσης $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$

- Στην εξίσωση (1) όταν ο $\delta=3$, τότε $\pi=5v$ και $\upsilon=1$
- Στην εξίσωση (1) όταν ο $\delta=5$, τότε $\pi=3v$ και $\upsilon=1$

Επιπλέον! Όταν στην (1) $\delta=15$, τότε $\pi=v$ και $\delta=1$ δηλαδή ο αριθμός 15 διαιρεί τον α δίνοντας υπόλοιπο 1. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός α δεν είναι πολλαπλάσιο του 15 και ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 15, δεν είναι ο αριθμός 2.

Αν στην (1) θέσουμε $v=1$, τότε $\alpha=16$. Αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 8.

Αν όμως στην (1) θέσουμε $v=2$ ή $v=3$ κ.ο.κ. θα δούμε ότι οι αριθμοί που θα προκύψουν, δεν είναι πολλαπλάσια του 8.

Σχόλιο: Η άσκηση 11 είναι απρόσιτη για μαθητές δημοτικού, γυμνασίου και ακόμη πιο πάνω. Είναι άσκηση που ανήκει σε ιδιαίτερα απαιτητικό αντικείμενο των μαθηματικών, που

ακούει στο όνομα «Θεωρία αριθμών». Αυτή τη θεωρία γνώρισα, όταν η κόρη μου ήταν φοιτήτρια στη παιδαγωγική ακαδημία. Είχαμε δουλέψει –τότε- αρκετά... Φαντάζομαι ότι εδώ ο μαθητής δημοτικού θα εύρισκε μερικούς αριθμούς –ως παράδειγμα, $\alpha=16$, $\alpha=31$, $\alpha=46$, ... και θα αντλούσε τις απαντήσεις από το μικρό αυτό δείγμα αριθμών.

12. Η παράσταση $4 + 3 \cdot 1,5 - 5 \cdot 1,6$ είναι ίση με

α. 2,5

β. 4

γ. 0,5

δ. 5,6

Εδώ τα πράγματα είναι απλά. Πρώτα οι πολ/σμοί και μετά οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις

$$4 + 3 \times 1,5 - 5 \times 1,6 = 4 + 4,5 - 8 = 0,5$$