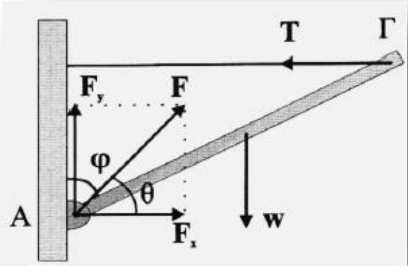
Προβλήματα στα στερεά

4.56 Ομογενής δοκός ΑΓ μήκους *l* και βάρους w=100 N ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα 4.64. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το σκοινί και από την άρθρωση Α. Δίνεται φ=60°.



Ισορροπία στερεού σημαίνει
$\Sigma F_x = 0\,,\ \ \Sigma F_y = 0 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \Sigma\tau_{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o} = 0$

Αναλύουμε τη δύναμη που ασκεί ο τοίχος στην άρθρωση Α. Και…

$\Sigma \mathrm{F_x} = 0 \rightarrow \mathrm{F_x} = \mathrm{T}$ (1)

$\Sigma \mathrm{F_y} = 0 \rightarrow \mathrm{F_y} = \mathrm{W}$ (2)

$\Sigma\tau_{(\mathrm{A})} = 0 \rightarrow \mathrm{w}.\frac{\mathrm{L}}{2}.\eta\mu\varphi = \mathrm{T.L.}\sigma\upsilon\nu\varphi$ (3) Μένει τώρα να διαχειριστούμε τις εξισώσεις…

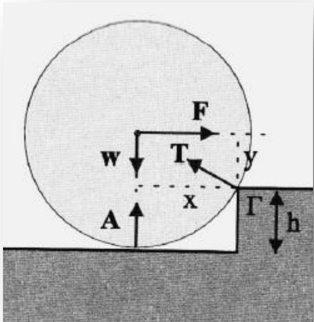
Από την (3) θα βρούμε την Τ, στη συνέχεια από την (1) την $\mathrm{F_x}$ και από την (2) την $\mathrm{F_y}$. Στη συνέχεια με πυθαγόρειο θεώρημα την F. Στο τέλος θα υπολογιστεί και η κατεύθυνση θ, της F.

$$(3) \rightarrow 100\,.\frac{1}{2}\,.\frac{\sqrt{3}}{2} = T.\frac{1}{2} \rightarrow T = 50\sqrt{3}\ N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{50\,.50\,.3 + 100\,.100} = 10\,\sqrt{5.5.3 + 2.5\,.2.5} = 50\sqrt{7}\ N$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{100}{50\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4.57 Το εμπόδιο στο σχήμα έχει ύψος h και ο τροχός ακτίνα R και βάρος w. Για ποιες τιμές της οριζόντιας δύναμης F ο τροχός θα υπερπηδήσει το εμπόδιο.



Για να υπερπηδηθεί το εμπόδιο πρέπει :

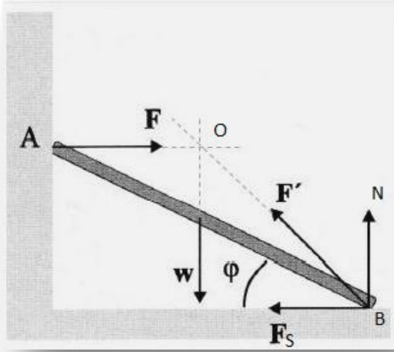
- Να συμβεί στροφή περί το Γ.
- Οριακά η δύναμη επαφής Α μηδενίζεται, όταν ξεκινά η υπερπήδηση.
- Ροπή της F ως προς Γ, οριακά μεγαλύτερη της ροπής του βάρους W ως προς το ίδιο σημείο.

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: Όταν η υπερπήδηση είναι σε εξέλιξη, ο μοχλοβραχίονας x του βάρους μειώνεται και τείνει στο μηδέν, ενώ ο μοχλοβραχίονας y της F αυξάνει, τείνοντας στην τιμή R. Αυτό σημαίνει ότι η ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη F, για να υποσκελιστεί το εμπόδιο συνεχώς μειώνεται.

Για να ξεκινήσει η υπερπήδηση:

$$\tau_F \ \geq\ \tau_W \rightarrow F.y\ \geq W.x\ \rightarrow F.(R-h) \geq W.\left(\sqrt{R^2-(R-h)^2}\right) \rightarrow F \geq w.\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

4.58 Ομογενής σκάλα μπορεί να ισορροπήσει στηριζόμενη στο έδαφος και στον τοίχο μόνο όταν η γωνία φ που σχηματίζει με το έδαφος είναι μεγαλύτερη των 30°. Να υπολογίσετε το συντελεστή οριακής στατικής τριβής της σκάλας με το οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε αμελητέα την τριβή ανάμεσα στη σκάλα και τον τοίχο.



Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής υφίσταται στο σχήμα, όταν η γωνία φ έχει τιμή 30°.

Σε αυτή τη κατάσταση σημειώνουμε δυνάμεις, τις αναλύουμε και γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στερεού:

$$\Sigma F_x = 0\,, \qquad \Sigma F_y = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Sigma\tau_{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o} = 0$$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: Όταν στερεό ισορροπεί κάτω από τη δράση τριών συνεπίπεδων δυνάμεων με διαφορετικές κατευθύνσεις, τότε οι διευθύνσεις τους οφείλουν να περνούν από το ίδιο σημείο. Αν από το σημείο τομής των δυο, δεν περνά η Τρίτη, τότε ως προς αυτό το σημείο $\Sigma\tau \neq 0$ και επομένως δεν υπάρχει ισορροπία.

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = F_s$ (1) *όπου* F_S η οριακή στατική τριβή , με $F_S = \mu_\sigma . N = \mu_\sigma . W$

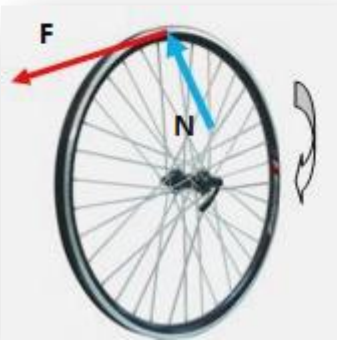
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = W$ (2)

$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \rightarrow W.\frac{L}{2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi + F_S.L.\eta\mu\varphi = N.L.\sigma\upsilon\nu\varphi$ (3) *Δεξιόστροφες ροπές θεωρήθηκαν θετικές*

Από την (3) έχουμε

$$W.\frac{L}{2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi + (\mu_\sigma.W).L.\eta\mu\varphi = N.L.\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow W.\frac{L}{2}\,\sigma\upsilon\nu\varphi + (\mu_\sigma.W).L.\eta\mu\varphi = W.L.\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow \cdots \mu_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.59 Ο πίσω τροχός ενός ποδηλάτου έχει ακτίνα R=0,30 m και μάζα 1 kg. Ο τροχός στρέφεται με συχνότητα 100 στροφές ανά **λεπτό** - χωρίς να έρχεται σε επαφή με το έδαφος. Χρησιμοποιώντας το φρένο ακινητοποιούμε τον τροχό σε 5 s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στην επαφή τροχού - φρένου, είναι π/5. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί το φρένο στον τροχό. (Θεωρήστε ότι το φρένο έρχεται σε επαφή με τον τροχό μόνο από τη μια του πλευρά και ότι η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια του).



Η δύναμη F είναι η **σταθερή** δύναμη τριβής που επιβραδύνει την στροφή του τροχού και η Ν είναι η κάθετη δύναμη που ασκείται στον τροχό, επειδή γίνεται πέδηση (φρενάρισμα).

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\vartheta\varepsilon\rho\acute{\eta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{0-\omega_o}{t} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -\frac{2\pi f_o}{t} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -\frac{2\pi.100}{60\,.\,5} \rightarrow \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\pi}{3}\,\frac{rad}{sec^2} \quad (1)$$

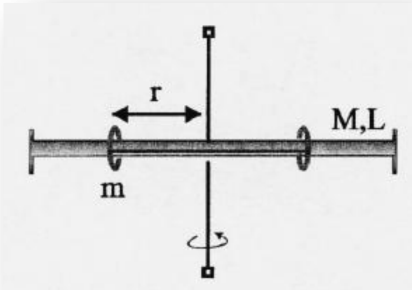
Εύρεση ροπής αδράνειας ως προς κέντρο τροχού …

$$I = \Sigma(m_i R^2) = \Sigma(m_i)\,.\,R^2 = m_{o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}.R^2 = 1\,.\,0{,}3\,.\,0{,}3 = 9\;10^{-2}\;kgm^2 \quad (2)$$

Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης …

$$\tau_F = I.\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F.R = I.\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \mu_\sigma.N.R = I.\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \frac{\pi}{5}.N.0{,}3 = 9\,10^{-2}.\frac{2}{3}\pi \rightarrow \boldsymbol{N} = \frac{9.10^{-2}.\ 2\ .\ 5}{3\,10^{-1}.3} = 1\,N$$

4.60 Η ράβδος του σχήματος είναι οριζόντια και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσον της. Το μήκος της ράβδου είναι L=1 m και η μάζα της M=0,6 kg. Σε απόσταση r=0,2 m από τον άξονα περιστροφής βρίσκονται δύο μεταλλικοί δακτύλιοι μάζας m=0,l kg ο καθένας, που συνδέονται μεταξύ τους με ένα νήμα. Το σύστημα στρέφεται γύρω από τον άξονα με συχνότητα f_1=10 Hz. Κάποια στιγμή το νήμα σπάει και οι δακτύλιοι, λόγω αδράνειας ωθούνται στα άκρα της ράβδου. Υπολογίστε τη νέα συχνότητα με την οποία θα στρέφεται το σύστημα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I = \frac{1}{12}mL^2$.

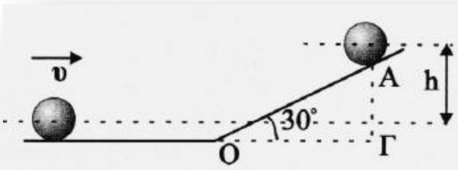


Κατά τη μεταβολή του συστήματος δεν έχουμε εξωτερικές ροπές, αφού τα βάρη των δακτυλίων είναι παράλληλα στον άξονα στροφής. Επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.

Ονομάζω 1 την αρχική κατάσταση και 2 την τελική κατάσταση.

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow I_1.\vec{\omega}_1 = I_2.\vec{\omega}_2 \rightarrow \acute{\alpha}\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\alpha \rightarrow \left(\frac{1}{12}mL^2 + 2mr^2\right).2\pi f_1$$
$$= \left(\frac{1}{12}mL^2 + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right).2\pi f_2 \rightarrow \ A\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \sigma\tau o\ s.i.$$
$$\rightarrow \cdots\ f_2 = 5{,}8\,Hz$$

4.61 Η ταχύτητα του κέντρου μάζας μιας σφαίρας που κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο είναι 5 m/s. Η σφαίρα στην πορεία της συναντά πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης 30° και συνεχίζει πάνω σ' αυτό την κίνηση της. Η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει η σφαίρα στο πλάγιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $I = \frac{2}{5}mR^2$. Δίνεται g = 10 m/s^2 .



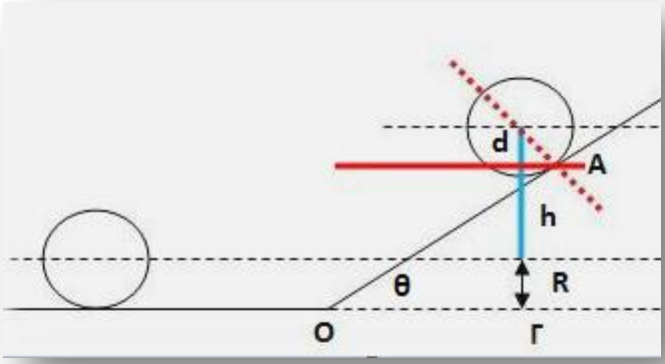
Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh \ \rightarrow h = \frac{7v^2}{10g}$$

$$\eta\mu 30 = \frac{A\Gamma}{OA} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{OA} \rightarrow OA = 2\,.\left(\frac{7v^2}{10g}\right) = 3{,}5\,m$$

Θεωρήθηκε ότι ΑΓ ≅ h

Αν όμως πρέπει να υπολογίσουμε την συμμετοχή της ακτίνας στη γεωμετρία του σχήματος, τότε…



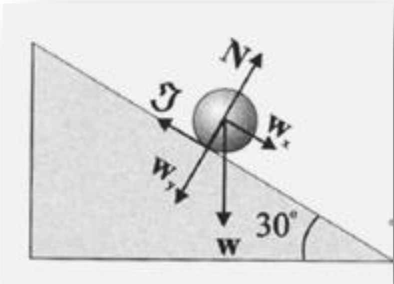
…η απόσταση ΟΑ, για να υπολογιστεί χρειαζόμαστε τη γωνία θ και το ύψος του σημείου Α. (Στο Α η σφαίρα εφάπτεται με το κεκλιμένο επίπεδο, όταν έχει ανέβει κατά h)

Για το ύψος του Α έχουμε :

$$h_A = R + (h - d) = R + (h - R\sigma\upsilon\nu 30)$$

Τότε : $\eta\mu 30 = \frac{H_A}{(OA)} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{H_A}{(OA)} \rightarrow OA = 2\, h_A \rightarrow \kappa.o.\kappa.$

4.62 Συμπαγής σφαίρα κατεβαίνει χωρίς ολίσθηση σε πλάγιο επίπεδο με κλίση 30°. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, είναι $I = \frac{2}{5}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10m/s^2 . Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου της σφαίρας



Απαραίτητη η παρουσία της τριβής! Χάρη σε αυτή υπάρχει ροπή με συνέπεια να αυξάνει η γωνιακή ταχύτητα ω και έτσι να ισχύει η γνωστή εξίσωση της κύλισης $u_{cm} = \omega . R$

Διαχείριση (*)

Μεταφορική κίνηση : $W_x - T = m.a_{cm} \rightarrow mg\eta\mu 30 - T = m.a_{cm}$ (1)

Στροφή : $T.R = I.a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T.R = \frac{2}{5}mR^2.a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 5T = 2mR.\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Κύλιση : $u_{cm} = \omega.R \rightarrow \alpha_{cm} = R.\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)

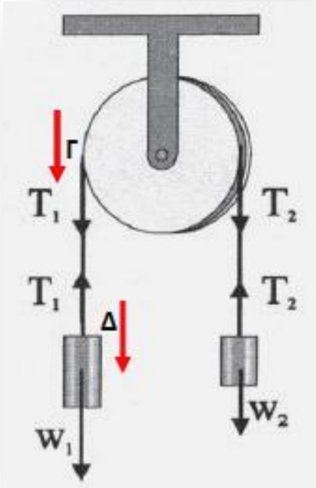
(2), (3) διώχνω την $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ … $5T = 2m\,.a_{cm}$ (4)

Πολλαπλασιάζω τα δυο μέλη της (1) επί 5 και προσθέτω το αποτέλεσμα που θα έχω, με την (4)…

$$(5\, mg\eta\mu 30 - 5T) + 5T = 5m.a_{cm} + 2m.a_{cm} \rightarrow 5g.\frac{1}{2} = 7a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{25}{7}\ \frac{m}{sec^2}$$

(*) Όταν στερεό κινείται, σχεδιάζω δυνάμεις και φτιάχνω εξισώσεις βασιζόμενος σε τέσσερις λέξεις. Μεταφορά – στροφή – κύλιση – νήμα. Σε τούτη την άσκηση δεν υπάρχει νήμα, οπότε δεν έφτιαξα κάποια εξίσωση!

4.63 Η τροχαλία του σχήματος είναι ομογενής με μάζα m=2 kg και ακτίνα R. Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ έχουν μάζες m_1 = 3kg και m_2 =1kg. Να υπολογίσετε με ποια επιτάχυνση θα κινηθούν τα σώματα αν αφεθούν ελεύθερα. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10m/s^2. Το βάρος του νήματος θεωρείται αμελητέο. Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο σκοινί είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση.



Μεταφορική κίνηση : $W_1 - T_1 = m_1.a$ (1) και $T_2 - W_2 = m_2.a$ (2)

Στροφή : $T_1.R - T_2R = I.a_{γων} \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2}mR\,.a_{γων}$ (3)

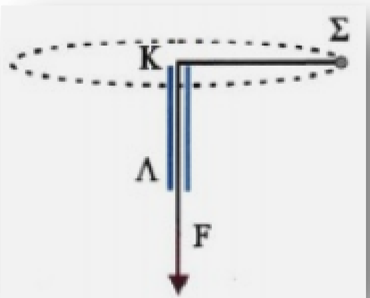
Κύλιση : Δεν υπάρχει

Νήματα : $T_1 = T_1$ και $T_2 = T_2$ (σχήμα) Επιπλέον!!! Τα σημεία Γ και Δ έχουν ίδια ταχύτητα, αφού είναι σημεία του ιδίου τεντωμένου νήματος. Η ταχύτητα του Δ είναι η ταχύτητα του σώματος 1 και η ταχύτητα του Γ είναι η γραμμική ταχύτητα του σημείου της περιφέρειας του τροχού, με το οποίο είναι σε επαφή το σημείο Γ του νήματος.
Επομένως $u_Δ = u_Γ \rightarrow u = ω.R \rightarrow a = R.a_{γων}$ (4)

Προσθέτω κατά μέλη (1) και (2)

$$W_1 - T_1 + T_2 - W_2 = m_1.a + m_2.a \rightarrow W_1 - W_2 - (T_1 - T_2) = (m_1 + m_2).a \rightarrow$$
$$W_1 - W_2 - \frac{1}{2}mR\,.a_{γων} = (m_1 + m_2).a \rightarrow Λόγω\ της\ (4) \rightarrow W_1 - W_2 - \frac{1}{2}m.α = (m_1 + m_2).a \rightarrow$$
$$α = \frac{W_1 - W_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \rightarrow a = 4\ m/sec^2$$

4.64 Το σφαιρίδιο Σ του σχήματος έχει μάζα 200 g και διαγράφει κύκλο ακτίνας 30 cm με γωνιακή ταχύτητα 40 rad/s. Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Ποιο είναι το έργο της δύναμης F που πρέπει να ασκήσουμε στην ελεύθερη άκρη του σκοινιού μέχρις ότου η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου Σ γίνει 15 cm; (Θα θεωρήσετε ότι σ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου το σκοινί είναι οριζόντιο και ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του σκοινιού και του σωλήνα).



Η δύναμη F, που ασκούμε για να μειωθεί η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σφαιριδίου, δεν είναι δύναμη σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εργαστούμε ενεργειακά (ΘΜΚΕ)

$$W_F = \frac{1}{2}I_{τελ}.ω_{τελ}^2 - \frac{1}{2}I_{αρχ}.ω_{αρχ}^2 = \frac{1}{2}mR_{τελ}^2.ω_{τελ}^2 - \frac{1}{2}mR_{αρχ}^2.ω_{αρχ}^2 \quad (1)$$

Πράγματι στο σύστημα, μόνο στην F αντιστοιχεί έργο. Οι δυνάμεις που μπορούμε να σχεδιάσουμε στο σφαιρίδιο (w , N , οριζόντιο νήμα) είναι κάθετες στο εκάστοτε στοιχειώδες τόξο Δs και το έργο τους είναι μηδενικό.

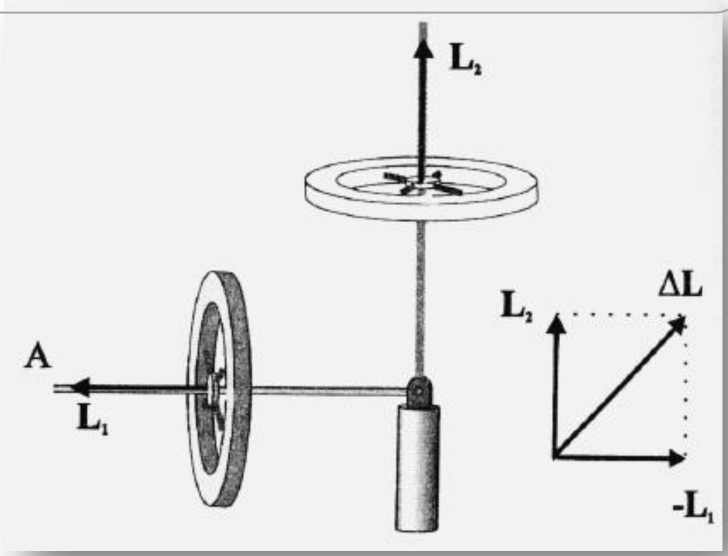
Η δύναμη F, δεν προκαλεί ροπή στο σύστημα αφού διέρχεται από το κέντρο περιστροφής, οπότε η στροφορμή διατηρείται.

Επομένως : $I_{τελ}ω_{τελ} = I_{αρχ}ω_{αρχ} \rightarrow mR_{τελ}^2ω_{τελ} = I_{αρχ}mR_{αρχ}^2$ (2)

Οι σχέσεις (1) και (2) λένε, άμα διώξουμε την $\omega_{\tau\varepsilon\lambda}$:

$$W = \frac{1}{2} m\omega_{\alpha\rho\chi}^2 . R_{\alpha\rho\chi}^2 \left(\frac{R_{\alpha\rho\chi}^2}{R_{\tau\varepsilon\lambda}^2} - 1\right) = \cdots = 43{,}2\, Joule$$

4.65 Ο τροχός του σχήματος έχει ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονά του, 0,18 kg m^2 και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=25 rad/s γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ασκώντας στο σημείο Α του άξονα περιστροφής την κατάλληλη δύναμη τον μετακινούμε ώστε να γίνει κατακόρυφος. Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του τροχού.



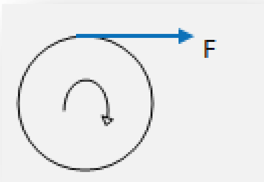
$$\overrightarrow{\Delta L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \vec{L}_2 + \left(-\vec{L}_1\right) \quad (1)$$

Σχεδιάζουμε, αφού δεν επιτρέπεται να εργαστούμε αλγεβρικά.

Η σχεδίαση λέει…

$$\Delta L = \sqrt{L_1^2 + L_1^2} = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2} = I.\omega\sqrt{2}$$
$$= 4{,}5\,\sqrt{2}\, kgm^2/sec$$

4.66 Στην περιφέρεια μιας ακίνητης τροχαλίας, ακτίνας 20 cm, είναι τυλιγμένο σκοινί. Ασκώντας στο σκοινί οριζόντια δύναμη 20π Ν περιστρέφουμε την τροχαλία. Βρέθηκε ότι όταν η τροχαλία έχει κάνει τέσσερις περιστροφές έχει γωνιακή ταχύτητα ω = 8π rad / s . Να υπολογιστεί η μάζα της. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2} mR^2$.



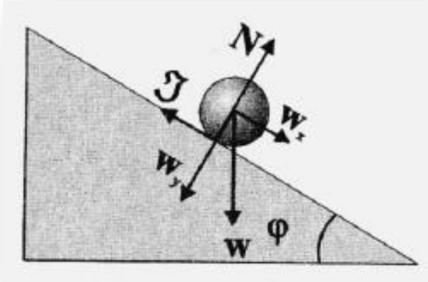
Στροφική κίνηση – Θεώρημα έργο ενέργειας :

$$W_F = \frac{1}{2} I_{\tau\varepsilon\lambda}.\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2} I_{\alpha\rho\chi}.\omega_{\alpha\rho\chi}^2 \quad \rightarrow \quad \tau.\theta = \frac{1}{2} I_{\tau\varepsilon\lambda}.\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - 0 \quad \rightarrow \quad F.R.8\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right).8\pi.8\pi \quad \rightarrow \quad 20\pi.R.8\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right).8\pi.8\pi \quad \rightarrow \quad 20 = \frac{1}{4} m\,.0{,}2\,.8 \;\rightarrow m = 50\, kg$$

(*) Να θυμηθούμε

$$dW_F = F.ds = F.R.d\theta \;\rightarrow\; \Sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}\;\eta\;\rho o\pi\acute{\eta} \;\rightarrow\; W_F = F.R.\Sigma(d\theta) = F.R.\theta = \tau_F.\theta$$

4.67 Ένας τροχός αφήνεται να κινηθεί σε πλάγιο επίπεδο που σχηματίζει με το οριζόντιο γωνία φ. Για ποιες τιμές του συντελεστή οριακής στατικής τριβής η κίνησή του γίνεται χωρίς ολίσθηση; Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται $I = \frac{1}{2}mR^2$.



Όχι ολίσθηση σημαίνει

$$T \leq T_{ολισθ} \rightarrow T \leq \mu_s . N \rightarrow T \leq \mu_s . mgσυνφ \quad (1)$$

Μεταφορική κίνηση :

$$W_x - T = m.a_{cm} \rightarrow mgημφ - T = m.a_{cm} \quad (2)$$

Στροφή :

$$T.R = I.a_{γων} \rightarrow T.R = \frac{1}{2}mR^2.a_{γων} \rightarrow 2T = mR.\alpha_{γων} \quad (3)$$

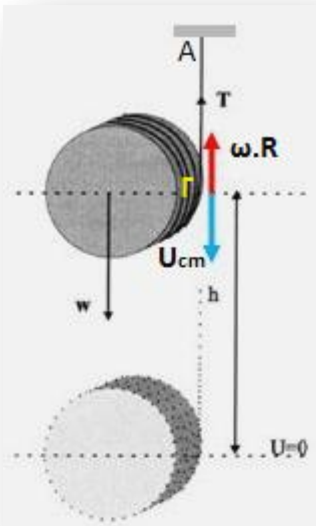
Κύλιση : $u_{cm} = \omega.R \rightarrow \alpha_{cm} = R.\alpha_{γων}$ (4)

(3), (4) : $2T = m.\alpha_{cm}$ (5)

(2) : $mgημφ - T = m.a_{cm} \xrightarrow{(5)} mgημφ - T = 2T \rightarrow mgημφ = 3T \rightarrow T = \frac{mgημφ}{3}$ (6)

(1), (6) : $\frac{mgημφ}{3} \leq \mu_s . mgσυνφ \rightarrow \mu_s \geq \frac{ημφ}{3συνφ} \rightarrow \mu_s \geq \frac{εφφ}{3}$

4.68 Το γιο - γιο του σχήματος αποτελείται από κύλινδρο με μάζα m= 120g και ακτίνα R=l,5 cm, γύρω από τον οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές νήμα. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος, αφήνουμε τον κύλινδρο να **κατεβαίνει**. Να υπολογίσετε
α) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η στροφορμή του κυλίνδρου καθώς κατεβαίνει, και
β) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί σκοινί μήκους 30cm.
Θεωρήστε το νήμα κατακόρυφο. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$. Δίνεται g = 10m/s^2.



Μεταφορά : $mg - T = m\,.a_{cm}$ (1)

Στροφή : $T.R = I.a_{γων} \rightarrow T.R = \frac{1}{2}mR^2.a_{γων} \rightarrow 2T = mR.a_{γων}$ (2) και…

*…Τα σημεία Α και Γ του τεντωμένου νήματος -**το έχουμε ξαναπεί**- έχουν ίσες ταχύτητες, οπότε:*

$u_Γ = u_A \rightarrow u_{cm} - \omega.R = 0 \rightarrow u_{cm} = \omega.R \rightarrow a_{cm} = R.\alpha_{γων}$ *(3)*

Ας πάμε και στις εξισώσεις που αφορούν την στροφορμή και τον ρυθμό της.

$L = I.\omega \rightarrow \frac{dL}{dt} = I.a_{γων}$ ή $\frac{dL}{dt} = T.R$ *(4)*

(2) , (3) : $2T = m.a_{cm}$ Τούτη η εξίσωση με την (1) θα δώσει $mg - T = 2T \rightarrow T = mg/3$ και έτσι η (4) διαμορφώνεται σε :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{mg}{3}.R \rightarrow \frac{dL}{dt} = 6\,10^{-3}\ kg.m^2.sec^{-2}$$

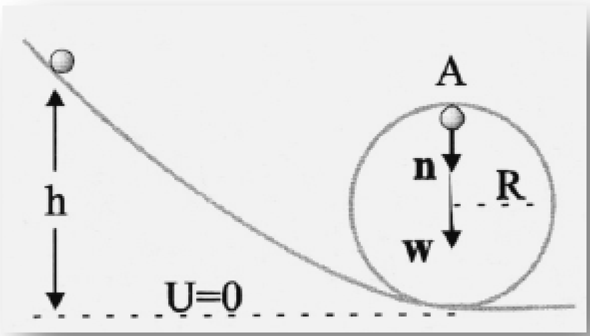
Πάμε τώρα στο (β) ερώτημα στο οποίο μπορούμε να εργαστούμε με εξισώσεις Ε.Ο.Μ.Κ. ή να εργαστούμε ενεργειακά.

Το μήκος του σχοινιού που ξετυλίγεται είναι ίσο με το πόσο θα κατέβει το γιο-γιο. *(Αυτό όπως δεν ισχύει αν το άκρο του σχοινιού κινείται είτε προς τα άνω, είτε προς τα κάτω, είτε οριζόντια, είτε σε κεκλιμένο…).*

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τον κύλινδρο έχουμε:

$$mgh = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \overset{(3)}{\rightarrow} mgh = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{u_{cm}}{R}\right)^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mu_{cm}^2 + \frac{1}{4}mu_{cm}^2 \rightarrow mgh = \frac{3}{4}mu_{cm}^2 \rightarrow u_{cm} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 2\,m/sec$$

4.69 Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο Α, πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση; Δίνεται R=20 cm. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I = \frac{2}{5}mR^2$.Η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R.



Για να κάνει ανακύκλωση, η σφαίρα πρέπει στο ανώτερο σημείο Α της κυκλικής τροχιάς της να βρίσκεται σε επαφή με τον οδηγό.

Για την αντίδραση **n** που δέχεται η σφαίρα από τον οδηγό ισχύει $n \geq 0$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται η σφαίρα στη θέση Α έχει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

Θέση Α : $W + n = \frac{m.u_A^2}{R} \rightarrow οριακό\ πέρασμα \rightarrow W = \frac{m.\,u_{A,min}^2}{R} \rightarrow u_{A,min} = \sqrt{gR}$ (1)

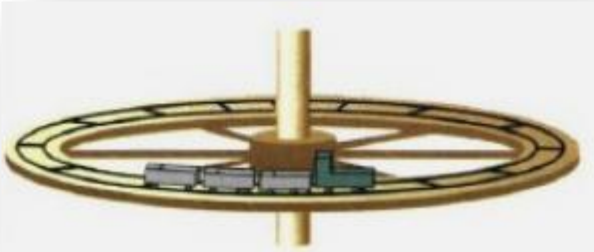
ΑΔΜΕ για μετάβαση από κάποιο ύψος h , στο σημείο Α : $mgh = mg.2R + \frac{1}{2}I\,\omega_A^2 + \frac{1}{2}mu_A^2$ (2)

Κύλιση : $u_{cm} = \omega.R$ (3) (*μια σχέση που ισχύει και στις καμπυλόγραμμες κυλίσεις*!!!)

(2) $mgh = mg.2R + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{u_A}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mu_A^2 \rightarrow mgh = 2mgR + \frac{1}{5}mu_A^2 + \frac{1}{2}mu_A^2 \rightarrow mgh = 2mgR + \frac{7}{10}mu_A^2 \rightarrow προσοχή\ τώρα\ ! \rightarrow mgh_{min} = 2mgR + \frac{7}{10}m\left(\sqrt{gR}\right)^2 \rightarrow h_{min} = 2R + \frac{7}{10}R \rightarrow$

$h_{min} = \frac{27R}{10} = 54\ cm$

4.71 Ένα ηλεκτρικό τρενάκι μάζας m= 2kg μπορεί να κινείται πάνω σε ένα μεγάλο οριζόντιο τροχό. Ο τροχός μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά και ο τροχός και το τρενάκι είναι ακίνητα. Κάποια στιγμή το τρενάκι αρχίζει να κινείται με ταχύτητα υ=8,4m/s. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα στρέφεται ο τροχός. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του είναι $I = 11{,}52\ kgm^2$ περιστροφής R= 1,2 m.



Δεν έχουμε εξωτερικές ροπές και επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.

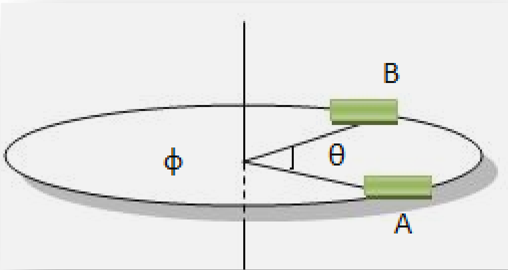
$$0 + 0 = \vec{L}_{\tau\rho\varepsilon\nu} + \vec{L}_{\tau\rho o\chi} \rightarrow \vec{L}_{\tau\rho\varepsilon\nu} = -\vec{L}_{\tau\rho o\chi} \qquad (1)$$

Η σχέση (1) λέει ότι αν το τραινάκι στρέφεται δεξιόστροφα, ο τροχός θα στρέφεται αριστερόστροφα.

Αλγεβρικά η (1) λέει :

$$m_{\tau\rho\varepsilon\nu} \,.\, u_{\tau\rho\varepsilon\nu} \,.\, R = I_{\tau\rho o\chi} \,.\omega_{\tau\rho o\chi} \quad \rightarrow \quad \omega_{\tau\rho o\chi} = \cdots = 1{,}75 \;\; rad/sec \qquad (1)$$

Σημείωμα: Τη γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\tau\rho o\chi}$ και την ταχύτητα του τρένου $u_{\tau\rho\varepsilon\nu}$, μετράει κάποιος που είναι έξω από το σύστημα τροχός-τρένο.



Μετά από πόσο χρονικό διάστημα ο άνθρωπος θα ξαναβρεθεί στη θέση της πλατφόρμας από την οποία ξεκίνησε;

Το τρένο κινούμενο δεξιόστροφα σαρώνει γωνία θ και ο τροχός κινούμενος αριστερόστροφα τη γωνία φ (σχήμα)

$$\varphi + \theta = 2\pi \;\rightarrow\; \omega_{\tau\rho o\chi}.\Delta t + \omega_{\tau\rho o\chi}.\Delta t = 2\pi$$

$$\rightarrow\; \omega_{\tau\rho o\chi}.\Delta t + \left(\frac{u_{\tau\rho o\chi}}{R}\right).\Delta t = 2\pi \;\rightarrow \Delta t = \cdots$$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)