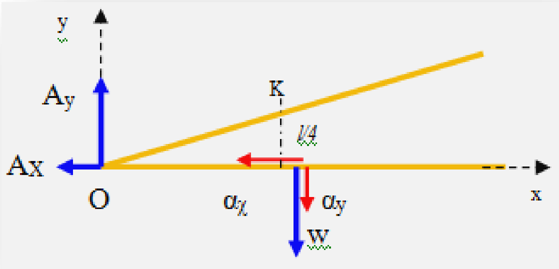
1. Η ράβδος του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνάει από το άκρο της. Αν αρχικά σχηματίζει γωνία 120^o με την κατακόρυφη διεύθυνση (σχήμα) και ύστερα αφεθεί ελεύθερη ποιες είναι οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω της όταν περνάει από την οριζόντια θέση ;



Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω της είναι το βάρος W, που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας Κ και η αντίδραση Α από τον άξονα. Οι δύο αυτές δυνάμεις είναι συνεπίπεδες.

Όταν η ράβδος είναι οριζόντια ισχύει :

$$\Sigma\tau_{(O)} = I_{(o)}.\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mg.\frac{L}{2} = \left(\frac{1}{3}mL^2\right).\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L} \qquad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου , όταν περνάει από οριζόντια θέση -σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης μηχανικής ενέργειας- είναι :

$$A\Delta ME : mg\frac{L}{4} = \frac{1}{2}\, I_{(o)}\omega^2 \ \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \qquad (2)$$

*Το (cm) κέντρο μάζας Κ εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας l/2 έχοντας γραμμική ταχύτητα μεταβλητής κατεύθυνσης και μεταβλητού μέτρου. Εδώ θα εφαρμόσουμε τη θεωρία του cm ως εξής: **Αν ξέρω τι κάνει το cm, τότε ξέρω ποιες δυνάμεις δέχεται το στερεό.***

Κεντρομόλος επιτάχυνση του cm στη οριζόντια θέση : $\quad a_x = \omega^2.\frac{L}{2} \qquad (3)$

θυμίζω υ = ω R

Επιτάχυνση επιτρόχια (εφαπτόμενη της τροχιάς) –δηλ. –στη περίπτωσή μας- στον κατακόρυφο άξονα :

$$a_y = \frac{du}{dt} = \frac{d\left(\omega.\frac{L}{2}\right)}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}.\frac{L}{2} \qquad (4)$$

Η επιτάχυνσή του cm οφείλεται στη δράση των δυνάμεων που δέχεται η ράβδος (ορισμός του cm παρακαλώ)!

2ος Νόμος Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα χ :

$$A_X = m\cdot\alpha_X = m\cdot\omega^2\cdot\frac{l}{2} = \frac{3mg}{4} \qquad (5)$$

2ος Νόμος Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα y :

$$W - A_y = m\cdot\alpha_y \Rightarrow A_y = W - m\cdot\alpha_y = \cdots = \frac{mg}{4} \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) εύκολα υπολογίζεται η δύναμη που ασκεί στη ράβδο ο άξονας, όταν η ράβδος περνά από οριζόντια θέση .

2. Μία ράβδος με μάζα m και μήκος *l* μπορεί να περιστραφεί γύρω από σταθερό άξονα που περνάει από τη μια άκρη της. Αρχικά η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση με το cm της πάνω από τον άξονα. Με μικρή μετατόπιση η ράβδος πέφτει εξαιτίας του βάρους της.

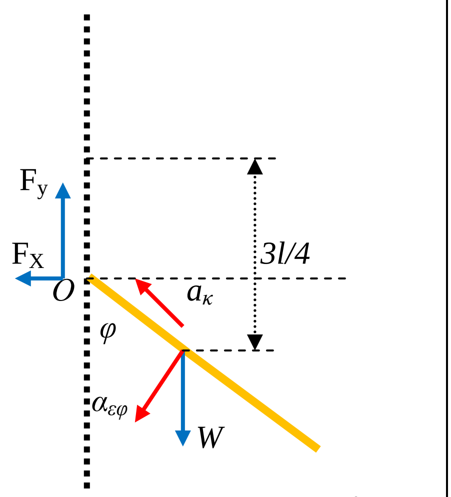
I) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στη ράβδο από τον άξονα, όταν αυτή έχει διαγράψει τόξο 120^o ;

II) Ποια η ταχύτητα της ελεύθερης άκρης της, όταν περνάει από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας ;

Δίνεται $I_{(O)} = \frac{ml^2}{3}$

Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από κάθετο ακλόνητο άξονα που περνάει από το άκρο της Ο.

Οι δυνάμεις που δέχεται είναι το βάρος W και η δύναμη F από άξονα .



Προφανώς φ=60^o

Εύρεση γωνιακής επιτάχυνσης όταν η ράβδος στη θέση έχει διαγράψει γωνία 120^o (σχήμα):

$$\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\varphi = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \cdots = \frac{3\sqrt{3} \cdot g}{4 \cdot l} \qquad (1)$$

Εύρεση γωνιακής ταχύτητας ράβδου, όταν η ράβδος έγραψε τόξο 120^o . Ο υπολογισμός θα γίνει με το θεώρημα διατήρησης μηχανικής ενέργειας. Το cm της ράβδου κατέβη κατά 3l/4.

$$\frac{3}{4} m \cdot g \cdot l = \frac{1}{2} \cdot I_{(O)} \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = 3\sqrt{\frac{g}{2l}} \qquad (2)$$

Το κέντρο μάζας διαγράφει κύκλο ακτίνας l/2 και η επιτάχυνση υπολογίζεται ως εξής :

Η κεντρομόλος $\alpha_\kappa = \omega^2 \cdot \frac{l}{2} = \frac{9}{4} \cdot g$ *και*

η εφαπτομενική $\alpha_{\varepsilon\phi} = \frac{d\upsilon}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot g$

Εύρεση επιτάχυνσης στον οριζόντιο άξονα χ (θετική φορά αριστερά) και στο κατακόρυφο άξονα ψ (θετική φορά προς τα κάτω).

$$\alpha_X = \alpha_{K,X} + \alpha_{\varepsilon\phi,X} = \alpha_K \cdot \eta\mu\phi + \alpha_{\varepsilon\phi} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = \cdots = \frac{21\sqrt{3}}{16} \cdot g$$

$$\alpha_y = -\alpha_{K,y} + \alpha_{\varepsilon\phi,y} = -\alpha_K \cdot \sigma\upsilon\nu\phi + \alpha_{\varepsilon\phi} \cdot \eta\mu\phi = \cdots = \frac{9}{16} \cdot g$$

Ύστερα από τα παραπάνω θα έχουμε : $F_X = m \cdot \alpha_X = 2{,}27 \cdot m \cdot g$ *και*

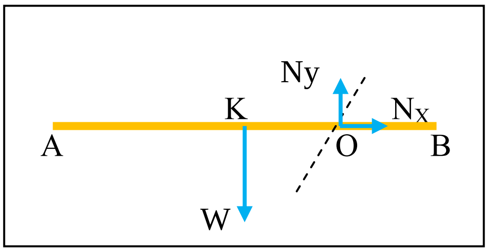
$W - F_y = m \cdot \alpha_y \rightarrow F_y = 1{,}56 \cdot m \cdot g$

Το 2^o ερώτημα θεωρώ ότι είναι εύκολο. Απλά βρείτε ότι $\upsilon = \sqrt{6gl}$

3. Η λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ του σχήματος , μήκους l=1m και μάζας m=0,6 kg μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος σε αυτή. Απομακρύνουμε τη ράβδο κατά γωνία θ=90° από την κατακόρυφη διεύθυνση και τη χρονική στιγμή t_o=0 την αφήνουμε ελεύθερη. Αν (ΚΟ)=l/4 , να βρείτε για την χρονική στιγμή t_o=0 :

I. Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
II. Τη δύναμη που ασκεί η ράβδος στον άξονα στροφής .

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της Κ και είναι κάθετος σε αυτήν είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} \cdot m.l^2$ όπου m η μάζα της, και g=10 m/s^2 .



I) Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνά από το Ο είναι :

$$I_{(O)} = I_{cm} + m \cdot (OK)^2 =$$
$$= \frac{ml^2}{12} + m \cdot (OK)^2 = \cdots = \frac{7}{80} \ \text{kg.m}^2$$

Για τη στροφή της ράβδου και για t_o=0 ισχύει ο θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης.

$$\Sigma\tau = I_{(O)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow W \cdot (OK) = I_{(O)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{120}{7} \ \text{rad/s}^2$$

II) Η ράβδος κάνει μόνο στροφική κίνηση. Το κέντρο μάζας αυτής κάνει μεταβαλλόμενη – όχι ομαλά ! - κυκλική κίνηση[1] .

Για τη κίνηση του κέντρου μάζας στη κατακόρυφη διεύθυνση ψψ' και για t_o=0 ισχύει :	*W-Ny= m . $\alpha_{\varepsilon\varphi}$ (1)*
Για τη κίνηση του κέντρου μάζας στη οριζόντια διεύθυνση χχ' και για t_o=0 ισχύει :	$N_X = m \cdot \alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = m \cdot \frac{\upsilon^2}{(OK)} \Rightarrow N_X = 0$ *διότι για t_o=0 ισχύει υ_{cm}=0 .*

Σύμφωνα με την απάντηση στο 1° ερώτημα, υπάρχει για t_o=0, γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$, άρα υπάρχει αλλαγή στο ω δηλ. αλλαγή στη γραμμική ταχύτητα έστω και αν δεν υπάρχει γραμμική ταχύτητα τη στιγμή t_o !

Για κάθε t ισχύει : υ = ω.(ΟΚ) , οπότε αν παραγωγίσουμε ως προς t την παραπάνω εξίσωση θα έχουμε :

$$\alpha_{\varepsilon\varphi} = (OK).\alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι Ny=24/7 N

[1] ΜΗ ΞΕΧΝΑΣ : *Το κέντρο μάζας ενός σώματος στο οποίο –σώμα- ασκούνται πολλές δυνάμεις με ΣF≠0, κινείται με επιτάχυνση(-εις) όπως «επιθυμούν» οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα !*