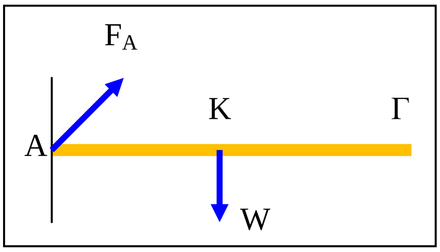
1. Η ομογενής ΑΒ ράβδος του σχήματος , μήκους l=1m , μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ένα οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α. Αν από την οριζόντια θέση αφήσουμε τη ράβδο ελεύθερη, να βρείτε :

   I. Τη γωνιακή επιτάχυνση της τη στιγμή που τη αφήνουμε ελεύθερη.

   II. Τον ρυθμό αύξησης της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου στη θέση όπου αυτή έχει στραφεί κατά γωνία φ=60^o .

Δίνεται : η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} \cdot m.l^2$ και g=10 m/s^2 .



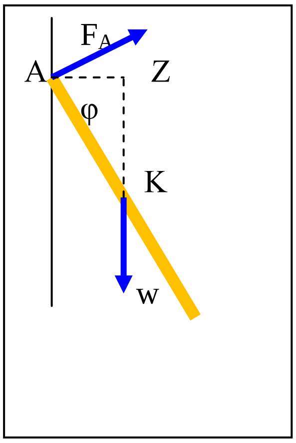
I) Εύρεση I_A με θεώρημα Steiner :

$$\mathrm{I_A} = I_{cm} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \mathrm{I_A} = \cdots = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \quad (1)$$

Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης :

$$\Sigma\tau = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau_{\mathrm{w}} + \tau_{F_A} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \mathrm{w} \cdot \frac{1}{2} + 0 = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) , (2) εύκολα προκύπτει $\alpha_{\gamma\omega\nu}$=15 rad/sec



II) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας λέγεται –εξ ορισμού- γωνιακή επιτάχυνση !

Από θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης έχουμε :

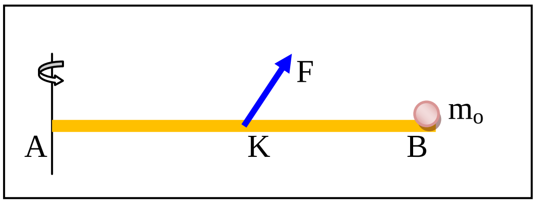
$$\Sigma\tau = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau_{\mathrm{w}} + \tau_{F_A} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$
$$\mathrm{w} \cdot (\mathrm{AZ}) + 0 = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \mathrm{w} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι $\alpha_{\gamma\omega\nu}$=7,5 rad/sec

Σχόλιο Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στη παραπάνω άσκηση :

- *Η ροπή που στρέφει τη ράβδο δεν είναι σταθερή .*
- *Η γωνιακή ταχύτητα τη ράβδου αυξάνεται, αλλά όχι γραμμικά.*
- *Όταν η ράβδος έλθει σε κατακόρυφη θέση, τότε Στ=0, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση θα είναι μηδέν.*
- *Η ροπή αδράνειας της ράβδου είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου.*

2. Μια λεπτή και ομογενής ράβδος, μήκους l=1 m και μάζας m=3kg μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το ένα άκρο της A και είναι κάθετος σε αυτήν. Στο άκρο B της ράβδου είναι στερεωμένη μία σημειακή μάζα m_o=1 kg . Μια δύναμη σταθερού μέτρου F=40N , συνεχώς κάθετη στη ράβδο και οριζόντια ασκείται στο μέσο K αυτής. Να βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση αυτής .
Δίνεται : η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} \cdot m.l^2$



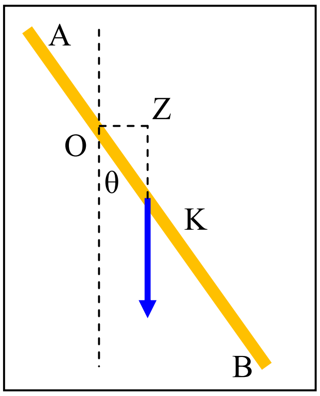
Το σύστημα ράβδος-σημειακή μάζα έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα στροφής :

$$I_A = \left(I_{cm} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right) + m_0 \cdot l^2 \quad (1)$$

Στη μόνη δύναμη που αντιστοιχεί ροπή μη μηδενική είναι η F. (Τα βάρη της ράβδου και της m_o είναι παράλληλα στον άξονα στροφής. Επίσης η δύναμη που ασκείται στη ράβδο στο σημείο A, έχει μηδενική ροπή)
Από θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης έχουμε :

$$F \cdot \frac{l}{2} = I_A \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot \frac{l}{2} = \left(\frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 + m_o \cdot l^2 \right) \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \cdots a_{\gamma\omega\nu} = 10 \quad \text{rad/sec}^2$$

3. Η λεπτή ομογενής ράβδος AB του σχήματος , μήκους l=1m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο O και είναι κάθετος σε αυτή. Απομακρύνουμε τη ράβδο κατά γωνία θ=30^o από την κατακόρυφη διεύθυνση και τη χρονική στιγμή t_o=0 την αφήνουμε ελεύθερη. Αν (AO)=l/3 , να βρείτε για την χρονική στιγμή t_o=0 τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.
Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της K και είναι κάθετος σε αυτήν είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} \cdot m.l^2$ όπου m η μάζα της, και g=10 m/s^2 .



Υπόδειξη : Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που περνά από το O.

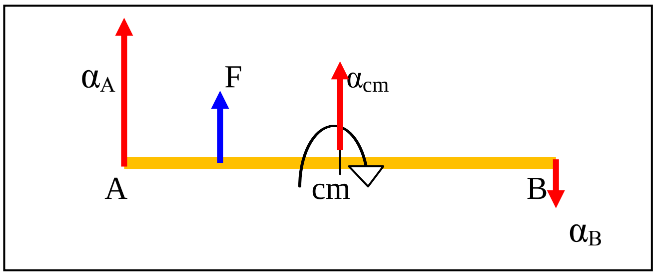
$$I_{(O)} = I_{cm} + m \cdot (OK)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2$$

Προσοχή !
Εδώ πρέπει να θέσουμε ΟΚ και όχι ΟΖ

Εργαστείτε στη συνέχεια θεμ. νόμο στροφικής κίνησης : $\Sigma\tau = I_{(o)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow mg\eta\mu\theta \cdot (OZ) = I_{(o)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$

4. Μία ράβδος με μάζα m και μήκος L, βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που δεν παρουσιάζει τριβή. Οριζόντια δύναμη F ασκείται κάθετα στη ράβδο και σε απόσταση L/4 από την άκρη της. Υπολογίστε :
   1. Την αρχική επιτάχυνση του cm.
   2. Την αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου γύρω από άξονα που περνά από το cm.
   3. Τις αρχικές εφαπτομενικές επιταχύνσεις των άκρων της ράβδου .

Δίνεται $I_{cm} = \frac{m.l^2}{2}$



Επειδή η δύναμη δεν διέρχεται από το cm, η ράβδος θα εκτελέσει και μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Η περιστροφή θα γίνει γύρω από άξονα που περνά από το cm και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζει ο φορέας της δύναμης και το cm !

Μεταφορά : $a_{cm} = \frac{F}{m}$

Στροφή : $\Sigma\tau_{cm} = \mathrm{I}_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to F \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right) = \frac{ml^2}{2} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \to \qquad a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3F}{ml}$

Επιταχύνσεις εφαπτόμενες των άκρων. Τα άκρα κάνουν κυκλική κίνηση και μεταφορική.
Λόγω κυκλικής κίνησης –ακτίνας l/2 – τα άκρα οφείλουν να έχουν εφαπτομενική επιτάχυνση ίση με :

$$\upsilon = \omega \cdot \frac{l}{2} \to \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{l}{2} \to a_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3F}{2m}$$

Πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις επιταχύνσεις λόγω μεταφορικής κίνησης –σε εφαπτόμενη διεύθυνση- , έτσι ώστε να υπολογίσουμε την ολική επιτάχυνση στα άκρα A και B.

$a_A = \frac{F}{m} + \frac{3F}{2m} = \frac{5F}{2m}$ *και* $a_B = \frac{F}{m} - \frac{3F}{2m} = -\frac{F}{2m}$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: Υπάρχει μια δυσκολία να δεχτείς, ότι τα άκρα έχουν και μεταφορική επιτάχυνση (την έχουν όλα τα σημεία του στερεού) και στροφική επιτάχυνση αφού υπάρχει στροφή λόγω ροπής. Αυτή η ροπή προκαλεί αλλαγή στο μέτρο της γραμμικής ταχύτητας. Το cm δεν έχει επιτάχυνση λόγω στροφής…

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)