2.46 Δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα, με πλάτος Α=3 mm και περίοδο Τ = 0,4 s. Η ταχύτητα των κυμάτων είναι υ =5 m/s. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο της επιφάνειας, σε αποστάσεις r_1 = 6 m και r_2 = 5,5 m από τις πηγές. Η κίνηση του φελλού είναι αποτέλεσμα της συμβολής των δύο κυμάτων. Να περιγράψετε την κίνηση του.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας στην επιφάνεια του υγρού, τα διάφορα σημεία της θα ταλαντώνονται με εξίσωση :

$$y = y_1 + y_2 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{(r_2 - r_1)}{2\lambda} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) εκφράζει αρμονική ταλάντωση (εν γένει).

Στο δοσμένο σκηνικό, θα υπολογίσουμε το πλάτος ταλάντωσης.

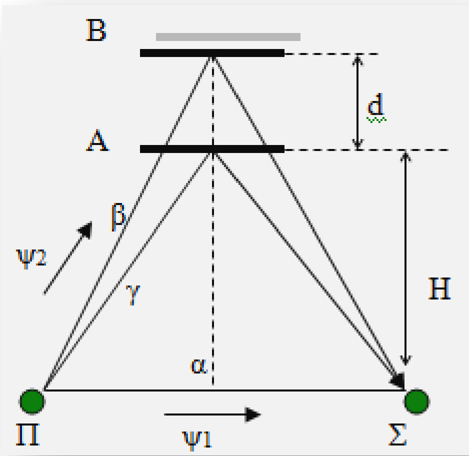
$$I\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota \ r_1 = 6\,m \ , \qquad r_2 = 5{,}5\,m \ \ \kappa\alpha\iota \ \upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda . f \rightarrow 5 = \lambda . \frac{10}{4} \rightarrow \lambda = 2\,m$$

Οπότε :

$$A' = \left| 2\,.\,3\,\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{6 - 5{,}5}{2\,.\,2} \right| mm = \left| 6\,\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \right| mm = 6\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,mm = 3\sqrt{2}\ mm$$

Επομένως το εν λόγω σημείο θα ταλαντώνεται με πλάτος $3\sqrt{2}\,mm$ και περίοδο Τ=0,4 sec

2.47 Σε κάποιο σημείο στην επιφάνεια ενός υγρού δημιουργούμε κύματα με την πηγή Π. Στο σημείο Σ της επιφάνειας, σε απόσταση α από την πηγή, τα κύματα μπορούν να φτάσουν ή απευθείας (ακολουθώντας τη διαδρομή ΠΣ) ή αφού ανακλαστούν στον ανακλαστήρα Α που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού και πάνω στη μεσοκάθετο του τμήματος ΠΣ. Αν μετακινήσουμε τον ανακλαστήρα παρατηρούμε ότι όταν απέχει απόσταση Η από το 0, το σημείο Σ παραμένει συνέχεια ακίνητο, ενώ, για πρώτη φορά, κάνει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος, όταν ο ανακλαστήρας μετακινείται κατά d. Να βρείτε το μήκος του κύματος.



Ανακλαστήρας στη θέση Α. Αφού το σημείο Σ είναι ακίνητο, σημαίνει ότι η διαφορά των δυο δρόμων είναι περιττό πολλαπλάσιο του λ/2.

Ισχύει λοιπόν η σχέση:

$$r_2 - r_1 = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow 2\gamma - a = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Ανακλαστήρας στη θέση Β. Έχουμε μια νέα κατάσταση συμβολής που εμφανίζει δυο χαρακτηριστικά.

- *Το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο.*
- *Η θέση Β –όπου συμβαίνει η μεγιστοποίηση πλάτους- είναι η πλέον γειτονική στην θέση Α.*

Τα παραπάνω δυο χαρακτηριστικά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η νέα διαφορά δρόμων είναι άρτιο πολλαπλάσιο του λ/2 και επιπλέον αυτή η διαφορά –ως γειτονική-οφείλει να είναι διαφοροποιημένη από την προηγούμενη κατά λ/2.

$$l_2 - r_1 = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow 2\beta - a = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

Η νέα διαφορά δρόμων είναι ***αυξημένη*** *κατά λ/2 διότι η διαδρομή του ανακλώμενου κύματος αυξήθηκε ενώ του άμεσα προσπίπτοντος δεν άλλαξε.*

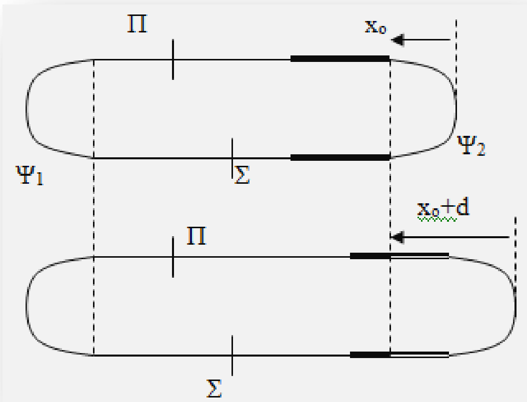
Από τις (1) και (2) έχουμε τα παρακάτω :

$$2\beta - a = 2\gamma - \alpha + \frac{\lambda}{2} \rightarrow 2\beta - 2\gamma = \frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\mathrm{H}+d)^2} - 2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + H^2} = \frac{\lambda}{2}$$

Και τελικά $\lambda = 2\sqrt{\alpha^2 + 4(H+d)^2} - 2\sqrt{\alpha^2 + 4H^2}$

2.51 Η διάταξη του σχήματος 2.59 αποτελείται από δύο σωλήνες Α και Β. Ο σωλήνας Β μπορεί να μετακινείται. Με τον τρόπο αυτό μεταβάλλεται το μήκος χ. Μια ηχητική πηγή Π δημιουργεί στο ανοιχτό άκρο του σωλήνα ήχο συχνότητας 1,25 kHz . Στο άλλο άκρο (Σ) του σωλήνα φτάνουν ταυτόχρονα δύο ηχητικά κύματα. Τα κύματα δημιουργούνται από την πηγή και διαδίδονται μέσω του αέρα στους σωλήνες Α και Β. Όταν μετακινούμε το σωλήνα Β (μεταβάλλεται τότε η απόσταση x) παρατηρούμε ότι η ένταση του ήχου στο σημείο Σ αυξομειώνεται. Η ένταση του ήχου στο σημείο Σ είναι μηδέν όταν η απόσταση x είναι x_0 = 0,408 m. Ποια είναι η επόμενη τιμή της απόστασης x (x > 0,408 m) για την οποία μηδενίζεται ξανά η ένταση του ήχου; Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα υ = 340m/s.



Στη πρώτη εικόνα το κινητό τμήμα του σωλήνα βρίσκεται σε τέτοια θέση ώστε να δείχνει ένδειξη x_o (βλέπε σχήμα πως καταγράφεται αυτή η ένδειξη) .

Για την πρώτη εικόνα, στο Σ έχουμε μηδενική ένδειξη ήχου. Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά των δυο δρόμων είναι περιττό πολλαπλάσιο του λ/2.

Έχουμε λοιπόν :

$$r_2 - r_1 = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Στη δεύτερη εικόνα έχουμε μια νέα κατάσταση συμβολής με τα εξής γνωρίσματα :

- *Έχουμε πάλι μηδενική ένδειξη στο Σ.*
- *Ο μηδενισμός είναι ο πρώτος που συμβαίνει, καθώς αυξήσαμε την διαδρομή του κύματος ψ_2 !*

Τα παραπάνω δυο χαρακτηριστικά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η νέα διαφορά δρόμων είναι πάλι περιττό πολλαπλάσιο του λ/2 και επιπλέον αυτή η διαφορά δρόμων –ως γειτονική της πρώην-οφείλει να είναι διαφοροποιημένη από την προηγούμενη μόνο κατά λ.

$$l_2 - r_1 = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} + \lambda \rightarrow (\mathrm{r}_2 + d + d) - \mathrm{r}_1 = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} + \lambda \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι :

$$(2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} + 2d = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} + \lambda \rightarrow 2x = \lambda \qquad (3)$$

Όμως ! $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta.} = \lambda . f \rightarrow \upsilon_{\delta\iota\alpha\delta.} = 2\cdot d\cdot f \rightarrow 340 = 2\cdot d\cdot 1250 \rightarrow d = 0{,}136\ \mathrm{m}$

Το δεύτερο σχήμα δείχνει ότι η νέα απόσταση-μετρούμενη από το άκρο του σωλήνα είναι $x=d+x_o$ *= 0,544 m*

2.52 Πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια κύματα. Ένα σημείο Κ που απέχει r_1 και r_2από τις πηγές έχει κάθε στιγμή απομάκρυνση y_1 = Αημ(2πt- πr_1 + ϕ_o) (SI) εξαιτίας του κύματος που δημιουργεί η πηγή Π_1 και y_2 = Αημ(2πt- πr_2) (SI) εξαιτίας του κύματος που δημιουργεί η πηγή Π_2.
α) Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού.
β) Αν $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$ ποια πρέπει να είναι η διαφορά των αποστάσεων r_1 - r_2 του σημείου Κ από τις δύο πηγές ώστε
i. να διατηρείται συνεχώς ακίνητο και
ii. να ταλαντώνεται με πλάτος 2Α
γ) Ποια πρέπει να είναι η τιμή της ϕ_o, ώστε ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού που βρίσκεται σε απόσταση r_1 = 12m από την Π_1 και r_1=10m από την Π_2 να παραμένει διαρκώς ακίνητο;

I) *Συγκρίνοντας την* $\psi_2 = \mathrm{A}\cdot\eta\mu(2\pi t - \pi r_2)$ *με την γενική προκύπτει ότι*

- $2\pi t = 2\pi\frac{t}{T} \Rightarrow T = 1\ \sec$ *και*
- $\pi r_2 = 2\pi\frac{r_2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2\ \mathrm{m}$

Επομένως : $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda\cdot f = 2\ \mathrm{m/sec}$

II) *Η επαλληλία (υπέρθεση) δίνει*:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \mathrm{A}\left[\eta\mu(2\pi t - \pi r_2) + \eta\mu(2\pi t - \pi r_1 + \varphi_o)\right] =$$
$$= 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{2\pi t - \pi r_2 - 2\pi t + \pi r_1 - \varphi_o}{2}\cdot\eta\mu\,\frac{2\pi t - \pi r_2 + 2\pi t - \pi r_1 + \varphi_o}{2} =$$
$$= 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{-\pi r_2 + \pi r_1 - \varphi_o}{2}\cdot B_{(t)} \qquad (1)$$

Σημεία που δεν ταλαντώνονται:

$$\sigma\upsilon\nu\,\frac{-\pi r_2+\pi r_1-\varphi_o}{2}=0=\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi r_1-\pi r_2-\varphi_o}{2}=(2\kappa+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pi r_1-\pi r_2-\varphi_o=(2k+1)\pi\Rightarrow \pi r_1-\pi r_2-\frac{\pi}{2})=(2k+1)\pi$$
$$\Rightarrow r_1-r_2-\frac{1}{2}=2k+1\rightarrow r_1-r_2=2k+\frac{3}{2}$$

k ακέραιος θετικός, μηδέν ή αρνητικός.

III) *Σημεία που ταλαντώνονται με max πλάτος 2A.*

$$\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi r_1-\pi r_2-\varphi_o}{2}=\pm1=\sigma\upsilon\nu\pi\Rightarrow\frac{\pi r_1-\pi r_2-\varphi_o}{2}=k\cdot\pi\Rightarrow \pi r_1-\pi r_2-\frac{\pi}{2}=2k\cdot\pi$$
$$\Rightarrow r_1-r_2-\frac{1}{2}=2k\rightarrow r_1-r_2=2k+\frac{1}{2}$$

k ακέραιος θετικός, μηδέν ή αρνητικός.

IV) *Απαιτώ*

$$\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi r_1-\pi r_2-\varphi_o}{2}=0=\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi r_1-\pi r_2-\varphi_o}{2}=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow 12\pi-10\pi-\varphi_o=(2k+1)\cdot\pi\Rightarrow 2\pi-\varphi_o=(2k+1)\cdot\pi$$
$$\rightarrow 2\pi-\varphi_o=(2k+1)\cdot\pi \qquad (1)$$

k ακέραιος θετικός, μηδέν ή αρνητικός.

Από την σχέση (1) εύκολα προκύπτει ***ως μόνη παραδεκτή λύση*** *η τιμή $\varphi_o=\pi$ rad ! (μη ξεχνάμε ότι $0\le\varphi_0<2\pi$)*

2.53 Το άκρο Ο, γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του ημιάξονα Οχ αρχίζει, τη χρονική στιγμή t = 0, να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: y = 5ημ10πt. (το y σε cm το t σε s) Η ταλάντωση του σημείου Ο διαδίδεται στο μέσο με ταχύτητα υ=20cm/s.
α) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
β) Να παραστήσετε γραφικά τις φάσεις των σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα σε συνάρτηση με την απόσταση(χ) από την πηγή O, τη χρονική στιγμή t_1 = 1s.
γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1

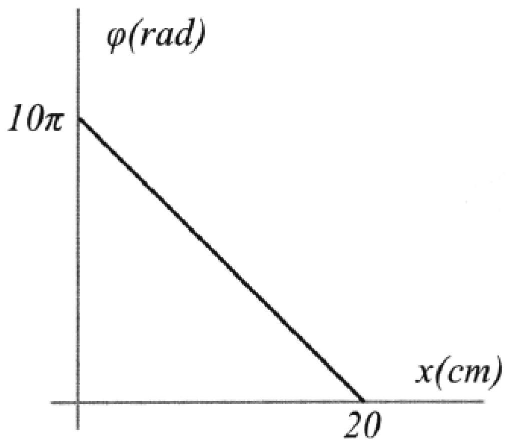
α) Από τη σχέση $y = 5\eta\mu 10\pi t$ βρίσκουμε $A = 5cm$ και $\omega = 10\pi\ rad/s$

οπότε $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 5\ Hz$

Από τη σχέση $\upsilon = \lambda f$ προκύπτει $\lambda = \dfrac{\upsilon}{f} = 4\ cm$

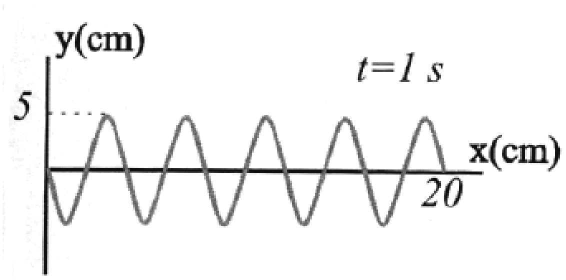
Η εξίσωση του κύματος θα είναι $y = 5\eta\mu 2\pi\left(5t - \dfrac{x}{4}\right)$ (τα x, y σε cm, το t σε s)

β) Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 1\ s$ δίνεται από τη σχέση $\varphi = 10\pi - \dfrac{\pi}{2}x$



γ) Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = 20\ cm$. Ο αριθμός των μηκών κύματος, τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$N = \dfrac{x_1}{\lambda} = 5$



2.54 Σε γραμμικό ελαστικό μέσον που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x'x έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση $y = 8\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\,\eta\mu 10\pi$. (τα x, y σε cm το t σε s)

α) Ποια είναι η ταχύτητα των κυμάτων η συμβολή των οποίων έδωσε αυτό το στάσιμο κύμα;

β) Ποια είναι, τη χρονική στιγμή t=l/40 s, η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σημείου Μ του υλικού που βρίσκεται στη θέση x_M = 0,5cm;

γ) Πόσοι δεσμοί υπάρχουν μεταξύ των σημείων Α και Β του υλικού που βρίσκονται στις θέσεις x_A=-4cm και x_B=10cm;

α) Συγκρίνουμε τη σχέση $y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t$ με την $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ και βρίσκουμε $\lambda = 4\ cm$ και $f = \frac{1}{T} = 5\ Hz$

οπότε $\upsilon = \lambda f = 20\ cm/s$

β) $y_M = 8\sigma\upsilon\nu\frac{0,5\pi}{2}\eta\mu 10\pi\frac{1}{40} = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\eta\mu\frac{\pi}{4} = 4\ cm$

$$\upsilon = A'\omega\ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t = 2A\omega\ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}$$

οπότε $\upsilon_{\mathrm{M}} = 8\ 10\pi\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x_{\mathrm{M}}}{2}\ \sigma\upsilon\nu 10\pi t = 40\pi\ cm/s$

γ) Δεσμοί υπάρχουν στις θέσεις για τις οποίες $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} = 0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$

οπότε $\frac{\pi x}{2} = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ και $x = 2K+1$.

Για $x_{\mathrm{A}} < x < x_{\mathrm{B}}$ δηλαδή $-4 < 2K+1 < 10$ βρίσκουμε

$K = 0, \pm 1, \pm 2,\ 3,\ 4$

Επομένως υπάρχουν 7 δεσμοί. Οι δεσμοί βρίσκονται στις θέσεις:

-3cm, -1cm, 1cm, 3cm, 5cm, 7cm και 9cm

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)