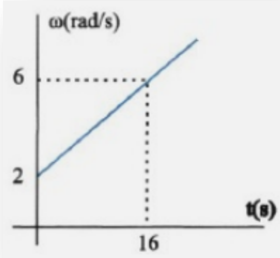
## *Κινηματική του στερεού*

4.32 Η γωνιακή ταχύτητα ενός τροχού που στρέφεται μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού; Ποια χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του τροχού θα έχει τιμή 20 rad/s;




Η γωνιακή επιτάχυνση βρίσκεται στην κλίση του γραφήματος σε διάγραμμα ω-t. Και όταν έχουμε σταθερή κλιση, ο στιγμιαίος και ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ω (δηλαδή η γωνιακή επιτάχυνση) ταυτίζονται.

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \ a_{\gamma\omega\nu} = \frac{6-2}{16-0} = 0{,}25\, rad/sec^2$$

Εργαζόμενοι επί του διαγράμματος έχουμε :

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \ \frac{\omega_t - \omega_o}{t-0} = a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \ \frac{20-2}{t-0} = 0{,}25 \ \ \rightarrow 0{,}25\, t = 20-2 \ \rightarrow t = 72\, sec$$

4.33 Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα 20 m/s. Οι τροχοί του έχουν ακτίνα 40 cm. Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία τρέφονται.

Οι τροχοί κυλίονται. Ο άξονας και τα λοιπά μέρη μόνο μεταφέρονται.

Επομένως για τους τροχούς: $\upsilon_{cm} = \omega \,.R \ \rightarrow 20 = \omega .0{,}4 \ \rightarrow \omega = 50\, rad/sec$

4.34 Ένα όχημα, οι τροχοί του οποίου έχουν ακτίνα r = 40cm, κινείται με επιτάχυνση 2 $m/s^2$. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα των τροχών του;

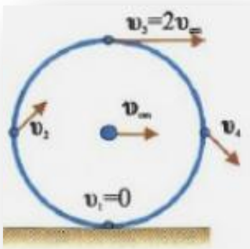
Οι τροχοί κυλίονται. Ο άξονας και τα λοιπά μέρη μόνο μεταφέρονται.

$$\upsilon_{cm} = \omega \,.R \ \rightarrow \frac{du_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\,.R \rightarrow \ a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}.R \ \rightarrow 2 = \ a_{\gamma\omega\nu}.0{,}4 \ \rightarrow \ \alpha_{\gamma\omega\nu} = 5\, rad/sec^2$$

4.35 Ένας δίσκος ακτίνας 8cm κυλίεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου του δίσκου είναι 5 m/s. Υπολογίστε:

α) την ταχύτητα με την οποία κινείται το ανώτερο σημείο του δίσκου.

β) τη συχνότητα με την οποία στρέφεται.




(α) Από τη θεωρία του σχολικού βιβλίου, μας είναι γνωστό πώς και γιατί η ταχύτητα στο ανώτερο σημείο του κυλιόμενου τροχού είναι ίση με $2\,\upsilon_{cm} = 10\, m/sec$

(β) Κύλιση: $\upsilon_{cm} = \omega \,.R \ \rightarrow \ \upsilon_{cm} = 2\pi f \,.R \ \rightarrow f = \frac{2\pi\,.0{,}8}{5} = 3{,}2\pi\; Hz$

4.36 Τη χρονική στιγμή μηδέν το κέντρο ενός τροχού, ακτίνας R=20 cm, που κυλίεται, έχει ταχύτητα $υ_o$ = 8 m/s. Η ταχύτητα του τροχού μηδενίζεται αφού διανύσει απόσταση x=20 m.
Ποια είναι η γωνιακή επιβράδυνσή του, αν θεωρήσουμε ότι είναι σταθερή στη διάρκεια της κίνησης;

Λόγω κύλισης : $a_{cm} = a_{γων}.R$ (1)

Αφού η γωνιακή επιβράδυνση είναι σταθερή, πρέπει και η μεταφορική επιβράδυνση να είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι : $u = u_o - a_{cm}t \rightarrow 0 = u_o - a_{cm}t \rightarrow t = \frac{u_o}{a_{cm}}$ (2)

Και $Δx = u_o t - \frac{1}{2}\, a_{cm}t^2$ (3)

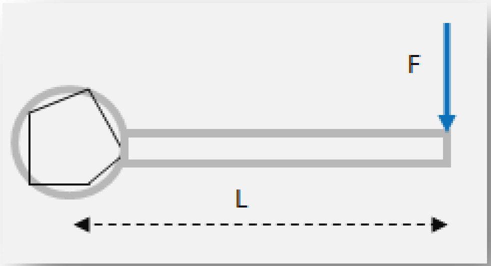
Από τις (2) και (3) προκύπτει, με διώξιμο του t :

$$Δx = \frac{u_o^2}{2a_{cm}} \rightarrow 20 = \frac{64}{2\,.\,a_{cm}} \rightarrow a_{cm} = \frac{64}{40} = \frac{4\,.\,16}{4\,.\,10} \rightarrow a_{cm} = 1{,}6\, m/sec^2$$

…και η (1) δίνει: $1{,}6 = α_{γων}.\ 0{,}2 \rightarrow α_{γων} = 8\, rad/sec^2$

## *Ροπή δύναμης*

4.37 Ένας εργάτης, για να σφίξει μια βίδα, χρησιμοποιεί κλειδί μήκους 20cm. Η μέγιστη δύναμη που μπορεί να ασκήσει ο εργάτης είναι 200N. Ποια είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκήσει; Πώς πρέπει να ασκηθεί η δύναμη ώστε η ροπή να είναι μέγιστη;

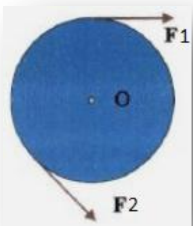



Μέγιστη ροπή εξασφαλίζουμε, όταν το υπομόχλιο είναι το μεγαλύτερο επιτρεπτό και η δύναμη είναι κάθετη κατά μήκος της μεγάλης διάστασης του κλειδιού (σχήμα)

$τ_F = F.L = 200\,.0{,}2 = 40\ N.m$

4.38 Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα R= 0,5 m και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο του. Στον τροχό ασκούνται εφαπτομενικά οι δυνάμεις $F_1$=20N και $F_2$=30N. Ποια είναι η συνολική ροπή που δέχεται ο τροχός;

Θεωρούμε την ροπή της F2 να έχει θετικό αλγεβρικό πρόσημο και…

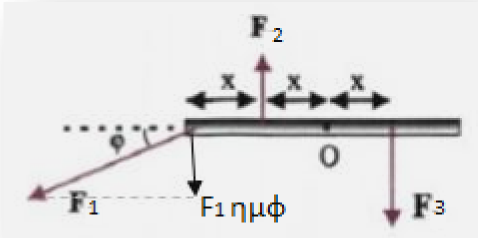



$\Sigma\vec{τ} = \vec{τ}_{F1} + \vec{τ}_{F2} \rightarrow Στ = -τ_{F1} + (+τ_{F2}) = -20\,.\ 0{,}5 + 30\,.\ 0{,}5 = 5\ \mathrm{Nm}$

Κάθετη στο φύλλο και με φορά από το φύλλο προς εμάς

4.39 Η ράβδος του σχήματος έχει αμελητέο βάρος και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος σ' αυτή. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις $F_1$ = 20N, $F_2$ = 2N και $F_3$=10N. Να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το σημείο Ο. Δίνονται: x= 2m και φ = 30°.

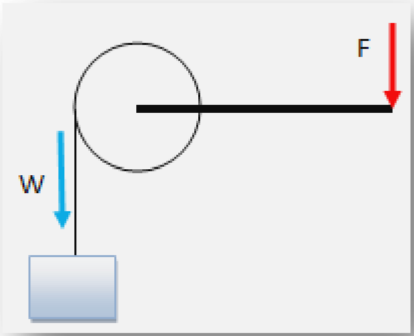
Οι ροπές που θέλουν να στρέψουν τη ράβδου αριστερόστροφα, ας τις θεωρήσουμε θετικές.




$\Sigma\tau = \tau^{+}_{F1} + \tau^{-}_{F2} + \tau^{-}_{F3} \rightarrow \Sigma\tau = F_1\,\eta\mu\varphi . 2x - F_2 . x - F_3 , x \rightarrow$
$\Sigma\tau = 20 \,.\, \frac{1}{2} . 2 . 2 - 2 . 2 - 10 . 2 = 40 - 4 - 20 = +16$ Nm

## *Ισορροπία στερεού σώματος*

4.40 Το βαρούλκο ενός πηγαδιού αποτελείται από τύμπανο ακτίνας $R_1$=20 cm, στο οποίο είναι προσαρμοσμένη χειρολαβή, μήκους $R_2$=0,5 m. Όταν στρέφεται η χειρολαβή, το σκοινί τυλίγεται στο τύμπανο και έλκει φορτίο (κουβάς με νερό) βάρους 150 N. Να υπολογίσετε την ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στη χειρολαβή ώστε να ανεβαίνει το φορτίο.




Η δύναμη F είναι ελάχιστη δυνατή ασκούμενη, όταν το σύστημα ισορροπεί. Αυτό σημαίνει $\Sigma\tau = 0$

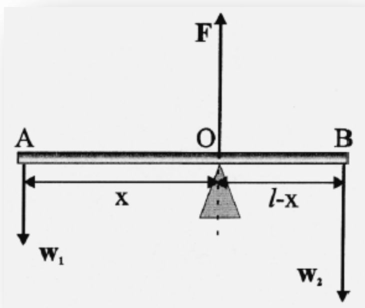
$\Sigma\tau = 0 \;\rightarrow\; \tau_F = \tau_w \;\rightarrow F . R_2 = W . R_1 \rightarrow F . 0{,}5 = 150\,.\,0{,}2 \;\rightarrow F = 60\;N$

Να σημειώσουμε ότι η δύναμη F πρέπει να είναι συνεχώς κάθετη στη διάσταση $R_2$.

4.41 Από τα άκρα Α και Β αβαρούς ράβδου, μήκους *l*=2 m, κρέμονται με σκοινιά δύο βάρη $w_1$=200 N και $w_2$=300 N. Σε ποιο σημείο πρέπει να στηριχτεί η ράβδος για να ισορροπεί οριζόντια;

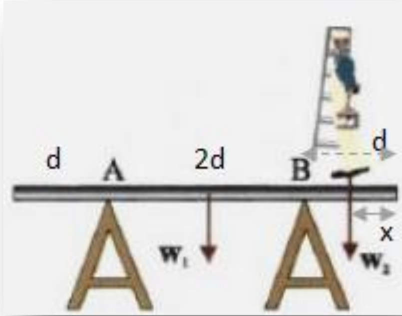
Έστω ότι η στήριξη γίνεται στο σημείο Ο, το οποίο απέχει από το άκρο Α, απόσταση x.

Στο σημείο Ο, η ράβδος δέχεται δύναμη F, της οποίας η ροπή ως προς το Ο είναι μηδέν.




Ισορροπία: $\Sigma\tau = 0 \rightarrow \tau_{w1} = \tau_{w2} \;\rightarrow\; w_1\,.x = \; w_2\,.(L - x) \;\rightarrow 200\,.x =$ $300\;(2 - x) \;\rightarrow 2x = 6 - 3x \;\rightarrow 5x = 6 \;\rightarrow x = 1{,}2\;m$

4.42 Ο ελαιοχρωματιστής του σχήματος στέκεται πάνω σε δοκό μήκους $l$=4 m και βάρους $w_1$=150 N. Η δοκός στηρίζεται στα σημεία Α και Β που απέχουν το καθένα 1 m, από τα άκρα της. Το βάρος του ελαιοχρωματιστή είναι $w_2$=700 N. Σε πόση απόσταση από τις άκρες μπορεί να σταθεί ο ελαιοχρωματιστής χωρίς να ανατραπεί η δοκός;

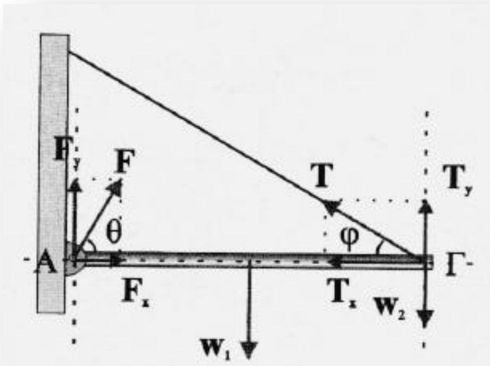



Καθώς ο ελαιοχρωματιστής κινείται προς το άκρο της ράβδου, θα υπάρξει μια κατάσταση οριακής ισορροπίας πριν την ανατροπή. Σε αυτή την κατάσταση οριακά δεν υπάρχει επαφή της ράβδου στο σημείο Α.
Για την εν λόγω κατάσταση οριακής ισορροπίας λέμε:

$$\Sigma\tau(o) = 0 \rightarrow\ W_2.(d-x) = W_1.d\ \rightarrow 700\,(1-x) = 150\,.\,1\ \rightarrow 70 - 70x = 15\ \rightarrow 70x = 55\ \rightarrow x = 0{,}786\ m = 78{,}6\ cm$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε, αν εργαζόμασταν εκεί στην περιοχή του άκρου Α, λόγω συμμετρίας της διάταξης.

4.43 Ομογενής δοκός ΑΓ με μήκος $l$ και βάρος $w_1$=100 N ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συνδέεται με τον τοίχο με σκοινί που σχηματίζει γωνία φ=30° με τη δοκό. Στο άκρο Γ κρέμεται με σκοινί σώμα βάρους $w_2$=40 N. Υπολογίστε την τάση του σκοινιού και τη δύναμη που δέχεται η δοκός από τον τοίχο.




Για να ισορροπεί η ράβδος μεταφορικά πρέπει $\Sigma F = 0$ και για να ισορροπεί στροφικά $\Sigma\tau(\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ o\iota o\delta\acute{\eta}\pi o\tau\varepsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o) = 0$

Άξονας κατακόρυφος: $F.\eta\mu\theta + T.\eta\mu\varphi = W_1 + W_2$ (1)

Άξονας οριζόντιος: $F.\sigma\upsilon\nu\theta = T.\sigma\upsilon\nu\varphi$ (2)

Όχι στροφή: $\Sigma\tau(A) = 0\ \rightarrow T.\eta\mu\varphi.L - W_2.L - W_1.\frac{L}{2} = 0$ (3)

Όταν έχουμε ένα τέτοιο πλήθος εξισώσεων, βλέπουμε ποια μπορεί να δώσει απάντηση στην περίπτωση που αντικαταστήσουμε δεδομένα.

$$(3) \rightarrow \mathrm{T}.\frac{1}{2}\,.\,\mathrm{L} - 40\,.\,\mathrm{L} - 100.\frac{\mathrm{L}}{2} = 0 \rightarrow \mathrm{T} = 180\ \mathrm{N}$$

$$(1) \rightarrow\ \mathrm{F}.\eta\mu\theta = 100 + 40 - 180\,.\frac{1}{2}\ \rightarrow \mathrm{F}.\eta\mu\theta = 50\ \mathrm{N} \quad (1)'$$

$$(2) \rightarrow \mathrm{F}\ \sigma\upsilon\nu\theta = 180\,.\frac{\sqrt{3}}{2}\ \rightarrow \mathrm{F}.\sigma\upsilon\nu\theta = 90\sqrt{3}\ \ \mathrm{N} \quad (2)'$$

Υψώνω την (1)' και (2)' στο τετράγωνο και προσθέτω κατά μέλη:

$$\mathrm{F}^2.(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 50\,.\,50 + 90\,.90\,.\,3\ \rightarrow\ \mathrm{F}^2 = 100\,.\,(25 + 243) \rightarrow\ \mathrm{F}^2 = 100\,.268\ \rightarrow \mathrm{F} = 10\sqrt{268}\ \mathrm{N}\ \ \rightarrow \mathrm{F} = 163{,}7\ \mathrm{N}$$

ΑΝ διαιρέσουμε κατά μέλη τις (1)' και (2)' : $\varepsilon\varphi\theta = \frac{50}{90\sqrt{3}}\ \rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 0{,}32$

4.44 Καθένα από τα τέσσερα πτερύγια του έλικα του ελικοπτέρου μπορεί να θεωρηθεί ομογενής ράβδος. Το μήκος κάθε πτερυγίου είναι 6m και η μάζα του 100kg. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας των τεσσάρων πτερυγίων ως προς τον άξονα περιστροφής τους. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μήκους L, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ' αυτή, είναι $I = \frac{1}{12}mL^2$.

Τα πτερύγια ανά δυο, δημιουργούν μια ράβδο που στρέφεται περί το κέντρο της, όπου βρίσκεται και το κέντρο συμμετρίας της.

Επομένως $I_{ολ} = 2\,.\,I = 2\,.\frac{1}{12}\;200\;12^2 = 2\,.\frac{1}{12}\,.12\,.12\,.200 = 4800\;kgm^2$

*Το βιβλίο λύσεων παρουσιάζει τη διαχείριση λύσης λίγο διαφορετική, έχει όμως ενδιαφέρον…*

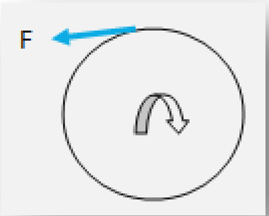
*Από το θεώρημα Steiner βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας ενός πτερυγίου ως προς άξονα κάθετο στο πτερύγιο που περνάει από το άκρο του.*

$$I = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = 1200\;kgm^2$$

*Η συνολική ροπή αδράνειας των τεσσάρων πτερυγίων ως προς τον άξονα περιστροφής τους είναι*

$$I_{ολ} = 4I = 4800\;kgm^2$$

4.45 Στην περιφέρεια ενός τροχού, μάζας m= 2 kg και ακτίνας R=0,5 m, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω= 100 rad/s γύρω από τον άξονά του ασκείται σταθερή δύναμη F, εφαπτομενική στον τροχό. Ο τροχός σταματάει μετά από 5s. Να υπολογίσετε:
α) τη γωνιακή επιτάχυνση (επιβράδυνση) του τροχού, β) το μέτρο της δύναμης F.
Η ροπή αδράνειας του τροχού είναι $I = \frac{1}{2}mL^2$.




Σταθερή δύναμη → σταθερή ροπή → σταθερή $\alpha_{γων}$→ μέση & στιγμιαία επιτάχυνση συμπίπτουν αριθμητικά.

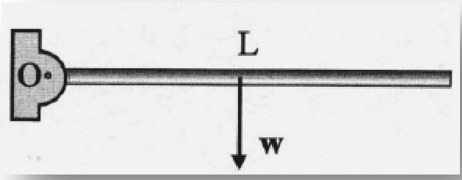
$$\alpha_{γων} = \frac{0-\omega_o}{t-0} \rightarrow \alpha_{γων} = -\frac{100}{5} = -20\;rad/sec$$

Ο Θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης λέει:

$$\tau_F = I\,.\,a_{γων} \rightarrow F.R = \frac{1}{2}mR^2.a_{γων} \rightarrow F.0{,}5 = \frac{1}{2}.2\,.(0{,}5\,.0{,}5).20 \rightarrow F = 10\;N$$

4.46 Οριζόντια ομογενής ράβδος, μήκους L=1 m, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, τη στιγμή που, από την οριζόντια θέση, αφήνεται ελεύθερη;
Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{3}mL^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$

Εφόσον η ράβδος είναι ομογενής και σταθερής διατομής το κέντρο βάρους της βρίσκεται στο μέσον της. Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη ράβδο και για τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση έχουμε $\tau_F = I\,.\,a_{\gamma\omega\nu}$ (1)

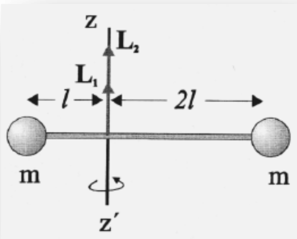



Από την (1)

$$w.\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\,.\,a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow m.g.\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\,.\,a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow g.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}L\,.\,a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L} = 15\,rad/sec^2$$

## *Στροφορμή - αρχή διατήρησης της στροφορμής*

4.47 Δύο σφαίρες, που η καθεμιά έχει μάζα m= 100 g συνδέονται μεταξύ τους με αβαρή ράβδο, όπως στο σχήμα. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω= 16 rad/s, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z'z. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος.
Δίνεται *l* = 0,8m

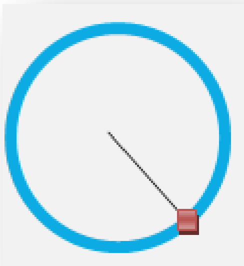



Η στροφορμή του συστήματος των σφαιρών ως προς τον άξονα z'z είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σφαιρών ως προς τον ίδιο άξονα. Οι στροφορμές των σφαιρών είναι ομόρροπες οπότε για την ολική στροφορμή ισχύει:

$$\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2} \rightarrow L = I_1.\omega + I_2.\omega = ml^2\omega + m(2l)^2\omega = 5ml^2.\omega$$
$$= 5{,}12\,kgm^2/sec$$

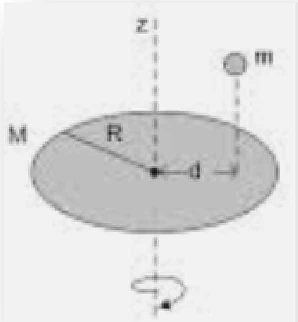
4.48 Υπολογίστε τη στροφορμή ενός τροχού μάζας M = 2 kg και ακτίνας R=0,4 m, που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=10 rad/s γύρω από τον άξονά του. Θεωρήστε ότι η μάζα του τροχού βρίσκεται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

Χωρίζουμε τη μάζα του τροχού σε στοιχειώδεις μάζες $m_x$ η κάθε μία από τις οποίες απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση R. Η στροφορμή του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του



$$L = \Sigma m_x.R^2\omega = R^2\omega.\ \Sigma m_x = mR^2\omega = 2\,.\ 0{,}4\,.0{,}4.\ 10 = 3{,}2\,kgm^2/sec$$

4.49 Οριζόντιος δίσκος ακτίνας 20 cm και μάζας 1 kg στρέφεται με συχνότητα 2 Hz γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του. Από κάποιο ύψος αφήνεται ένα κομμάτι λάσπη μάζας 100gr, που κολλάει στο δίσκο σε απόσταση 10 cm από τον άξονα περιστροφής. Να υπολογίσετε τη νέα συχνότητα περιστροφής.
Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$ .




Η στροφορμή στον άξονα z διατηρείται, αφού οι δυνάμεις που αναπτύσσονται από τα μέλη του συστήματος είναι εσωτερικές. Επιπλέον το κομμάτι λάσπης δεν έχει στροφορμή ως προς τον άξονα z πριν προσκολληθεί στον δίσκο, αφού κινείται παράλληλα σε αυτόν (*δηλαδή το βάρος της λάσπης δεν γεννά στροφορμή ως προς z* ).

$L_{αρχ} = L_{τελ} \quad \rightarrow \quad I_{αρχ}.\omega_{αρχ} = I_{ολικό,τελ}\,.\,\omega_{τελ} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mR^2\, 2\pi f_{αρχ} =$
$\left(\frac{1}{2}mL^2 + m_{λασπη}d^2\right).2\pi f_{τελ}$ *(1)*

*Μένει να γίνουν οι αριθμητικές πράξεις στην (1) για να προκύψει* $f_{τελ} = 1.9\ Hz$

## *Κινητική ενέργεια - έργο*

4.50 Ομογενής ράβδος μάζας M=3 kg και μήκους L=40 cm στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω=10 rad/s γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της και είναι κάθετος σ' αυτήν. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της ράβδου. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο είναι $I = \frac{1}{12}mL^2$

Η κινητική ενέργεια οφείλεται μόνο στη στροφική κίνηση. Επομένως $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ (1).

Όμως λόγω Steiner : $I = I_{cm} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{4}{12}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$ (2)

Οι δυο παραπάνω σχέσεις δίνουν : $K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right).\omega^2 \rightarrow K = \frac{1}{6}\,.\,3\,.\,(0{,}4\,.0{,}4)\,.\;100 = \frac{1}{2}\,.\,4\,.\;4 = 8\,joule$

4.51 Ομογενής δίσκος μάζας M= 8 kg και ακτίνας R κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Το κέντρο του δίσκου κινείται με ταχύτητα υ=5 m/s. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του δίσκου. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$

Πάμε…

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mu^2 = Λόγω\ κύλισης\ u = \omega R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{u}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \cdots = 150\,Joule$$

4.52 Ένας κινητήρας ασκεί ροπή 4 Nm και στρέφεται με συχνότητα 50 Hz. Ποια είναι η ισχύς του;

Έχουμε έτοιμη εξίσωση! $P = \tau.\omega = \tau\,.2\pi f = 400\pi\ \ watt$

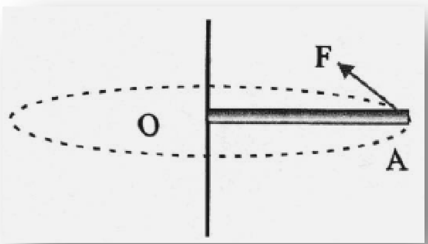
4.53 Ομογενής δίσκος μάζας m=40 kg και ακτίνας R=20 cm, στρέφεται με συχνότητα 5 Hz γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν.
α) Πόσο έργο απαιτείται για να ακινητοποιηθεί ο δίσκος;
β) Υπολογίστε τη μέση ισχύ της ροπής που πρέπει να ασκηθεί στο δίσκο για να ακινητοποιηθεί σε 5s.
Δίνεται $I = \frac{1}{2}mR^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

(β) Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για τη **στροφική** κίνηση έχουμε :

$$W = \frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right).(2\pi f)^2 = \cdots - 400\,Joule$$

(β) Η μέση ισχύς της ροπής υπολογίζεται από τη σχέση : $P = \frac{W}{t} = \frac{400}{5} = 80\,joule$

4.54 Η ράβδος του σχήματος που έχει μήκος L=2 m και μάζα M= 3kg, είναι οριζόντια και στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο Α της ράβδου ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου F=10 N που είναι διαρκώς κάθετη στη διεύθυνση της ράβδου. Η ράβδος αρχικά ήταν ακίνητη και με την επίδραση της δύναμης F αρχίζει να στρέφεται. Να υπολογίσετε:
α) Το έργο της δύναμης F, σε μία περιστροφή της ράβδου.
β) Τη γωνιακή ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει η ράβδος τη στιγμή κατά την οποία θα έχει ολοκληρώσει μια περιστροφή.
γ) Το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο (ισχύς της δύναμης) την ίδια στιγμή.
Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $\mathrm{I} = \frac{1}{3}mL^2$




(α) Το έργο της δύναμης F για μία στροφή :

$$W_F = \tau.\theta = F.L.2\pi = \cdots = 40\pi\,Joule$$

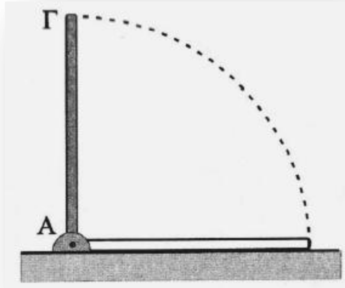
(β) Από το θεώρημα της στροφικής κίνησης έργου – ενέργειας έχουμε ότι:

$$W_F = \frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2 = \frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 \rightarrow W_F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right).\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 \rightarrow 6W_F = mL^2\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 \rightarrow \omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \cdots = 7{,}9\,rad/sec$$

(γ) Ισχύει : $P_t = \tau_t\,.\omega_t \rightarrow P_t = F.L.\omega = \cdots = 158\,watt$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: Θα μπορούσαμε να εργαστούμε και με την γνωστή από προηγούμενες τάξεις εξίσωση $P_t = F_t\,.u_t$

4.55 Η ομογενής ράβδος ΑΓ, μήκους *l*=30 cm και μάζας m, είναι κατακόρυφη και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α (σχ. 4.63). Η ράβδος αφήνεται από την κατακόρυφη θέση. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που έχει το σημείο Γ, τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο μέσον της είναι $I = \frac{1}{12}mL^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10m/s$^2$




Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του εδάφους. Όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη η δυναμική της ενέργεια είναι $U = mg\frac{L}{2}$ (1)

Όταν η ράβδος γίνει οριζόντια όλη η δυναμική ενέργεια θα έχει μετατραπεί σε κινητική λόγω στροφικής κίνησης $K = \frac{1}{2}\, I_A\omega^2$ όπου $I_A$ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνάει από το Α και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της ράβδου.

ΑΔΜΕ λοιπόν!

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\, I_A\omega^2 \;\rightarrow\; mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right).\omega^2 \rightarrow\; mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}mL^2\omega^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Και για το άκρο Γ…

$$\upsilon_{\gamma\rho\alpha\mu\,,\Gamma} = \omega.L = \sqrt{3\,.\,g.L} = \sqrt{3\,.\,10\,.\,0{,}3} = 3\; m/sec$$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)