1.30 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων αποτελείται από πυκνωτή χωρητικότητας C=5 μF και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=4x10^{-3} H. Να υπολογίσετε τη συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το κύκλωμα, αν διεγερθεί.

$$T = 2\pi\sqrt{L.C} \;\to T = 2\pi\,\sqrt{5.10^{-6}\,.\,4\,.10^{-3}} \to T = 2\pi\sqrt{20\,.10^{-9}} \to T = 2\,\sqrt{2}\,\pi\,10^{-4}$$

$$\to f = \frac{10^4}{2\sqrt{2}\,.\pi}\,Hz \;\to f = \;1125.39\,Hz$$

1.31 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων με πυκνωτή χωρητικότητας C=20x10^{-6} F και πηνίο αυτεπαγωγής L=5x10^{-2} H, διεγείρεται σε ταλάντωση. Για τη διέγερση του κυκλώματος, τη χρονική στιγμή μηδέν ο πυκνωτής έρχεται στιγμιαία σε επαφή με του πόλους πηγής τάσης V=50 V. Να γράψετε τις σχέσεις του φορτίου στον πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η στιγμιαία επαφή του πυκνωτή με πηγή τάσης, σημαίνει ότι αρχικά (t=0), ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος.

- Πλάτος φορτίου: $Q = C.V \;\to Q = 20\;10^{-6}\,.\;50 \;\to Q = 10^{-3}\;C$

- Περίοδος και συχνότητα:

$$T = 2\pi\sqrt{L.C} \;\to T = 2\pi\sqrt{5\;10^{-2}\,.\;20\;10^{-6}} \to T = 2\pi.10^{-3}\;sec$$

Και επομένως $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\,.10^{-3}} = \;10^3\;rad/sec$

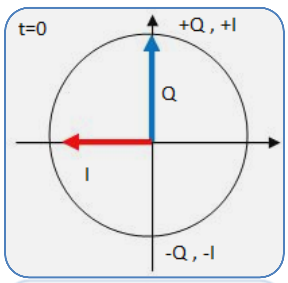
- Για το φορτίο του οπλισμού Α, ο οποίος φορτίζεται θετικά (+Q) τη στιγμή t=0 έχουμε στο s.i :

$$q_A = \;10^{-3}\,\eta\mu\left(1000t+\frac{\pi}{2}\right) = \;10^{-3}\,\sigma\upsilon\nu(1000t) \quad (1)$$

- Για την εξίσωση έντασης ρεύματος, βασιζόμενοι στην (1) έχουμε στο s.i. :

$$i = \omega.Q\;\eta\mu\left(\left(1000t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) \to i = \;10^3.10^{-3}\,.\;\eta\mu(1000t+\pi)$$

Να το διάγραμμα φορτίου και έντασης



1.42 Κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με συχνότητα $5000/\pi$ Hz. Το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή είναι Q=5x10^{-7}C.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα και το φορτίο του πυκνωτή τη στιγμή που το ρεύμα στο κύκλωμα είναι i=3x10^{-3}A.

β) Θεωρήστε ότι η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι 1 μF. Να παραστήσετε σε κοινούς άξονες την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου και την ολική ενέργεια σε συνάρτηση με το φορτίο του πυκνωτή.

Πλάτος έντασης: $I = Q.\omega \rightarrow I = Q.2\pi f \rightarrow I = 5\ 10^{-7}.2\pi\ \frac{5000}{\pi} \rightarrow I = 5\ 10^{-3}\ A = 5\ mA$

Φορτίο πυκνωτή, όταν το i=3x10^{-3}A :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2 \rightarrow Q^2 = q^2 + LC.i^2 \qquad (1)$$

Όμως…

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow 1 = f\ .2\pi\sqrt{LC} \rightarrow \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi.\frac{5000}{\pi}} \rightarrow \sqrt{LC} = 10^{-4} \rightarrow$$

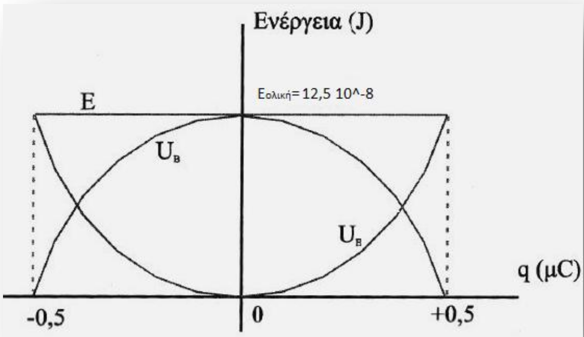
$$\rightarrow LC = 10^{-8}\ s.i.$$

Και η σχέση (1) δίνει …

$$5.10^{-7}\ 5.10^{-7} = q^2 + 10^{-8}.3.10^{-3}.3\ 10^{-3} \rightarrow \quad 25\ 10^{-14} - 9\ 10^{-14} = q^2 \rightarrow$$
$$q = 4\ 10^{-7}\ C$$

(β) ▸ Ολική ενέργεια (Σταθερή!)

$$E_{ολική} = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{10^{-6}}5.10^{-7}\ 5.10^{-7}$$
$$\rightarrow E_{ολική} = 12{,}5\ 10^{-8}\ J$$



Ηλεκτρική…

$U_E = \frac{1}{2}\frac{1}{10^{-6}}q^2$ με -0,5 μC < q < +0,5 μC

…και μαγνητικού πεδίου …

$U_B = E_{ολική} - U_E = 12{,}5\ 10^{-8} - \frac{1}{2}\frac{1}{10^{-6}}q^2$ με -0,5 μC < q < +0,5 μC

1.43 Πυκνωτής χωρητικότητας C=4x10^{-5}F φορτίζεται σε τάση V=100 V. Τη χρονική στιγμή t = 0 οι οπλισμοί του συνδέονται στα άκρα πηνίου με συντελεστή αυτεπαγωγής L=0,9 H και το κύκλωμα εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση.

α) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που απέκτησε ο πυκνωτής κατά τη φόρτισή του;

β) Ποιο είναι το φορτίο του πυκνωτή τις στιγμές που η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή είναι ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο;

γ) Ποια χρονική στιγμή η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου γίνεται, για πρώτη φορά, ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου;

(α) Πλάτος φορτίου $Q = C.V = 4\,10^{-5}\,.100 = 4\,10^{-3}\,C = 4\,mC$

(β) ΑΔΕ ταλάντωσης

$$E_{ολική} = U_E + U_B \rightarrow E_{ολική} = 2U_E \rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,Q^2 = 2\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,q^2 \rightarrow q = \frac{Q\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,mJoule$$

(2) Θέλουμε εξίσωση φορτίου, ώστε να σχεδιάσουμε το διανυσματικό διάγραμμα ή να εργαστούμε αλγεβρικά.

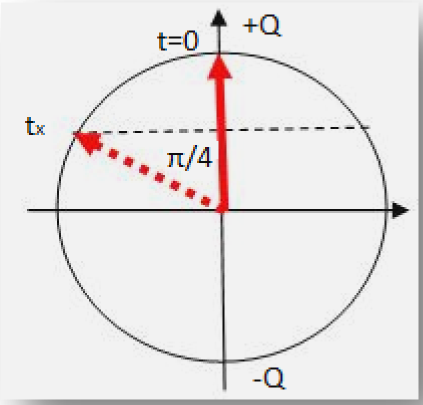
Για τον οπλισμό του πυκνωτή με θετικό φορτίο, τη στιγμή t=0, έχουμε :

$$q_A = Q\,ημ\left(ωt + \frac{π}{2}\right) \quad (1)$$

Με $Q = 4\,10^{-3}\,C$ και $ω = \frac{2π}{T} = \frac{2π}{2π\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}9\,.\,4\,10^{-5}}} = \frac{1}{6\,.10^{-3}}\,rad/sec$

$$(1) \rightarrow \quad q_A = 4\,10^{-3}\,ημ\left(\frac{10^3}{6}t + \frac{π}{2}\right) \quad (2)$$

ε! Τώρα ουσιαστικά μας ζητείται πότε το φορτίο του οπλισμού θα γίνει για πρώτη φορά ίσο με $q_A = +\frac{Q\sqrt{2}}{2}$ είτε $q_A = -\frac{Q\sqrt{2}}{2}$



Το διανυσματικό διάγραμμα για του φορτίου, του οπλισμού μας, λέει ότι το φορτίου του πυκνωτή θα γίνει $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$, όταν το διάνυσμα γράψει γωνία π/4 rad

Επομένως $t_x = \frac{T}{8} = \frac{2π\sqrt{LC}}{8} = \frac{2π\,.\,610^{-3}}{8} = 1{,}5π\,.\,10^{-3}\ sec$

Σας δίνω και την αλγεβρική μελέτη, όπως αυτή εμφανίζεται στο σχολικό λυσάρι…

Η πρώτη φορά που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνω-τή γίνεται ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο ταυτίζεται με την πρώτη φορά που το φορτίο στον πυκνωτή γίνεται $q = 2\sqrt{2}\times10^{-3}C$, δηλαδή τη στιγμή για την οποία

$$2\sqrt{2}\times10^{-3} = 4\times10^{-3}συν\frac{10^3}{6}t$$

Λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση ως προς τον χρόνο και βρί-σκουμε ότι η μικρότερη τιμή του για την οποία ισχύει η εξίσωση είναι $t = 1{,}5\times10^{-3}s$.

Χαζή *λύση γιατί αν η αρχική φάση ήταν π rad ή 3π/2 rad, τότε η* $1^η$ *φορά θα ήταν όταν* $q = -\frac{Q\sqrt{2}}{2}$

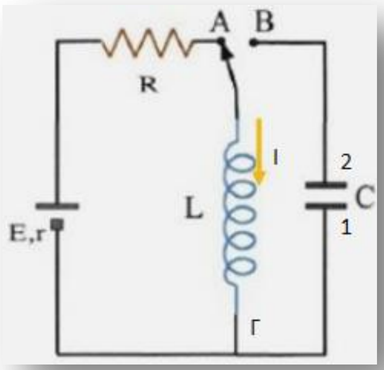
1.44 Κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων περιλαμβάνει πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L= 16 mH και πυκνωτή χωρητικότητας C=4x10^{-5} F. Κάποια στιγμή το φορτίο στον πυκνωτή είναι q=20 μC και η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα $i = 25\sqrt{3}$ mA. Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής κατά την ηλεκτρική ταλάντωση;

Η ΑΔΕ λέει…

$$\frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2 \rightarrow Q^2 = q^2 + LC.i^2 \qquad (1)$$

Με αντικατάσταση των τιμών Q=40 μC

1.49 Στο κύκλωμα του σχήματος 1.47 δίνονται: E=12V, r=0, L=10mH, C=1μF, R=20Ω. Αρχικά ο μεταγωγός βρίσκεται στη θέση Α και το πηνίο διαρρέεται από σταθερό ρεύμα. Τη χρονική στιγμή t = 0 ο μεταγωγός μεταφέρεται ακαριαία στη θέση Β.
α) Ποιος οπλισμός θα αποκτήσει πρώτος θετικό φορτίο;
β) Γράψτε τις εξισώσεις που δίνουν την ένταση του ρεύματος και το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.



Μελέτη έως τη στιγμή t=0

Η πηγή επιβάλλει στον κλειστό βρόχο (πηγή-αντιστάτης-πηνίο) ρεύμα I, με φορά όπως φαίνεται στο σχήμα. $I = \frac{E}{R+r} = \frac{12}{20+0} = 0{,}6\ A$

Ο πυκνωτής δεν συμμετέχει στο κύκλωμα.

Μελέτη όταν t≥ 0

Αρχίζει να λειτουργεί το κύκλωμα LC. Η πηγή και ο αντιστάτης δεν συμμετέχουν στο κύκλωμα. Έτσι…

(α) Ο οπλισμός που συνδέεται με τον αρνητικό πόλο της πηγής, στο σχήμα ο οπλισμός 1, θα αποθηκεύει στο πρώτο Τ/4 θετικό φορτίο, αφού η φορά του ρεύματος δείχνει ροή συμβατικών θετικών φορτίων προς αυτόν.

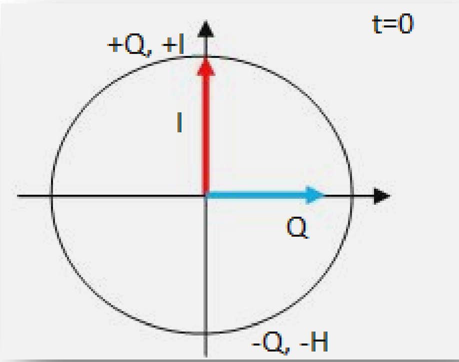
Υπολογισμοί…

$T = 2\pi\sqrt{L.C} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{10\ 10^{-3}\ .\ 1\ 10^{-6}} \rightarrow T = 2\pi.10^{-4}\ sec$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10^4 \frac{rad}{s}$

$I = Q.\omega \rightarrow 0{,}6 = Q.10^4 \rightarrow Q = 6.10^{-5}\ C$

(β) Θα εργαστούμε –διανυσματικά- με οπλισμό αναφοράς τον 1. Τη στιγμή t=0 το ρεύμα είναι μέγιστο και θετικό. Θετικό διότι πηγαίνει προς τον οπλισμό αναφοράς. Μια χαρά…



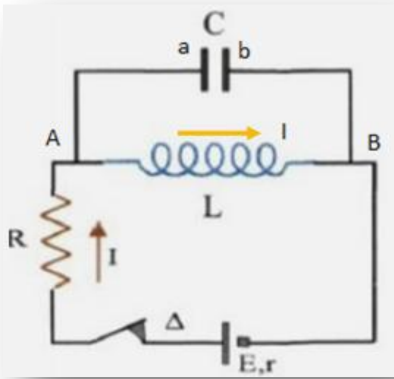
Εύκολα

$q_1 = Q\ \eta\mu(\omega t + \varphi) = 6\ 10^{-6}\ \eta\mu(10^4 t + 0)$

Και

$i = I\ \eta\mu(\omega t + \theta) = 0{,}6\ \eta\mu\left(10^4 t + \frac{\pi}{2}\right)$

1.50 Στο κύκλωμα του σχήματος 1.48 δίνονται E= 6 V, R=2Ω, L=0,2x10^{-3}H, r=0 Αρχικά ο διακόπτης Δ είναι κλειστός, το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα και ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Όταν ανοίξουμε το διακόπτη ο πυκνωτής φορτίζεται.
α) Εξηγήστε γιατί φορτίζεται ο πυκνωτής;
β) Ποια πρέπει να είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή ώστε η τάση στους οπλισμούς του να μην υπερβεί τα 10V;



Μελέτη πριν το άνοιγμα του διακόπτη

Υπάρχει το ρεύμα I. Ο κλάδος που περιέχει τον πυκνωτή δεν είναι ρευματοφόρος. Στα άκρα A,B του πηνίου η διαφορά δυναμικού είναι ΜΗΔΕΝ, διότι δεν έχει ωμική αντίσταση και επιπλέον δεν υπάρχει επαγωγικό φαινόμενο, αφού το ρεύμα είναι σταθερό.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το εν λόγω ρεύμα… $I = \frac{E}{R+r} = \frac{6}{2+0} = 3\ A$

Μελέτη όταν t=0

Πηγή και αντιστάτης εκτός συμμετοχής στο κύκλωμα. Μπαίνει σε λειτουργία το κύκλωμα LC, με αρχικές συνθήκες I=max και q=0. Στο πρώτο T/4, ο οπλισμός b θα φορτίζεται θετικά.

(α) Από τη θεωρία του LC μάθαμε ότι η λειτουργία του, στηρίζεται στο φαινόμενο αυτεπαγωγής που συμβαίνει στο πηνίο, όταν το ρεύμα που το διαρρέει μεταβάλλεται.

Μελέτη όταν το LC λειτουργεί

(β) Απαιτούμε η max τιμή της τάσης V_{max} να μη ξεπεράσει τα 10 volt…

$V_{max} \leq 10\ volt \quad (1)$ και $\frac{1}{2}\ L\ I^2 = \frac{1}{2}\ C.V_{max}^2$ (2)

Οπότε…

$$\sqrt{\frac{L\ I^2}{C}} \leq 10 \ \rightarrow L\ I^2 \ \leq 100\ C \ \rightarrow C \geq \frac{L\ I^2}{100} \rightarrow C \geq \frac{0{,}2\ \ 10^{-3}\ .\ 9}{10^2} \ \rightarrow C \geq 18\ 10^{-6}\ Farad$$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)