ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) του γ.α. κύματος, δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την απομάκρυνση ψ δομικής μονάδας του γραμμικού ελαστικού μέσου , όταν :

- Η μονάδα απέχει απόσταση x από την «πηγή» και
- Έχει παρέλθει χρόνος t αφ' ότου η «πηγή» άρχισε την α.α.τ. και

(Προϋπόθεση: Η κυματική διαταραχή έφτασε σε απόσταση x)

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

«Πηγή» λέμε εκείνη τη δομική μονάδα που αποτελεί σημείο αναφοράς για αποστάσεις (x) και χρόνους (t) .

Η εξίσωση (1) του γραμμικού αρμονικού κύματος, περιγράφει την αρμονική ταλαντωτική κίνηση της «πηγής», αρκεί να θέσουμε x=0 !

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Αν στη εξίσωση (1) θέσουμε x=0 και t=0 τότε έχουμε στα χέρια μας την απάντηση στο ερώτημα : « *Τι κάνει η «πηγή» αρχικά ;* »

Να και απάντηση στο ερώτημα :

- Αρχική φάση «πηγής» φ = 0 rad
- Αρχική απομάκρυνση ψ = 0
- Αρχική ταχύτητα υ = +ω.Α (θετική και max).

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Ξεχωρίστε την απόσταση (x) από την απομάκρυνση (ψ) !

Στην εξίσωση (1) επιβάλλεται να ισχύει...

- x, λ Ίδιες μονάδες
- t, T //
- ψ, A //

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Ξεχωρίστε τη *σταθερή* ταχύτητα διάδοσης του κύματος υ=λf, από τη *ημιτονικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα* με την οποία ταλαντώνεται κάποια δομική μονάδα που συμμετέχει στον κυματικό μηχανισμό.

Αν δοθεί η στιγμή t_1 και η θέση x_N μιας δομικής μονάδας και ζητηθεί η εξίσωση ταχύτητας, επιτάχυνσης, … τότε εργαζόμαστε ως εξής :

Στην εξίσωση (1) θέτουμε την τιμή x_N και έτσι περνάμε από εξίσωση ψ=f(t,x) σε εξίσωση ψ=f(t). Στη συνέχεια χειριζόμαστε την νέα εξίσωση όπως στις α.α.τ. ! (Δηλαδή «πετάμε» έξω το ω και μετατρέπω το **ημ** σε **συν**)

Έτσι θα προκύψει π.χ. για την ταχύτητα $\upsilon_N = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right)$

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) γ.α. κύματος, περιγράφει τη κίνηση μιας δομικής μονάδας Ν, με τη προϋπόθεση ότι το κύμα έφτασε στη θέση της Ν.

Αυτό σημαίνει ότι άμα γνωρίζουμε την απόσταση , τότε ο χρόνος με τον οποίο εργαζόμαστε -προκειμένου να μελετήσουμε τη δομική μονάδα Ν, πρέπει να έχει τιμές $t > \frac{x_N}{\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}}$

Η παραπάνω πρόταση είναι λίαν χρήσιμη και για διαγράμματα ψ-t , …

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Όταν δοθεί ότι πέρασε χρόνος t_1, αφ' ότου ξεκίνησε η διάδοση από την ¨πηγή», τότε η εξίσωση (1) του γ.α. κύματος μας δίνει δυνατότητα υπολογισμού των απομακρύνσεων ψ όλων των δομικών μονάδων που βρίσκονται σε απόσταση $x_{max} \leq \upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} \cdot t_1$

Δομικές μονάδες των οποίων η απόσταση είναι μεγαλύτερη από τη x_{max} έχουν προφανώς απομάκρυνση ψ=0, αφού σ' αυτές δεν έφτασε ακόμη η διαταραχή.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

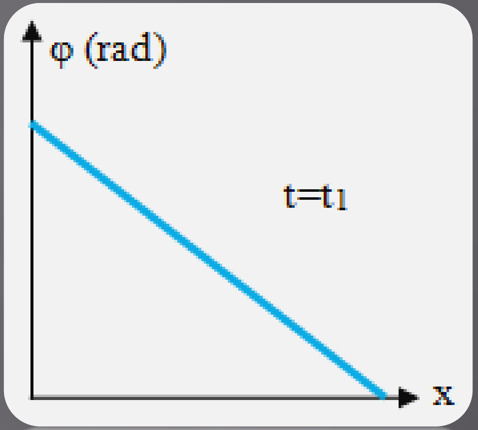
$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

Η έκφραση (2) που εμφανίζεται στην εξίσωση κύματος εκφράζει τη φάση της απομάκρυνσης μιας δομικής μονάδας που απέχει x από την «πηγή» , τη χρονική στιγμή t.

Αν στη σχέση (2) εφαρμόσουμε ένα ζεύγος τιμών (x , t) και προκύψει αρνητική τιμή στη φάση , αυτό σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή t το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμη στη δομική μονάδα που απέχει από τη «πηγή» απόσταση x !

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

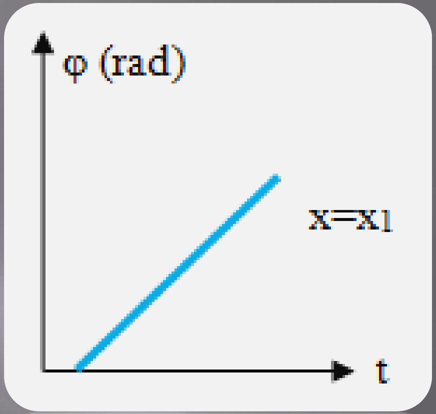


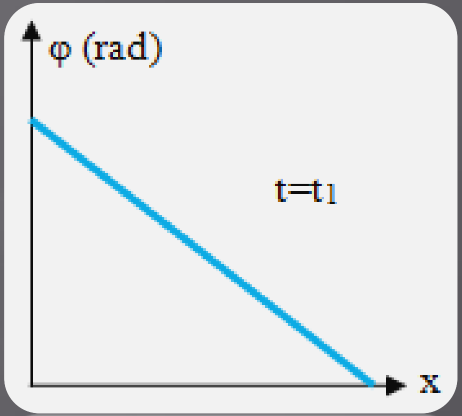
Από την (2) προκύπτει ότι η φάση φ , σε μια ορισμένη στιγμή π.x t_1 , μειώνεται γραμμικά, όσο η απόσταση x αυξάνει.

Αν λοιπόν για δυο δομικές μονάδες M και N υποθέσουμε ότι ισχύει $\varphi_M=\pi$ rad και $\varphi_N=3\pi$ rad , τότε το κύμα πρώτα συναντά την N και μετά την M

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

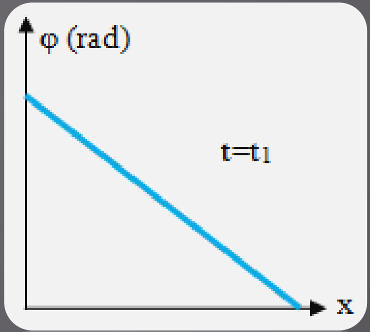




Ξεχωρίστε τη διαφορά φάσης μεταξύ δυο μονάδων Μ και Ν κάποια χρονική στιγμή π.χ. t_1 , από τη διαφορά φάσης που αφορά μια δομική μονάδα $x=x_1$ στο χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2 - t_1$.

Δείτε παρακαλώ επόμενη διαφάνεια...

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ



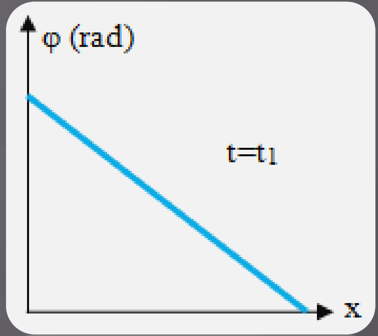
$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

Ποια η Δφ για δυο δομικές μονάδες Μ και Ν που συμμετέχουν σε κύμα, τη στιγμή $t=t_1$.

$$\Delta\phi = \phi_M - \phi_N = 2\pi\cdot\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) - 2\pi\cdot\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\cdot\frac{x_N - x_M}{\lambda}$$

Η παραπάνω σχέση δικαιολογεί γιατί δυο μονάδες που απέχουν π.χ. απόσταση λ παρουσιάζουν διαφορά φάσης 2π rad.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ



$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

Πόσο απέχουν δυο δομικές μονάδες που παρουσιάζουν τη στιγμή t_1 διαφορά φάσης 2kπ rad ; Ποια σχέση έχουν οι απομακρύνσεις και οι ταχύτητες των ;

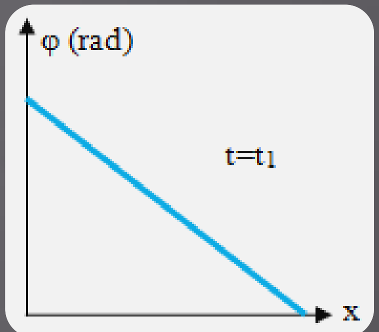
Από τη σχέση $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \dfrac{x_N - x_M}{\lambda}$ προκύπτει ότι : $\chi_N - \chi_M = k \cdot \lambda$

$$\psi_M = A \cdot \eta\mu\varphi_M = \xrightarrow{\phi_M - \phi_N = 2k\pi} = A \cdot \eta\mu(2k\pi + \phi_N)$$

$$= A \cdot \eta\mu\phi_N = \psi_N$$

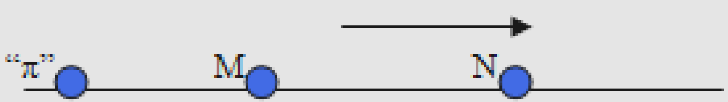
κ.ο.κ.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ



$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

Πόσο απέχουν δυο δομικές μονάδες που παρουσιάζουν διαφορά φάσης τη στιγμή t_1 ίση με (2k+1)π rad ; Ποια σχέση έχουν οι απομακρύνσεις και οι ταχύτητες των ;



Εύκολα αποδεικνύουμε ότι $\chi_N - \chi_M = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2}$ και ότι $\psi_N = -\psi_M$

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

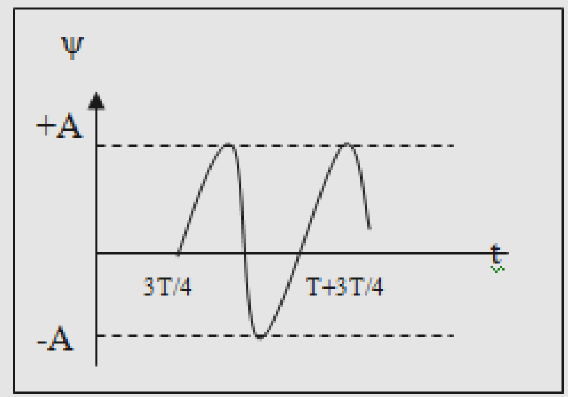
Κατά μήκος χορδής διαδίδεται κύμα με εξίσωσ $\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Να εκφράσετε γραφικά με τον χρόνο τη απομάκρυνση της ταλάντωσης μιας δομικής μονάδας Ν της χορδής που απέχει απόσταση $x_N=3\lambda/4$ από την «πηγή».

Η εξίσωση του κύματος για $x_N=3\lambda/4$, δίνει την **εξίσωση εργασίας** $\psi_N = 2\pi \cdot \eta\mu\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{4}\right)$.

Το **πεδίο ορισμού** για τον χρόνο t προκύπτει μέσα από την απαίτηση η φάση να μη είναι αρνητική.

Έτσι : $\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta \geq 0 \rightarrow \frac{t}{T} \geq \frac{3}{4} \rightarrow t \geq \frac{3}{4} \cdot T$

Αναμένουμε ημιτονική αρμονική εξίσωση.



Ο **πίνακας τιμών** απαιτεί ο t να πάρει τις τιμές 3T/4 , 3T/4+T/4 , 3T/4+2T/4 , 3T/4+3T/4 , … *(Από το όριο ξεκινώντας εργαζόμαστε με βήμα το T/4. Τόσο απλά !)*

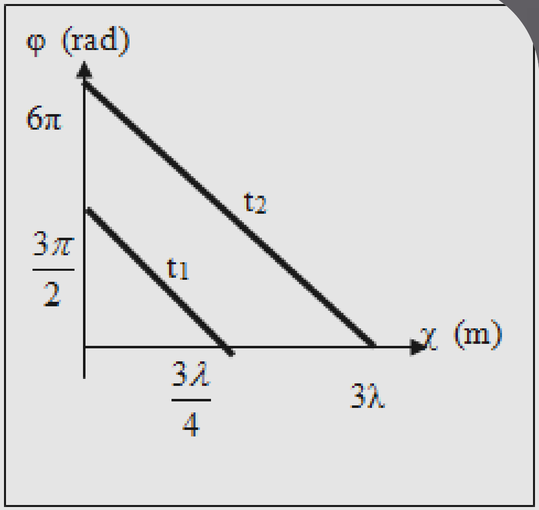
Στη συνέχεια θα οδηγηθούμε στη **σχεδίαση** του παραπάνω πλαισίου.

✷ Οι καμπύλες ψ-t ξεκινούν με όρος …

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

Κατά μήκος χορδής διαδίδεται κύμα με εξίσωση $\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Να εμφανίσετε γραφικά τη φάση ταλάντωσης των σημείων της χορδής σε συνάρτηση με την απόσταση τους από την «πηγή» O και για χρονικές στιγμές $t_1=3T/4$ και $t_2=3T$



Η φάση κάθε δομικής μονάδας ,στην οποία έχει φτάσει το κύμα είναι : $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Επομένως για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 έχουμε τις **εξισώσεις εργασίας** :

$$\varphi_{(t_1)} = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ και } \varphi_{(t_2)} = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(3 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι 1^{ου} βαθμού, άρα **αναμένουμε** πλάγια ευθύγραμμα τμήματα !

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\phi(t_1)$: $2\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{\lambda}\right) \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{3\lambda}{4}$

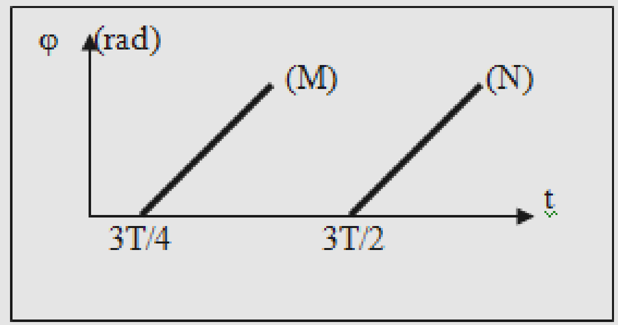
Πίνακας δυο τιμών χ=0 και χ=3λ/4 και μετά **σχεδίαση** !

Όμοια εργαζόμαστε και για τη συνάρτηση $\phi(t_2)$ …

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

Κατά μήκος χορδής διαδίδεται κύμα με εξίσωση $\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Να παραστήσετε γραφικά με τον χρόνο τη φάση ταλάντωσης των Μ και Ν της χορδής που απέχουν απόσταση $\chi_M=3\lambda/4$ και $\chi_N=3\lambda/2$ από την «πηγή». (δεχτείτε διάδοση όπως στην ερώτηση 12)

Εργαζόμαστε πάνω στη «γραμμή παραγωγής» : Εξίσωση εργασίας → πεδίο ορισμού της μεταβλητής t → Τί αναμένουμε → πίνακας τιμών → σχεδίαση.



Για το σημείο Μ η **εξίσωση εργασίας** είναι η παρακάτω.

$$\phi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{4}\right) \qquad (1)$$

Πεδίο ορισμό της μεταβλητής t. $\varphi_M \geq 0 \rightarrow \cdots \rightarrow t \geq \frac{3T}{4}$

Αναμένουμε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα, αφού έχουμε εξίσωση 1ου βαθμού.

Πίνακας τιμών θέτουμε t=3T/4 και t=3T/4+κάτι *(πχ T/4 ή T/2 ή T ή ...)*
Η σχεδίαση είναι πανεύκολη.

Σχόλιο : Στο διάγραμμα φ-t τα γραφήματα έχουν ίδια κλίση. Αυτό συμβαίνει διότι η κλίση Δφ/Δt είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα ω. (γιατί ;)

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

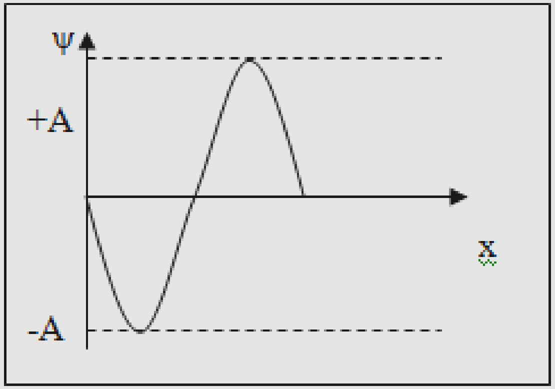
Κατά μήκος χορδής διαδίδεται κύμα με εξίσωση $\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Να παραστήσετε γραφικά (**στιγμιότυπο κύματος**) με τη απόσταση x τη απομάκρυνση της ταλάντωσης όλων των δομικών μονάδων τη στιγμή t=T.

Η εξίσωση του κύματος για t=T δίνει την **εξίσωση εργασίας** : $\psi = 2\pi \cdot \eta\mu\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$. (1)

Πεδίο ορισμού της μεταβλητής x :

$$\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta \geq 0 \rightarrow 1 - \frac{x}{\lambda} \geq 0 \rightarrow x \leq \lambda$$

Αναμένουμε ως γράφημα ημιτονική αρμονική καμπύλη.

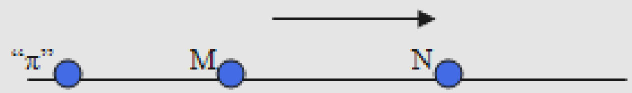


Ο **πίνακας τιμών** απαιτεί η μεταβλητή x να πάρει τις τιμές λ , λ-λ/4 , λ-2λ/4 , λ-3λ/4 , … *(Από το όριο ξεκινώντας εργαζόμαστε με βήμα το λ/4. Τόσο απλά !)*

✷ Οι καμπύλες ψ-χ καταλήγουν σε όρος …

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ - ΟΔΗΓΙΕΣ

Έστω ότι η Δφ για δυο δομικές μονάδες Μ και Ν που συμμετέχουν σε κύμα είναι ίση με 7π/3. Αν η μονάδα Μ ευρίσκεται σε θέση +Α, βρείτε τη θέση της Ν την ίδια στιγμή.



Εργαζόμαστε με το παρακάτω …πρωτόκολλο :

$$\psi_{\mathrm{M}} = +\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A} \cdot \eta\mu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta)_{\mathrm{M}} = \mathrm{A} \rightarrow \eta\mu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta)_{\mathrm{M}} = +1 \rightarrow (\phi\acute{\alpha}\sigma\eta)_{\mathrm{M}} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Εύρεση φάσης της μονάδας Ν

$$\phi_{\mathrm{M}} - \phi_{\mathrm{N}} = \frac{7\pi}{3} \rightarrow (\phi\acute{\alpha}\sigma\eta)_{\mathrm{N}} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} \qquad (2)$$

Υπολογισμός απομάκρυνσης της Ν.

$$\psi_{\mathrm{N}} = \mathrm{A} \cdot \eta\mu(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta)_{\mathrm{N}} \rightarrow \psi_{\mathrm{N}} = \mathrm{A} \cdot \eta\mu\left(2k\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = -\mathrm{A} \cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\mathrm{A} \cdot \eta\mu\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) =$$

$$= -\mathrm{A} \cdot \eta\mu\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \mathrm{A} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{+\mathrm{A}}{2}$$