Προβλημάτων ερωτήματα

Α] (*Η απομάκρυνση προσδιορίζει φάση ! …*)

Την στιγμή t_1=0,9 sec ένα σημείο με συντεταγμένη x_1=6 m, φτάνει για πρώτη φορά σε ακραία θέση της ταλάντωσης του…

Ισχύει για εξίσωση κύματος $\psi = \mathrm{A}\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$:

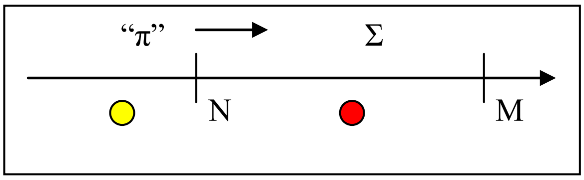
$$\psi = \mathrm{A}\cdot\eta\mu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta) \to +\mathrm{A} = \mathrm{A}\cdot\eta\mu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta) \to \varphi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\ \text{rad} \qquad k \ge 0$$

Επομένως η πρώτη φορά αντιστοιχεί σε k=0, με τιμή φάσης ίση με π/2 rad.

Υπάρχει και συνέχεια αν χρειαστεί…

$$2\pi\left(\frac{0{,}9}{\mathrm{T}}-\frac{6}{\lambda}\right)=\frac{\pi}{2}\to\cdots \quad (\text{ T σε sec και λ σε m })$$

Β] (*Διαφορά φάσης σε πολύ προωθημένη χρήση….*)



Στο σχήμα φαίνεται η διάδοση αρμονικού κύματος πάνω σε χορδή, με μήκος κύματος είναι λ=4 m. Αν ένα σημείο Σ έχει κάποια στιγμή απομάκρυνση +Α, τι απομάκρυνση και τι ταχύτητα έχουν τα σημεία του μέσου που απέχουν κατά τη διεύθυνση του άξονα διάδοσης 0,5 m από αυτό.

Έστω Ν και Μ τα σημεία που απέχουν από το Σ απόσταση 5 cm. Εύκολα προκύπτει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ του Σ και ενός από τα Ν και Μ είναι :

$$\Delta\phi = 2\pi\cdot\frac{d}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}5}{4}=\frac{\pi}{4}\ \text{rad} \quad (1)$$

Δηλ. (φάση Ν)= (φάση Σ) + Δφ & (φάση Μ)=(φάση Σ) - Δφ

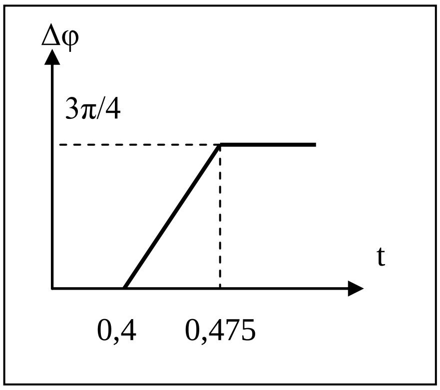
Εύρεση φάσης για τη δομική μονάδα του μέσου Σ : … (φάση Σ) = 2kπ+π/2 rad

Σημείο Ν λοιπόν ! $\psi_1 = \mathrm{A}\cdot\eta\mu(\varphi\alpha\sigma\eta\ \ \mathrm{N}) = \mathrm{A}\cdot\eta\mu\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{+\mathrm{A}\sqrt{2}}{2}$

Συνεχίστε μόνοι σας παραπέρα…

Γ] (*διάγραμμα διαφοράς φάσης σε συνάρτηση με τον χρόνο…*)

Τη χρονική στιγμή t=0 η δομική μονάδα πηγή "π" του μέσου αρχίζει να ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση. Να γίνει το διάγραμμα της Δφ – t για δυο σημεία Ν και Μ που βρίσκονται εκατέρωθεν της πηγής και απέχουν αποστάσεις 4m και 4,75 m αντιστοίχως. Δίνεται λ=2m και f=5 Hz.



Εύρεση ταχύτητας διάδοσης :

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda \cdot f = 2 \cdot 5 = 10 \ \text{ m/sec}$$

Πότε φτάνει η διέγερση στο Ν και πότε στο Μ ;

$$t_N = \frac{x_N}{\upsilon} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \ \text{sec} \qquad \text{και}$$

$$t_M = \frac{x_M}{\upsilon} = \frac{4{,}75}{10} = 0{,}475 \ \text{m}$$

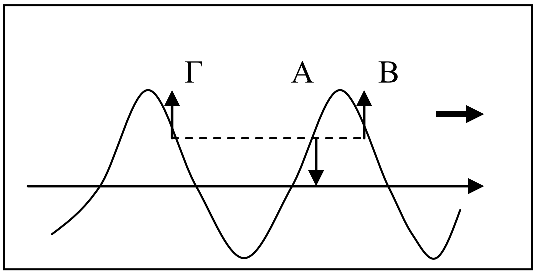
Ποια η εξίσωση της φάσης του Ν ;

$\left(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta \quad \mathrm{N}\right) = 2\pi\left(\dfrac{t}{0{,}2} - \dfrac{4}{2}\right) = \pi(10t - 4)$ rad Αυτή εδώ η έκφραση αποτελεί και τη διαφορά φάσης στο κλειστό διάστημα $[t_N, t_M]$!

Εύρεση διαφοράς φάσης μετά τη στιγμή t_M .

$$\ldots \Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{d}{\lambda} = 2\pi \frac{0{,}75}{2} = \frac{3\pi}{4} \ \text{ rad} \quad (1)$$

Δ] *(Λίαν δύσκολη σύλληψη…)* Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδεται κύμα πλάτους 6 mm. Δυο διαδοχικά σημεία του ελαστικού μέσου που έχουν θετική απομάκρυνση 3 mm και αντίθετες ταχύτητες, απέχουν μεταξύ τους κατά μήκος του άξονα διάδοσης 2 cm. Να βρείτε το μήκος κύματος.



Δυο διαδοχικά σημεία του μέσου με απομάκρυνση ψ=3 mm και αντίθετες ταχύτητες μπορεί να είναι ή το ζεύγος Α,Β ή το Α,Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Και για τα τρία σημεία Α,Β,Γ ισχύει :

$$\psi = \mathrm{A} \cdot \eta\mu(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta) \rightarrow \frac{\mathrm{A}}{2} = \mathrm{A} \cdot \eta\mu(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta) \rightarrow \eta\mu(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta) = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\phi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \qquad (1) \qquad \text{ή}$$

$$\text{φάση} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \qquad (2)$$

Όμως το Α έχει αρνητική ταχύτητα, ενώ τα Β, Γ θετική ! Επομένως επιβάλλεται να ισχύουν οι σχέσεις :

$$\sigma\upsilon\nu(\phi\alpha\sigma\eta)_{\mathrm{A}} < 0 \ , \ \sigma\upsilon\nu(\phi\alpha\sigma\eta)_{\mathrm{B}} > 0 \ \text{ και } \ \sigma\upsilon\nu(\phi\alpha\sigma\eta)_{\Gamma} > 0$$

Αυτό σημαίνει το Α παίρνει τιμές από το πακέτο (2) ενώ τα Β,Γ παίρνουν τιμές από το πακέτο (1). Εντάξει ;
Τα σημεία όμως είναι διαδοχικά σημεία οπότε για τις φάσεις επιβάλλεται να ισχύουν κάποιοι περιορισμοί. Πράγματι :

1. $\phi_{\Gamma} > \phi_{A} > \phi_{B}$
2. $\Delta\phi_{\Gamma,A} < 2\pi$ *και* $\Delta\phi_{A,B} < 2\pi$

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα
$\phi_{B} = 2k\pi + \pi/6$ (1) $\quad \phi_{A} = 2k\pi + 5\pi/6$ (2) $\quad \phi_{\Gamma} = 2k\pi + 2\pi + \pi/6$ (3)
Στις παραπάνω σχέσεις (1),(2),(3) το k παίρνει την ίδια θετική τιμή.

Εύκολα πλέον υπολογίζεται το μήκος κύματος. Αν το d=2 cm αναφέρεται στα σημεία Α,Β τότε :

$$\Delta\phi_{A,B} = 2\pi \cdot \frac{d_{A,B}}{\lambda_1} \to \frac{4\pi}{6} = 2\pi \cdot \frac{2}{\lambda_1} \to \lambda_1 = 6 \text{ cm}$$

Αν το d=2 cm αναφέρεται στα σημεία Γ,Α τότε :

$$\Delta\phi_{\Gamma,A} = 2\pi \cdot \frac{d_{\Gamma,A}}{\lambda_2} \to \frac{8\pi}{6} = 2\pi \cdot \frac{2}{\lambda_2} \to \lambda_2 = 3 \text{ cm}$$

Ε] Σε ένα ελαστικό γραμμικό μέσο διαδίδεται ένα κύμα με συχνότητα 5 Hz και ταχύτητα 6 m/sec. Το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων του μέσου είναι 2 cm. Αν κάποια στιγμή η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι $\sqrt{3}$ cm και η ταχύτητα είναι θετική, ποια θα είναι η απομάκρυνση των σημείων που απέχουν από αυτό κατά μήκος του άξονα διάδοσης 10 cm ;

Εύρεση μήκους κύματος : $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda \cdot f \to 6 = \lambda \cdot 5 \to \lambda = 1{,}2 \text{ m}$
Εύρεση φάσης για το σημείο Σ που έχει απομάκρυνση $\sqrt{3}$ *cm και θετική ταχύτητα:*

$$\sqrt{3} = 2 \cdot \eta\mu(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta) \to \eta\mu(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \phi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta}$$

$$\phi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$$

Όμως θέλουμε θετική ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι $\sigma\upsilon\nu(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta) > 0$, *οπότε επιβάλλεται η φάση του εν λόγω σημείου Σ να είναι :*

$$\phi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \qquad k \geq 0$$

Αφού τα σημεία απέχουν απόσταση d=10 cm, θα έχουν διαφορά φάσης :

$$\Delta\phi = \pm 2\pi\frac{d}{\lambda} \to \Delta\phi = \pm 2\pi \cdot \frac{10}{120} \to \Delta\phi = \pm\frac{\pi}{6}$$

Έστω σημείο Μ που είναι πριν από το Σ και το σημείο Ν που είναι μετά το Σ.

$$(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta)_M = 2k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to \eta\mu(\phi\alpha\sigma\eta)_M = 1 \to \psi_M = 2\,\text{cm} \qquad \textit{και}$$

$$(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta)_N = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \to \eta\mu(\phi\alpha\sigma\eta)_N = \frac{1}{2} \to \psi_N = 1\,\text{cm}$$

ΣΤ] Σε γραμμικό ελαστικό μέσο χωρίς αποσβέσεις διαδίδεται κύμα με εξίσωση της μορφής $\psi = 0{,}04 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ m, sec. Τη χρονική στιγμή t=1 sec το σημείο Α με συντεταγμένη x_A=4/6 m απέχει από τη θέση ισορροπίας του **απόσταση** $2\sqrt{3}$ cm για όγδοη φορά. Την ίδια στιγμή το πλησιέστερα στο Α σημείο του μέσου με την ίδια ταχύτητα, απέχει από το Α απόσταση 4/3 m. Να βρεθεί η περίοδος, το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Το σημείο Α –λέει η άσκηση- απέχει από τη θέση ισορροπίας απόσταση $2\sqrt{3}$ *cm, οπότε ευρίσκεται σε απομάκρυνση* $\pm 2\sqrt{3}$ *cm !*

Εύρεση φάσης του Α :

$$\pm 2\sqrt{3} = 4 \cdot \eta\mu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta) \rightarrow \eta\mu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (I) \quad \acute{\eta}$$

$$\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \quad (II) \quad \acute{\eta}$$

$$\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (III) \quad \acute{\eta}$$

$$\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \quad (IV)$$

Όμως το Α ευρίσκεται στη εν λόγω απόσταση για όγδοη φορά ! Αυτό σημαίνει πρέπει να ψάξω στα πακέτα τιμών της φάσης και να βρω πότε συμβαίνει αυτό. Ξεκινάμε θέτοντας τιμές στην k.

1η	2η		3η	5η	6η	4η	7η	9η	10η	8η	11η
π/3	*2π/3*	*-π/3*[1]	*4π/3*	*7π/3*	*8π/3*	*5π/3*	*10π/3*	*13π/3*	*14π/3*	***11π/3***	*16π/3*
k=0				*k=1*				*k=2*			

(Η παραπάνω ανάπτυξη συνεχίζεται για τιμές του k πέραν του k=2.)

Τι λένε οι παραπάνω τιμές ;

Λένε ότι η δομική μονάδα θα βρεθεί σε ***απόσταση*** $2\sqrt{3}$ *cm για όγδοη φορά όταν εμφανίσει φάση ίση με 11π/3 rad.*

Ώστε : $(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta)_A = \frac{11\pi}{3}$ *rad*

Ψάχνουμε τώρα ένα σημείο Λ με δυο χαρακτηριστικά :

- *Να έχει ίδια ταχύτητα με το Α. Αυτό απλά σημαίνει ότι* $\sigma\upsilon\nu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta)_\Lambda = \sigma\upsilon\nu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta)_A$.
- *Το σημείο Λ θέλουμε να είναι γειτονικό του Α.*

Εκείνη η τιμή της φάσης του Λ που ικανοποιεί τα πιο πάνω χαρακτηριστικά είναι η 13π/3 rad ([2]).

---

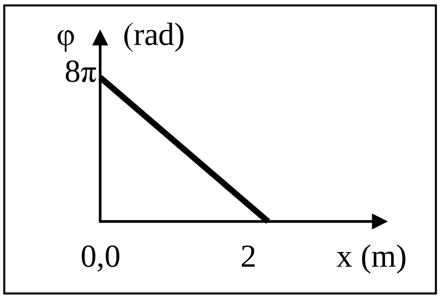
[1] *Η τιμή k=0 στο (III) πακέτο δεν είναι επιτρεπτή, αφού ως αρνητική δεν έχει φυσική σημασία.*

Από εδώ και πέρα τα «πράγματα» γίνονται εύκολα.

$$\Delta\phi_{\Lambda,\mathrm{A}} = \frac{13\pi}{3} - \frac{11\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \textit{και} \quad \Delta\phi_{\Lambda,\mathrm{A}} = 2\pi\frac{d}{\lambda} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = 2\pi\frac{\frac{4}{3}}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{3\lambda} \rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Εξισώστε τη φάση του κάματος στο Α τη στιγμή t=1 sec με 11π/3 και βρείτε τη T=0,5 sec

Ζ] Για ένα γραμμικό αρμονικό κύμα που τη χρονική στιγμή $t_o=0$ ξεκινά από τη πηγή του, η φάση τη χρονική στιγμή $t_1=2$ sec μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την απόσταση x από τη πηγή του κύματος όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Αν το πλάτος ταλάντωσης των διάφορων υλικών σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται στη διεύθυνση διάδοσής του είναι Α=0,1 m , να βρείτε :



I. Τη συχνότητα και τη ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
II. Την εξίσωση του κύματος.
III. Το στιγμιότυπο του κύματος για τη στιγμή t_1 .
IV. Το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης και της επιτάχυνσης του σημείου της ευθείας διάδοσης που απέχει από τη πηγή απόσταση x=1 m τη χρονική στιγμή $t_2=5$ sec.

Εργαστείτε με τις συντεταγμένες (φ,x)=(8π,0) και (φ,x)=(0,2). Βρείτε έτσι ότι T=0,5 sec και λ=0,5 m.

I. *ταχύτητα διάδοσης :* $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda \cdot f = 1$ m/sec

II. $\psi = 10^{-1} \cdot \eta\mu 2\pi(2t - 2x)$ *(S.I.)* *(1)*

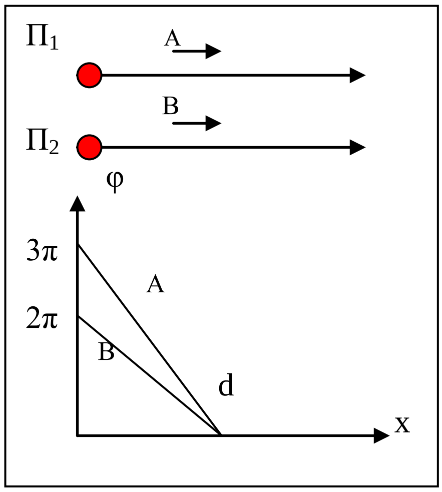
III. *Ακολουθείστε τη ταχτική σχεδίασης του ψ-x*

- *«φορτώστε στην (1) την τιμή t_1=2 sec*
- *Βρείτε το π.ο. για το x, μέσα από τη συνθήκη φ≥0*
- *Φτιάξτε πίνακα τιμών για x και ψ , δίνοντας στο x τιμή αρχικά $x_{\max}$ και μετά $x_{\max}$ -λ/4, …*

IV. *Βρείτε εύκολα τη θέση ψ «φορτώνοντας» στην (1) τις τιμές του x=1 m και t_2=5 sec. Με Α.Δ.Ε. ταλάντωσης-αφού ξέρεις θέση- βρες την ταχύτητα (μέτρο). Για την επιτάχυνση θυμήσου ότι είναι «δεμένη» με τη θέση* $|a| = -\omega^2 \cdot \psi$

[2] Η τιμή 10π/3 rad ως φάση του Λ αποκλείεται διότι δεν ικανοποιείται το πρώτο χαρακτηριστικό που επιβάλλεται να έχει το σημείο Λ

Η] Στο σχήμα φαίνονται δυο κύματα που ξεκινούν ταυτόχρονα την t=0 από το άκρο των δυο γραμμικών ελαστικών μέσων, χωρίς αρχική φάση. Σε κοινό σύστημα αξόνων φάσης-απόστασης, καταγράφεται η φάση και για τα δυο γραμμικά μέσα την ίδια στιγμή $t=t_1$.



(α) πρόκειται για όμοια ή διαφορετικά μέσα διάδοσης;

(β) Σε ποιο μέσο έχουμε το μεγαλύτερο μήκος κύματος ;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι εύκολη, αφού το διάγραμμα λέει ότι σε χρόνο $t=t_1$ τα δυο κύματα διένυσαν την ίδια απόσταση d. Επομένως έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης και έτσι τα μέσα επιβάλλεται να είναι όμοια, αφού η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου.

Το δεύτερο ερώτημα είναι λίγο…τσιμπημένο !

$1^{ος}$ Τρόπος

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow \phi = \omega \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \rightarrow \phi = \omega \cdot t - kx \rightarrow \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta x}\right| = k \qquad (1)$$

Από την (1) φαίνεται ότι το μέγεθος k εκφράζει την κλίση των γραφημάτων. Επομένως ισχύει :

$$k_A > k_B \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_{\rm A}} > \frac{2\pi}{\lambda_{\rm B}} \rightarrow \lambda_{\rm A} < \lambda_{\rm B} \qquad (2)$$

$2^{ος}$ Τρόπος (πιο …φυσιολογικός !)

$$(\phi\acute{\alpha}\sigma\eta)_{\rm A} = 2\pi\left(\frac{t}{T_{\rm A}} - \frac{x}{\lambda_{\rm A}}\right)$$

$$\xrightarrow{\acute{\alpha}\mu\alpha\ t=t_1\ \kappa\alpha\iota\ x=0} 3\pi = 2\pi \cdot \frac{t_1}{T_A} \rightarrow T_A = \frac{2}{3} \cdot t_1$$

$$\xrightarrow{\acute{\alpha}\mu\alpha\ t=t_1\ \kappa\alpha\iota\ x=d} 0 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T_A} = \frac{d}{\lambda_{\rm A}}\right) \rightarrow \frac{d}{\lambda_{\rm A}} = \frac{3}{2}$$

Όμοια εργαζόμενοι για την φάση στη περίπτωση του κύματος Β, έχουμε : $\frac{d}{\lambda_{\rm B}} = 1$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $\lambda_{\rm B} = \frac{3}{2} \cdot \lambda_{\rm A}$ *!!!*

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)