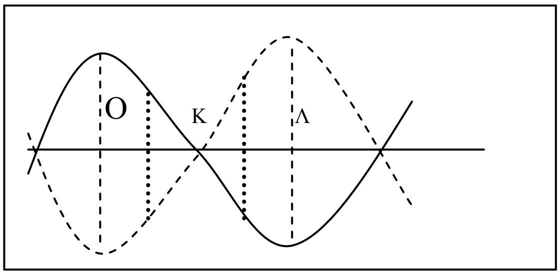
Ασκήσεις στα στάσιμα

1. Δυο όμοια γραμμικά αρμονικά κύματα πλάτους Α=2cm και συχνότητας f=100Hz, διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε ένα ελαστικό μέσο με ταχύτητα υ=30 m/sec. Έστω ότι στη θέση x=0 (σημείο Ο) του στάσιμου κύματος που δημιουργείται υπάρχει κοιλία και τη χρονική στιγμή t=0 η απομάκρυνση στη θέση αυτή είναι ψ=0 και η ταχύτητα θετική.



I. Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για τα σημεία Κ και Λ του μέσου.

II. Να βρεθούν οι θέσεις δυο υλικών σημείων του μέσου ανάμεσα στα σημεία Ο και Λ, όπου το καθένα έχει ενέργεια ίση με το 75% της ενέργειας ταλάντωσης των υλικών σημείων που βρίσκονται στις θέσεις των κοιλιών, δεδομένου ότι σε όλα τα υλικά σημεία του μέσου αντιστοιχεί ίδια μάζα.

Εύρεση μήκους κύματος :

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda \cdot f \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 0{,}3m$$

Εξίσωση στάσιμου :

$$\psi = 2\mathrm{A} \cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow \psi = 4 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu \frac{20\pi x}{3} \cdot \eta\mu 200\pi t \quad \text{(S.I.)} \quad (1)$$

Το σημείο Κ αντιστοιχεί σε δεσμό, οπότε $\psi_k = 0 \quad \forall t$

Για το Λ έχουμε (ΟΛ)=λ/2, οπότε

$$\psi_\Lambda = 4 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu \frac{20\pi \frac{0{,}3}{2}}{3} \cdot \eta\mu 200\pi t = -4 \cdot 10^{-2} \eta\mu 200\pi t = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu(200\pi t + \pi) \quad \text{(S.I.)}$$

Εύρεση πλάτους σημείων στάσιμου που ικανοποιούν τη δοσμένη ενεργειακή σχέση

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{3}{4} \cdot \mathrm{E}_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot D \cdot A'^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot (2A)^2 \Rightarrow A' = A\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$2A \cdot \left| \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = A\sqrt{3} \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \qquad (2)$$

Οι μόνες παραδεκτές λύσεις που δίνει η (2) είναι : x=2,5 cm ή x=12,5 cm

2. Μια χορδή ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση

$\psi = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi \cdot \frac{x}{3}\right) \cdot \eta\mu 50\pi t$ (1) (x, ψ σε cm, t σε sec)

Να βρείτε :

I. Το πλάτος και την ταχύτητα των κυμάτων που η συμβολή τους μπορεί να δώσει αυτή την ταλάντωση.
II. Την απόσταση Δd μεταξύ δυο διαδοχικών ακίνητων σημείων της χορδής.
III. Την ταχύτητα που έχει τη χρονική στιγμή t=4,9 sec ένα σημείο της χορδής το οποίο απέχει από το άκρο της x=3 cm.

(I) *Σύγκριση δοσμένης με γενική* $\psi = 2\mathrm{A} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$

- *2A=10 cm ⇒A=5 cm*
- *λ=3 cm*
- *50π=2πf ⇒ f=25 Hz*

Επομένως $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda \cdot f \Rightarrow \cdots = 0{,}75 m/\sec$

(II) Ακίνητα σημεία σημαίνει ΔΕΣΜΟΣ, άρα η ζητούμενη απόσταση είναι d=λ/2=1,5 cm

(III)

$$\psi = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi \cdot \frac{x}{3}\right) \cdot \eta\mu 50\pi t \Rightarrow \psi = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \cdot \frac{3}{3} \cdot \eta\mu 50\pi t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi = 10 \cdot \eta\mu 50\pi t \Rightarrow \psi' = 10 \cdot 50\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 50\pi t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon = 500\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(50\pi \cdot 4{,}9) = 500\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 245\pi = 500\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon = -500\pi \quad \text{cm/sec}$$

3. Μια χορδή εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση

$\psi = 8 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{6}\right) \cdot \eta\mu 10\pi t$ (1) (x, ψ σε cm, t σε sec)

I. Πόσο είναι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης ;
II. Να βρείτε την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης των τρεχόντων κυμάτων από την συμβολή των οποίων προέκυψε το παραπάνω στάσιμο κύμα.
III. Να γράψετε τις εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων.

Θεωρούμε αρχή του άξονα το σημείο Ο, για το οποίο τη στιγμή t=0 είναι ψ=0 και η ταχύτητά του θετική.

4. Σ΄ ένα ομογενές ελαστικό μέσο τα σημεία $Π_1$ και $Π_2$ με $(Π_1Π_2)=20$ cm είναι πηγές κυμάτων ίδιας φάσης με συχνότητα $f=5$ Hz, πλάτος Α=4 cm και μήκος κύματος λ=4 cm. Στο μέσο Ο του $Π_1Π_2$ τη χρονική στιγμή $t_o=0$ τα κύματα συναντώνται και το σημείο Ο ταλαντώνεται. Αν για την ταλάντωση του Ο τη στιγμή $t_o=0$ είναι ψ=0 και θετική ταχύτητα :

I. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει.
II. Να βρείτε τις θέσεις και τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που δημιουργούνται μεταξύ των $Π_1$ και $Π_2$.
III. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης ψ σε συνάρτηση με τον χρόνο για τη δεύτερη προς τα δεξιά κοιλία μετά το σημείο Ο .

Στο σημείο Ο τα κύματα θα δώσουν θέση κοιλίας (x=0) σύμφωνα με τις ...ευλογίες του σχολικού βιβλίου!

(I) *Εύκολα βρείτε ότι :*

$$\psi = 8 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \eta\mu 10\pi t \quad (1) \qquad (\text{x, ψ σε cm, t σε sec})$$

(*II)* *Επιβάλλεται δεξιά και αριστερά να ισχύει :*

$$x_\Delta \le 10 \Rightarrow (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{4} \le 10 \Rightarrow \cdot k \le 4 \Rightarrow k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

Επομένως έχουμε συνολικά 10 δεσμούς !
Για τις κοιλίες αριστερά και δεξιά έχουμε :

$$x_K \le 10 \Rightarrow 2k\cdot\frac{\lambda}{4} \le 10 \Rightarrow \cdots k \le 5 \Rightarrow k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Επομένως έχουμε συνολικά 11 κοιλίες (Η κοιλία k=0 είναι η κοιλία αναφοράς και έτσι μετράται μια φορά. Εντάξει ;).

Τα σημεία $Π_1$ και $Π_2$ είναι θέσεις κοιλιών ! Αποδείξτε το.

(III) Για τη δεύτερη κοιλία... :

$$\psi = 8 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi 4}{2}\right) \cdot \eta\mu 10\pi t = 8\cdot\eta\mu 10\pi t \quad (\text{ψ σε cm, t σε sec})$$

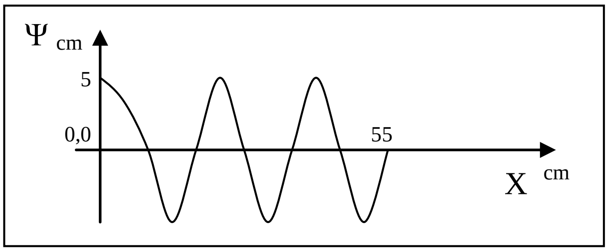
Ποια η εξίσωση ταχύτητας της $2^{ης}$ κοιλίας ;

5. Η εξίσωση ενός στάσιμου κύματος είναι

$$\psi = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \cdot \eta\mu 20\pi t \quad (1) \qquad (\text{x, ψ σε cm, t σε sec})$$

I. Να γράψετε τις εξισώσεις των δυο κυμάτων που συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα.
II. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών.
III. Τι ταχύτητα έχει τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{8}{9}$sec ένα σημείο του μέσου που απέχει d=2 cm από τη θέση x=0 ;
IV. Με ποια ταχύτητα διαδίδονται τα κύματα ;

6. Το σχήμα δείχνει το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή που οι κοιλίες έχουν τη μέγιστη απομάκρυνση. Αν η περίοδος των κυμάτων που δίνουν το στάσιμο είναι T=4 sec :



I. Να σχεδιαστούν τα στιγμιότυπα μετά από χρόνο 1 sec και μετά από 3 sec.
II. Να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση x=12,5 cm.

(I) *Όταν* $\Delta t_1 = 1\sec = \frac{T}{4}$, *όλες οι δομικές μονάδες θα περνούν από τη θέση ισορροπίας! Έτσι το γραμμικό μέσο θα δίνει εικόνα –στιγμιαία- ευθείας γραμμής.*

Όταν $\Delta t_1 = 2\sec = \frac{T}{2}$ *τότε οι δομικές μονάδες που είναι σε θέσεις κοιλιών θα βρίσκονται στη max απομάκρυνση (±2A), αλλά με αντίθετο πρόσημο στη τιμή της ψ, σε σχέση με αυτό του δοθέντος διαγράμματος.*

II) *Εύκολα προκύπτει ότι η εξίσωση του στάσιμου είναι :*

$$\psi = 5 \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{\pi x}{10} \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} t \ \ (\ cm, sec\ )$$

Το πλάτος της ταλάντωσης για τη δομική μονάδα με x=12,5 cm είναι

$$\left|A'\right| = 5 \cdot \left|\sigma \upsilon \nu \pi \frac{12{,}5}{10}\right| = 5 \cdot \left|\sigma \upsilon \nu \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

7. (*Υπολογισμός της απόστασης ενός σημείου στάσιμου κύματος από την πλησιέστερη σε αυτό κοιλία*)

Δυο αρμονικά κύματα , με εξισώσεις :

$\psi_1 = 0{,}4 \cdot \eta\mu\pi(0{,}25t - \chi)$ *και* $\psi_2 = 0{,}4 \cdot \eta\mu\pi(0{,}25t + \chi)$ (S.I) διαδίδονται ταυτόχρονα πάνω σε μια χορδή . Το αποτέλεσμα της συμβολής των δύο κυμάτων είναι ένα στάσιμο κύμα. Ένα σημείο Π της χορδής έχει πλάτος ταλάντωσης $A'_\Pi = 0{,}4\sqrt{2}$ m. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Π από την πλησιέστερη σε αυτό κοιλία .

8. Σ' ένα στάσιμο κύμα δυο μόρια του ελαστικού μέσου απέχουν από τον ίδιο δεσμό Δ αποστάσεις λ/6 και λ/3 αντίστοιχα.

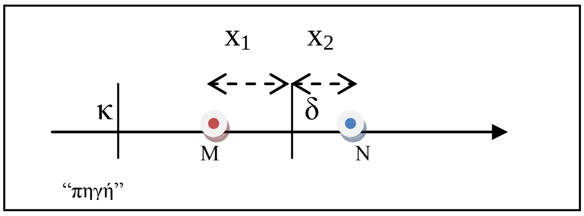
I. Ποια είναι η μεταξύ τους διαφορά φάσης ;

II. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελούν, αν το πλάτος του καθενός από τα κύματα που δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι Α ;

(Ι) Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

a. Και τα δυο σημεία βρίσκονται στην ίδια πλευρά του δεσμού, τότε αφού ο επόμενος δεσμός βρίσκεται σε απόσταση λ/2>λ/3>λ/6, με συνέπεια τα δυο σημεία να είναι μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών, άρα Δφ=0 rad.

b. Τα σημεία βρίσκονται εκατέρωθεν του δεσμού και αφού λ/3<λ/2 και λ/6<λ/2, θα έχουν διαφορά φάσης |Δφ|=π rad.



(ΙΙ) Θεωρώ γειτονική κοιλία ως «πηγή», οπότε οι αποστάσεις των σημείων Μ και Ν είναι αντίστοιχα $x_1 = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} = \frac{\lambda}{12}$ και

$$x_2 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} = \frac{5\lambda}{12}$$

Τότε :
$$\left|A'_M\right| = 2A \cdot \left|\sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{\frac{\lambda}{12}}{\lambda}\right| = 2\mathrm{A} \cdot \left|\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}\right| = \mathrm{A}\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \left|A'_N\right| = A\sqrt{3}$$

9. (*Στάσιμα κύματα σε χορδή*) .

Τα δυο άκρα μιας χορδής μήκους l =14 cm είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Διεγείρουμε τη χορδή με κατάλληλο τρόπο και παρατηρούμε ότι πάνω της σχηματίζονται στάσιμα κύματα, καθώς και ότι η χορδή πάλλεται με συχνότητα f=4 Hz. Αν γνωρίζουμε ότι στα άκρα της χορδής σχηματίζονται δεσμοί και ότι συνολικά πάνω στη χορδή σχηματίζονται επτά κοιλίες , τότε :

A. Να σχεδιάσετε τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται πάνω στη χορδή .

B. Αν η μέγιστη απομάκρυνση των σημείων της χορδής είναι 1,5 cm :

a) Να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος .

b) Να βρείτε τις εξισώσεις των κυμάτων, η συμβολή των οποίων δημιουργεί το στάσιμο κύμα .

10. Ένα διαπασών συχνότητας $f_1=170\ Hz$ ηχεί μπροστά σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Ανάμεσα στο διαπασών και στον τοίχο, στην ευθεία που είναι κάθετη στον τοίχο, μετακινείται ένας ευαίσθητος δέκτης. Παρατηρούμε ότι σε δυο διαδοχικές θέσεις του δέκτη, που απέχουν μεταξύ τους 1 m, η ένδειξή του μηδενίζεται.
Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης του ήχου.
Αν στη θέση του διαπασών βάλουμε ένα άλλο με άγνωστη συχνότητα, διαπιστώνουμε ότι δυο διαδοχικά μέγιστα έντασης απέχουν μεταξύ τους 0,2 m. Ποια είναι η συχνότητα του δεύτερου διαπασών ;

Οι δυο διαδοχικές θέσεις του δέκτη αντιστοιχούν σε θέσεις δεσμών, άρα

$$d_{\Delta\Delta} = \frac{\lambda}{2} = 1\,\mathrm{m} \Rightarrow \lambda = 2\,\mathrm{m} \Rightarrow \text{οπότε } \upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda \cdot f = 340\ \mathrm{m/sec}$$

Η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου, εντός του οποίου το κύμα διαδίδεται και επομένως :

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda' \cdot f' \quad (1) \qquad \text{Όμως } \frac{\lambda'}{2} = 0{,}2\,m \Rightarrow \lambda' = 0{,}4\,\mathrm{m} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $f' = 850\ Hz$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)