2.29 Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής. Ο χρόνος που χρειάζεται ένα σημείο της χορδής για να μετατοπιστεί από τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης στη θέση ισορροπίας του είναι 0,15 s. Ποια είναι η συχνότητα του κύματος; Αν το μήκος κύματος είναι λ= 1,2 m ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

Ο χρόνος των 0,15 sec αντιστοιχεί σε χρόνο T/4 και επομένως T=4 . 0,15 =0,6 sec → f=1/T = 10/6 Hz

Θεμελιώδης εξίσωση κυματικής : $\upsilon = \lambda \,.\, f = 1{,}2 \,.\frac{10}{2} = 2\; m/sec$

2.30 Η εξίσωση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος είναι y =3x10^{-2}ημ(1320t -4x). Να υπολογίσετε:
α) το μήκος κύματος (λ).
β) την ταχύτητα του κύματος υ.
γ) τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.
δ) την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου τα οποία παρουσιάζουν διαφορά φάσης 120°.

Η γενική εξίσωση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος είναι η $\boldsymbol{y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$

Συγκρίνουμε τη δοσμένη με τη γενική και έχουμε :

$$A = 3\; 10^{-2} m \;\;,\;\; 2\pi\frac{t}{T} = 1320t \to T = \frac{2\pi}{1320}\text{sec} \quad \kappa\alpha\iota \quad 2\pi\frac{\chi}{\lambda} = 4x \;\to \lambda = \frac{\pi}{2}\;\; m$$

(α) $\lambda = \frac{\pi}{2}\;\; m = 1{,}57\, m$ (β) $: \upsilon = \lambda \,.\, f \to \upsilon = \frac{\pi}{2}\,.\frac{1320}{2\pi} = 330\; m/sec$ (χμ! ηχητικό…)

(γ) $u_{max,\tau\alpha\lambda\alpha\nu\tau} = \omega.A = \frac{2\pi}{T}\,.A = \frac{2\pi}{1}\,.\frac{1320}{2\pi}\,.3\;10^{-2} = 39{,}6\; m/sec$

(δ) Έστω ότι το σημείο 1 είναι πιο κοντά στη πηγή ή αν θέλετε το κύμα φτάνει πρώτα στο 1 και μετά από απόσταση Δx, συναντά και θέτει σε ταλάντωση το σημείο 2. Αυτό σημαίνει ότι η φάση του σημείου 1 είναι μεγαλύτερη από τη φάση ταλάντωσης του σημείου 2.

Ισχύει : $\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$ και $\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$

…και επομένως $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\,.(x_2 - x_1) \;\to \Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}\,.\Delta\varphi \;\to \Delta x = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\,.\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}\; m = 0{,}523\, m$

2.31 Η πηγή κυμάτων Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή μηδέν να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A=10 cm και συχνότητας f=0,25 Hz. Το κύμα που δημιουργεί διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου με ταχύτητα υ=3 m/s. Να υπολογίσετε:
α) μετά από πόσο χρόνο θα αρχίσει να κινείται κάποιο σημείο Β του μέσου, που απέχει x = 60 m από την πηγή Ο.
β) την απομάκρυνση του σημείου Β, από τη θέση ισορροπίας του, τη στιγμή t = 21,5 s.

(α) Η διάδοση της κυματικής διαταραχής γίνεται με σταθερή ταχύτητα κι επομένως ισχύει η γνωστή εξίσωση της Ε.Ο.Κ.

$$\Delta x = u\,.\Delta t \;\rightarrow 60 = 3\,.\Delta t \;\rightarrow \Delta t = 20\ sec$$

(β) Ας πάρουμε την απάντηση από την κυματική εξίσωση…

$A = 0{,}1\ m$, $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25} = 4\ sec$ *και* $\upsilon = \lambda.f \;\rightarrow 3 = \lambda\,.0{,}25 \;\rightarrow \lambda = 12\ m$ *οπότε…*

$$\boldsymbol{y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \rightarrow y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{12}\right) \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) τη στιγμή t=21,5 sec μπορεί να περιγράψει την ταλάντωση του εν λόγω σημείου (x=60 m), αφού έχει ήδη φτάσει σε αυτό !

$$\mathrm{y = 0{,}1\eta\mu 2\pi}\left(\frac{\mathrm{t}}{4} - \frac{\mathrm{x}}{12}\right) \rightarrow \mathrm{y} = 0{,}1\ \eta\mu\left(\frac{2\pi\ .\ 21{,}5}{4} - \frac{60}{12}.2\pi\right) \rightarrow y = 0{,}1\ \eta\mu\left(\frac{20\pi + \pi + 0{,}5\pi}{2} - 10\pi\right) \rightarrow y = 0{,}1\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y = 0{,}1\ .\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) \;\rightarrow y = 0{,}1\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ m = 5\sqrt{2}\ cm$$

2.32 Ένα στάσιμο κύμα περιγράφεται από την εξίσωση: $y = 0{,}5\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{3}\ \eta\mu 40\pi t$ όπου τα x και y είναι σε cm και το t σε s.
α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα.
β) Πόσο απέχουν δύο διαδοχικοί δεσμοί;
γ) Τι ταχύτητα έχει τη χρονική στιγμή t = 9/8 s ένα σημείο του μέσου το οποίο απέχει 1cm από τη θέση x = 0;
δ) Με τι ταχύτητα διαδίδονται τα κύματα που δημιουργούν το στάσιμο;

$$y = 2A\,\sigma\upsilon\nu\,2\pi\frac{x}{\lambda}\ \ \eta\mu\frac{2\pi}{T}t$$

*Δίπλα έχουμε την εξίσωση της κυματικής διαταραχής, που είναι γνωστή με το όνομα **στάσιμο κύμα**.*
Συγκρίνοντας την εν λόγω εξίσωση, με τη δοσμένη, έχουμε:

$2A = 0{,}5 \;\rightarrow A = 0{,}25\ cm$, $2\pi\frac{x}{\lambda} = \frac{\pi x}{3} \;\rightarrow \lambda = 6\ cm$ *και* $\frac{2\pi}{T}.t = 40\pi t \rightarrow T = \frac{1}{20}\ sec$

(α) Και έτσι μπορούμε να φτιάξουμε τις εξισώσεις των γ.α. κυμάτων που συμβάλλουν…

$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \;\rightarrow \rightarrow y = 0{,}25\ \eta\mu 2\pi\left(20t - \frac{x}{6}\right)$ *(cm, sec)*

Ομοίως

$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \;\rightarrow \rightarrow y = 0{,}25\ \eta\mu 2\pi\left(20t + \frac{x}{6}\right)$ *(cm, sec)*

(β) Η απόσταση δυο διαδοχικών δεσμών είναι ίση με $d = \frac{\lambda}{2} = 3\ cm$

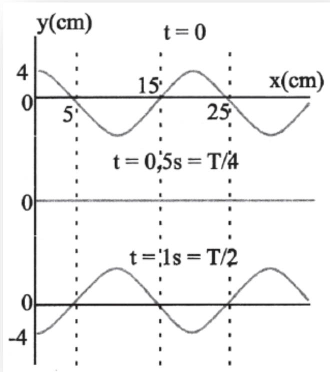
(γ) Για x=1 cm , η εξίσωση του στάσιμου δίνει : $y = 0{,}5\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}.1\right)\eta\mu 40\pi t \;\rightarrow y = 0{,}25\ \eta\mu 40\pi t$ (1)

Η εξίσωση (1) περιγράφει απλή αρμονική ταλάντωση σε θέση κοιλίας. Από αυτή την εξίσωση η ταχύτητα οφείλει να έχει εξίσωση:

$\upsilon = 0{,}25\,.40\pi\,.\,\sigma\upsilon\nu 40\pi t \;\rightarrow \acute{o}\tau\alpha\nu\; t = \frac{9}{8}sec \rightarrow \upsilon = 10\pi\; \sigma\upsilon\nu\; \left(40\pi\frac{9}{8}\right) \rightarrow \upsilon = 10\pi\; \sigma\upsilon\nu(45\pi) \;\rightarrow \upsilon = -10\pi\; cm/sec$

(δ) Θεμελιώδης εξίσωση κυματικής για τα τρέχοντα κύματα : $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda.f = 6\,.20 = 120\; cm/sec$

2.33 Στο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος, κάποια στιγμή κατά την οποία όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου έχουν μηδενική ταχύτητα. Τα κύματα που συμβάλλουν για να δώσουν το στάσιμο κύμα έχουν περίοδο T = 2 s.
α) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος μετά από 0,5 s και μετά από 1 s.
β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου που βρίσκεται στη θέση x = 12,5 cm.



Αφού όλα τα σημεία έχουν στο δοσμένο στιγμιότυπο μηδενική ταχύτητα, σημαίνει ότι βρίσκονται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους και επομένως το πλάτος ταλάντωσης των κοιλιών είναι 2A=4 cm.

Επιπλέον το διάγραμμα μας λέει ότι η απόσταση δυο διαδοχικών δεσμών είναι ίση με λ/2=10 cm → λ=20 cm.
(α) Για να δείξουμε το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος, αρκεί να μελετήσουμε μια κοιλία, για παράδειγμα την x=0.

Όταν t=0,5 sec δηλαδή όταν t=T/4 κάθε κοιλία θα διέρχεται από θέση ισορροπίας και το ίδιο θα κάνουν όλες οι δομικές μονάδες του στασίμου (πλην δεσμών)
Όταν t=1 sec δηλαδή όταν t=T/2, τότε η κοιλία x=0 θα είναι σε κάτω ακραία θέση, η κοιλία x=10 cm στην άνω ακραία θέση κ.ο.κ Το ελαστικό μέσο θα έχει μια καμπύλωση απολύτως συμμετρική ως προς τον άξονα των x.

(β) $A' = \left|2A.\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| \rightarrow A' = \left|4\,.\;\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{12.5}{20}\right| \rightarrow A' = |4\,.\;\sigma\upsilon\nu 1{,}25\pi| \;\rightarrow A' = \left|4\;\sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right| \rightarrow A' = \left|-4\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \rightarrow\; A' = 2\sqrt{2}\; cm$

2.34 Διαπασών συχνότητας 340 Hz ηχεί μπροστά σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Ανάμεσα στο διαπασών και στον τοίχο, στην ευθεία που είναι κάθετη στον τοίχο, μετακινείται ευαίσθητος δέκτης. Παρατηρούμε ότι σε δύο διαδοχικές θέσεις του δέκτη, που απέχουν μεταξύ τους 0,5 m, η ένδειξή του μηδενίζεται.
α) Ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου; Αντικαθιστούμε το διαπασών με άλλο άγνωστης συχνότητας.
β) Διαπιστώνουμε δύο διαδοχικά μέγιστα έντασης σε θέσεις που απέχουν μεταξύ τους 0,2 m. Ποια είναι η συχνότητα του δεύτερου διαπασών;

Λέει «…σε δύο διαδοχικές θέσεις του δέκτη, που απέχουν μεταξύ τους 0,5 m, η ένδειξή του μηδενίζεται». Αυτές οι θέσεις είναι διαδοχικές θέσεις δεσμών και επομένως $\frac{\lambda}{2} = 0{,}5\; m \;\rightarrow \lambda = 1\; m.$

(α) Θεμελιώδης νόμος κυματικής για την ταχύτητα διάδοσης $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda.f \;\rightarrow\; \upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \;340\; m/sec$

(β) Στο ίδιο μέσο διάδοσης αναφερόμαστε, οπότε η ταχύτητα διάδοσης δεν αλλάζει. Επιπλέον η απόσταση δυο διαδοχικών μεγίστων έντασης, εκφράζει απόσταση διαδοχικών κοιλιών. Επομένως $\frac{\lambda'}{2} = 0{,}2\; m \;\rightarrow \lambda' = 0{,}4\; m$

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda'.f' \rightarrow f' = \frac{\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}}{\lambda'} \;\rightarrow\; f' = \frac{340}{0{,}4}\; Hz = 850\; Hz$$

2.35 Δύο κύματα διαδίδονται ταυτόχρονα κατά μήκος του ίδιου σχοινιού. Οι εξισώσεις των κυμάτων είναι:
y_1 = 5ημπ(5t - x) και y_2 = 5ημπ(5t + x) όπου τα y και x είναι μετρημένα σε cm και το t σε s.
α) Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.
β) Βρείτε τη θέση τριών σημείων του σχοινιού τα οποία παραμένουν ακίνητα και τριών σημείων των οποίων το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.
γ) Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης;

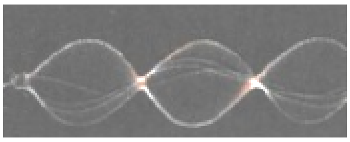
Ας πάρουμε τις πληροφορίες που μπορεί να μας δώσει η εξίσωση ενός από τα δύο γραμμικά αρμονικά κύματα, τα οποία συνθέτουν το στάσιμο κύμα.

Η σύγκριση $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ *και της* y_1 *= 5ημπ(5t - x) δίνει :*

$$A = 5\ cm\,, \quad 2\pi\frac{t}{T} = 5\pi t\ \rightarrow T = 0{,}4\sec\ \ \kappa\alpha\iota \quad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pi x \rightarrow \lambda = 2\ cm$$

(α) Θεμελιώδης νόμος κυματικής για την ταχύτητα διάδοσης $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda.f\ \rightarrow\ \upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} =\ 2\,.\frac{10}{4} = 5\ c\ m/sec$

(β) Η θέση x=0 είναι θέση κοιλίας (Κοιλία-'πηγή'). Από αυτή μετράμε τις αποστάσεις όλων των σημείων του γραμμικού μέσου, όπου έχουμε στάσιμο κύμα.

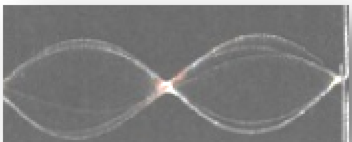


Θέσεις δεσμών : $d_\delta = (2\kappa+1).\frac{\lambda}{4} = \frac{(2\kappa+1)}{2}\ cm\,,$ *οπότε ο τρεις πρώτες θέσεις δεσμών, προς την ίδια κατεύθυνση από την πηγή, θα είναι σε 0,5 cm , 1,5 cm , 2,5 cm*

Θέσεις κοιλιών : $d_\kappa = \kappa\,.\frac{\lambda}{2} = \kappa\ cm\,,$ *οπότε ο τρεις πρώτες θέσεις δεσμών, προς την ίδια κατεύθυνση από την πηγή, θα είναι σε 1 cm , 2cm , 3 cm, …*

(γ) Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης παρατηρείται στις κοιλίες και είναι $A' = 2A = 10\ cm$

2.36 Δύο κύματα ίδιου πλάτους, συχνότητας 60Hz, διαδίδονται αντίθετα σε χορδή της οποίας τα άκρα είναι **στερεωμένα** σε ακλόνητα σημεία. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι 120m/s. Το στάσιμο κύμα που δημιουργείται στη χορδή έχει τρεις δεσμούς. Βρείτε το μήκος της χορδής.



Εφόσον τα άκρα της χορδής είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία θα είναι δεσμοί και εφόσον το σύνολο των δεσμών είναι τρεις υπάρχει ένας ακόμη δεσμός μεταξύ των άκρων. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι ίση με λ/2 και επομένως το μήκος της χορδής είναι ίσο με λ.

Για την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που συνθέτουν το στάσιμο :

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta} = \lambda.f\ \rightarrow\ 120\ =\ \lambda\,.60\ \rightarrow \lambda = 2\ m$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

2.37 Ένας ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει στα 100 MHz.
α) Ποιο είναι το μήκος κύματος που εκπέμπει ο σταθμός;
β) Η μέγιστη mm του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος σε κάποια θέση είναι E_{max} = 12x10^{-3}V/m. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου του κύματος σε εκείνη τη θέση;
γ) Αν για τη λήψη αυτού του ηλεκτρομαγνητικού κύματος χρησιμοποιείται δέκτης με κύκλωμα LC, στο οποίο το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=5 mH, για ποια τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή συντονίζεται ο δέκτης; (c=3x10^{8}m/s) Θεωρείστε π^{2} ≈ 10

(α) Θεμελιώδης εξίσωση κυματικής … $C = \lambda . f \ \rightarrow 3\ 10^8 = \lambda .100\ 10^6 \ \rightarrow \lambda = 3\ m$

(β) Ισχύει η εξίσωση $C = \frac{E}{B} \rightarrow B_{max} = \frac{E_{max}}{C} \rightarrow B_{max} = \frac{12\ 10^{-3}}{3\ 10^8} \rightarrow B_{max} = 4\ 10^{-11}\ Tesla$

(γ) Η συχνότητα του κύματος πρέπει να είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC του δέκτη. Αυτό σημαίνει :

$$f_{κύμα} = f_{δέκτη} \rightarrow f_{κύμα} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{4\ \pi^2\ L\ f_{Κύμα}^2} \rightarrow C = \cdots = 5\ 10^{-16}\ Farad$$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)