1. Δυο πηγές αρχίζουν ταυτόχρονη ταλάντωση με εξίσωση ψ=0,02.ημ(10πt) S.I. Οι πηγές ευρίσκονται σε επιφάνεια υγρού. Η ταχύτητα διάδοσης είναι υ=2 m/sec.
(α) Ένα σημείο **Σ** απέχει από $Π_1$ 56 cm και από $Π_2$ απόσταση 76 cm.
(β) Σε ένα σημείο **Κ** το κύμα της $Π_1$ παρουσιάζει διαφορά φάσης από το κύμα της $Π_2$ κατά π/2 rad.
(γ) Ένα σημείο **Λ** αρχίζει να ταλαντώνεται λόγω του κύματος της $Π_1$ κάποια στιγμή και μετά από 0,8 sec φθάνει στο σημείο αυτό και το κύμα από την πηγή $Π_2$.
Ποιο το πλάτος ταλάντωσης των Κ, Λ και Σ ;

(α) Για το σημείο Σ η διαχείριση είναι απλή !

Αντικατάσταση στη σχέση $A' = 2A \cdot |συν 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda}| = \ldots$

(β) Για το σημείο Κ, εργαζόμαστε με τις αναλυτικές εκφράσεις της φάσης. Ας θυμηθούμε ότι φάση λέμε την έκφραση : $2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ …

(γ) Για το σημείο Λ ισχύει η εξίσωση $r_2 - r_1 = υ_{διαδ} \cdot \Delta t$ …

2. Δυο εγκάρσια κύματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις $\psi_1 = 0{,}1 \cdot ημ(2\pi t - 3\pi r_1)$ και $\psi_2 = 0{,}2 \cdot ημ(3\pi t - 3\pi r_2)$, (cm, sec) διαδίδονται πάνω στην υδάτινη επιφάνεια… Αν για μια δομική μονάδα της επιφάνειας είναι $r_1 = 2cm$ και $r_2 = 2{,}5cm$, να βρείτε τη θέση της όταν t=5 sec.

Μη φτιάξετε εξίσωση-τέρας ! Βρείτε αν έφτασαν –στο δοσμένο χρόνο- τα δυο κύματα στη δομική μονάδα και μετά …επαλληλία. Υπολογίστε την τιμή των απομακρύνσεων ψ_1 και ψ_2 και μετά …προσθέστε !

3. Έχουμε τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$. Σύγχρονες σε επιφάνεια υγρού. Εξισώσεις ταλάντωσης αυτών είναι ψ=Α.ημ4πt, S.I. Ταχύτητα διάδοσης υ=6 m/sec. Ένα σημείο Σ απέχει από την $Π_2$ απόσταση 5m. Ποια είναι η μικρότερη απόσταση που μπορεί να έχει από την $Π_1$ ώστε να είναι διαρκώς ακίνητο;

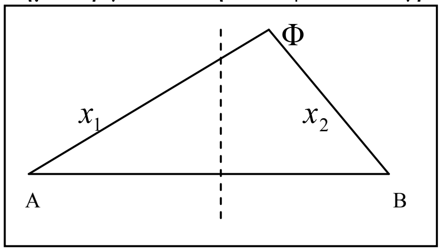
Για τις υπερβολές πλήρους απόσβεσης ισχύει η εξίσωση

$$r_2 - r_1 = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow 5 - r_1 = (2k+1) \cdot \frac{3}{2} \rightarrow \cdots r_{1,min} = 0{,}5\ m$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι στη παραπάνω εξίσωση απαιτείται $r_1 > 0$

Υπάρχει άλλη λύση ;

4. Δυο σύγχρονες σημειακές πηγές Α και Β δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού αρμονικά κύματα με πλάτος Α=3 mm, περίοδο Τ=0,4 sec και ταχύτητα υ=5 m/sec. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο της επιφάνειας σε απόσταση $x_1 = 6m$ και $x_2 = 5{,}5m$ από τις πηγές Α και Β αντίστοιχα.



I. Να δείξετε ότι ο φελλός θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης.
II. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα του φελλού
III. Ποια η επιτάχυνση του όταν βρίσκεται σε απόσταση ψ=+3 mm από τη θέση ισορροπίας του ;

Εύρεση t_1 και t_2 :

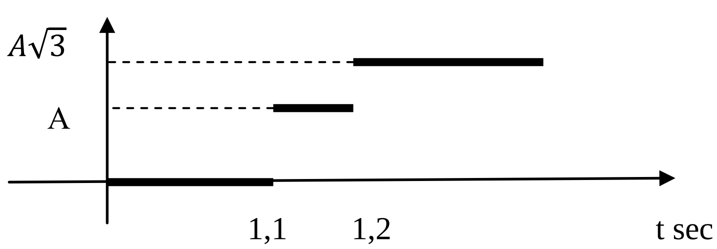
$$t_1 = \frac{x_1}{\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}} = \frac{6}{5} = 1{,}2 \ \ \text{sec} \ \text{, όμοια} \ \ t_2 = 1{,}1 \ \ \text{sec}$$

Από 0 έως 1,1 sec ο φελλός είναι ακίνητος. Από 1,1 sec έως 1,2 sec ο φελλός ταλαντώνεται από το κύμα της Β, ενώ πέραν του 1,2 sec ο φελλός ταλαντώνεται με την γνωστή εξίσωση της συμβολής.

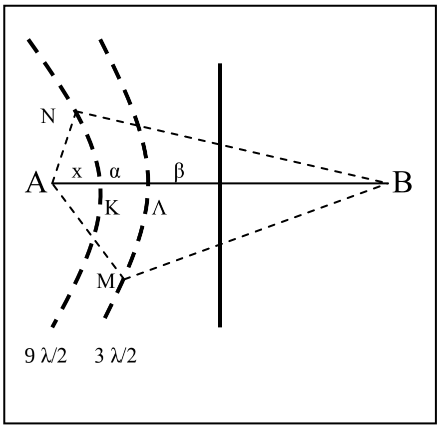
Η χρονική διάρκεια της ταλάντωσης του φελλού μόνο από το κύμα της πηγής Β, είναι μόλις Τ/4 ! Σε αυτό το χρονικό διάστημα ο φελλός έκανε μετάβαση από θ.ι. σε ακραία θέση ταλάντωσης +Α. Οι τιμές μερικών μεγεθών- σε αυτό το διάστημα- έχουν ως εξής :
Α= 3 mm , f=2,5 Hz , $|a_{\max}| = \omega^2 \cdot A$, …
Ποια η θέση του φελλού όταν t=1,15 sec ; Απλά ! εργαστείτε με την εξίσωση του κύματος της πηγής Β: $\psi_B = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0{,}4} - \frac{5{,}5}{2} \right)$ (S.I.) εντάξει ;

Όταν t > 1,2 sec τότε η εξίσωση συμβολής δίνει : $A' = \cdots = A\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-3} m$, επίσης f=2,5 Hz , $|\upsilon_{\max}| = \omega \cdot A'$, $a = -\omega^2 \cdot \psi$ κ.ο.κ.

Στο διάγραμμα που ακολουθεί δείτε-χωρίς σχόλια- το πλάτος της ταλάντωσης του Φ, σε συνάρτηση με τον χρόνο!



5. Δυο πηγές Α και Β που βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού είναι σε φάση και εκπέμπουν αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους , ίδιας ταχύτητας και με μήκος κύματος λ=2 m. Δυο σημεία Ν και Μ βρίσκονται στην επιφάνεια του υγρού και απέχουν από τις πηγές αντίστοιχα ΑΝ=11 m , ΒΝ=20 m και ΑΜ=15 m , ΒΜ=18 m.

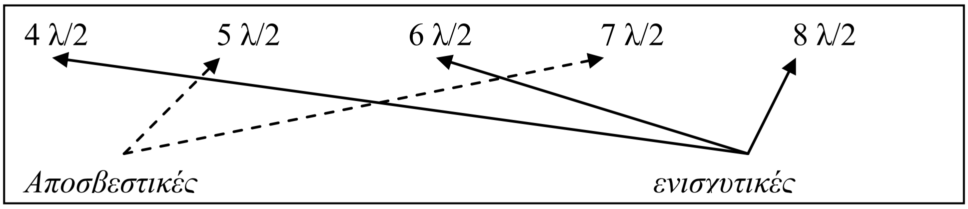


I. Στα σημεία Ν και Μ έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση ;
II. Πόσες υπερβολές αποσβεστικής συμβολής σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Ν και Μ ;
III. Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σημεία τομής των υπερβολών που περνούν από τα Ν και Μ, με την ευθεία ΑΒ ;

Υλικό σημείο Ν $\rightarrow$ $r_B - r_A = 20 - 11 = 9.1 \quad \left(= 9 \cdot \dfrac{\lambda}{2} \right)$ περιττό πολ/σιο του λ/2 , επομένως αποσβεστική συμβολή.

Υλικό σημείο Μ $\rightarrow$ $r_B - r_A = 18 - 15 = 3.1 \quad \left(= 3 \cdot \dfrac{\lambda}{2} \right)$ περιττό πολ/σιο του λ/2 , επομένως αποσβεστική συμβολή.

Μεταξύ των Ν και Μ έχουμε τις υπερβολές που φαίνονται στον πίνακα !



ΒΚ-ΚΑ = 9 λ/2 → α+β+x+α+β-x = 9 λ/2 → 2α +2β = 9 λ/2

ΒΛ-ΛΑ = 3 λ/2 → α+β+x+β-α-x = 3 λ/2 → 2β = 3 λ/2

Επομένως : 2α + 3 λ/2 = 9 λ/2 → α = 6 λ/4

Οι υπερβολές έχουν δυο …ονόματα !
Όνομα Α : λέμε η ενισχυτική υπερβολή k=1
Όνομα Β : λέμε η αποσβεστική 5λ/2

6. Δυο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος Α=5 cm και συχνότητα *f*=10 Hz και μήκος κύματος λ=10 cm παράγονται από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ που βρίσκονται σε φάση και απέχουν η μια από την άλλη $(Π_1Π_2)$=d=20 cm.

I. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης ενός σημείου που απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις d_1 και d_2 αντίστοιχα, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου και ποια η φάση του ;

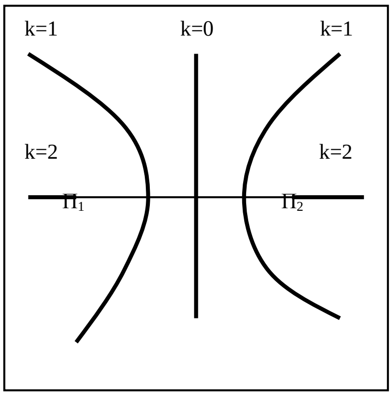
II. Πόσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ μένουν ακίνητα συνεχώς και πόσα ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;

III. Ένα σημείο Ν που απέχει από την $Π_1$ απόσταση d_1'=8,75 cm και βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ τι απομάκρυνση θα έχει από την θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t= 37/60 sec.

I) $$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \cdots = 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\left(\frac{d_1 - d_2}{0{,}2}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(10t - \frac{d_1 + d_2}{0{,}2}\right) \text{ (S.I.)}$$

II) Για να βρούμε το πλήθος όλων των ενισχυτικών υπερβολών βασιζόμαστε σε δυο σχέσεις : $|r_2 - r_1| = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$, $k \geq 0$ και επιπλέον $|r_2 - r_1| \leq D$ λόγω γεωμετρίας!

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις –συνεργαζόμενες- καθορίζουν τιμές για τον ακέραιο k.



$$2k \cdot \frac{\lambda}{2} \leq D \rightarrow k \leq \frac{D}{\lambda} \rightarrow k \leq \frac{20}{10} \rightarrow k \leq 2 \rightarrow k = 0, 1, 2$$

Για k=2 συμβαίνει η διαφορά των δυο δρόμων να είναι 2λ δηλ. ίση με την απόσταση D.

Σε αυτή την περίπτωση οι καμπύλες υπερβολής εκφυλλίζονται σε ευθύγραμμα τμήματα επί της ευθείας $Π_1Π_2$ και εκατέρωθεν των πηγών εμφανιζόμενα !

Έτσι μεταξύ των $Π_1$ και $Π_2$ έχουμε τρεις (3) ενισχυτικές υπερβολές, που παρουσιάζουν διαφορά απόστασης :

2 λ/2 0 2 λ/2

Όμοια εργαζόμενοι υπολογίζουμε ότι το πλήθος των αποσβεστικών υπερβολών είναι πέντε (5)

III) Αφού d_1'=8,75 cm, εύκολα προκύπτει ότι : $d_2' - d_1' = 2{,}5 10^{-2}$ m

$$\text{Επομένως : } \psi = 0{,}1 \cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\left(\frac{2{,}5 \cdot 10^{-2}}{0{,}2}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(10 \cdot \frac{37}{60} - \frac{0{,}2}{0{,}2}\right) = \cdots = \frac{\sqrt{6}}{40} \text{ m}$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι αποδεκτό ή νομίζετε ότι έπρεπε να γίνει κάποιος έλεγχος του τύπου «έφτασαν τα δυο κύματα στο σημείο Ν, όταν t=37/60 sec»;

7. Σε δυο σημεία Κ και Λ της ήρεμης επιφάνειας υγρού δημιουργούνται τη χρονική στιγμή t=0 ταυτόχρονα δυο πηγές αρμονικών κυμάτων πλάτους Α=3 cm και συχνότητας *f*=10 Hz. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι υ=1 m/sec. Αν σε ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού που απέχει από τις πηγές (ΜΚ)=80 cm και (ΜΛ)=57,5 cm, υπάρχει μικρός φελλός, να βρείτε :

I. Πότε αρχίζει να κινείται ο φελλός.
II. Την εξίσωση που μας δίνει την απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του όταν τα κύματα από τις πηγές συμβάλλουν.
III. Την απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του τις χρονικές στιγμές t_1=0,5 sec , t_2=0,7 sec , t_3=1 sec.

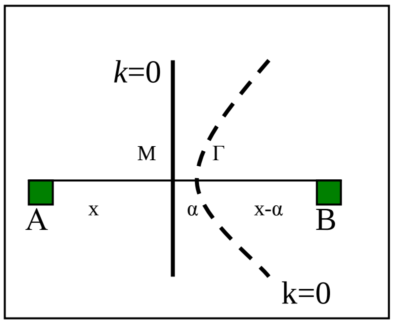
Φτιάξτε ένα υποτυπώδες σχήμα. Βρείτε τους χρόνους άφιξης των κυμάτων ίσους με 0,8 sec και 0,575 sec.

Εύκολα βρείτε την εξίσωση ταλάντωσης για τον φελλό.

$\psi = 3\sqrt{2} \cdot \eta\mu 2\pi(10t - 6{,}875)$ cm, sec.

Όταν t=0,5 sec στο Μ δεν έφτασε κανένα κύμα. Όταν t=0,7 sec τότε έφτασε στο Μ μόνο το κύμα το προερχόμενο από την πηγή Λ. Βρείτε ψ=3 cm. Στην περίπτωση του t=1 sec υπάρχει ήδη συμβολή. Βρείτε πάλι ψ=3 cm.

8. Δυο σύγχρονες σημειακές πηγές (δηλ. πηγές με ίδια φάση) ήχου Α και Β εκπέμπουν απλούς αρμονικούς ήχους της ίδιας συχνότητας και της ίδιας έντασης (δηλ. π λ ά τ ο ς). Διατρέχοντας την ευθεία ΑΒ παρατηρούμε ότι το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχουμε μέγιστο του ήχου, ενώ στο σημείο Γ για το οποίο (ΜΓ)=4,25 cm έχουμε τον πρώτο μηδενισμό του ήχου μετά το Μ. Αν η ταχύτητα του ήχου είναι υ=340 m/sec, να βρείτε τη συχνότητά του.



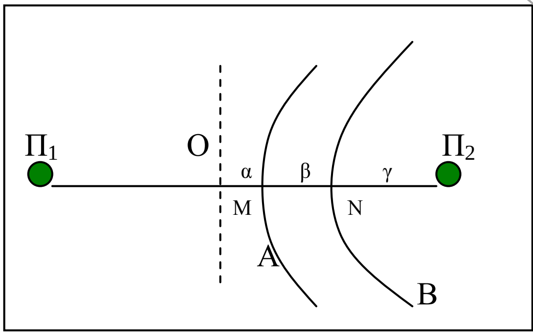
Σημείο Μ → ανήκει στη μεσοκάθετο → $r_1 = r_2$ *→ έχουμε ενισχυτική συμβολή (k=0)*

Σημείο Γ → 1η αποσβεστική → k=0 στην εξίσωση της αποσβεστικής →

$$\rightarrow r_A - r_B = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow (x+a)-(x-a) = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 4a \Rightarrow \lambda = 17 \text{ cm}$$

Επομένως : $f = \dfrac{\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta}}{\lambda} = \dfrac{340}{17 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

9. Δυο πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ με ίδια φάση βρίσκονται στο ίδιο ελαστικό μέσο και εκπέμπουν αρμονικά κύματα με συχνότητα f=10 Hz , ταχύτητα υ=20 m/sec και ίδιο πλάτος. Για δυο σημεία Α και Β, που βρίσκονται δεξιά της μεσοκαθέτου του τμήματος $Π_1Π_2$, η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές είναι $\Delta d_A = 40m$ και $\Delta d_B = 50m$.



I. Να βρείτε πόσες ενισχυτικές συμβολές υπάρχουν μεταξύ των Α και Β.
II. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω σε υπερβολές ενισχυτικής συμβολής. ΑΝ οι δυο αυτές υπερβολές τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση (ΝΜ)

$\upsilon = \lambda \cdot f \to 20 = \lambda \cdot 10 \to \lambda = 2\, m$

Για το Α ισχύει : $\dfrac{\Delta d_A}{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)} = \dfrac{40}{1} = 40 \to \Delta d_A = 40 \cdot \dfrac{\lambda}{2} \to$ *το Α ανήκει σε ενισχυτική*

Όμοια για το Β έχουμε ότι $\Delta d_B = 50 \cdot \dfrac{\lambda}{2} \to$ *και το Β ανήκει σε ενισχυτική !*

Ανάμεσα στις υπερβολές $40 \cdot \dfrac{\lambda}{2}$ *και* $50 \cdot \dfrac{\lambda}{2}$ *υπάρχουν τέσσερες (4) ενισχυτικές και πέντε (5) αποσβεστικές !*

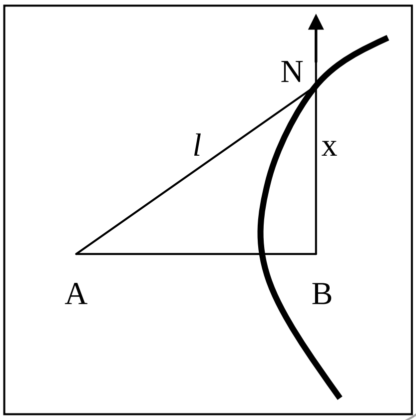
Σημείο Μ : $\alpha + \beta + \gamma + \alpha - \beta - \gamma = 40 \cdot \dfrac{\lambda}{2} \to 2\alpha = 20 \cdot \lambda \to \alpha = 20\,\text{m}$

Σημείο Ν :

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta - \gamma = 50 \cdot \frac{\lambda}{2} \to 2\alpha + 2\beta = 25 \cdot \lambda \to 2\beta = 5 \cdot \lambda \to \beta = 5\ \text{m}$$

Συνέχεια…

11. Δυο σύγχρονες πηγές A και B που βρίσκονται στην επιφάνεια νερού απέχουν d=4 m μεταξύ τους και δημιουργούν αρμονικά κύματα συχνότητας f=10 Hz τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα υ=2 m/sec. Να βρείτε τα σημεία της ημιευθείας Bx στα οποία έχουμε ενίσχυση λόγω συμβολής των κυμάτων από τις δυο πηγές.



Για να έχουμε ενίσχυση σε ένα τυχαίο σημείο N της ημιευθείας Ax, θα πρέπει να ισχύει η εξίσωση της ενισχυτικής συμβολής :

$$r_1 - r_2 = 2k\cdot\frac{\lambda}{2} \to l - x = 2k\cdot\frac{\lambda}{2} \to \sqrt{d^2+x^2} - x = k\cdot\lambda \to \sqrt{d^2+x^2} = k\cdot\lambda + x \to$$

$$d^2 + x^2 = k^2\cdot\lambda^2 + x^2 + 2k\cdot\lambda\cdot x \to d^2 = k^2\cdot\lambda^2 + 2k\cdot\lambda\cdot x \to x = \frac{d^2 - k^2\cdot\lambda^2}{2k\cdot\lambda} \qquad (1)$$

Εύρεση μήκους κύματος λ : $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta.} = \lambda\cdot f \to 2 = 10\cdot\lambda \to \lambda = 0{,}2\ \text{m}$

Επομένως η (1) γίνεται τώρα : $x = \dfrac{16 - 0{,}04\cdot k^2}{0{,}4\cdot k}$ (2)

Δίνουμε θετικές τιμές στο k, αφού έτσι απαιτεί η γεωμετρία (επιβάλλεται να ισχύει l > x και έτσι η σχέση $l - x = 2k\cdot\dfrac{\lambda}{2}$, αληθεύει μόνο αν το k>0) !
Επιπλέον δεχόμαστε ως λύσεις ΜΟΝΟ τις θετικές τιμές της μεταβλητής x, διότι θέλουμε να προσδιορίσουμε σημεία που ανήκουν στη ημιευθεία Bx.

Από την (2) λοιπόν , σε συνδυασμό με την x≥0 προκύπτει :

$$x \geq 0 \to \frac{16 - 0{,}04\cdot k^2}{0{,}4\cdot k} \geq 0 \to \cdots \to \text{k} \leq 20 \quad (3)$$

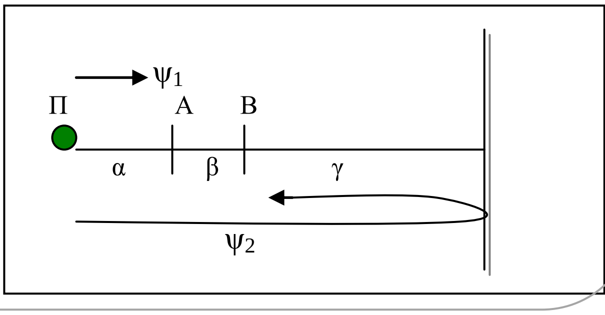
Από την εξίσωση (2), δίνοντας τιμές στο k, παίρνουμε τιμές για το ζητούμενο x !

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση k=20 , που μας οδηγεί στο $x_{20} = 0\ldots$

12. Διαπασών συχνότητας 340 Hz ηχεί μπροστά σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Ανάμεσα στο διαπασών και στο τοίχο, στην ευθεία που είναι κάθετη στον τοίχο, μετακινείται ευαίσθητος δέκτης. Παρατηρούμε ότι σε δυο διαδοχικές θέσεις του δέκτη, που απέχουν μεταξύ τους 0,5 m, η ένδειξη του μηδενίζεται.

(α) Ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου ;

(β) Αντικαθιστούμε το διαπασών με άλλο άγνωστης συχνότητας. Διαπιστώνουμε δυο διαδοχικά μέγιστα έντασης σε θέσεις που απέχουν μεταξύ τους 0,2 m. Ποια είναι η συχνότητα του δεύτερου διαπασών;



(α) Στο χώρο ανάμεσα στη πηγή και το πέτασμα, φτάνουν δυο κύματα. Το άμεσα προσπίπτον και το ανακλώμενο. Συμβάλλουν με συνέπεια ενίσχυση ή απόσβεση ή μια ενδιάμεση κατάσταση.

Θέση Α : Η ένδειξη του δέκτη είναι μηδενική και επομένως

$$|r_2 - r_1| = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \rightarrow (\alpha+\beta+\gamma+\gamma+\beta)-(\alpha) = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \rightarrow$$

$$2\beta + 2\gamma = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Θέση Β : Είναι η αμέσως επόμενη θέση όπου ο δέκτης μηδενίζει την ένδειξη. Επομένως η διαφορά των διαδρομών είναι πάλι περιττό πολλαπλάσιο του λ/2 και μάλιστα γειτονικό.

$$|l_2 - l_1| = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} - \lambda^{(*)} \rightarrow (\alpha+\beta+\gamma+\gamma)-(\alpha+\beta) = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} - \lambda \rightarrow$$

$$2\gamma = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} - \lambda \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι 2β=λ→λ=1m

Εύκολα πλέον έχουμε ότι $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta.} = \lambda \cdot f \rightarrow \upsilon_{\delta\iota\alpha\delta.} = 340$ m/sec

(β) Όμοια εργαζόμενοι για την περίπτωση του 2ου διαπασών προκύπτει η σχέση $2b = \lambda' \rightarrow \lambda' = 2.0{,}2 = 0{,}4$ m

Η ταχύτητα διάδοσης είναι ίδια διότι εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου δηλ. του αέρα.

Επομένως : $\upsilon_{\delta\iota\alpha\delta.} = \lambda' \cdot f' \rightarrow 340 = 0{,}4 \cdot f' \rightarrow f' = 850$ Hz

$\lambda^{(*)}$: Αν για παράδειγμα η διαφορά των δυο διαδρομών ήταν αρχικά 23 λ/2, το γειτονικό περιτό πολλαπλάσιο είναι το 21 λ/2 (αν η διαφορά μειωθεί) είτε 25 λ/2 (αν η διαφορά αυξηθεί !). Σε κάθε περίπτωση η τελική διαφορά διαδρομών θα διαφέρει από την αρχική κατά λ !

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)