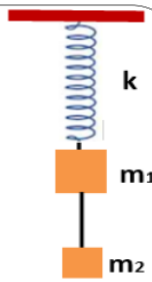
2.1 Το σώμα Σ1 του σχήματος, μάζας m1, κρέμεται δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k, ενώ το σώμα Σ2, μάζας m2, είναι δεμένο μέσω ιδανικού νήματος με το Σ1.



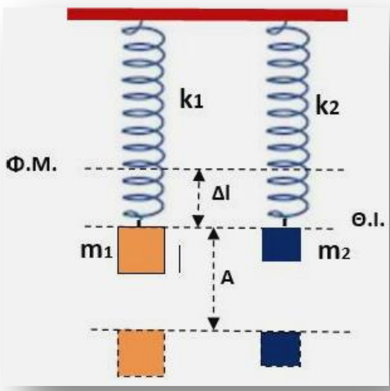
Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα οπότε το Σ1 αρχίζει να κινείται. Η ταχύτητά του μηδενίζεται για πρώτη φορά ύστερα από χρόνο :

(α) $\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$ **(β)** $\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ **(γ)** $\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Μόλις κόβουμε το νήμα ξεκινά το σώμα m_1 να ταλαντώνεται (α.α.τ), με αρχική συνθήκη u=0 (ακραία θέση ταλάντωσης). Η ταλάντωση του γίνεται με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$

Το σώμα θα μηδενίσει για πρώτη φορά την ταχύτητά του, στην άνω ακραία θέση και αφού παρέλθει χρόνος T/2 από την έναρξη της ταλάντωσης. Επομένως (β).

2.2 Δύο ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 έχουν το ίδιο φυσικό μήκος (Φ.Μ.), και είναι τοποθετημένα κατακόρυφα με το επάνω άκρο τους ακλόνητα στερεωμένο. Στο κάτω άκρο κρεμάμε από μια μάζα m_1 και m_2 αντίστοιχα και τις αφήνουμε σταδιακά μέχρι τα δύο ελατήρια να ισορροπήσουν ξανά. Παρατηρούμε ότι και πάλι τα δύο ελατήρια έχουν το ίδιο μήκος.



Αν m_1>m_2 και τα δύο ελατήρια αρχίζουν να εκτελούν ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους.

(α) Η ενέργεια ταλάντωσης E_1 του πρώτου ταλαντωτή είναι μικρότερη από την ενέργεια ταλάντωσης E_2 του δεύτερου ταλαντωτή.

(β) Η συχνότητα ταλάντωσης f_1 του πρώτου ταλαντωτή είναι μεγαλύτερη από την συχνότητα ταλάντωσης f_2 του δεύτερου ταλαντωτή.

(γ) Η μέγιστη ταχύτητα $υ_{max1}$ του πρώτου ταλαντωτή είναι ίση με την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης $υ_{max2}$ του δεύτερου ταλαντωτή.

(α) Ισχύει : $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}K_1 A^2}{\frac{1}{2}K_2 A^2} = \frac{K_1}{K_2}$ (1) Μελετώντας τη Θ.Ι. έχουμε $\frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{K_1 .\Delta L}{K_2 .\Delta L} \rightarrow \cdots K_1 > K_2$ (2)

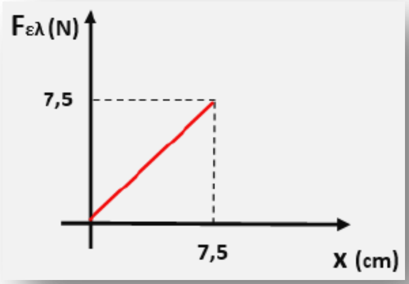
Οπότε από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε ότι (α)→ **Λ**

(β) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi .\sqrt{\frac{m_1}{K_1}}}{2\pi .\sqrt{\frac{m_2}{K_2}}} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1 K_2}{m_2 K_1}} \rightarrow \eta\ \iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau\eta\varsigma\ (1) \varepsilon\pi\iota\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\varepsilon\iota \rightarrow T_1 = T_2 \rightarrow f_1 = f_2$ και επομένως η σχέση (β)→ **Λ**

(γ) → Σ , διότι : $\frac{υ_{max_1}}{υ_{max_2}} = \frac{\omega_1 \cdot A}{\omega_2 \cdot A} = \frac{2\pi \cdot f_1 \cdot A}{2\pi \cdot f_2 \cdot A} = 1 \Leftrightarrow u_{max_1} = u_{max_2}$

2.3 Σε εργαστήριο Φ.Ε. διαθέτουμε δύο ελατήρια σταθεράς k_1 και k_2 και ένα σώμα μάζας m. Επίσης διαθέτουμε σειρά βαριδίων με μάζες των 20 g, 50 g, 80 g και 0,1 Kg. Κρεμάμε το ελατήριο 1 σε βαθμολογημένο στάτορα έτσι ώστε ο αβαρής δίσκος που τοποθετείται στο κάτω άκρο του ελατηρίου να είναι στο σημείο μηδέν της κλίμακας. Κάποιος μαθητής τοποθετεί ποικιλία βαριδίων στο δίσκο του ελατηρίου 1 και συμπληρώνει τον παρακάτω πίνακα τιμών:

Μάζα (g)	Απόσταση Δl (cm) Φ.Μ. – Θ.Ι.
50	1
130	2,6
180	3,6
250	5



Άλλος μαθητής δουλεύοντας με το ελατήριο 2, παραδίδει το παρακάτω διάγραμμα:

Τοποθετούμε διαδοχικά στο δίσκο των δύο ελατηρίων το σώμα μάζας m και θέτουμε σε ταλάντωση ίδιου πλάτους A τους δύο ταλαντωτές. Για τις δύο ταλαντώσεις ισχύει:

(α) Η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης 1 είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης 2 και ο λόγος τους είναι: $\alpha_{max1} / \alpha_{max2} = \sqrt{2}$.

(β) Η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης 1 είναι ίση με την μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης 2.

(γ) Η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης 2 είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης 1 και ο λόγος τους είναι: $\alpha_{max1} / \alpha_{max2} = 1/2$.

Δεχτείτε ότι $g=10\ m/sec^2$

- Ο πρώτος μαθητής κρεμάει μάζες m , το ελατήριο επιμηκύνεται και ισορροπεί σε μια θέση παραμορφωμένο κατά ΔL. Στο φαινόμενο αυτό ισχύει η εξίσωση $m.g = k.\Delta L \rightarrow k = \frac{m.g}{\Delta L}$. Όποιο ζευγάρι τιμών m, ΔL και αν κάνουμε χρήση, θα προκύψει στο S.I. ότι $k = \frac{50\ 10^{-3}}{1\ 10^{-2}}\ 10 = 50\ N/m$

- Ο δεύτερος μαθητής έχει σε γραφική παράσταση μια σχέση αναλόγων ποσών μεταξύ F και ΔL (παραμόρφωσης), οπότε με χρήση της εξίσωσης F=k . ΔL , που περιγράφει το φαινόμενο βρίσκει στο S.I. :

$$F = k\,.\,\Delta L \rightarrow k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{7{,}5}{7{,}5\,.\,10^{-2}} = 100\ N/m$$

Θέτοντας σε ταλάντωση τους δύο ταλαντωτές με την ίδια μάζα m και το ίδιο πλάτος A, οι μέγιστες επιταχύνσεις που προκύπτουν έχουν λόγο :

$$\frac{\alpha_{max_1}}{\alpha_{max_2}} = \frac{\omega_1^2 A}{\omega_2^2 A} = \frac{\frac{k_1}{m}}{\frac{k_2}{m}} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{50\frac{N}{m}}{100\frac{N}{m}} = \frac{1}{2}$$

(γ) → **Σ**

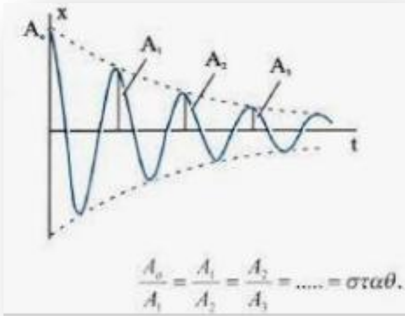
2.4 Η εξίσωση απομάκρυνσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από την σχέση x=0,1ημ(4πt+π/2) (S.I.)
Η μετατόπιση του ταλαντωτή από την χρονική στιγμή $t_0=0$ μέχρι την χρονική στιγμή $t_1=0{,}25$s είναι
(α) 0,2 m , **(β) –0,2 m** , (γ) 0 m

Η εξίσωση μας λέει ότι : A=0,1 m ω=4π → 2π/T = 4π → T=0.5 sec και $\varphi_o=\pi/2$ rad, που σημαίνει ότι για t=0, το σώμα βρίσκεται στη θέση +0,1 m.

Σε χρόνο t1=0,25 sec (=T/2) η μάζα θα βρίσκεται στην άλλη ακραία θέση (-0,1 m) και η μετατόπισή του θα είναι $\Delta x = x_{\tau\varepsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi}$ = -1-(+1) = -0,2 m

2.5 Σε μία φθίνουσα ταλάντωση της οποίας το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση $A_v=A_0e^{-\Lambda t}$, το αρχικό πλάτος του ταλαντωτή είναι A_0=10cm. Μετά από χρόνο μίας περιόδου το πλάτος είναι A_1=8cm. Αν περάσει χρονικό διάστημα μίας ακόμη περιόδου, τότε το πλάτος θα είναι (α) A_2=6cm. (β) A_2=6,4cm. (γ) A_2=4cm.

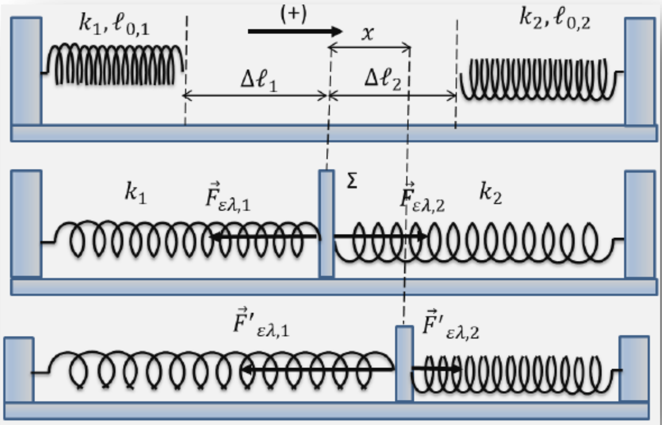
Είναι γνωστό ότι σε μία φθίνουσα ταλάντωση στην οποία το πλάτος ακολουθεί την σχέση $A_v=A_0e^{-\Lambda t}$. Αυτή η σχέση μας λέει ότι όταν t=NT και N=0,1,2,… ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός,



δηλαδή :

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{A_1}{A_2}\rightarrow\frac{10\ cm}{8\ cm}=\frac{8\ cm}{A_2}\rightarrow A_2=6{,}64\ cm$$

2.6 Ένα σώμα Σ μάζας m βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και ισορροπεί δεμένο σε δύο οριζόντια ιδανικά ελατήρια με σταθερές $k1$ και $k2$ και φυσικά μήκη ℓ0,1 και ℓ0,2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο $k1$ έχει επιμήκυνση $\Delta\ell 1$ και το ελατήριο $k2$ έχει επιμήκυνση $\Delta\ell 2$. Εκτρέπουμε το σώμα Σ από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Στη συνέχεια το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ με ποια περίοδο;



Θέση ισορροπίας : $\Sigma\vec{F}=0\ \Rightarrow\ F_{\varepsilon\lambda,2}-F_{\varepsilon\lambda,1}=0\ \Rightarrow\ k_2\cdot\Delta\ell_2-k_1\cdot\Delta\ell_1=0$ (1)

Τυχαία θέση εκτροπής :

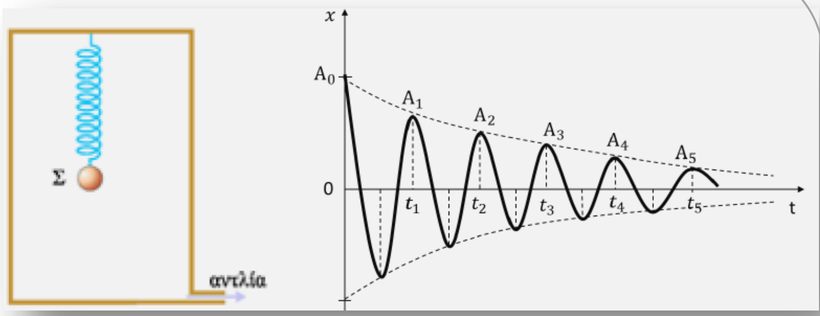
$$\Sigma F=-F'_{\varepsilon\lambda,1}+F'_{\varepsilon\lambda,2}\Rightarrow\Sigma F=-k_1\cdot\Delta\ell'_1+k_2\cdot\Delta\ell'_2\ \Rightarrow\Sigma F=-k_1\cdot(\Delta\ell_1+x)+k_2\cdot(\Delta\ell_2-x)\quad(2)$$

Εύκολα προκύπτει από τις (1) και (2) :

$$\Sigma F=-(k_1+k_2)\cdot x\ \Rightarrow\Sigma F=-D\cdot x,\quad D=k_1+k_2$$

Επομένως $$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}\ \Rightarrow\ T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

2.7 Με τη χρήση μιας αεραντλίας μειώνουμε πολύ αργά την πίεση του αέρα στο δοχείο του παρακάτω σχήματος. Η σφαίρα Σ είναι αναρτημένη σε ιδανικό ελατήριο. Αφού σταματήσουμε τη λειτουργία της αεραντλίας και σταθεροποιηθεί η πίεση στο δοχείο καταγράφουμε την απομάκρυνση της φθίνουσας ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$. Τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_1=4\ cm$ και τη χρονική στιγμή t_5 είναι $A_5=1\ cm$. Ποια η τιμή της σταθεράς Λ ;



Από τη χρονική στιγμή μηδέν μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 το σύστημα έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, άρα $t_1=T=2s$, όπου T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης. Η περίοδος T παραμένει σταθερή ανεξάρτητη του πλάτους, επομένως $t_5=5T$.

Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, επομένως $A_1=A_0 \cdot e^{-\Lambda t_1}$ και $A_5=A_0 \cdot e^{-\Lambda t_5}$

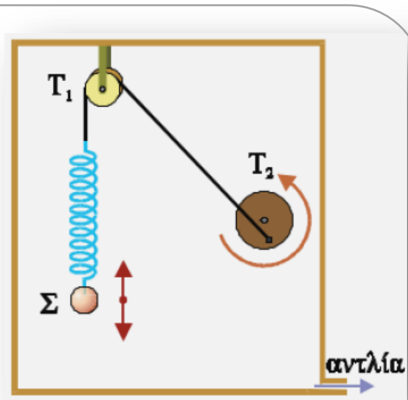
Διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη, έχουμε :

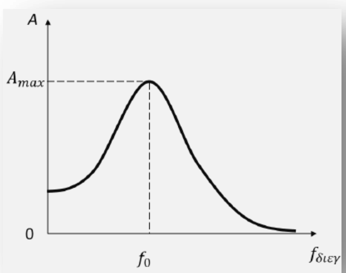
$$\frac{A_1}{A_5}=\frac{A_0 \cdot e^{-\Lambda t_1}}{A_0 \cdot e^{-\Lambda t_5}} \Rightarrow 4=e^{\Lambda 4T} \Rightarrow \Lambda 4T=2ln2 \Rightarrow 8\Lambda=2ln2 \Rightarrow \Lambda=\frac{ln2}{4}\ s^{-1}$$

2.8 Με τη διάταξη του παρακάτω σχήματος μπορούμε να παρατηρήσουμε τις αλλαγές στο πλάτος της. εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο – μάζα καθώς μεταβάλλουμε την περίοδο $T_{\delta\iota\varepsilon\gamma}$ του περιστρεφόμενου τροχού T_2. Αρχικά η περίοδος του τροχού είναι πολύ μεγάλη, $T_{\delta\iota\varepsilon\gamma}\to\infty$

Μειώνουμε σταδιακά την περίοδο του τροχού μέχρι να πάρει πάρα πολύ μικρές τιμές, $T_{\delta\iota\varepsilon\gamma}\to 0$. Κατά τη διαδικασία αυτή το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του συστήματος:

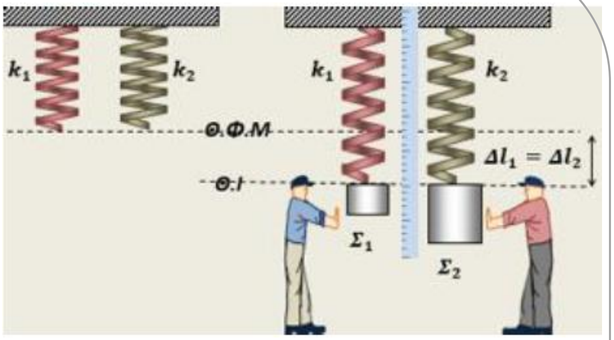
(α) αυξάνεται συνεχώς **(β)** μειώνεται συνεχώς **(γ)** αρχικά αυξάνεται, παίρνει μια μέγιστη τιμή και στη συνέχεια μειώνεται





Η συχνότητα του τροχού-διεγέρτη είναι αντίστροφα ανάλογη της περιόδου του, $f_{\delta\iota\varepsilon\gamma}=1/T_{\delta\iota\varepsilon\gamma}$. Το σύστημα έχει ιδιοσυχνότητα f_0 και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη συχνότητα του διεγέρτη. Καθώς η συχνότητα του διεγέρτη αυξάνεται, το πλάτος Α της ταλάντωσης αυξάνεται, παίρνει τη μέγιστη τιμή για $f_{\delta\iota\varepsilon\gamma}=f_0$, ενώ στη συνέχεια το πλάτος μειώνεται τείνοντας ασυμπτωτικά στο μηδέν.

2.9 Σε ένα υποθετικό πείραμα, κρεμάσαμε κατακόρυφα δύο διαφορετικά ιδανικά ελατήρια που έχουν το ίδιο φυσικό μήκος, στερεώνοντας το πάνω άκρο τους στο ίδιο οριζόντιο, ακλόνητο επίπεδο. Στο ένα ελατήριο σταθεράς $k1$, κρεμάσαμε ένα σώμα $\Sigma 1$ μάζας $m1$ και φροντίσαμε να ισορροπεί ακίνητο. Στο άλλο ελατήριο σταθεράς $k2$, κρεμάσαμε άλλο σώμα $\Sigma 2$, μάζας $m2$ και φροντίσαμε να ισορροπεί και αυτό ακίνητο. Μετρήσαμε ότι καθώς τα δύο σώματα ισορροπούν, έχουν προκαλέσει ίσες επιμηκύνσεις στα δύο ελατήρια ($\Delta l1$=$\Delta l2$), όπως στο σχήμα.



Εκτρέπουμε και τα δύο συστήματα από την κατάσταση ισορροπίας, τραβώντας κατακόρυφα προς τα κάτω το σώμα κάθε συστήματος και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντώνεται. Για το χρονικό διάστημα των παρατηρήσεων, μπορούμε να αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα, με αποτέλεσμα κάθε σύστημα να εκτελεί κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς την σταθερά του ελατηρίου. Μετρώντας το χρόνο για ένα πλήθος ταλαντώσεων κάθε συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης. Ποια σχέση θα προκύψει για τις συχνότητες $f1$,$f2$ των συστημάτων (1) και (2) αντίστοιχα.

Όταν τα σώματα βρίσκονται στη θέση ισορροπίας ισχύει :

Σύστημα (1): $\Sigma F = 0, \quad m_1 \cdot g = k_1 \cdot \Delta l_1$ (1)

Σύστημα (2): $\Sigma F = 0, \quad m_2 \cdot g = k_2 \cdot \Delta l_2$ (2)

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $\frac{m_1 \cdot g}{m_2 \cdot g} = \frac{k_1 \cdot \Delta l_1}{k_2 \cdot \Delta l_2}$ (3)

Αλλά έχει δοθεί ότι ισχύει η σχέση: $\Delta l_1 = \Delta l_2$

Τελικά από την (3), προκύπτει η σχέση: $\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2}$ (4)

Έτσι για τις συχνότητες των δύο ταλαντώσεων, ισχύουν:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad \text{και} \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

Τελικά είναι $f_1 = f_2$

2.10 Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω, περίοδο T και πλάτος A. Κάθε οριζόντια τετράδα του πίνακα που ακολουθεί μας δίνει τη φάση (φ) της ταλάντωσης, την τιμή της απομάκρυνσης (x) από τη θέση ισορροπίας του και την τιμή της ταχύτητας (υ) του υλικού σημείου, σε μια χρονική στιγμή (t), σε συνάρτηση με τις τιμές ω,A,T, των δεδομένων μεγεθών. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

$\varphi(rad)$	x	υ	t
	$+A$		0
			$\frac{T}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$			

Ξεκινάμε με τις γενικές εξισώσεις των μεγεθών φ, x, υ της ταλάντωσης…

- $x = A.\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow 1\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta} \rightarrow +A = A.\eta\mu\varphi_o \rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{2}\ rad$, $\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 0 \le \varphi_o < 2\pi$

Επομένως στη 1η γραμμή θα έχουμε $\varphi = \omega t + \varphi_o \rightarrow \varphi = \varphi_o \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$

Και $\upsilon = \omega A.\sigma\upsilon\nu\ (\omega t + \varphi_o) \rightarrow \upsilon = \omega A.\sigma\upsilon\nu(\pi/2) \rightarrow \upsilon = 0$

- Δεύτερη γραμμή $\varphi = \omega t + \varphi_o \rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi \ rad$

$$x = A.\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow x = A.\eta\mu\varphi \rightarrow x = A.\eta\mu\pi \rightarrow x = 0$$

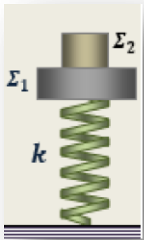
$$\upsilon = \omega A.\sigma\upsilon\nu\ (\omega t + \varphi_o) \rightarrow \upsilon = \omega A.\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow \upsilon = \frac{2\pi}{T}.A.\sigma\upsilon\nu\pi \rightarrow \upsilon = -\frac{2\pi A}{T}$$

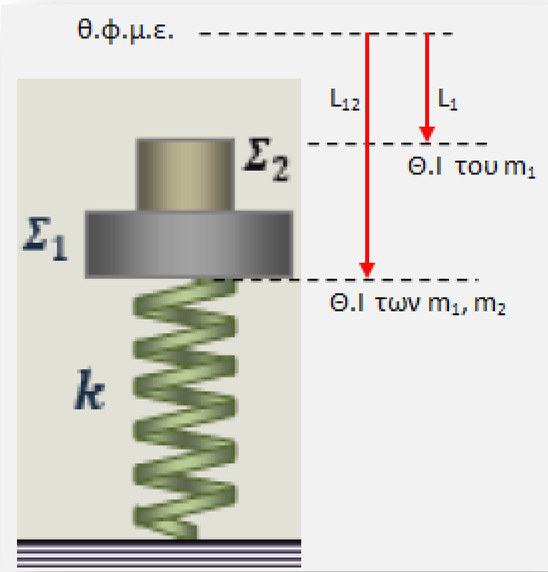
- Τρίτη γραμμή $\varphi = \omega t + \varphi_o \rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{T}.t + \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi = \frac{2\pi t}{T} \rightarrow t = T/2$

$$x = A.\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \rightarrow x = A.\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = A.\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow x = -A$$

$$\upsilon = \omega A.\sigma\upsilon\nu\ (\omega t + \varphi_o) \rightarrow \upsilon = \cdots = 0$$

2.11 Ένα σώμα $\Sigma 1$, μάζας $m1$, είναι δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, το κάτω άκρο του οποίου είναι σταθερά στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο σώμα $\Sigma 1$ είναι τοποθετημένο άλλο σώμα $\Sigma 2$ μάζας $m2$ και αρχικά το σύστημα ισορροπεί με τα σώματα ακίνητα και το ελατήριο κατακόρυφο και συσπειρωμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Για τις μάζες των δύο σωμάτων ισχύει η σχέση $m_1 = 2 \cdot m_2$.
Κάποια στιγμή αφαιρέσαμε το σώμα $\Sigma 2$, με αποτέλεσμα το υπόλοιπο σύστημα να αρχίσει να ταλαντώνεται και οι αντιστάσεις του αέρα να είναι ασήμαντες. Τη στιγμή ακριβώς που αφαιρέθηκε το σώμα $\Sigma 2$, ο λόγος $U\varepsilon\lambda./U\tau\alpha\lambda.$, της δυναμικής ενέργειας εξαιτίας του παραμορφωμένου ελατηρίου, προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ίσος με:





Τη στιγμή που αφαιρέθηκε το σώμα Σ2, το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά L_{12}.

Μετά την αφαίρεση του Σ2, το σώμα Σ1 θα κάνει α.α.τ με θέση ισορροπίας που έχει απόσταση L_1, από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Επιπλέον η αρχική θέση των Σ1 και Σ2, αποτελεί για την ταλάντωση του m_1, που θα ακολουθήσει κάτω ακραία θέση (όταν ξεκινά η ταλάντωση του m1, ισχύει υ=0 !!!).

ΔΕΝ ΞΕΧΝΩ : *Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου εξαρτάται από την παραμόρφωση του ελατηρίου (ΔL), ενώ η δυναμική ταλάντωσης από την απόσταση από τη Θ.Ι. (απομάκρυνση x).*

Για τη θέση ταλάντωσης τη στιγμή t=0, έχουμε :

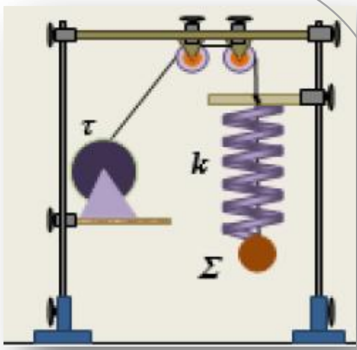
$$\frac{U_{\varepsilon\lambda}}{U_{\tau\alpha\lambda}} = \frac{\frac{1}{2}k.L_{12}^2}{\frac{1}{2}k(L_{12}-L_1)^2} = \left(\frac{L_{12}}{L_{12}-L_1}\right)^2 \qquad (1)$$

Θέση ισορροπίας m_1, m_2 : $(m_1 + m_2).g = k.L_{12} \rightarrow 3m_2 = k.L_{12} \rightarrow L_{12} = \frac{3g.m_2}{k}$ (2)

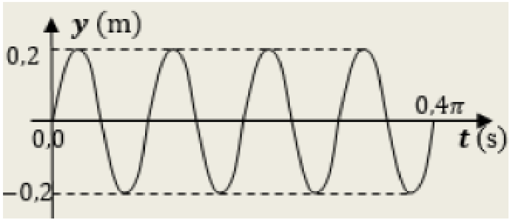
Θέση ισορροπίας m_1 : $m_1.g = k.L_1 \rightarrow L_1 = \frac{2g.m_2}{k}$ *(3)*

Εύκολα πλέον οι εξισώσεις (1), (2) και (3) θα δώσουν $\frac{U_{\varepsilon\lambda}}{U_{\tau\alpha\lambda}} = 9$

2.12 Σφαίρα Σ μάζας m=1 kg, είναι δεμένη στο άκρο ιδανικού κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k=400 Nm, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο. Η σφαίρα Σ είναι επίσης δεμένη στο άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, το οποίο κατακόρυφο περνάει μέσα από τις σπείρες του ελατηρίου και με κατάλληλη διάταξη που φαίνεται στην εικόνα καταλήγει να δεθεί σε σημείο ενός τροχού τ, κοντά στην περιφέρειά του, έτσι ώστε περιστρέφοντας τον τροχό να θέτουμε τη σφαίρα σε εξαναγκασμένη ταλάντωση.

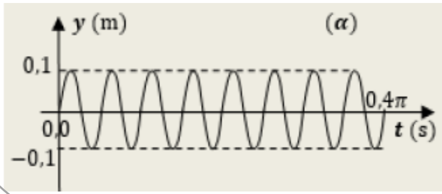


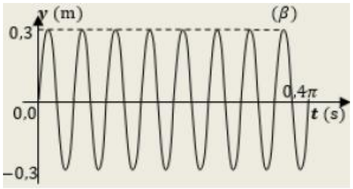
Στην κίνηση της σφαίρας εμφανίζονται αντιστάσεις αέρα του τύπου $F\alpha\nu\tau.=-b\cdot\upsilon$ όπου b, μικρή σχετικά σταθερά απόσβεσης και υ η ταχύτητά της.

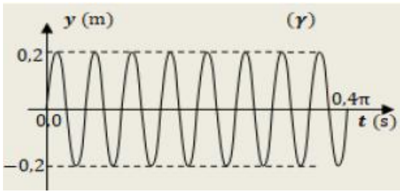


Στο διπλανό διάγραμμα, φαίνεται η απομάκρυνση της σφαίρας από τη θέση ισορροπίας της σε συνάρτηση με το χρόνο, στην εξαναγκασμένη ταλάντωση που εκτελεί όταν περιστρέφουμε τον τροχό με μια σταθερή συχνότητα $f1$.

Αν αυξήσουμε τη συχνότητα περιστροφής του τροχού, η απομάκρυνση της σφαίρας από τη θέση ισορροπίας της σε συνάρτηση με το χρόνο, θα μπορούσε να αποδίδεται :







Η ιδιοπερίοδος του ταλαντωτή είναι: $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{400}}\ \mathrm{s} = 0{,}1\pi\ \mathrm{s}$

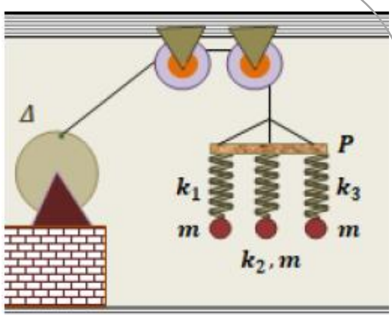
Με τη βοήθεια του διαγράμματος μπορούμε να βρούμε την περίοδο της ταλάντωσης του ταλαντωτή, δηλαδή την περίοδο του διεγέρτη, όταν ο τροχός περιστρέφεται με συχνότητα f_1:

$$4 \cdot T_1 = 0{,}4\pi\ \mathrm{s},\ \ T_1 = 0{,}1\pi\ \mathrm{s}$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι η συχνότητα του διεγέρτη είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, όταν ο τροχός περιστρέφεται με συχνότητα f_1. Οπότε, επειδή έχουμε μικρή σχετικά σταθερά απόσβεσης, ο ταλαντωτής βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος, που είναι $A_{max} = 0{,}2\ \mathrm{m}$, όπως προκύπτει από το δεδομένο διάγραμμα.

Αν αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη, το σύστημα δεν θα είναι σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος ταλάντωσης του ταλαντωτή θα είναι μικρότερο από $0{,}2\ m$. Αυτό συμβαίνει μόνο στο διάγραμμα (α) που το πλάτος είναι $0{,}1\ m$.

2.13 Στη διάταξη του σχήματος, ο κυκλικός δίσκος Δ, περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, με συχνότητα f_Δ=15π Hz. Η περιστροφή του δίσκου Δ, εξαναγκάζει σε ταλάντωση τη ράβδο P, με τη βοήθεια αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, το ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σημείο κοντά στην περιφέρεια του δίσκου. Η ράβδος καθώς ταλαντώνεται, με κατάλληλη διάταξη παραμένει συνεχώς οριζόντια.



Από τη ράβδο P, κρέμονται τρία ιδανικά ελατήρια, που το καθένα στο κάτω μέρος του έχει κρεμασμένο ένα σφαιρίδιο. Και τα τρία σφαιρίδια είναι όμοια και έχουν μάζα m=100 g το καθένα. Οι σταθερές των τριών ελατηρίων είναι k_1=30 Nm , k_2=60 Nm , k_3=90 Nm.

Από τα δεδομένα του πειράματος, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν πράγματι το εκτελούσαμε:

(α) Δεν θα υπήρχε σύστημα (ταλαντωτής) που θα εκτελούσε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις σε κατάσταση συντονισμού.

(β) Θα υπήρχε σύστημα (ταλαντωτής) το οποίο θα εκτελούσε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις σε κατάσταση συντονισμού, με αποτέλεσμα το σύστημα αυτό, να ταλαντώνεται οπωσδήποτε με μεγαλύτερο πλάτος από τα άλλα δύο συστήματα.

(γ) Θα υπήρχε σύστημα (ταλαντωτής) το οποίο θα εκτελούσε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις σε κατάσταση συντονισμού, με αποτέλεσμα το σύστημα αυτό, να ταλαντώνεται οπωσδήποτε με μεγαλύτερο πλάτος, σε σχέση με τα πλάτη που θα είχαν οι ταλαντώσεις του, σε άλλες συχνότητες περιστροφής του δίσκου Δ (διεγέρτη).

Και τα τρία συστήματα ελατηρίου-μάζας (ταλαντωτές), εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα, τη συχνότητα του διεγέρτη, δηλαδή τη συχνότητα περιστροφής του δίσκου Δ.

Οι ιδιοσυχνότητες των τριών ταλαντωτών είναι:

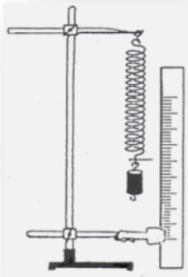
$$f_{o1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{30}{0{,}1}}\ \text{Hz} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\pi}\ \text{Hz}$$

$$f_{o2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{60}{0{,}1}}\ \text{Hz} = \frac{5\cdot\sqrt{6}}{\pi}\ \text{Hz}$$

$$f_{o3} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_3}{m_3}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{90}{0{,}1}}\ \text{Hz} = \frac{15}{\pi}\ \text{Hz}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα k_3, m βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, αφού η συχνότητα του διεγέρτη και άρα της εξαναγκασμένης του ταλάντωσης, είναι ίση με την ιδιοσυχνότητά του και η σταθερά απόσβεσης είναι σχετικά μικρή. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα αυτό ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, σε σχέση με τα πλάτη που θα παρουσίαζαν οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις του, με άλλες συχνότητες του διεγέρτη.

2.14 Δημιουργούμε στο εργαστήριο της Φυσικής την πειραματική διάταξη του σχήματος, όπου στην άκρη ενός ελατηρίου προσδένεται ένας μικρός κύλινδρος μάζας m. Ο κύλινδρος κρατιέται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας σε τέτοια θέση ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος. Στη συνέχεια, αφήνεται ελεύθερος από τη θέση αυτή και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το χαμηλότερο σημείο της ταλάντωσης είναι 20cm κάτω από την θέση που αφέθηκε το σώμα. Αν ληφθεί υπόψη ότι η τιμή της επιτάχυνσης βαρύτητας είναι g=10m/s^2, η συχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα ποια τιμή έχει;



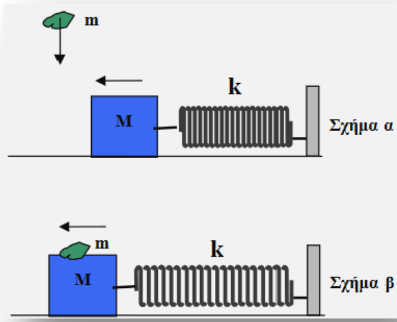
Η αρχική θέση –όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος- είναι άνω ακραία θέση ταλάντωσης. Το χαμηλότερο σημείο είναι η κάτω ακραία θέση ταλάντωσης, αφού ως ακραία υ=0.
Επομένως οι δυο ακραίες θέσεις απέχουν απόσταση 2Α και το μέσο αυτής της απόστασης είναι η Θ.Ι. Έτσι η Θ.Ι. απέχει από την θέση φυσικού μήκους ελατηρίου απόσταση ΔL=A=0,1 m.
Η μελέτη ισορροπίας στη Θ.Ι. λέει:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = mg \rightarrow k.\Delta L = m.g \rightarrow 0{,}1k = m.10 \rightarrow k = 100.m \quad (s.i.) \qquad (1)$$

Τελικά :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{100.m}}} = \frac{1}{2\pi.\sqrt{10^{-2}}} = \frac{1}{2\pi.10^{-1}} = \frac{5}{\pi} \ \ Hz$$

2.15 Στο σχήμα α το σώμα μάζας Μ είναι δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σώμα μάζας m πέφτει κατακόρυφα από μικρό ύψος. Όταν το σώμα μάζας Μ περνά από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, το σώμα μάζας m συγκρούεται με αυτό δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα, όπως δείχνει το σχήμα β. Το πλάτος της νέας ταλάντωσης Α΄ που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα
(α) είναι ίσο με το πλάτος Α. **(β)** είναι μεγαλύτερο του πλάτους Α. **(γ)** είναι μικρότερο του πλάτους Α.



Έστω ότι τη στιγμή που περνά το σώμα μάζας Μ από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (θέση ισορροπίας της ταλάντωσης), έχει ταχύτητα υ_o. **Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα της κίνησης του** σώματος μάζας Μ κατά τη διάρκεια της κρούσης του με το σώμα μάζας m, έχουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow M\upsilon_o + 0 = (m+M)V_o \Rightarrow V_o = \frac{M}{m+M}\upsilon_o \quad (1)$$

Αυτή η ταχύτητα είναι max για την ταλάντωση που θα ακολουθήσει, αφού είναι ταχύτητα που αφορά την Θ.Ι.

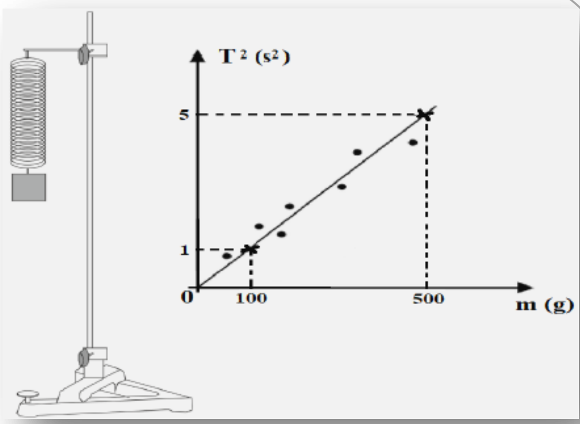
$$(1) \rightarrow \omega'.A' = \frac{M}{m+M}\,\omega.A \rightarrow \frac{2\pi}{T'}\,.A' = \frac{M}{m+M}.\frac{2\pi}{T}.A \rightarrow T'.M.A = A'.T.(m+M) \rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}.M.A$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.A'.(m+M) \rightarrow \frac{m+M}{k}.M^2.A^2 = \frac{M}{k}(A')^2.(m+M)^2 \rightarrow MA^2 = (m+M)(A')^2$$

$$\rightarrow A' = \sqrt{\frac{M}{M+m}}.A$$

Μια σχέση που μας λέει ότι το πλάτος ταλάντωσης θα μειωθεί (γ).

2.16 Στο σχήμα βλέπουμε μια πειραματική διάταξη που αποτελείται από ένα ελατήριο με κατάλληλη βάση ανάρτησης, μερικά βαρίδια των *50g* και ένα χρονόμετρο. Παίρνουμε ένα βαρίδι, το συνδέουμε στο κάτω άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου, θέτουμε το σύστημα ελατήριο-μάζα βαριδίου σε ταλάντωση και με το χρονόμετρο μετρούμε την περίοδο της ταλάντωσης. Τη διαδικασία αυτή επαναλαμβάνουμε μερικές φορές συνδέοντας στο κάτω άκρο του ελατηρίου διαφορετικό αριθμό βαριδίων. Στο τέλος, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του τετραγώνου της περιόδου της ταλάντωσης T^2 σε συνάρτηση με τη μάζα m, των βαριδίων. Η πειραματική αυτή διαδικασία στοχεύει στον προσδιορισμό της σταθεράς k του ελατηρίου, η οποία υπολογίζεται με τιμή (α) k=2,5 N/m , (β) k=4 N/m , (γ) k=10 N/m



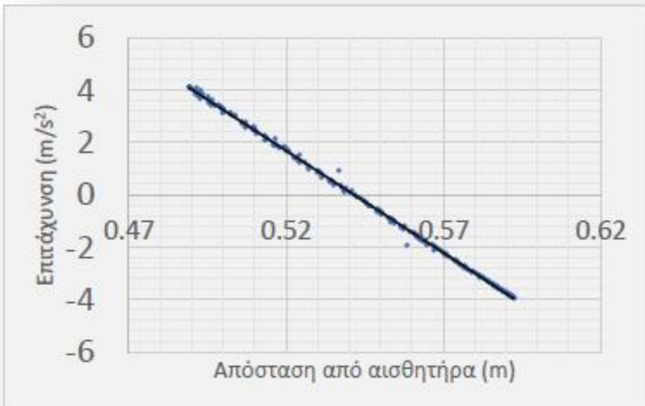
Για τον υπολογισμό της σταθεράς k του ελατηρίου να λάβετε υπόψη ότι $\pi^2 \cong 10$.

Ισχύει : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2.\frac{m}{k} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{k}.m$ (1) Τούτη εδώ η σχέση μας λέει ότι οι ποσότητες T^2 και m είναι ανάλογες, γεγονός που φαίνεται και στο διάγραμμα.

Το διάγραμμα μας επιτρέπει να εργαστούμε με ένα ζευγάρι τιμών που θα επιλέξουμε και …

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}.m \rightarrow (s.i.) \rightarrow 1 = \frac{4\ .\ 10}{k}.\ \ 0{,}1 \rightarrow k = 4\ N/m$$

2.17 Με τη βοήθεια αισθητήρα απόστασης και επιτάχυνσης και αντίστοιχο λογισμικό, δημιουργήθηκε το παρακάτω διάγραμμα για την απλή αρμονική ταλάντωση μάζας αναρτημένης από κατακόρυφο ελατήριο.



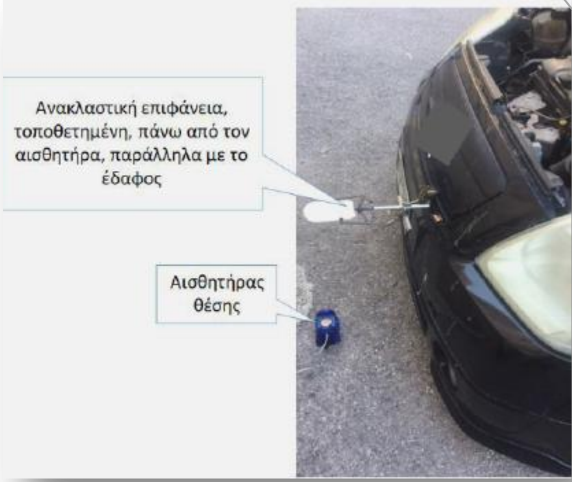
Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι πιο κοντά σε (α) 9 Hz , (β) 1,4 Hz , γ) 0,2 Hz

Η ελάχιστη απόσταση από τον αισθητήρα (κάτω ακραία θέση ταλάντωσης) είναι περίπου 0,49 m και η μεγαλύτερη (άνω ακραία θέση ταλάντωσης) είναι περίπου 0,59 m. Επομένως : 2A=0,59-0,49 → 2A = 0,1 m → A=0,05 m

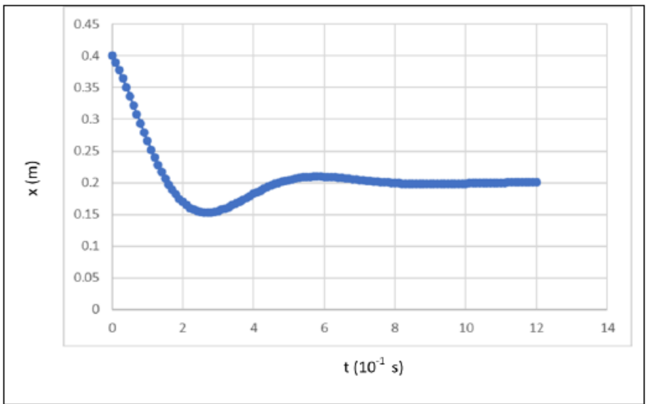
Το μέτρο της max επιτάχυνσης αντιστοιχεί στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης και το διάγραμμα μας λέει ότι αυτό είναι ίσο με 4 m/sec^2.

$$\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \ a_{max} = \omega^2.A \rightarrow \alpha_{max} = 4\pi^2 f^2.A \rightarrow s.i. \rightarrow 4 = 40\,f^2.0{,}05 \rightarrow f^2 = \frac{4}{2} \rightarrow f = \sqrt{2} \cong 1{,}4\ Hz$$

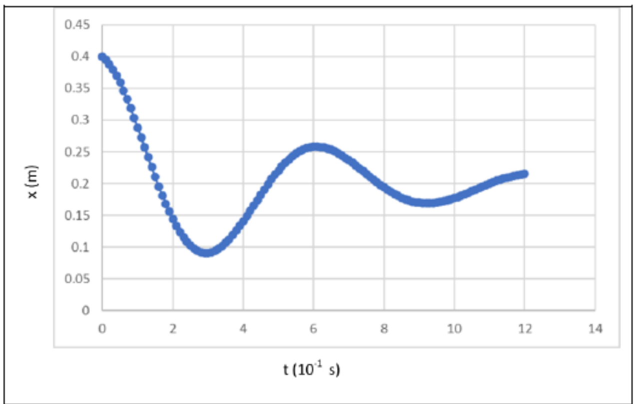
2.18 Η Μαρία και ο Γιώργος, μαθητές της Γ΄Λυκείου, θέλουν να συμμετάσχουν σε ένα μαθητικό συνέδριο Επιστήμης και Έρευνας. Το αντικείμενο της εργασίας τους αφορά στις φθίνουσες ταλαντώσεις και πιο συγκεκριμένα στο πως λειτουργούν τα αμορτισέρ των αυτοκινήτων. Αρχικά, αναζήτησαν και βρήκαν, μεταξύ των καθηγητών τους, δύο αυτοκίνητα της ίδιας εταιρείας με αμορτισέρ διαφορετικής παλαιότητας. Μάλιστα, στο ένα αυτοκίνητο (αυτοκίνητο Α) ο ιδιοκτήτης, μόλις είχε αλλάξει αμορτισέρ ενώ στο δεύτερο (αυτοκίνητο Β) ο ιδιοκτήτης σχεδίαζε να τα αλλάξει, στο κοντινό χρονικό διάστημα.



Στη συνέχεια, πραγματοποίησαν, το ακόλουθο πείραμα. Τοποθέτησαν ένα αισθητήρα θέσης, κατάλληλα, στο έδαφος (βλ. σχήμα). Καθώς, τα δύο ακίνητα αυτοκίνητα εξαναγκάστηκαν σε κατακόρυφη ταλάντωση, το λογισμικό του αισθητήρα κατασκεύασε τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου για κάθε ένα από αυτά. Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω.



Γραφική παράσταση 1



Γραφική παράσταση 2

Για τα συγκεκριμένα πειραματικά δεδομένα,

(α) η γραφική παράσταση 1 ανήκει στο αυτοκίνητο Α ενώ η γραφική παράσταση 2 στο Β,

(β) η γραφική παράσταση 2 ανήκει στο αυτοκίνητο Α ενώ η γραφική παράσταση 1 στο Β,

(γ) τα αμορισέρ ενός αυτοκινήτου δε σχετίζονται με τις φθίνουσες ταλαντώσεις που εκτελεί .

Το πρώτο διάγραμμα μας λέει ότι η σηκώθηκε το αυτοκίνητο, έτσι ώστε να έχουμε απόσταση x=0,4 m μεταξύ ανακλαστήρα και αισθητήρα, αφέθηκε και κατέβηκε σε κάτω ακραία θέση απόσταση 0,15m και στη συνέχεια ισορρόπησε, αφού η απόσταση σταθεροποιήθηκε στα 0,2 m. Μετά βίας μπορούμε να διαβάσουμε ότι πραγματοποιήθηκε μια πλήρη ταλάντωση. Ότι περιέγραψα είχε διάρκεια περίπου 0,5 sec. Είναι προφανές ότι η φθίνουσα ταλάντωση εμφανίζει μεγάλο b.

Στο δεύτερο διάγραμμα η φθίνουσα ταλάντωση ξεκινά πάλι από άνω ακραία θέση (0.4 m) και η απόσβεση πραγματοποιείται μετά το 1,2 sec. Στο διάγραμμα εμφανίζονται δυο πλήρες ταλαντώσεις (T=0,6 sec)

Η ερώτηση (γ) είναι προφανώς λανθασμένη, μιας και ο ρόλος των αμορτισέρ είναι η δημιουργία φθίνουσας ταλάντωσης του αυτοκινήτου…

2.19 Η Δήμητρα και ο Γιάννης μελετούν στο εργαστήριο το κατά πόσο η περίοδος στην απλή αρμονική ταλάντωση εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης. Για το σκοπό, αυτό, θέτουν σε κατακόρυφη ταλάντωση, πλάτους $4cm$, ένα σύστημα ελατηρίου – μάζας και μετρούν το χρόνο που απαιτείται για να συμπληρωθούν 15 πλήρεις ταλαντώσεις. Στη συνέχεια, θέτουν ξανά σε ταλάντωση το σύστημα ελατήριο – μάζα, με νέο πλάτος ταλάντωσης $8cm$ και μετρούν το χρόνο που απαιτείται για να συμπληρωθούν 10 πλήρεις ταλαντώσεις.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

	Πλάτος (cm)	Αριθμός ταλαντώσεων	Χρόνος (s)
1η διαδιακασία	4	15	15,9
2η διαδικασία	8	10	10,6

Από τα αποτελέσματα των μετρήσεων των μαθητών, συμπεραίνουμε ότι, όταν το πλάτος είναι διπλάσιο, η περίοδος: **(α)** διπλασιάζεται, **(β)** υποδιπλασιάζεται, **(γ)** παραμένει σταθερή.

Η περίοδος της ταλάντωσης προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$T = \frac{\Delta t}{N}.$$

Συνεπώς, για πλάτος $A_1 = 4cm$ είναι: $T_1 = \frac{\Delta t_1}{N_1}, T_1 = \frac{15{,}9}{15}s, T_1 = 1{,}06s$

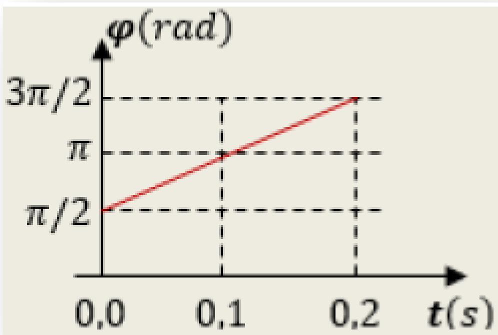
Για πλάτος $A_2 = 8cm$ είναι: $T_2 = \frac{\Delta t_2}{N_2}, T_2 = \frac{10{,}6}{10}s, T_2 = 1{,}06s$

Παρατηρούμε ότι $T_1 = T_2$, συνεπώς η περίοδος για τα διαφορετικά πλάτη είναι η ίδια.

2.20 Στο διάγραμμα αποδίδεται η γραφική παράσταση φάσης – χρόνου σε βαθμολογημένους άξονες, για τη φάση της απλής αρμονικής ταλάντωσης πλάτους A, που εκτελεί ένα υλικό σημείο, σε συνάρτηση με το χρόνο και με σημείο αναφοράς (x=0) τη θέση ισορροπίας του.

Με τη βοήθεια του διαγράμματος αυτού, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τη χρονική στιγμή t_1=0,3 s, η απομάκρυνση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας του είναι:

(α) x_1=+A (β) x_1=0 (γ) x_1=−A



Το διάγραμμα μας δίνει για τη φάση $\varphi = \omega t + \varphi_o$:

- Την αρχική φάση ταλάντωσης, αφού για $t_0 = 0$, είναι $\boldsymbol{\varphi_0} = \frac{\pi}{2}$ rad.
- Τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{0{,}1 - 0}\frac{rad}{s} = \frac{\pi}{0{,}2}\frac{rad}{s} = 5\cdot\pi\frac{rad}{s}$$

- Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}3$ s, η φάση ταλάντωσης είναι:

$$\boldsymbol{\varphi_1} = \omega\cdot t_1 + \varphi_0 = (5\cdot\pi\cdot 0{,}3 + 0{,}5\cdot\pi)\,rad = 2\cdot\pi\,rad$$

Έτσι τη στιγμή $t_1 = 0{,}3$ s, η απομάκρυνση του κινητού από τη θέση ισορροπίας του είναι:

$$x_1 = A\cdot\eta\mu 2\pi = 0$$