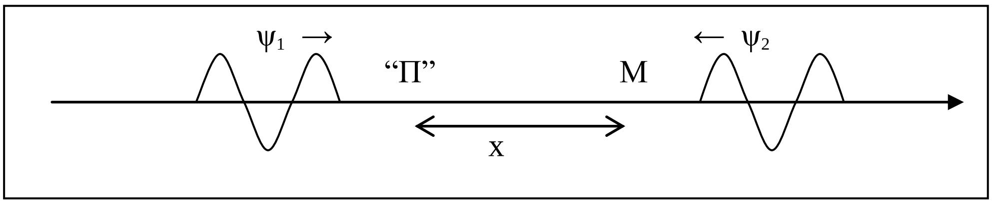
Στάσιμα κύματα $\psi = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$

1. ***Το σκηνικό για να "γεννηθεί" η εξίσωση (1) του στάσιμου*** : Δυο γραμμικά αρμονικά κύματα κινούνται αντίθετα στο ίδιο γραμμικό ελαστικό μέσο, έχοντας ίδιο πλάτος Α, ίδια συχνότητα f . Επιπλέον να συμβάλουν σε σημεία του μέσου, πλήρως ή με αντίθεση…

2. ***Οι εξισώσεις των γ.α.κ. που συμβάλλουν είναι οι παρακάτω :***



$$\psi_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (1) \quad \text{και} \quad \psi_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \quad (2)$$

Το κύμα ψ_1 «λέει» ότι η φάση της πηγής είναι μεγαλύτερη –ενίοτε την ίδια στιγμή- από τη φάση κάθε δομικής μονάδας Μ, που απέχει από την πηγή απόσταση x. Επίσης, το ψ_1 ταλαντώνει αρχικά την πηγή και μετά την τυχαία δομική μονάδα Μ. Αντίθετα, το ψ_2 ταλαντώνει αρχικά την τυχαία δομική μονάδα Μ και μετά την πηγή. Σχόλιο : Για ένα σημείο Ν αριστερά της «Π» -στο σχήμα επάνω- το κύμα ψ_2 θα εμφανίσει στην εξίσωσή του (-), ενώ το ψ_1 (+), οπότε πάνω στην ευθεία διάδοσης θα έχουμε συμβολή δυο κυμάτων της μορφής των ψ_1 και ψ_2 !

3. ***Ποια είναι η "Π" ;***

Πρόκειται για μια δομική μονάδα του μέσου, την οποία χρησιμοποιούμε για μέτρηση μηκών (x) και χρόνων (t). Οι εξισώσεις (1) και (2) αν δεχτούν x=0, τότε περιγράφουν την κίνηση της δομικής μονάδας που έχει ρόλο πηγής.
Ισχύει :

$$\psi_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}\right) = A \cdot \eta\mu\omega t \text{ , ομοίως } \psi_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}\right) = A \cdot \eta\mu\omega t$$

Η αρχή της επαλληλίας τότε επιβάλλει στην "Π"

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \cdot \eta\mu\omega t$$

Να λοιπόν ποια δομική μονάδα δικαιούται να πάρει τον τίτλο «πηγή». Είναι αυτή όπου τα κύματα συμβάλουν ενισχυτικά . Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο είναι δυνατόν να έχουμε ενισχυτική συμβολή σε αρκετά σημεία, τότε «πηγή» χαρακτηρίζεται όποιο σημείο θέλουμε εμείς ! (εκτός και αν η διατύπωση του προβλήματος μας αναφέρει ποια είναι η «πηγή»).

4. ***Απόδειξη*** της $\psi = 2\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t$

Επαλληλία :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \mathrm{A}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) + \mathrm{A}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) = \cdots =$$

$$\psi = 2\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t$$

Πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης που περιγράφει η εξίσωση του στάσιμου :

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$$

5. ***Εύρεση θέσης δεσμών πάνω στο γραμμικό ελαστικό μέσο.***

Δεσμός $\rightarrow A' = 0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0 \rightarrow x = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{4}$ (3)

Δίνοντας στο k δυο διαδοχικές τιμές π.χ. 0 και 1 βρίσκουμε την απόσταση δυο διαδοχικών δεσμών : $d_{\Delta\Delta} = \frac{\lambda}{2}$

6. ***Εύρεση θέσης κοιλιών πάνω στο γραμμικό ελαστικό μέσο.***

κοιλία $\rightarrow A' = 2\mathrm{A} \rightarrow \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm 1 \rightarrow x = 2k\cdot\frac{\lambda}{4}$ (4)

Δίνοντας στο k δυο διαδοχικές τιμές π.χ. 0 και 1 βρίσκουμε την απόσταση δυο διαδοχικών δεσμών : $d_{\mathrm{KK}} = \frac{\lambda}{2}$

7. ***Απόσταση κοιλίας από γειτονικό δεσμό***

Πάνω στη διεύθυνση διάδοσης υπάρχει εναλλαγή δεσμών κοιλιών.

1η κοιλία : $k = 0 \xrightarrow{(4)} x = 0$ (“πηγή !”)

1ος δεσμός : $k = 0 \xrightarrow{(3)} x = \frac{\lambda}{4}$

Επομένως : $d_{\mathrm{K}\Delta} = \frac{\lambda}{4}$

8. ***Φάση ταλάντωσης δομικών μονάδων που συμμετέχουν σε στάσιμο***

Αν $2\mathrm{A}\cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{x}{\lambda} > 0$ τότε η φάση είναι ίση με $\frac{2\pi}{T}t$

Αν $2\mathrm{A}\cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{x}{\lambda} < 0$ τότε η φάση είναι ίση με $\frac{2\pi}{T}t+\pi$, αφού η φάση $\frac{2\pi}{T}t$ «απορροφά» το “-”, μετατρεπόμενη σε $\frac{2\pi}{T}t+\pi$!

Συμπερασματικά : Η φάση μιας δομικής μονάδας που συμμετέχει σε στάσιμο θα είναι είτε $\frac{2\pi}{T}t\pm\pi$, είτε $\frac{2\pi}{T}t$.

Λίγο πιο πέρα : Η διαφορά φάσης –μεταξύ δυο δομικών μονάδων σε στάσιμο – την ίδια στιγμή θα είναι είτε μηδέν είτε ±π rad. Η απόσταση x αποφασίζει ! Ας το δούμε.

9. ***Εύρεση φάσης.***

Βρείτε τη φάση για μια δομική μονάδα , όταν $x=\frac{\lambda}{2}$.

$$\psi = 2\mathrm{A}\cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot \eta\mu\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\pi\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t =$$

$$= -2\mathrm{A}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t = 2\mathrm{A}\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t\pm\pi\right)$$

Είναι προφανές ότι η φάση είναι ίση με $\frac{2\pi}{T}t\pm\pi$

Σχόλιο : Αποδεικνύεται ότι δομικές μονάδες ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς δεσμούς έχουν ίδια φάση (Δφ=0 !), ενώ εκατέρωθεν δεσμού και έως απόσταση λ/2 έχουν διαφορά φάσης Δφ= ±π rad.

10 ***Στιγμιότυπο στάσιμου***

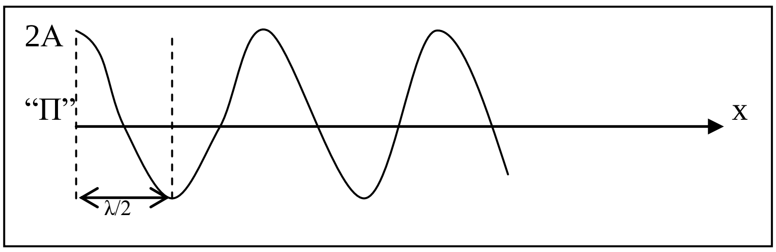
Για να γίνει το διάγραμμα ψ-x θα πρέπει να δοθεί ο χρόνος t. Έστω t=T/4. Φορτώνω την τιμή του t στην εξίσωση του στάσιμου και στη συνέχεια –στην νέα εξίσωση- θέτω x=0 , x=λ/4 , x=2 λ/4, …

$$\psi = 2\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\cdot\frac{T}{4}\right) = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2} = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\frac{x}{\lambda} \qquad (5)$$

$x=0 \xrightarrow{(5)} \psi = 2\mathrm{A}$

$x=\frac{\lambda}{4} \xrightarrow{(5)} \psi = 0$

κ.ο.κ.



11. *Εύρεση ταχύτητας δομικής μονάδας που συμμετέχει σε στάσιμο*

Έχεις τρεις (3) επιλογές για να υπολογίσεις την ταχύτητα ταλάντωσης.

- ✓ Στην εξίσωση του στάσιμου φορτώνεις την τιμή του x και βρίσκεις νέα εξίσωση ψ=f(t). Αυτή τη νέα εξίσωση παραγωγίζεις ως προς t…
- ✓ Από την εξίσωση $\psi = \mathrm{A}' \cdot \eta\mu\omega t \to\to \upsilon = \mathrm{A}' \cdot \omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$
- ✓ Φορτώνεις τις τιμές των x και t και βρίσκεις την θέση ψ. Μετά με Α.Δ.Ε. ταλάντωσης υπολογίζεις το μέτρο της ταχύτητας.

π.χ

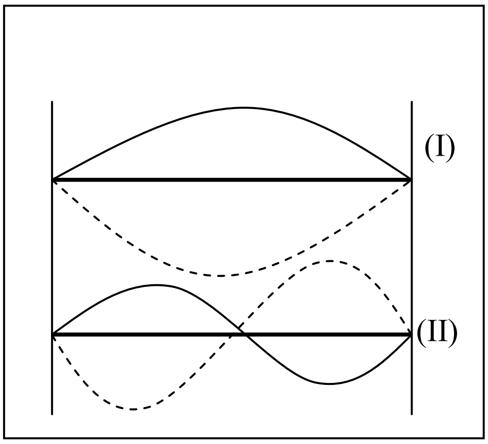
Αν $x = \dfrac{\lambda}{6}$ και $t = \dfrac{T}{8}$ έχουμε :

$$\psi = 2\mathrm{A} \cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{1}{6} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t \to \psi = 2\mathrm{A} \cdot \frac{1}{2} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t \to \psi = \mathrm{A} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t \to$$

$$\upsilon = A \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t \xrightarrow{t=\frac{T}{8}} \upsilon = \cdots$$

12. *Ράβδος ή χορδή μήκους ℓ και το στάσιμο κύμα*

Σε ελεύθερο άκρο χορδής δημιουργείται πάντα κοιλία, ενώ σε δεμένο άκρο πάντα δεσμός. Η παραπάνω πρόταση έχει συνέπειες σε ότι αφορά τη δημιουργία ή όχι του στάσιμου σε χορδή ορισμένου μήκους ℓ.



Εδώ (εικ.Ι) έχουμε το πλέον απλό στάσιμο, αποτελούμενο από μία άτρακτο. Προφανώς επιβάλλεται $l = \dfrac{\lambda}{2}$

Εδώ (εικ.ΙΙ) έχουμε δυο ατράκτους, έτσι $l = 2 \cdot \dfrac{\lambda}{2}$

κ.ο.κ

Συμπερασματικά : πάνω στη χορδή-εφόσον θέλουμε να υπάρχει στάσιμο-επιβάλλεται να δημιουργηθεί ακέραιος αριθμός ατράκτων. Αυτό απλά σημαίνει ότι είναι αναγκαίο να ισχύει γενικά η συνθήκη :

$$l = N \cdot \frac{\lambda}{2} \to \lambda = \frac{2l}{N} \xrightarrow{\upsilon=\lambda\cdot f} f = N \cdot \frac{\upsilon_{diad}}{2l} \qquad (6)$$

Η σχέση (6) λέει ότι για να έχεις στάσιμο σε χορδή ορισμένου μήκους δεν αρκεί να έχεις δυο γραμμικά αρμονικά κύματα με ίδια Α, f και αντίθετες ταχύτητες, αλλά επιβάλλεται να ικανοποιείται η (6).