Συμβολή σε επιφάνεια υγρού

1. ***Συμβολή*** : Η ταυτόχρονη διάδοση δυο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου και η σύνθεσή τους.

2. Το ζήτημα της συμβολής χειρίζεται η ***αρχή της επαλληλίας*** (ή υπέρθεσης).

"Η τελική απομάκρυνση είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επί μέρους κύματα"

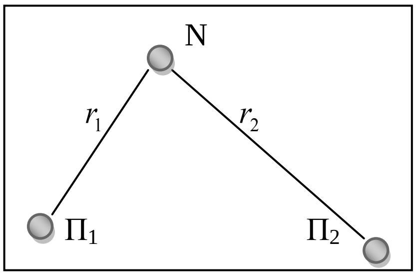
Αλγεβρική διατύπωση αρχής επαλληλίας : $\psi_{ολ}^{t=t_1} = \psi_1^{t=t_1} + \psi_2^{t=t_1} + \cdots$

3. Εργαζόμαστε με ***σύγχρονες πηγές*** (ίδια φάση κάθε στιγμή ! που σημαίνει απαραίτητα ίδιες f). Επιπλέον απαιτούμε από τις πηγές ίσα πλάτη ταλάντωσης Α, έτσι ώστε η μαθηματική διαχείριση της συμβολής να γίνει εύκολη.

4. Το μαθηματικό ζήτημα της συμβολής

$$\psi_1 = \mathrm{A} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$$

$$\psi_2 = \mathrm{A} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$



Επαλληλία : $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots \Rightarrow$

$$\psi = \mathrm{A}\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) = A' \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \qquad (1)$$

Η σχέση (1) λέει ότι η δομική μονάδα Ν κάνει –εν γένει- απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος σταθερό (ε ξ α ρ τ ώ μ ε ν ο όμως από r_1 , r_2 !) και ίσο με $|A'|$

Απαιτούμε ταλάντωση με max πλάτος 2Α :

$$\left|A'\right| = 2A \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\, 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) = \pm 1 \Rightarrow \cdots \left|r_1 - r_2\right| = 2k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad k \geq 0 \qquad (2)$$

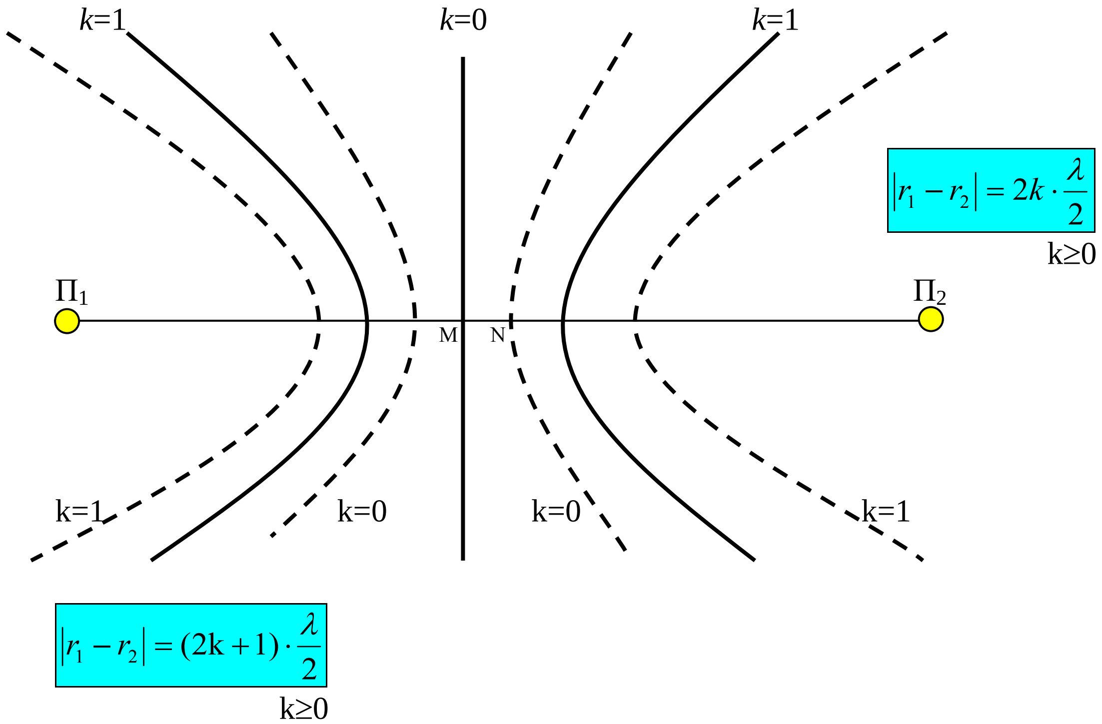
Απαιτούμε ~~ταλάντωση~~ (;) με πλάτος μηδέν :

$$\sigma\upsilon\nu\, 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \cdots \left|r_1 - r_2\right| = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad k \geq 0 \qquad (3)$$

Στις (1) & (2) αν δεν γίνει χρήση απολύτου τιμής τότε η k παίρνει και αρνητικές τιμές

Όταν για μια δομική μονάδα της επιφανείας δεν ισχύουν οι σχέσεις (2) ή (3), τότε αυτή ταλαντώνεται με πλάτος ανάμεσα στο μηδέν και 2Α.

Οι θέσεις των υλικών σημείων που ταλαντώνονται με πλάτος 2Α δεν είναι τυχαία διεσπαρμένες πάνω στην υδάτινη επιφάνεια, αλλά –κατά ομάδες- τα υλικά σημεία διαμορφώνουν καμπύλες υπερβολές. Το ίδιο συμβαίνει με τα υλικά σημεία που είναι μονίμως ακίνητα στην υδάτινη επιφάνεια.



Παρατηρήσεις:

- Οι συνεχείς γραμμές εκφράζουν γεωμετρικό τόπο σημείων που ταλαντώνονται με πλάτος μέγιστο 2Α (***ενισχυτική συμβολή***). Ενώ οι διακομμένες αφορούν σημεία μονίμως ακίνητα (***αποσβεστική συμβολή***).

- Δείτε την συμμετρικότητα του διαγράμματος ως προς την μεσοκάθετο του $\Pi_1\Pi_2$!

- Δείτε ότι η μεσοκάθετος αντιστοιχεί σε ενισχυτική συμβολή και αντιστοιχεί στην τιμή k=0 της εξίσωσης (2) -που είναι εξίσωση ενισχυτικών υπερβολών.

- Δείτε την εναλλαγή ενισχυτικών-αποσβεστικών υπερβολών.

- Αν οι πηγές Π_1 και Π_2 είναι ακουστικές, τότε άμα κινηθούμε πάνω στην ευθεία $\Pi_1\Pi_2$, τότε θα ισχύει το εξής : ακούω-δεν ακούω-ακούω-…

- Κάθε υπερβολή έχει «ταυτότητα» την τιμή του k, αλλά και το πολ/σιο του λ/2

Μερικές σημαντικές παρατηρήσεις για ασκήσεις

[1] Εύρεση απόσταση ΜΝ = α (μετρούμενης πάνω στην $\Pi_1\Pi_2$) :

Δομική μονάδα Μ → Ενισχυτική με k=0 → $M\Pi_1 = M\Pi_2 = x$

Δομική μονάδα Ν → $r_1 = x + \alpha$ *και* $r_2 = x - \alpha$ *(βλέπε σχήμα !) οπότε η εξίσωση (3) της αποσβεστικής -με επιπλέον στοιχείο k=0, δίνει :*

$$(x+\alpha)-(x-\alpha)=(2\cdot 0+1)\cdot\frac{\lambda}{2}\Rightarrow 2\alpha=\frac{\lambda}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\lambda}{4}$$

Αυτή είναι η απόσταση κάθε ενισχυτικής από την γειτόνισσά της αποσβεστική, αρκεί η απόσταση να μετρηθεί πάνω στην ευθεία που ενώνει τις πηγές.

[2] Υπερβολές που δεν είναι …υπερβολές (εκφυλισμένες !) :

(α) Όταν στη εξίσωση των ενισχυτικών υπερβολών θέσουμε k=0 τότε έχουμε $|r_1 - r_2| = 0$ που σημαίνει ότι $r_1 = r_2$ με συνέπεια να μη αναφερόμαστε σε καμπύλη υπερβολή αλλά στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$!

(β) Όταν $|r_1 - r_2| = D$, τότε συμβαίνουν τα εξής :

- Αν $|r_1 - r_2| = D = 2k \cdot \dfrac{\lambda}{2}$, $k > 0$ τότε στη προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ και από τις δυο μεριές τα σημεία της υγρής επιφάνειας θα ταλαντώνονται με πλάτος max και ίσο με 2A.
- Αν $|r_1 - r_2| = D = (2k+1) \cdot \dfrac{\lambda}{2}$, $k > 0$ τότε στη προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ και από τις δυο μεριές τα σημεία της υγρής επιφάνειας θα είναι μονίμως ακίνητα
- Αν $|r_1 - r_2| = D$ και η απόσταση D δεν είναι ούτε άρτιο, ούτε περιττό πολλαπλάσιο, τότε τα σημεία στην προέκταση του $Π_1Π_2$, θα ταλαντώνονται με πλάτος

  $$A' = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\, 2\pi \frac{D}{2\lambda}\right|$$

Ώστε : Στην περίπτωση που συμβαίνει $|r_1 - r_2| = D$, τότε υπερβολές εκφυλίζονται σε δυο…ημιευθείες !

[3] Εύρεση πλήθους υπερβολών

(α) Αν θέλουμε όλες τις ενισχυτικές υπερβολές που αναπτύσσονται πάνω στην επιφάνεια του υγρού τότε επιβάλλεται να συνεργαστούν οι σχέσεις

$|r_1 - r_2| \le D$ και $|r_1 - r_2| = 2k \cdot \dfrac{\lambda}{2}$

(β) Αν θέλουμε όλες τις αποσβεστικές υπερβολές που αναπτύσσονται πάνω στην επιφάνεια του υγρού τότε επιβάλλεται να συνεργαστούν οι σχέσεις

$|r_1 - r_2| \le D$ και $|r_1 - r_2| = (2k+1) \cdot \dfrac{\lambda}{2}$

(γ) Αν θέλουμε τις ενισχυτικές υπερβολές που αναπτύσσονται μεταξύ των δυο πηγών, τότε επιβάλλεται να συνεργαστούν οι σχέσεις

$|r_1 - r_2| < D$ και $|r_1 - r_2| = 2k \cdot \dfrac{\lambda}{2}$

(δ) Αν θέλουμε όλες τις αποσβεστικές υπερβολές που αναπτύσσονται μεταξύ των πηγών, τότε επιβάλλεται να συνεργαστούν οι σχέσεις

$|r_1 - r_2| < D$ και $|r_1 - r_2| = 2k \cdot \dfrac{\lambda}{2}$

[4] Προτάσεις με …υποχρέωσή μας να προσδιορίσουμε το r_2-r_1 δηλ. το πλάτος ταλάντωσης!

α) Ένα σημείο Σ απέχει από την $Π_1$ απόσταση 56 cm και από την $Π_2$ απόσταση 76 cm. (δίνεται λ=40 cm)

κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση $A' = 2A \cdot συν 2\pi \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} = \ldots$

β) Ένα σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται λόγω του κύματος της $Π_1$ κάποια στιγμή και μετά από 0,8 sec φτάνει στο σημείο αυτό το κύμα από την $Π_2$. (δίνεται λ=40 cm και c=2 m/sec)

Η καθυστέρηση είναι ζήτημα επιπλέον διαδρομής. Για το επιπλέον διάστημα ισχύει η εξίσωση: $r_2 - r_1 = \upsilon_{διαδ} \cdot \Delta t$ …

γ) Σε ένα σημείο Μ το κύμα της $Π_1$ παρουσιάζει διαφορά φάσης από το κύμα της πηγής $Π_2$ κατά π/2

Για το σημείο Μ, εργαζόμαστε με τις αναλυτικές εκφράσεις της φάσης των κυμάτων y_1 kai y_2. Ας θυμηθούμε ότι φάση λέμε την έκφραση : $2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$ …

[5] Η εξίσωση συμβολής $\psi = 2A \cdot συν\, 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot ημ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$ **ισχύει για κάθε t ;**

Έστω ότι το κύμα ψ_1 θέλει χρόνο t_1 για να φτάσει στην δομική μονάδα Ν, ενώ το κύμα ψ_2 θέλει t_2. (έστω $t_1 > t_2$). Τότε :

- Αν $t < t_2$ θα έχουμε ακινησία για την δομική μονάδα Ν.
- Αν $t_2 < t < t_1$ θα έχουμε ταλάντωση με εξίσωση $\psi_2 = \mathrm{A} \cdot ημ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$
- Αν $t > t_1$ θα έχουμε ταλάντωση με την εξίσωση της συμβολής.

[6] Το πλάτος της ταλάντωσης σε υλικό σημείο όπου έχουμε συμβολή.

Έστω ότι έχουμε συμβολή σε κάποιο σημείο Ν, οπότε ισχύει η γνωστή εξίσωση συμβολής : $\psi = A' \cdot B_{(t)}$. Έστω επίσης ότι τα δεδομένα (r_1, r_2, T, λ, A) δίνουν : $A' = -5$ cm και $B_{(t)} = -\frac{1}{2}$

Ποιο το πλάτος της ταλάντωσης ; Απαντάμε $|A'| = 5$ cm

Ποια η απομάκρυνση ; Απαντάμε $\psi = (-5) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = +2,5$ cm