

# Κύματα

---

## 1. Τι είναι τα κύματα;

Πρόκειται για μηχανισμό διάδοσης ενέργειας και ορμής, χωρίς μεταφορά ύλης.

## 2. Κατηγορίες κυμάτων

(I) Με κριτήριο την συμμετοχή ή όχι της ύλης

Μηχανικά : Απαιτούν τη παρουσία ύλης για να υπάρξουν π.χ. ήχος

Ηλεκτρομαγνητικά : Διαδίδονται και στο κενό π.χ. φως

(II) Με κριτήριο τις διαστάσεις του χώρου, όπου διαδίδονται

Γραμμικά : Διαδίδονται σε υλικό όπου οι δομικές μονάδες είναι σε νοητή ευθεία, όταν ισορροπούν π.χ. νήμα, χορδή, ...

Επιφανειακά : Διάδοση σε επιφάνεια υγρού, σε μεμβράνη,...

Χώρου : Διάδοση στις τρεις διαστάσεις.

(III) Με κριτήριο τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και της διεύθυνσης ταλάντωσης των δομικών μονάδων

Εγκάρσια : καθετότητα μεταξύ των δυο διευθύνσεων

Διαμήκη : παραλληλότητα -//- -//-

Ένα κύμα είναι προφανές ότι ανήκει ταυτόχρονα και στις τρεις κατηγορίες. Παράδειγμα ο ήχος : είναι μηχανικό , χώρου και διάμηκες κύμα.

Τα εγκάρσια μηχ. κύματα διαδίδονται στα στερεά υλικά. Τα διαμήκη στα στερεά & υγρά & αέρια.

Όμως ! Τα κύματα στη επιφάνεια υγρού είναι κατά προσέγγιση εγκάρσια...

## 3. Ποια κύματα μελετάμε ;

Τα πλέον απλά κύματα : **Γραμμικά αρμονικά κύματα** (γ.α.κ.)

- **Γραμμικά** : Στο μέσο διάδοσης οι δομικές μονάδες ισορροπούν σε νοητή ευθεία...
- **Αρμονικά** : Όλες οι δομικές μονάδες που συμμετέχουν στο κύμα κάνουν **α.α.τ.**



Σε τι μοιάζουν οι ταλαντώσεις ;

Έχουν ίδια  $A$  ,  $\omega$  ,  $m$  και ο,τι σημαίνει αυτό !

Σε τι διαφέρουν ;

Διαφέρουν στη φάση, υπάρχει θέμα καθυστέρησης για κάθε επόμενη ταλάντωση σε σχέση με την προηγούμενη αυτής!

#### 4. Τι λέμε «πηγή» κύματος ;

1<sup>η</sup> άποψη (κάποιες φορές είναι αληθής...)

~~Από εδώ ξεκινά η διέγερση με συνέπεια τη διάδοση του κύματος...~~

2<sup>η</sup> άποψη (δεχτείτε την για το καλό σας)

Έτσι λέμε τη δομική μονάδα από την οποία μετράμε αποστάσεις χώρου (x) και χρόνου (t). Είναι η δομική μονάδα από την οποία ξεκινά η περιγραφή του κύματος.

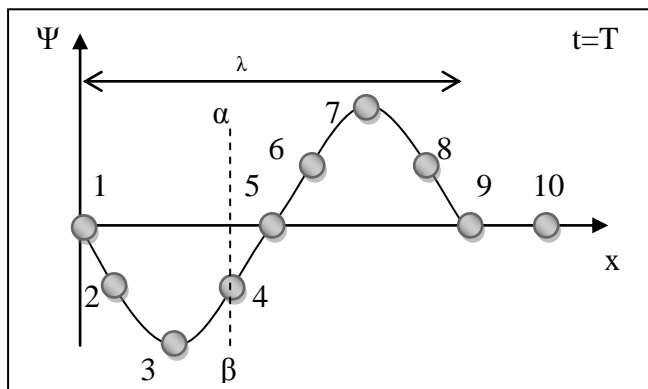


Το σχολικό βιβλίο λέει ότι όταν  $t=0$ , τότε η «πηγή» είναι στη θ.ι. κινούμενη με  $v>0$ . Πως το λέει ;

Απλά !

$$\psi_{\text{πη}} = A \cdot \eta\mu\omega t$$

#### 5. Ας δούμε ένα κύμα χωρίς μαθηματικά.



- Το διάγραμμα  $\psi$ -x λέγεται στιγμιότυπο κύματος και δείχνει την μορφή (καμπύλωση) του γραμμικού ελαστικού μέσου, κάποια στιγμή  $t=t$ .

- Όσες δομικές μονάδες συμμετέχουν στο κύμα βρίσκονται σε νοητή ημιτονοειδή γραμμή. (τέτοια είναι η καμπύλωση που

υφίσταται το γραμμικό ελαστικό μέσο)

- Μήκος κύματος ( $\lambda$ ) : Η απόσταση που διανύει το κύμα εντός χρόνου  $T$ . Αλλιώς, απόσταση πάνω στην ευθεία διάδοσης, που αντιστοιχεί σε ένα όρος και μια κοιλάδα
- Προσοχή στα μεγέθη  $\psi$  (απομάκρυνση από θ.ι.) και  $x$  (απόσταση από πηγή)
- Ποιες δομικές μονάδες –στο σχήμα- έχουν τη στιγμή  $t=T$ , max ταχύτητα ταλάντωσης ;  
Απάντηση : 1, 5, 9 !

Τι εκφράζει –στο σχήμα- το διακεκομμένο ευθύγραμμο τμήμα  $\alpha\beta$ ;

Απάντηση : Το ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $2A$ , πάνω στο οποίο ταλαντώνεται η δομική μονάδα 4 !

6. Θεμελιώδης νόμος κυματικής

$$v_{\text{διαδ}} = \lambda \cdot f$$

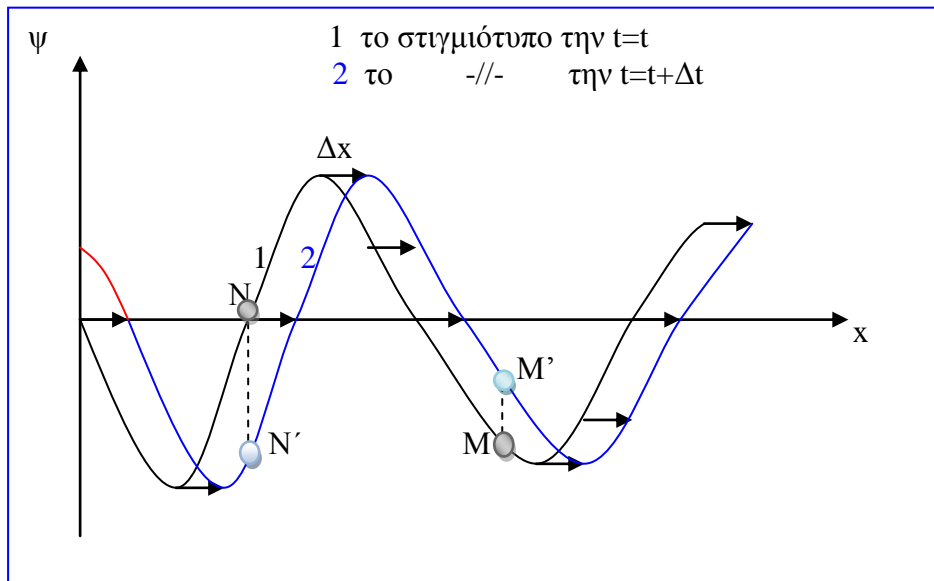
Η διάδοση του κύματος στη διεύθυνση  $x$  είναι ισοταχής. Έτσι με γνώμονα τη σχέση  $s=v \cdot t$  έχουμε :

$$s = v \cdot t \xrightarrow{\text{αν θέσω } t=T, \text{ τότε } s=\lambda!} \lambda = v_{\text{διαδ}} \cdot T \Rightarrow v_{\text{διαδ}} = \lambda \cdot f$$

⚡ Η **ταχύτητα διάδοσης** είναι μια και σταθερή. Αφορά το κύμα και εξαρτάται από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου, όπου το κύμα διαδίδεται. ( Η  $v_{\text{διαδ}}$  είναι ανεξάρτητη από  $A$ ,  $\lambda$  και  $f$ . Εντάξει ; )

Αντίθετα ! Η ταχύτητα ταλάντωσης αφορά κάθε δομική μονάδα που συμμετέχει στο κύμα. Μεταβάλλεται αρμονικά μεταξύ των τιμών  $-\omega \cdot A$  και  $+\omega \cdot A$  , ...

7. Σχεδιάζω το στιγμιότυπο κύματος  $\psi-x$  τις στιγμές  $t$  και  $t+\Delta t$



- Επιλέγω ορισμένα χαρακτηριστικά σημεία της κυματομορφής του  $t=t$  και τα μετατοπίζω όλα κατά  $\Delta x$  (προκαλείται έτσι ολίσθηση κατά  $\Delta x$ . Εντάξει ; )
- Ενώνω τα νέα σημεία δημιουργώντας μια νέα ημιτονική κυματομορφή του  $t+\Delta t$ .
- Συμπληρώνω αριστερά το κενό.
- Προφανώς ισχύει :  $\Delta x = v_{\text{διαδ}} \cdot \Delta t$

↓  
Να το  $\Delta t$  !

$$\text{π.χ } \text{αν } \Delta t = \frac{T}{4} \text{ τότε } \Delta x = \lambda \cdot f \cdot \frac{T}{4} = \lambda \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\lambda}{4} !$$

- Στο σχήμα η δομική μονάδα N –ύστερα από χρόνο  $\Delta t$ - ευρίσκεται στη θέση N', με συνέπεια η ταχύτητά της να έχει αρνητική τιμή τις στιγμές t και t+ $\Delta t$ ! Αντίθετα η δομική μονάδα M εμφανίζει  $v > 0$ ...

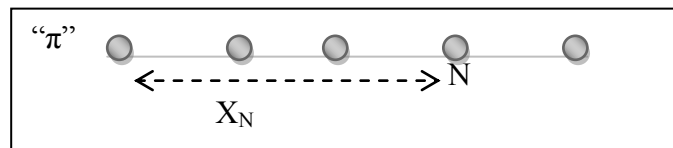
Κάπως ελεύθερα :

Η θέση-δηλ. τιμή απομάκρυνσης  $\psi$ - κάθε επόμενης δομικής μονάδας είναι εκείνη όπου βρίσκεται μια γειτονική προηγούμενη.

## Εξίσωση κύματος (γ.α.κ.)

1<sup>η</sup> εξίσωση ( ταλαντώνεται αρχικά η «πηγή» και μετά η N )

Χωρίς απόδειξη δεχόμαστε ότι : « ό,τι κάνει η πηγή, θα κάνει λίγο αργότερα η επόμενη δομική μονάδα, μετά η μεθεπόμενη, κ.ο.κ.»



Όταν  $t=0$  η «πηγή» είναι στη θ.ι. με θετική ταχύτητα. Έτσι η εξίσωση ταλάντωσης της είναι :

$$\psi_{\pi} = A \cdot \eta \mu \omega t \quad (1)$$

Η δομική μονάδα N οφείλει να έχει όμοια εξίσωση ταλάντωσης :

$$\psi_N = A \cdot \eta \mu \omega t' \quad (2)$$

Οι χρόνοι t και t' δεν είναι δυνατόν να είναι ίδιοι αφού οι ταλαντώσεις της πηγής και της δομικής μονάδας N, δεν ξεκινούν ταυτόχρονα.

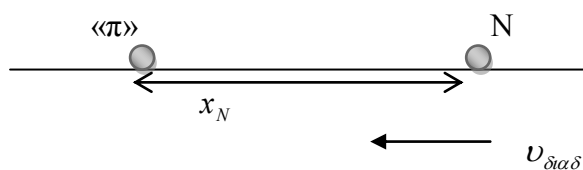
Αφού η N κάνει ότι η «πηγή» με καθυστέρηση  $t_{\text{HN}}$  ισχύει :

$$t = t_{\text{HN}} + t' \Rightarrow t' = t - \frac{x_N}{v_{\text{διαδ}}} \quad (3)$$

Από (2), (3)

$$\begin{aligned} \psi_N &= A \cdot \eta \mu \omega \cdot \left( t - \frac{x_N}{v_{\text{διαδ}}} \right) = A \cdot \eta \mu \left( \frac{2\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{x_N}{v_{\text{διαδ}}} \right) \right) = A \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_N}{T \cdot v_{\text{διαδ}}} \right) = \\ &= A \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

2<sup>η</sup> εξίσωση ( ταλαντώνεται αρχικά η N και μετά η «πηγή» )



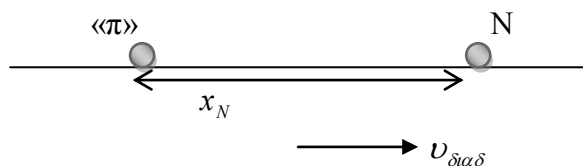
Θεωρούμε ότι όταν  $t=0$  ισχύει :  $\psi_{\pi} = A \cdot \eta\mu\omega t$  . Για την ταλάντωση της N έχουμε  $\psi_N = A \cdot \eta\mu\omega t'$  !

$$\text{Όμως } t' = t + t_{\text{IN}} \Rightarrow t' = t + \frac{x_N}{v_{\delta\delta}}$$

Με αυτούς τους όρους η εξίσωση ταλάντωσης κάθε δομικής μονάδας που ταλαντώνεται πριν την «π» θα είναι

$$\dots \psi = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) !$$

3<sup>η</sup> εξίσωση ταλάντωσης ...



Θεωρούμε ότι όταν  $t=0$  ισχύει :  $\psi_{\pi} = A \cdot \eta\mu \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$  .

Για την ταλάντωση κάθε δομικής μονάδας που ταλαντώνεται μετά την «πηγή» -όπως

π.χ. η N - θα έχουμε :  $\Psi = A \cdot \eta\mu \left( \omega t' + \frac{\pi}{2} \right)$

Όμως -αφού πρώτα ταλαντώνεται η «πηγή» ισχύει  $t = t_{\text{IN}} + t' \Rightarrow t' = t - \frac{x_N}{v_{\delta\delta}}$

$$\psi = A \cdot \eta\mu \left( \omega \left( t - \frac{x}{v_{\delta\delta}} \right) + \frac{\pi}{2} \right) = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{T \cdot v_{\delta\delta}} + \frac{1}{4} \right) = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) !!!$$

Συμπέρασμα

Οι εξισώσεις κύματος είναι ...ατελείωτες. Ανάλογα με την αρχική φάση της «πηγής» αλλά και με τη διεύθυνση διάδοσης, μπορούμε να γράψουμε και διαφορετική εξίσωση κύματος.

## Παρατηρήσεις στην εξίσωση κύματος

1. Η εξίσωση κύματος είναι φορτωμένη με τον χρόνο  $t$ , που δηλώνει πόσος χρόνος πέρασε, αφότου η “ $\pi$ ” άρχισε να ταλαντώνεται.

2. Όποια μονάδα μέτρησης έχει η απόσταση  $x$ , θα έχει και το  $\lambda$ . Όποια μονάδα μέτρησης έχει το  $A$ , θα έχει και η απομάκρυνση  $\psi$ .

3. Αν  $x=0$  τότε η εξίσωση κύματος περιγράφει την ταλάντωση της “ $\pi$ ” !  
Πράγματι :

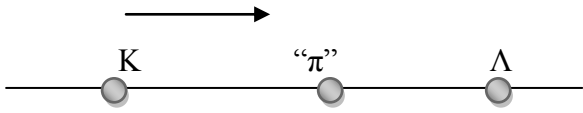
$\psi = A \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} = A \cdot \eta\mu \omega t$ . Εδώ έχουμε αρχική φάση  $\phi_0=0$  rad, πράγμα που σημαίνει ότι όταν  $t=0$  η “ $\pi$ ” είναι στη θ.ι κινούμενη προς τη  $+A$  ακραία θέση.

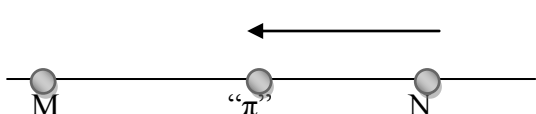
4. Η έκφραση  $\phi = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda} \right)$  λέγεται φάση και παίρνει μη αρνητικές τιμές.

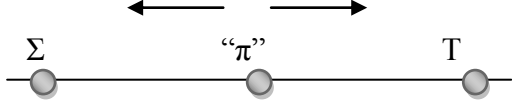
Αν για ένα ζεύγος τιμών  $t = t_1$ ,  $x = x_1$ , προκύψει αρνητική τιμή φάσης, τότε αυτό σημαίνει ότι το κύμα δεν έφτασε τη στιγμή  $t_1$  στη θέση  $x_1$ .

Φάση = 0  $\rightarrow$  μόλις έφτασε...

5. Αν για μια «πηγή» κύματος σε γραμμικό μέσο έχουμε εξίσωση ταλάντωσης χωρίς αρχική φάση, τότε να γράψετε στις παρακάτω περιπτώσεις την εξίσωση ταλάντωσης των υπολοίπων σημείων.

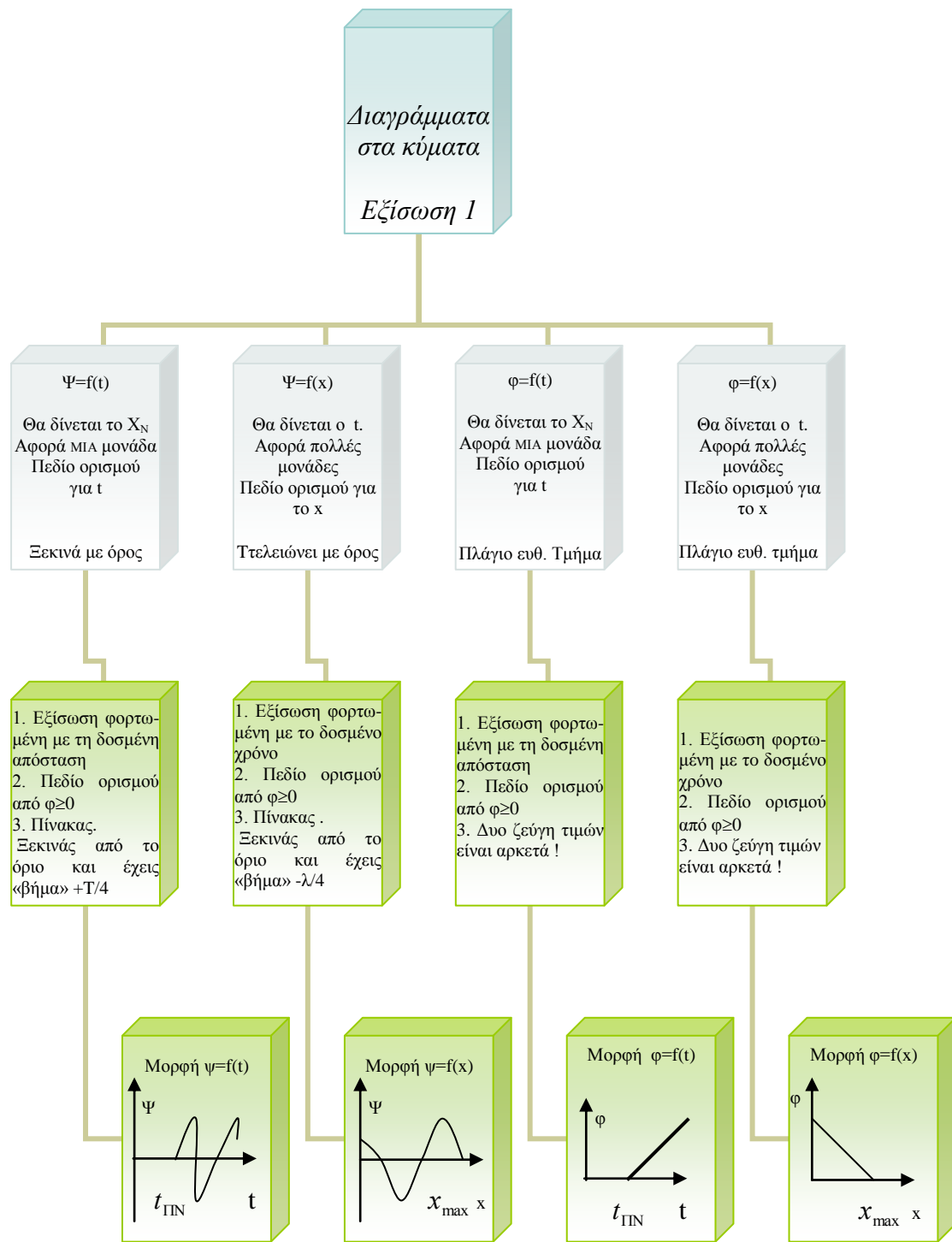
α)  Το κύμα έρχεται από κάπου αριστερά  
Απάντηση : Εξίσωση 2

β)  Το κύμα έρχεται από κάπου δεξιά  
Απάντηση : Εξίσωση 2

γ)  Η “ $\pi$ ” αρχίζει να ταλαντώνεται  
Απάντηση : Εξίσωση 1

Όλα γίνονται απλά, άμα δεχτούμε την λογική πρόταση που λέει ότι **όποια μονάδα ταλαντώνεται πιο γρήγορα από μια άλλη, οφείλει να έχει μεγαλύτερη φάση.**

...



Στιγμιότυπο ↑

Όταν δίνεται διάγραμμα τότε :

√ Εκμετάλλευση του  $t_{\text{IN}}$  των διαγραμμάτων (I) και (III) :

$$s = v \cdot t \Rightarrow x_N = v_{\text{διαδ}} \cdot t_{\text{IN}} \Rightarrow x_N = \frac{\lambda}{T} \cdot t_{\text{IN}} \quad \text{Το } x_N \text{ Δίνεταιαι!!!}$$

√ Εκμετάλλευση του  $x_{\text{max}}$  των διαγραμμάτων (II) και (IV) :

$$s = v \cdot t \Rightarrow x_{\text{max}} = v_{\text{διαδ}} \cdot t_1 \Rightarrow x_{\text{max}} = \frac{\lambda}{T} \cdot t_1 \quad \text{Το } t_1 \text{ Δίνεταιαι!!!}$$