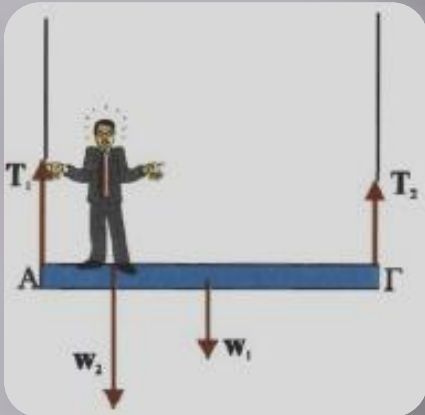


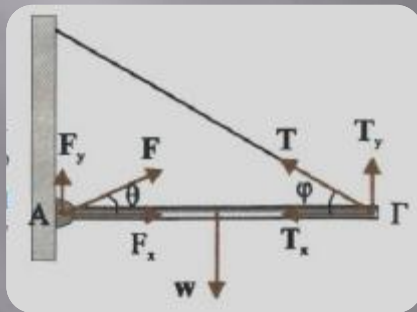
# ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



Για να **ισορροπεί** (\*) ένα στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις θα πρέπει :

1. Η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν  $\Sigma F = 0$

2. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν

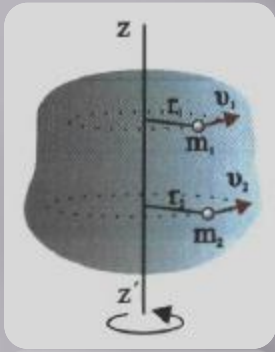


$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma \tau = 0$$

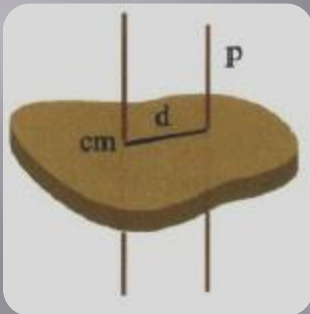
*Ισορροπία : Μεταφορικά ακινησία ή ε.ο.κ . Στροφικά ακινησία ή ομαλή στροφική*

# ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ $I_{xx'}$



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει μονάδα το  $1 \text{ kg m}^2$ .



$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

θεώρημα παραλλήλων αξόνων ή θεώρημα Steiner (Στάινερ)...

...δίνει τη ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο παράλληλο άξονα που απέχει απόσταση  $d$  από το κέντρο μάζας

Εκφράζει :

1. Την κατανομή της ύλης σε σχέση με τον άξονα
2. Την αδράνεια του στερεού σε μεταβολές στροφικής κατάστασης

# ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Για να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ροπή.

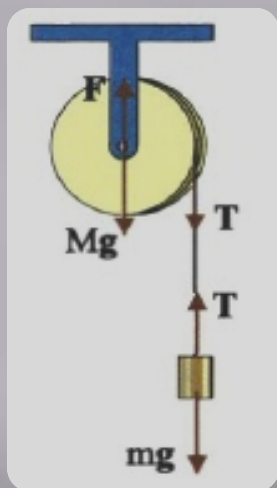
Η σχέση ανάμεσα στην αιτία (ροπή) και το αποτέλεσμα (μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας) είναι :

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

**ΣΗΜΕΙΩΜΑ I:** Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, προκύπτει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν, επομένως το σώμα διατηρεί την προηγούμενη περιστροφική του κατάσταση, δηλαδή αν το σώμα είναι ακίνητο θα εξακολουθήσει να ηρεμεί, ενώ αν στρέφεται θα συνεχίσει να στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

**ΣΗΜΕΙΩΜΑ II:** Ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης ισχύει και στις περιπτώσεις όπου ο άξονας γύρω από τον οποίο περιστρέφεται το σώμα **να διέρχεται από το κέντρο μάζας** του σώματος, να **είναι άξονας συμμετρίας** και να **μην αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης**.

# ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



Σχεδιάσε : Δυνάμεις - ταχύτητες

και γράψε εξισώσεις για τέσσερες λέξεις...

Μεταφορά - Στροφή - Κύλιση - Νήμα !

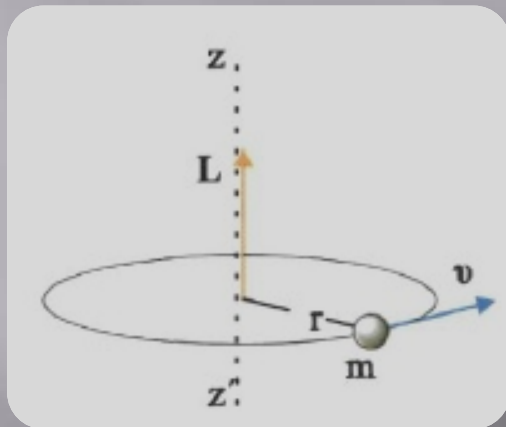
$$mg - T = m\alpha_{cm}$$

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{Νήμα : } T = T$$

...Κάνεις επίσης χρήση πρόσθετων εξισώσεων μεταφοράς Α τάξης, αλλά και στροφική αντιμετώπιση μέσα από το διάγραμμα  $\omega - t$  ...

# ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ



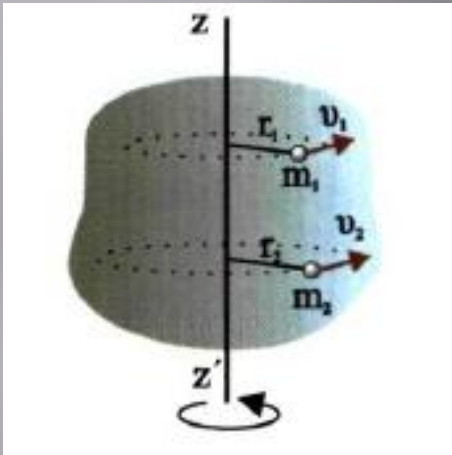
Το υλικό σημείο μάζας  $m$  κινείται κυκλικά. Η στροφορμή του είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς του. (φορά σύμφωνη με τον κανόνα δεξιού χεριού).

Μέτρο στροφορμής :

$$L = mvr$$

Μονάδα στροφορμής είναι το  $1\text{ kg m}^2/\text{s}$ .

# ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΕΝΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ



Το στερεό μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα με μάζες  $m_1$   $m_2$  ... Κάθε μάζα εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.

... Η στροφορμή του σώματος είναι το **άθροισμα** των στροφορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν.  $L = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + \dots \rightarrow$

$$L = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \dots = \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots)$$

όμως :  $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = I$  και επομένως

$$L = I\omega$$

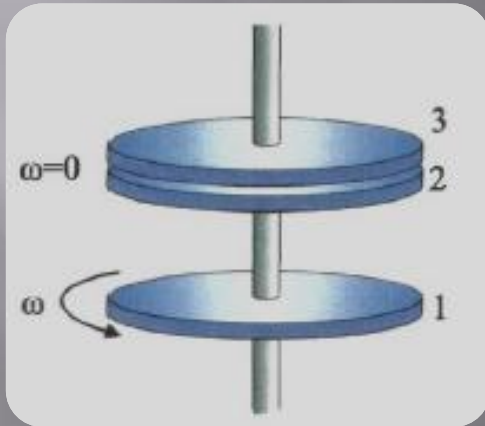
Τη στροφορμή που σχετίζεται με την περιστροφική κίνηση ενός σώματος γύρω από άξονά που περνάει από το κέντρο μάζας του, την ονομάζουμε **σπιν**.

# ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

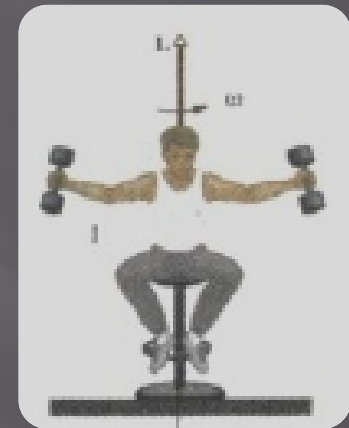
Σε ένα σύστημα σωμάτων, στροφορμή **ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα** των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι  $L_1, L_2, \dots$ , η στροφορμή  $L$  του συστήματος είναι :

$$\vec{L}_{ολική} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots$$



Οι δίσκοι αποτελούν σύστημα...  
Τα μέλη του συστήματος έχουν διαφορετικά  $\omega$ .



Εδώ τα μέλη του συστήματος έχουν ίδιο  $\omega$  !

# ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ( για ένα στερεό )

$$L = I\omega$$



$$dL = I d\omega$$



$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$



$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$$

Επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του



## ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ( για σύστημα σωμάτων)

Ο νόμος, που μόλις περιγράψαμε ισχύει και σε σύστημα σωμάτων.

$$\sum \tau_{\epsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$$

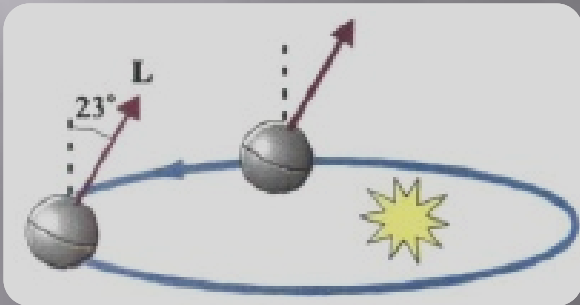
Η ολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική.

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα οι εσωτερικές δυνάμεις απαντούν κατά ζεύγη (δράση - αντίδραση). Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες.

Η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική, αφού οι δυνάμεις ανήκουν στον ίδιο φορέα και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων να είναι μηδέν.

# ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ

Αν σε ένα σώμα το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών είναι μηδέν, από τη σχέση  $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$  προκύπτει ότι  $\frac{dL}{dt} = 0$  επομένως,  $L = \text{σταθ.}$  Η στροφορμή του σώματος παραμένει σταθερή.



Η στροφορμή της Γης -λόγω της ιδιοπεριστροφής/σπιν της- διατηρείται σταθερή, διότι η έλξη του ηλίου δεν προκαλεί ροπή, αφού ασκείται στο cm, οπότε δεν υπάρχει μοχλοβραχίονας.  
Τόσο απλά !

# ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ



Ο δεύτερος νόμος του Newton για τη στροφοκική κίνηση στην περίπτωση συστήματος σωμάτων έχει τη μορφή  $\Sigma \tau_{\epsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$ . Από τη σχέση αυτή προκύπτει

ότι αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως **αρχή της διατήρησης της στροφορμής**.

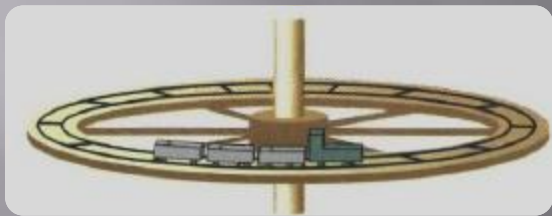
**Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδέν η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.**

ατροφοβητη του αλατιηματοσ παραηελετ σταθερη.

Εαν η αρολογικη εξωαεβηκη ροπη σε ενα αροατιητα ειναι μηδεν η ολικη

# ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ένα ηλεκτρικό τρενάκι μάζας  $m = 2\text{kg}$  μπορεί να κινείται πάνω σε ένα μεγάλο οριζόντιο τροχό. Ο τροχός μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά και ο τροχός και το τρενάκι είναι ακίνητα. Κάποια στιγμή το τρενάκι αρχίζει να κινείται με ταχύτητα  $v=8,4 \text{ m/s}$ . Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία θα στρέφεται ο τροχός. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονά του είναι  $I = 11,52 \text{ kg m}^2$  Ακτίνα περιστροφής  $R= 1,2 \text{ m}$ .

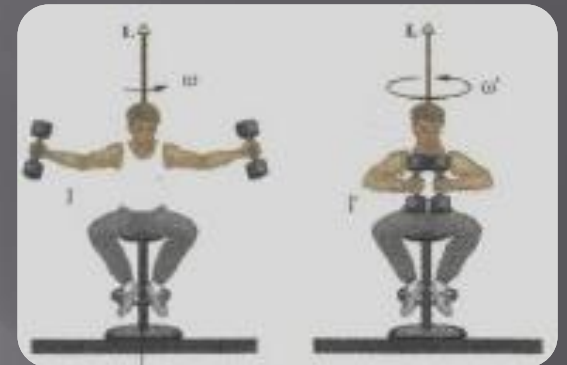


$$\begin{aligned} \text{Η στροφορμή διατηρείται : } \vec{L}_{\text{αρχική συστήματος}} &= \vec{L}_{\text{τελική συστήματος}} \rightarrow 0 + 0 \\ &= \vec{L}_{\text{τρένου}} + \vec{L}_{\text{τροχός}} \rightarrow \vec{L}_{\text{τροχός}} = -\vec{L}_{\text{τρένου}} \quad (1) \end{aligned}$$

Αντίθετες λοιπόν η ορμές τρένου και τροχού!!

$$\begin{aligned} (1) \text{ Αλγεβρικά : } I_{\text{τρένο}} \cdot \omega_{\text{τρένο}} &= I_{\text{τροχός}} \cdot \omega_{\text{τροχός}} \rightarrow mR^2 \cdot \frac{v}{R} = I_{\text{τροχός}} \omega_{\text{τροχός}} \rightarrow \omega_{\text{τροχός}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

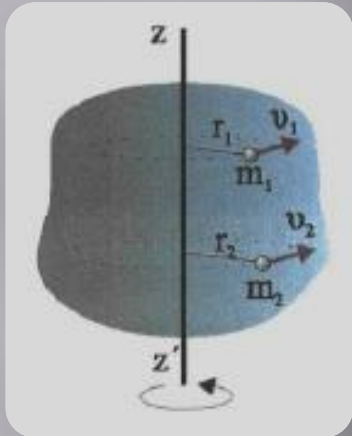
# ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΧΗΜΑΤΟΣ...



Αν λόγω ανακατανομής της μάζας (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, μεταβάλλεται και η γωνιακή ταχύτητά του, αλλά η στροφορμή του διατηρείται σταθερή.

Μπορούμε επομένως να γράψουμε:  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

# ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΣΤΡΟΦΗΣ



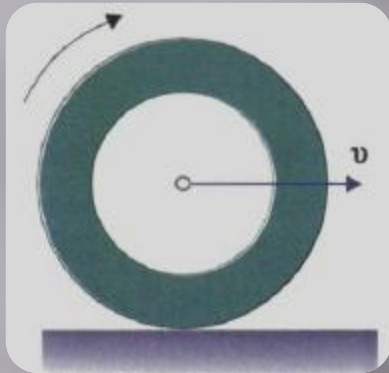
Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα των ενεργειών των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται.

$$K = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \dots = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2$$

Όμως  $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = I$  και επομένως

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

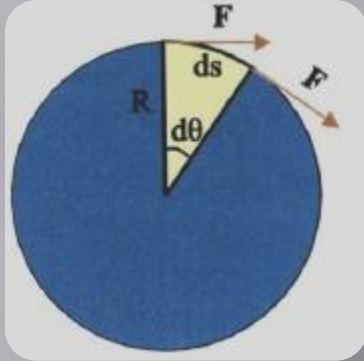
# ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ



Ο τροχός έχει κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής και λόγω περιστροφικής κίνησης .

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

# ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΑΛΕΙ ΡΟΠΗ...



Ισχύει :  $dW = Fds$

Αν η γωνία μετριέται σε ακτίνια τότε  $ds = R d\theta$  και  $dW = F \cdot R \cdot d\theta$   
Το γινόμενο  $FR$  είναι η ροπή  $\tau$  της δύναμης.

Επομένως  $dW = \tau d\theta$

Αν η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, όπως στην περίπτωση του σχήματος, αθροίζουμε τα επι μέρους έργα και έτσι προκύπτει :

$$W = \tau \theta$$

Ισχύς δύναμης που προκαλεί ροπή

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου  $dW / dt$  είναι η ισχύς **P** της δύναμης και το  $d\theta / dt$  είναι η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  του σώματος, επομένως

$$P = \tau \omega$$

$$P = \tau \omega$$



# Η αξία του έργου της δύναμης που προκαλεί ροπή

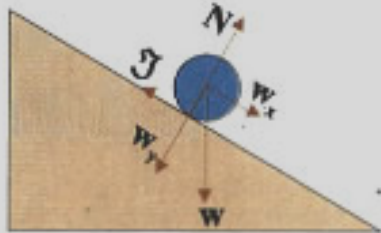
Η ροπή μιας δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Έτσι, στη στροφική κίνηση, το θεώρημα έργου - ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$\sum W = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των ροπών που ασκούνται στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.

μεταβολή του αθροίσματος

στο σώμα είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας



Υπό προϋποθέσεις εργαζόμαστε με το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (ΑΔΜΕ) !!!

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$