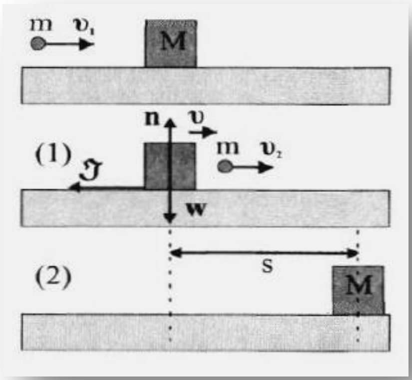
Ασκήσεις – προβλήματα στις κρούσεις (σχολικό βιβλίο)

5.22 Βλήμα μάζας m=0,4 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_1$=400 m/s. Το βλήμα στην πορεία του συναντάει σώμα μάζας M= 2 kg που ήταν ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο, το διαπερνά και βγαίνει με ταχύτητα $υ_2$ = 300m/s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του σώματος M, με το οριζόντιο επίπεδο είναι 0,5. Να υπολογίσετε:
α) την ταχύτητα του σώματος M, αμέσως μετά την κρούση.
β) τη μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση.
γ) το διάστημα που θα διανύσει το M μέχρι να σταματήσει.
Δίνεται g = 10m/s^2



(α) Στην οριζόντια διεύθυνση και για το χρονικό διάστημα Δt, που διαρκεί η κρούση -αγνοώντας την ύπαρξη της τριβής- ισχύει η Α.Δ.Ο.

$$m\vec{u}_1 + 0 = m\vec{u}_2 + M\vec{V} \;\rightarrow αλγεβρικά \rightarrow \cdots V = 20\, m/sec$$

*(β) Στις μη ελαστικές υπάρχουν **πάντα** απώλειες κινητικής ενέργειας*

$$\Delta K = K_{τελ.} - K_{αρχ} = \left(\tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}mu_2^2\right) - \tfrac{1}{2}mu_1^2 = \cdots \Delta K = \\ = -13600\, Joule$$

*Αυτή είναι η **μεταβολή** (μείωση)*

(γ) Θα μπορούσαμε να εργαστούμε με εξισώσεις ε.ο.μ.κ., αλλά πάμε πιο γρήγορα με ΘΜΚΕ.

$$0 - \frac{1}{2}MV^2 = -T.s \rightarrow MV^2 = 2\,\mu.N.s \rightarrow MV^2 = 2\,\mu.Mg.s \rightarrow V^2 = 2\,\mu.g.s \rightarrow s = 40\, m$$

5.23 Σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα u=12 m/s συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα τριπλάσιας μάζας. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

Μετωπική – ελαστική – ακίνητο το ένα σώμα, σημαίνει 5.8 και 5.9 Προσοχή εδώ!

*Λες : «Ταχύτητα κινούμενης μετά τη κρούση ίσον αριθμητή με κινούμενη μάζα μείον ακίνητη, παρονομαστής άθροισμα μαζών και το όλο κλάσμα **επί** ταχύτητα κινούμενης»*

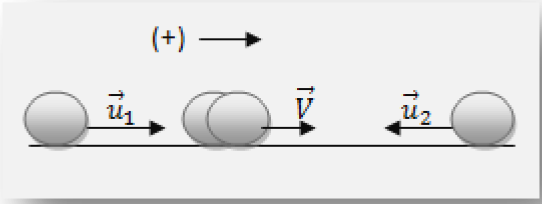
$$u_1' = \frac{m-3m}{m+3m}.u = \cdots = -6\, m/sec \quad δηλαδή\ γυρίζει\ πίσω!$$

*Λες: «ταχύτητα ακίνητης μετά τη κρούση ίσον αριθμητής η διπλάσια μάζα της κινούμενης, παρονομαστής το άθροισμα μαζών και το όλο κλάσμα **επί** ταχύτητα κινούμενης»*

$$u_2' = \frac{2m}{m+3m}.u = \cdots = 6\, m/sec$$

Σημείωμα: Οι σχέσεις 5.8 και 5.9 ισχύουν όταν κινούμενη είναι η m_1. Ε! όσες φορές έδωσα στο σχολείο να κινείται η m_2, έγινε Βατερλό… Να γιατί προτείνω τους κανόνες για τις 5.8 και 5.9

5.24 Δύο σφαίρες με μάζες m_1 = 10kg και m_2 =20kg κινούνται με αντίθετη φορά πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $υ_1$ = 3m/s και $υ_2$ = 2m/s αντίστοιχα, και συγκρούονται πλαστικά. Να βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που χάθηκε κατά την κρούση.



(α) Α.Δ.Ο.

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = (m_1+m_2)\vec{V} \ \rightarrow αλγεβρικά \ \rightarrow V = -0{,}33\ m/sec$$

Το (-) σημαίνει φορά αντίθετη της ορισθείσης ως θετική…

(β) ποσοστό κινητικής που χάθηκε (απώλειες)

Όταν έχουμε $K_{αρχ}$ *και μετά την κρούση έχουμε* $K_{τελ}$ *, τότε χάνεται το* $|K_{τελ} - K_{αρχ}|$

// 100 // // x

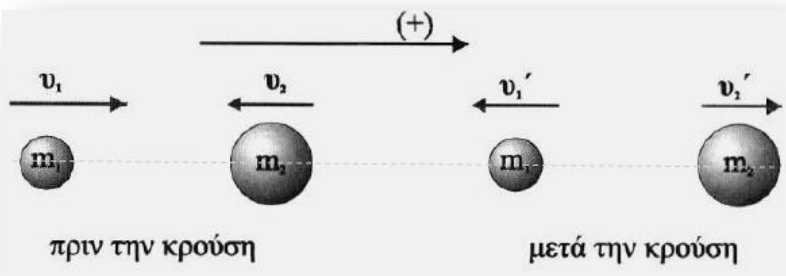
$$x = \frac{|K_{τελ} - K_{αρχ}|}{K_{αρχ}} .100\% \quad (1)$$

Αναπτύσσουμε την (1) και …

$$\frac{|\Delta K|}{K_{αρχ}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ^2}{\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2}100\% = 98\%$$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ : Κάναμε χρήση απόλυτης τιμής στη διαφορά του αριθμητή, διότι η λέξη «απώλειες» ή η λέξη «χάθηκε» ή η λέξη «μειώθηκε», εκφράζουν το (-) της μεταβολής.

5.26 Σφαίρα μάζας m_1 = 2kg που κινείται με ταχύτητα $υ_1$ = 4m/s συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα μάζας m_2 = 4kg που κινείται αντίθετα με ταχύτητα $υ_2$ = 5m/s Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά τη σύγκρουση.



Έχει κάποιες εξισώσεις –τεράστιες- το βιβλίο, αλλά εκείνες απαιτούν να είναι οι ταχύτητες πριν την κρούση ομόρροπες! Έτσι προτείνω ΑΔΟ και ΑΔΚΕ.

Α.Δ.Ο.

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{u'}_1 + m_2\vec{u'}_2 \ \rightarrow αλγεβρικά \ \rightarrow \ m_1u_1 - m_2\,u_2 = -m_1u_1' + m_2\,u_2' \quad …$$

…συγκεντρώνουμε το 'υλικό' της m_1 στο ένα μέλος της εξίσωσης και της m_2 στο άλλο (Τεχνική απαραίτητη!)

$$m_1u_1 + m_1u_1' = m_2\,u_2 + m_2\,u_2' \ \rightarrow \ m_1(u_1+u_1') = m_2(u_2+u_2') \qquad (1)$$

Α.Δ.Κ.Ε.

$\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\,{u_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{u_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2\,{u_2'}^2 \rightarrow \cdots$ *…συγκεντρώνουμε το ‘υλικό’ της m_1 στο ένα μέλος της εξίσωσης και της m_2 στο άλλο (Τεχνική απαραίτητη!)*

$$m_1(u_1^2 - u_1'^2) = m_2(u_2'^2 - u_2^2) \rightarrow m_1(u_1 + u_1')(u_1 - u_1') = -m_2(u_2 + u_2')(u_2 - u_2') \qquad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) οπότε προκύπτει νέα εξίσωση

$$(u_1 - u_1') = -(u_2 - u_2') \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) είναι πρώτου βαθμού! Μπορούν πλέον να μας δώσουν με ευκολία δυο αγνώστους, που στη περίπτωσή μας είναι οι ταχύτητες μετά την κρούση.

Φορτώνουμε τιμές για να εργαστούμε με απλές εξισώσεις…

(1) $\rightarrow 2\,(4 + u_1') = 4(5 + u_2') \rightarrow 4 + u_1' = 10 + 2\,u_2' \rightarrow u_1' = 6 + 2\,u_2'$ *(I)*

(3) $\rightarrow 4 - u_1' = u_2' - 5 \rightarrow 9 - u_1' = u_2'$ *(II)*

Αν προσθέσουμε κατά μέλη (I) και (II) $\rightarrow 9 = 6 + 3\,u_2' \rightarrow u_2' = 1\,m/sec$ *…και από (I)* $u_1' = 8\,m/sec$

5.27 Σφαίρα μάζας m_1 πέφτει με ταχύτητα $υ_1$ σε ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των m_1 και m_2 ώστε μετά την κρούση η σφαίρα m_2 να έχει μέγιστη κινητική ενέργεια;

Μέγιστη κινητική σημαίνει να αποκτήσει η ακίνητη μάζα, όλη την ενέργεια της κινούμενης. Και αυτό είναι δυνατόν να συμβεί αν οι μάζες είναι ίσες, τηρουμένων βεβαίως των γνωρισμάτων ότι η κρούση είναι μετωπική και ελαστική.

5.28 Όταν ένα κινούμενο νετρόνιο συγκρουστεί με ακίνητο πυρήνα χάνει μέρος της κινητικής του ενέργειας και επιβραδύνεται. Τι ποσοστό της κινητικής του ενέργειας χάνει το νετρόνιο αν συγκρουστεί α) με πυρήνα πρωτίου (^1_1H) β) με πυρήνα δευτερίου (^2_1H) και γ) με πυρήνα ηλίου (^4_2H) . Οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές.

Αρχικά πρέπει να δεχτούμε τα εξής :

(α) $m(νετρόνιο) = m(πρωτόνιο) = m$

(β) $m(πρώτιο) = m$, $m(δευτέριο) = 2m$ *κι* $m(πυρήνα\ ήλιου) = 4m$

Οι κρούσεις ανάμεσα σε ομώνυμα φορτία(σκέδαση) είναι ελαστικές. Αν δεχτούμε ότι είναι και κεντρικές, τότε ισχύουν οι σχέσεις 5.8 και 5.9 (δεδομένο ότι οι πυρήνες είναι ακίνητοι).

Ταχύτητα νετρονίου μετά την κρούση με τρίτιο : $u_1' = \frac{m-3m}{m+3m}.u \rightarrow u_1' = \frac{-3m}{5m}.u \rightarrow u_1' = \frac{-3}{5}.u$ *(1)*

Ποσοστό κινητικής ενέργειας που «χάνει» το βλήμα-νετρόνιο…

Όταν έχουμε $K_{αρχ}$ *και μετά την κρούση έχουμε* $K_{τελ}$ *, τότε χάνεται το* $|K_{τελ} - K_{αρχ}|$

// 100 // // x

$$x = \frac{|K_{τελ} - K_{αρχ}|}{K_{αρχ}}.100\% = \frac{\left|\frac{1}{2}m\left(\frac{3}{5}u\right)^2 - \frac{1}{2}mu^2\right|}{\frac{1}{2}mu^2}.100\% = \left|\frac{9}{25} - \frac{25}{25}\right|.100\% = \frac{16}{25}.100\% = 64\%$$

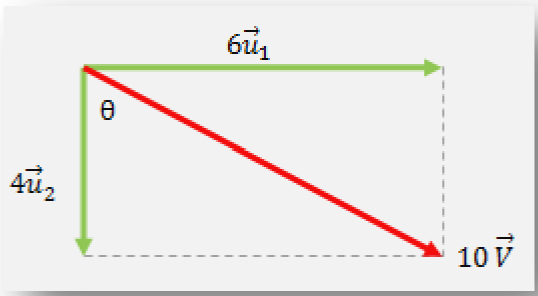
Όμοια θα εργαστούμε και για τις άλλες περιπτώσεις σκέδασης.

5.29 Δύο σφαίρες με μάζες m_1 = 6kg και m_2 = 4kg κινούνται στο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητες $υ_1$ = 8m/s και $υ_2$ = 9m/s κάθετες μεταξύ τους, και συγκρούονται πλαστικά. Να υπολογίσετε:
α) την κοινή τους ταχύτητα μετά την κρούση.
β) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Α.Δ.Ο.

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \rightarrow 6\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 = 10\,\vec{V}$$

σχεδιάζουμε την εξίσωση εκμεταλλευόμενοι την καθετότητα …



Η σχεδίαση δίνει σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα…

$$(10V)^2 = (6u_1)^2 + (4u_2)^2 \rightarrow 100V^2 = 36\,.64 + 16\,.81 \rightarrow V^2 = \frac{16\,(4\,.\,36 + 81)}{100} = \frac{16\,.\,9\,(16+9)}{100}$$
$$= \frac{16\,.\,9\,.25}{100} \rightarrow V = \frac{4\,.3\,.5}{10} = 6\,m/sec$$

Κατεύθυνση :

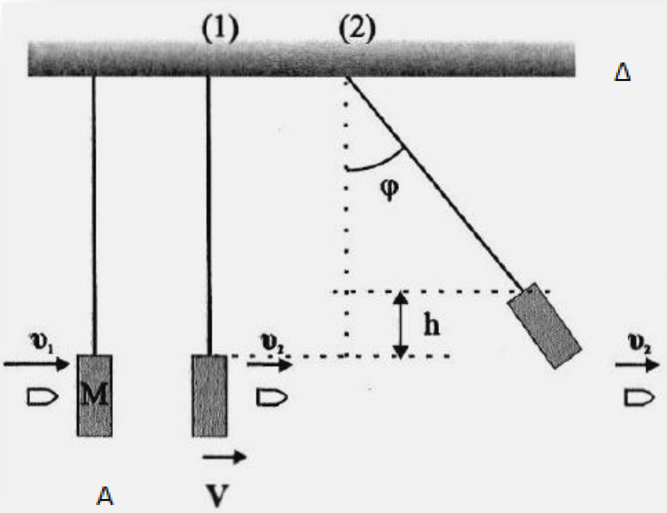
$$εφθ = \frac{6u_1}{4u_2} = \frac{6\,.\,8}{4\,.\,9} = \frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,2}{4\,.\,3\,.\,3} = \frac{4}{3} \quad \textit{(σχήμα)}$$

(β) Άντε πάλι με τη ***μεταβολή*** *της κινητικής ενέργειας*

$$ΔK = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - \left(\frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\,{u_2}^2\right) = \cdots = -174\,Joule$$

Εδώ θέλει μεταβολή κι όχι απώλειες ή μείωση ή χάσιμο… εντάξει;

5.30 Ξύλινη πλάκα με μάζα M= 5 kg είναι δεμένη από σκοινί και κρέμεται κατακόρυφα. Ένα βλήμα με μάζα m=50 g και οριζόντια ταχύτητα $υ_1$ =520m/s χτυπά την πλάκα στο κέντρο της τη διαπερνά και βγαίνει με ταχύτητα $υ_2$ = 80m/s. Η απόσταση του κέντρου της πλάκας από το σημείο όπου είναι δεμένο το σκοινί είναι *1*=2 m. Πόσο θα εκτραπεί το σκοινί από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται g = 10m/s^2. Θεωρήστε ότι η πλάκα αρχίζει να κινείται όταν την έχει διαπεράσει το βλήμα.



Α.Δ.Ο. για την ανελαστική κρούση...

$m\vec{u}_1 + 0 = m\vec{u}_2 + m_2\vec{V} \;\rightarrow mu_1 = mu_2 + MV \;\rightarrow$

$0{,}05\,.\,520 = 0{,}05\,.80 + 5.V \;\rightarrow 0{,}05\,.440 = 5\,V \;\rightarrow$

$22 = 5.V \;\rightarrow V = 4{,}4\frac{m}{s}$

Στη συνέχεια η ξύλινη πλάκα μάζας M θα ξεκινήσει κυκλική τροχιά. Υπάρχουν τρία σενάρια για το ποια θα είναι η εξέλιξη στην κίνησή της.

(α) Να κινηθεί στο τεταρτοκύκλιο ΑΔ. Θα καλύψει ένα τόξο (max 90^o), θα μηδενίσει την ταχύτητα και μέσω κυκλικής τροχιάς θα επιστρέψει στο σημείο Α κάνοντας πλέον ταλάντωση (όχι αρμονική!)

(β) Δεύτερη περίπτωση είναι να κάνει ανακύκλωση και...

(γ) Τρίτη περίπτωση, να ξεπεράσει τη θέση Δ, αλλά να μη μπορέσει να κάνει ανακύκλωση. Στη περίπτωση αυτή θα πάει μέσω κυκλικής τροχιάς μέχρι κάποιο σημείο μετά το Δ και εκεί έχοντας ταχύτητα, θα εγκαταλείψει την κυκλική τροχιά, κάνοντας πλέον πλάγια βολή. Δεν επιστρέφει στο Α!

Έφτασε στο Δ ; Αν έφτασε πρέπει $K_Δ \geq 0$

ΑΔΜΕ Α→ Δ : $\frac{1}{2}MV^2 = MgL + K_Δ \;\rightarrow \frac{1}{2}\,.5\,.4{,}4\,.4{,}4 \;= 5\,.10\,.2 + \;K_Δ \;\rightarrow 48{,}4 = 100 + K_Δ \;\rightarrow K_Δ < 0$

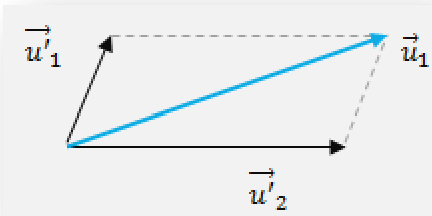
Επομένως δεν φτάνει στο Δ.

ΑΔΜΕ στο σχήμα... $\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \;\rightarrow V^2 = 2gh \;\rightarrow 4{,}4\,.4{,}4 = 2\,.10\,h \;\rightarrow h = 0{,}968\,m$

Ας βρούμε και τη γωνιά φ του σχήματος ... $συνφ = \frac{L-h}{L} = \frac{2-0{,}968}{2} \cong 0{,}5 \;\rightarrow φ = 60^0$

5.41 Μια σφαίρα συγκρούεται ελαστικά με άλλη όμοια σφαίρα που αρχικά ηρεμεί. Δείξτε ότι αν η κρούση δεν είναι κεντρική, μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινηθούν σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

Α.Δ.Ο. $m\vec{u}_1 + 0 = m\vec{u'}_1 + m\vec{u'}_2 \;\rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u'}_1 + \vec{u'}_2$ (1)



Σχεδιάζουμε την (1) και ο νόμος συνημιτόνων λέει...

$u_1^2 = \; u_1'^2 + u_2'^2 + 2u_1'.u_2'.συνθ$ *(2)**

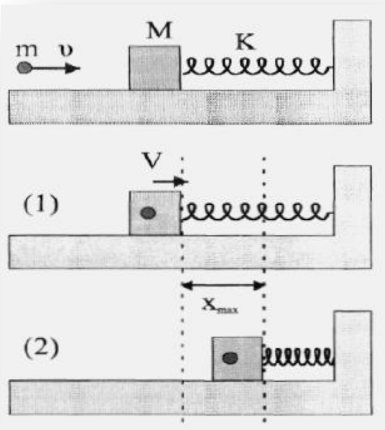
Ελαστική κρούση σημαίνει ΑΔΚΕ…

$$\frac{1}{2}m\,u_1^2 = \left(\frac{1}{2}m{u_1}'^2 + \frac{1}{2}m\,{u_2}'^2\right) \rightarrow u_1^2 = u_1'^2 + u_2'^2 \qquad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) λένε : $συνθ = 0 \rightarrow θ = 90^o$

(*) θ είναι η γωνιά των διανυσμάτων $\vec{u'}_1$ και $\vec{u'}_2$

5.42 Ένα βλήμα με μάζα m=50 g κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ=200 m/s και σφηνώνεται σε ξύλο με μάζα M=950 g που είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Η σταθερά του ελατηρίου είναι K=10000 N/m. Να υπολογίσετε:
α) τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου
β) το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που χάθηκε.



Α.Δ.Ο για την πλαστική κρούση

$m\vec{u} + 0 = (m+M)\vec{V} \rightarrow αλγεβρικά \rightarrow m.u = (m+M)V \rightarrow V = \frac{0,05\,.\,200}{1} = 10\ m/sec$

Για να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση μπορούμε να εργαστούμε με ΘΜΚΕ, ταλαντωτικά ή με ΑΔΜΕ.

ΑΔΜΕ : $\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}Kx_{max}^2 \rightarrow x_{max} = V.\sqrt{\frac{m+M}{K}} = 0,1\ m$

Ποσοστό κινητικής (μηχανικής λέει η άσκηση) που ‘χάθηκε’…

$$x = \frac{|K_{τελ} - K_{αρχ}|}{K_{αρχ}}\,.100\% = \frac{\left|\frac{1}{2}(m+M).(V)^2 - \frac{1}{2}mu^2\right|}{\frac{1}{2}mu^2}100\% = \frac{|50-1000|}{1000}100\% = 95\%$$

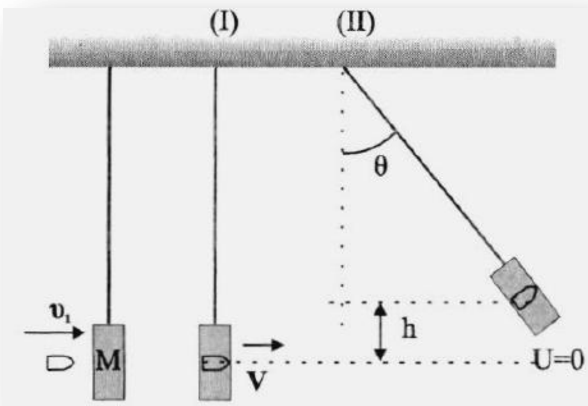
5.43 Ένα βλήμα με μάζα m=20 g κινείται οριζόντια και σφηνώνεται σε κομμάτι ξύλου με μάζα M= 1 kg το οποίο είναι δεμένο σε κατακόρυφο σκοινί μήκους 1 m. Μετά τη σύγκρουση το νήμα εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά γωνία θ = 60°.
Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Αυτή εδώ έχει λυθεί ως 5.30

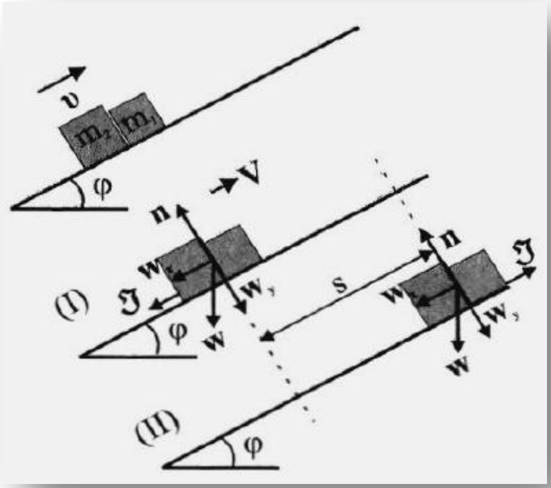
Α.Δ.Ο. για την κρούση → (1)

ΑΔΜΕ για την εκτροπή → (2)

Ποσοστό απωλειών όπως το έχουμε δείξει…



5.44 Ένα σώμα με μάζα m_1=20 kg ισορροπεί σε πλάγιο επίπεδο με κλίση φ=30°. Ένα δεύτερο σώμα με μάζα m_2=30 kg που ανεβαίνει στο πλάγιο επίπεδο, συγκρούεται πλαστικά με το πρώτο έχοντας ταχύτητα υ = 10m/s. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ συσσωματώματος και επιπέδου είναι $\sqrt{3}/3$. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει. Θα επιστρέψει το συσσωμάτωμα στη βάση του πλάγιου επιπέδου; Δίνεται g = 10 m/s^2.



Α.Δ.Ο. για τη πλαστική κρούση…

$$m_2.\vec{u} = (m_1 + m_2).\vec{V} \rightarrow αλγεβρικά \rightarrow V = 6\, m/sec$$

Κατά την μετάβαση (I)→(II) έχουμε έργο μη συντηρητικής δύναμης (τριβή), οπότε ΘΜΚΕ.

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -(m_1 + m_2)g ημφ.s - μ.(m_1 + m_2)\, g συνφ.s \rightarrow V^2 = 2gs(ημφ + μ\, συνφ) \rightarrow 36 = 2.10.s\left(0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow 36 = 20\, s \rightarrow s = 1{,}8\, m$$

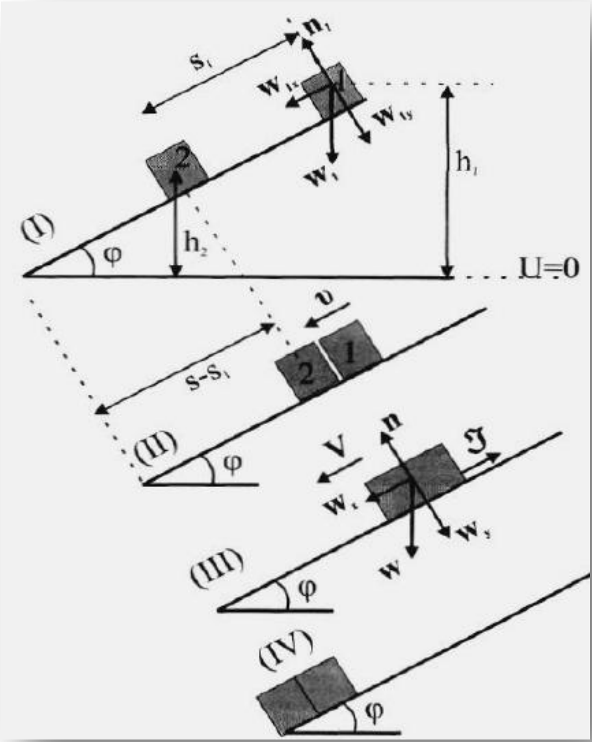
Στην άνω θέση θα μηδενιστεί η ταχύτητα και το συσσωμάτωμα έχει την τάση να κατέβει. Η τριβή αλλά κατεύθυνση και …

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 + m_2)g ημφ = 50\,.10\,.0{,}5 = 250\, N \\ &T = μ.(m_1 + m_2)\, g συνφ = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.\ 50\,.10\,.\frac{\sqrt{3}}{2} = 250\, N \end{aligned}\right\}$$

Δεν επιστρέφει λέει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα.

Συνέχεια…

5.45 Από την κορυφή πλάγιου επιπέδου, που έχει μήκος s=4,2 m και σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ= 30^o αφήνεται να ολισθήσει σώμα με μάζα m=1 kg, χωρίς τριβή. Κατά την κάθοδο του και ενώ έχει διανύσει διάστημα s_1 = 1,6 m συναντά ακίνητο σώμα της ίδιας μάζας και συγκρούεται πλαστικά με αυτό. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση ολισθαίνει στο πλάγιο επίπεδο και φτάνει στη βάση του με μηδενική ταχύτητα. Να υπολογίσετε:
α) το συντελεστή τριβής ολίσθησης του συσσωματώματος με το πλάγιο επίπεδο.
β) τη συνολική θερμότητα που παράχθηκε κατά τη διάρκεια του φαινομένου.
Δίνεται g = 10 m/s^2.



Εύρεση ταχύτητας με την οποία το σώμα m, θα συναντηθεί με το ακίνητο μάζας επίσης m.

- ΘΜΚΕ ό,τι καλύτερο… (*θα μπορούσαμε με ΑΔΜΕ, αλλά πρέπει το s_1 να αναχθεί σε υψομετρική διαφορά*)

$$\frac{1}{2}mu^2 = mg\eta\mu\varphi.s_1 \to u = \sqrt{2g\eta\mu\varphi.s_1}$$
$$= \sqrt{2\,.\,10\,.\,0{,}5\,.\,1{,}6} = 4\,m/sec$$

- Α.Δ.Ο. για το φαινόμενο της πλαστικής κρούσης…

$$m.\vec{u} = 2m\vec{V} \to \alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha} \to V = \frac{u}{2} = 2\,m/sec$$

- ΘΜΚΕ για το κατέβασμα μέχρι τη βάση.

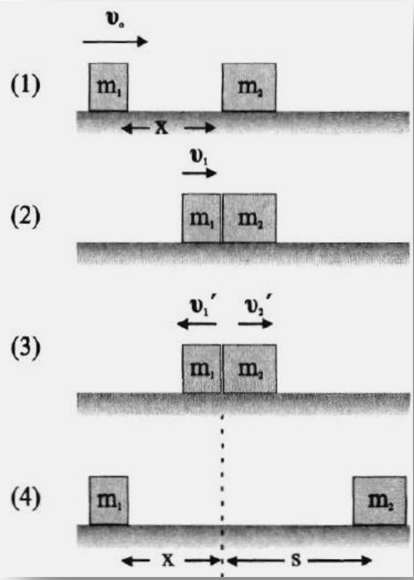
$$0 - \frac{1}{2}\,2m\,V^2 = 2mg\,\eta\mu\varphi\,(s-s_1) - \mu\,2mg\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,(s-s_1) \to -V^2$$
$$= 2g(s-s_1)(\eta\mu\varphi - \mu.\sigma\upsilon\nu\varphi) \to -4 = 2\,.\,10\,.\,2{,}6\left(0{,}5 - \mu\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to -4$$
$$= 26 - 26\,.\sqrt{3}\,.\,\mu \to 30 = 26.\sqrt{3}\,.\,\mu \to \mu = \frac{30\sqrt{3}}{3.26} \to \mu = \frac{5\sqrt{3}}{13}$$

- Έχουμε απώλειες στο φαινόμενο της πλαστικής κρούσης και απώλειες λόγω τριβής του συσσωματώματος με το κεκλιμένο επίπεδο. Οι απώλειες διαχειρίζονται με Α.Δ.Ε.

Πράγματι…

$$|\Delta E| = \left|E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}\right| = |0 - mgh_1 - mgh_2| = mg.\eta\mu\varphi[\![s + (s-s_1)]\!] = \cdots = 34\,Joule$$

5.47 Σώμα μάζας m_1 έχει ταχύτητα $υ_0$ και προσκρούει σε ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 2m_1$ που βρίσκεται σε απόσταση x=1 m. Μετά την κρούση, που είναι ελαστική, το πρώτο σώμα επιστρέφει και σταματά στην αρχική του θέση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δυο σωμάτων με το δάπεδο είναι μ=0,5. Να υπολογίσετε:
α) την αρχική ταχύτητα $υ_ο$ του πρώτου σώματος.
β) το διάστημα που θα διανύσει το δεύτερο σώμα μέχρι να σταματήσει.
Δίνεται g = 10 m/s^2.



- ΘΜΚΕ -λόγω τριβής- για να βρούμε την ταχύτητα της m_1, όταν συγκρούεται με την m_2 .

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1u_o^2 = -\mu\,.m_1g\,.x \;\rightarrow\; u_1^2 - u_o^2 = -2\mu\,.g\,.x \quad (1)$$

- *Για το φαινόμενο της μετωπικής-ελαστικής κρούσης κινούμενου με ακίνητο σώμα, δεν θα κάνουμε Α.Δ.Ο., ούτε ΑΔΚΕ. Θα κάνουμε χρήση των εξισώσεων 5.8 και 5.9*

$$u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \quad (2) \qquad\qquad u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 \quad (3)$$

- ΘΜΚΕ για τη μετάβαση του m_1 από θέση (3) σε θέση (4)

$$0 - \frac{1}{2}m_1u_1'^2 == -\mu\,.m_1g\,.x \quad (4)$$ και

ΘΜΚΕ για τη μετάβαση του m_2 από θέση (3) σε θέση (4)

$$0 - \frac{1}{2}m_2u_2'^2 == -\mu\,.m_2g\,.s \quad (5)$$

Πολλές εξισώσεις! Αντικαθιστούμε τιμές μεγεθών που γνωρίζουμε …

(1) $u_1^2 - u_o^2 = -2\mu\,.g\,.x \;\rightarrow u_1^2 - u_o^2 = -10$ (1)'

(2) $u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \;\rightarrow\; u_1' = \frac{m_1-2m_1}{m_1+2m_1}u_1 \rightarrow\; u_1' = -\frac{1}{3}u_1$ (2)'

(3) $u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 \rightarrow\; u_2' = \frac{2m_1}{m_1+2m_1}u_1 \rightarrow\; u_2' = \frac{2}{3}u_1$ (3)'

(4) $0 - \frac{1}{2}m_1u_1'^2 = -\mu\,.m_1g\,.x \;\rightarrow\; u_1'^2 = 2\mu.g.x \;\rightarrow\; u_1'^2 = 10.x$ (4)'

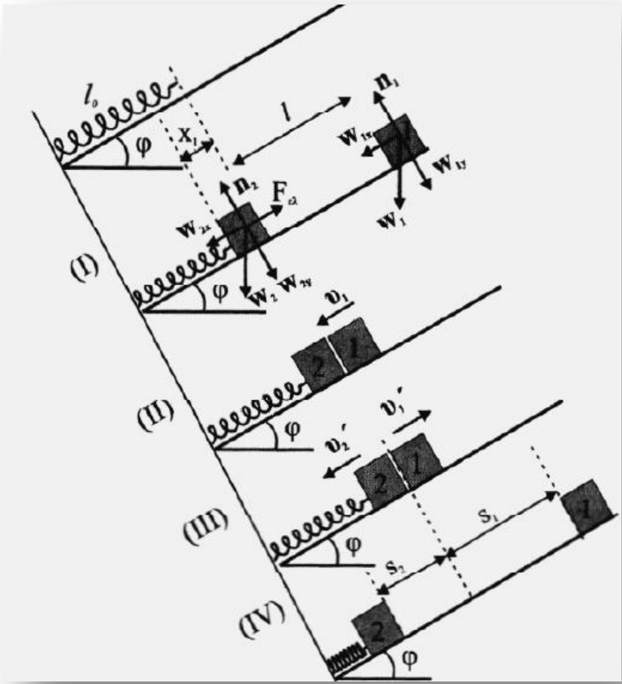
(5) $0 - \frac{1}{2}m_2u_2'^2 == -\mu\,.m_2g\,.s \;\rightarrow\; u_2'^2 = 10.s$ (5)'

Τώρα εμφανίζεται ένα απλό σύστημα εξισώσεων…

(4)' : $u_1' = \sqrt{10}\,m/sec$ → (2)' : $μέτρο\ u_1 = 3\sqrt{10}\ m/sec$ → (1)' : $u_o = 10\,m/sec$ →

→ (3)' : $u_2' = 2\sqrt{10}\,m/sec$ και (5)': $s = 4\,m$

5.48 Ελατήριο σταθεράς Κ=200 N/m βρίσκεται πάνω σε **λείο** πλάγιο επίπεδο, με κλίση $\phi = 30^o$ όπως στο σχήμα. Στο πάνω άκρο του ελατηρίου ισορροπεί σώμα με μάζα $m_2 = 1$kg ενώ το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Από το σημείο Α που απέχει απόσταση l=4 m από το m_2 αφήνεται να ολισθήσει σώμα μάζας $m_1=m_2/3$. Το m_1 κατεβαίνοντας συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το m_2. Να υπολογιστεί σε πόση απόσταση από το σημείο της σύγκρουσης οι ταχύτητες των m_1 και m_2 στιγμιαία θα μηδενιστούν. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$



- ΘΜΚΕ για το σώμα m1 από θέση Ι σε θέση ΙΙ, για να βρούμε την ταχύτητα με την οποία θα συγκρουστεί με το ακίνητο m2.

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 - 0 = m_1g\ ημφ.L \ \rightarrow\ u_1 = \sqrt{2gL.ημφ}$$

$$\rightarrow s.i. \rightarrow\ u_1 = \sqrt{2\,.10\,.4\,.0{,}5}$$

$$= 2\sqrt{10}\ m/sec$$

- Εξισώσεις 5.8 και 5.9 για να βρούμε τις ταχύτητες των μαζών αμέσως μετά την μετωπική ελαστική κρούση του κινούμενο m1, με το ακίνητο m2.

$$u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \rightarrow u_1' = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}\ 2\sqrt{10} = -\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\ .2\sqrt{10} \rightarrow$$

$$u_1' = -\sqrt{10}\ m/sec$$ *(γυρίζει πίσω!)*

Και

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 = \frac{2.\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}\ 2\sqrt{10}\ \rightarrow\ u_2' = \sqrt{10}\ m/sec$$

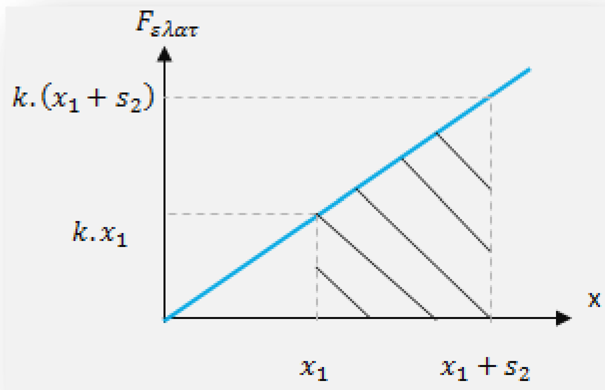
- ΘΜΚΕ για τη μάζα για τη μάζα m1 από θέση ΙΙΙ σε θέση IV, για να βρούμε την απόσταση s_1.

$$0 - \frac{1}{2}m_1(u_1')^2 = -m_1g\ ημφ\ s_1\ \rightarrow 0{,}5\,.10 = 10\,.0{,}5\ s_1\ \rightarrow\ s_1 = 1\ m$$

- ΘΜΚΕ για τη μετάβαση του m2 από θέση ΙΙΙ σε θέση IV. (Θα μπορούσα και με ΑΔΜΕ, διότι –όπως θα δείτε το έργου της δύναμης του ελατηρίου, θα με βάλει σε μπελάδες)

$$0 - \frac{1}{2}m_2(u_2')^2 = +m_2g\ ημφ\ s_2 - W_{F,ελατ.} \quad (1)$$

Στη σχέση (1), το $W_{F,ελατ.}$ είναι αρνητικό, διότι η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά αντίθετη της μετατόπισης.



$$W_{F,ελατ.} = \text{"εμβαδόν"} = \frac{k.x_1+k.(x_1+s_2)}{2}.s_2 \quad (2)$$

Από την ισορροπία της θέσης Ι, προκύπτει

$$k.x_1 = m_2g\ ημφ\ \rightarrow 200\ x_1 = 1\,.10\,.0{,}5\ \rightarrow\ x_1 = \frac{1}{40}\ m$$

Πάμε τώρα να "μαζέψουμε" λίγο την σχέση (2)…

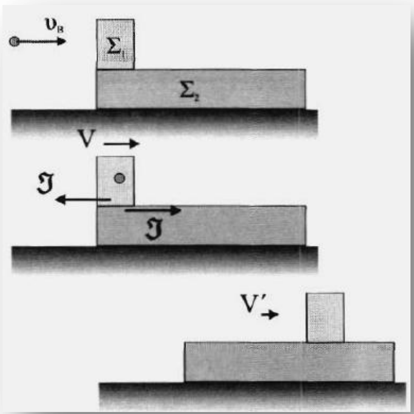
$$W_{F,\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = \frac{200\ .\ \frac{1}{40}+200\ .\left(\frac{1}{40}+s_2\right)}{2}.\, s_2 = \frac{5+5+200s_2}{2}.\, s_2 = (5+100\ s_2).\, s_2 = 5\ s_2 + 100\ s_2^2$$

Οπότε η σχέση (1) δίνει…

$$\frac{1}{2}\ .\ 1\ .\ 10 = -1\ .10\ 0{,}5\ s_2 + 5\ s_2 + 100\ s_2^2 \ \rightarrow 5 = 100\ s_2^2 \ \rightarrow\ s_2 = \pm 0{,}1\sqrt{5}\ m/sec \quad (3)$$

Προφανώς δεκτή μόνο η θετική λύση…

49 Το σώμα $Σ_2$ του σχήματος έχει μάζα m_2 = 4kg και βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο $Σ_2$ βρίσκεται δεύτερο σώμα $Σ_1$ που έχει μάζα m_1=950g. Το επίπεδο επαφής των σωμάτων $Σ_1$, $Σ_2$ είναι οριζόντιο και ο συντελεστής τριβής μεταξύ τους είναι μ=0,5. Στο $Σ_1$ σφηνώνεται ένα βλήμα, μάζας m_B = 50g που κινείται με οριζόντια ταχύτητα $υ_B$ = 100m/s. Η χρονική διάρκεια της κρούσης του βλήματος με το σώμα $Σ_1$ θεωρείται αμελητέα.
α) Ποια είναι η κοινή ταχύτητα που αποκτούν τα σώματα
β) Πόση, συνολικά, θερμότητα μεταφέρεται στο περιβάλλον;
γ) Μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή της κρούσης τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ αποκτούν κοινή ταχύτητα;
δ) Πόσο μετακινήθηκε το πάνω στο σώμα μέχρι τη στιγμή αυτή;
Δίνεται g = 10 m/s^2



- Πλαστική κρούση μεταξύ βλήματος και σώματος Σ1. Υπολογίζουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη κρούση.

$$m_b\ .\vec{u}_b + 0 = (m_b + m_1)\ \vec{V}\ \rightarrow \alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}\ \rightarrow\ \ m_b\ .u_b + 0 = (m_b + m_1)\ V\ \ \rightarrow V = 5\ m/sec$$

Στη συνέχεια έχουμε μια αλλαγή στο σύστημα (ολίσθηση), η οποία εξελίσσεται λόγω εσωτερικών δυνάμεων τριβής και η ορμή του συστήματος οφείλει να διατηρείται σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου!

$$(m_b + m_1)\ \vec{V} + 0 = \ (m_b + m_1 + m_2)\ \vec{V'}\ \ \rightarrow V' = \cdots = 1\ m/sec$$

Σχόλιο : Θα μπορούσαμε να γράψουμε ΑΔΟ, που να συνδέει τις καταστάσεις I και III του συστήματός μας, χωρίς να νοιαστούμε για την ενδιάμεση κατάσταση II.

- Η διαφορά αρχικής και κινητικής ενέργειας εκφράζει τη ποσότητα της ενέργειας που έγινε θερμότητα.

$$Q = \frac{1}{2} m_B \upsilon_B^2 - \frac{1}{2}(m_B + m_1 + m_2)V'^2 = 247{,}5\,J$$

- Το συσσωμάτωμα βλήμα-Σ1, επιβραδύνεται λόγω της τριβής που αναπτύσσεται ανάμεσα σε αυτό και στο σώμα Σ2.

Το μέτρο της τριβής : $T = \mu\ .(m_b + m_1)g = < s.i. > = \ 0{,}5\ .\ 1\ .\ 10 = 5\ N$

Σταθερή δύναμη στο συσσωμάτωμα, σημαίνει κίνηση ομαλά μεταβαλλόμενη, οπότε η επιτάχυνση (επιβράδυνση αν θέλετε) είναι :

$$\alpha = \frac{T}{(m_b+m_1)} = \frac{5}{1} = 5\, m/sec^2$$

Ο χρόνος κίνησης υπολογίζεται από την εξίσωση : $V' = V - a\,.\,t_x \rightarrow 1 = 5 - 5.\,t_x \rightarrow t_x = 0{,}8\, sec$

- Το διάστημα που διάνυσε το συσσωμάτωμα στο χρόνο t_x είναι ...

$$s = V.\,t_x - \frac{1}{2}\, a\, t_x^2 = 2{,}4\, m$$

- Το σώμα μάζας m2, τι είδους κίνησης κάνει ;

Λόγω νόμου «δράσης-αντίδρασης» το σώμα m2 δέχεται δύναμη αντίθετη της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα. Επομένως δέχεται σταθερή δύναμη μέτρου T=5 N. Αυτή η δύναμη υποχρεώνει την m2 να κάνει κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη!

$$T = m_2\,.\,a_2 \rightarrow a_2 = \frac{T}{m_2} = s.i. = \frac{5}{4} = 1{,}25\, m/sec^2$$

Χρόνος για να πάει η ταχύτητά του από τιμή μηδέν σε τελική τιμή ταχύτητας v'=1 m/sec

$V' = a_2\,.\,t_y \rightarrow t_y = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8\, sec$ ...και δεν είναι σύμπτωση το γεγονός ότι $t_x = t_y$ *!!!*

Το διάστημα Που διένυσε η m2, κατά την διάρκεια του χρόνου t_y

$$s_2 = \frac{1}{2}\, a_2\, t_y^2 = s.i. = \frac{1}{2}\,.\,1{,}25\,.\,0{,}8\,.\,0{,}8 = 0{,}4\, m$$

- Πόσο περπάτησε το συσσωμάτωμα πάνω στο σώμα m2 ;

Μετατοπίστηκε κατά $s_x = s - s_2 = 2{,}4 - 0{,}4 = 2\, m$

("Δείτε" τα μήκη s , s_x , s_2 στο σχήμα και δεχτείτε την αλήθεια της σχέσης $s_x = s - s_2$)

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)