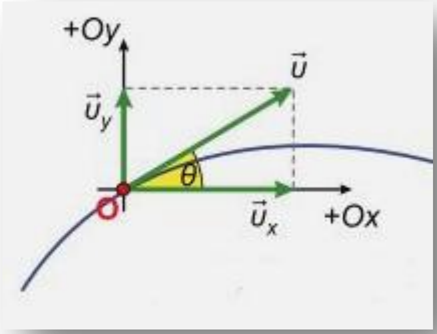
Αντί προλόγου…

…Ανάλυση ταχύτητας σε συνιστώσεις - σύνθεση ταχυτήτων.

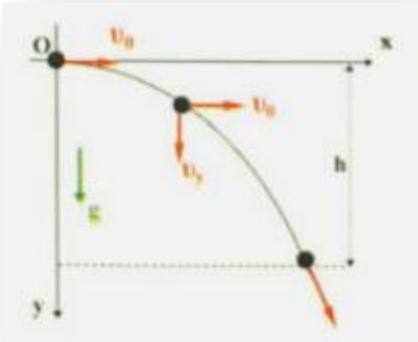


Το διάνυσμα της ταχύτητας έχουμε δικαίωμα να το αναλύουμε σε άξονες της επιλογής μας. Μαθηματικό δικαίωμα.

Ποια είναι η αξία αυτής της ανάλυσης;

Απλά! Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι το αντικείμενο έχει – αντί της $\vec{u}$ - ταυτόχρονα δυο ανεξάρτητες ταχύτητες $\vec{u}_x$ και $\vec{u}_y$

Εδώ θεμελιώνεται η γνώση ότι ένα σώμα μπορεί να έχει όσες ταχύτητες θέλει ταυτόχρονα κι όλες μαζί θα συναποφασίζουν για τη συνισταμένη ταχύτητα του σώματος, όταν προστεθούν διανυσματικά. Κάπως έτσι φτάνουμε στην «αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων»!



Αυτή την αρχή χρησιμοποιούμε στη οριζόντια βολή σώματος, στην ελικοειδή κίνηση φορτίου εντός μαγνητικού πεδίου κ.α.
Να και οι εξισώσεις της οριζόντιας βολής, μιας σύνθεσης ΕΟΚ και ΕΟΜΚ…

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \qquad \upsilon_y = g \cdot t$$

$$x = \upsilon_0 \cdot t \qquad y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Μέχρι εδώ μια χαρά…

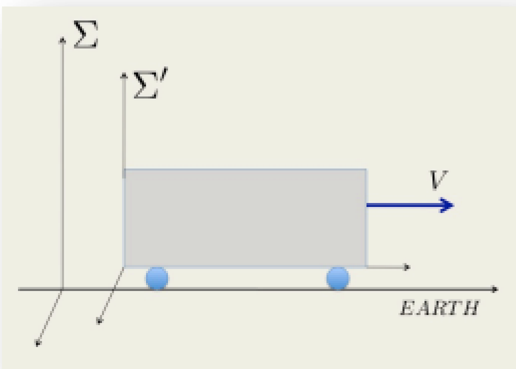
Αδρανειακά συστήματα

Αδρανειακοί παρατηρητές ή ισοδύναμα **αδρανειακά συστήματα αναφοράς** είναι εκείνα ως προς τα οποία ένα ελεύθερο σώμα, δηλαδή ένα σώμα πάνω στο οποίο ασκείται μηδενική συνισταμένη εξωτερική δύναμη, **ισορροπεί**.

Ένα ιδανικό αδρανειακό σύστημα θα ήταν εκείνο κάπου σε μεσογαλαξιακό χώρο *–στη μέση του πουθενά-* προσανατολισμένο στους “απλανείς” γαλαξίες, όπου και το σώμα θα ήταν ελεύθερο, λόγω απουσίας δυνάμεων.

Αδρανειακό θα ήταν και κάθε άλλο που θα ήταν μετατοπισμένο ή και στραμμένα ή και κινούμενα με σταθερή σχετική ταχύτητα ως προς αυτό.

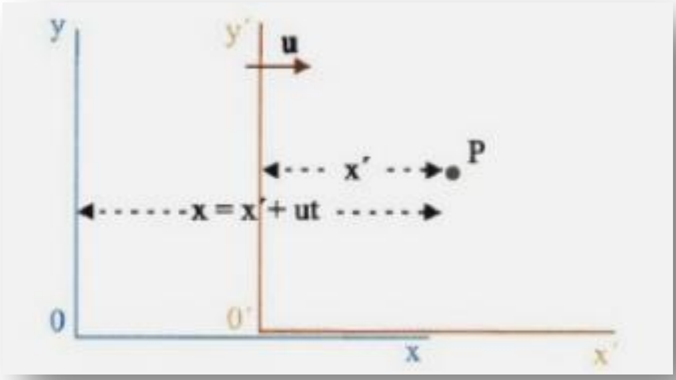
Η Γη στρέφεται, κινείται γύρω από τον ήλιο, όλο το πλανητικό σύστημα κινείται στρεφόμενο και μεταφερόμενο μέσα στο γαλαξία, κ.ο.κ… και επομένως δεν υπάρχει αδρανειακό σύστημα επί της Γης ή επί του πλανητικού μας συστήματος.
Όμως!
Για μελέτη φαινομένων στα οποία μπορούμε να αγνοήσομε την κίνηση της Γης, το σύστημα οποιουδήποτε γήινου εργαστηρίου είναι με πολύ καλή προσέγγιση αδρανειακό.



Η αποβάθρα και το τρένο. Δύο κατά προσέγγιση αδρανειακά συστήματα.

Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου σε αδρανειακά συστήματα όπου u<<c

Επειδή η μελέτη μιας κίνησης σχετίζεται πάντα με κάποιο σύστημα αναφοράς, είναι απαραίτητο να βρεθεί κάποιος τρόπος ώστε δυο άνθρωποι (παρατηρητές) που παρατηρούν το ίδιο φαινόμενο από διαφορετικά συστήματα αναφοράς να μπορούν να συνεννοηθούν. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια σχέσεων μετασχηματισμού της θέσης, της ταχύτητας και κάθε άλλου μεγέθους που πιθανόν γίνεται αντιληπτό με διαφορετικό τρόπο από διάφορα συστήματα αναφοράς.



Έστω ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ και ένα άλλο επίσης αδρανειακό Σ' κινούμενο με σταθερή ταχύτητα **u** ως προς το Σ .

Για λόγους απλούστευσης ας δεχτούμε ότι τα δύο συστήματα αναφοράς **ταυτίζονταν** τη χρονική στιγμή t=0 και ότι η **u** είναι **παράλληλη** με τον άξονα Οx του Σ.

(α) Μετασχηματισμοί θέσης (όταν $\vec{u} // Ox$)

Οι σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων του P στο ένα σύστημα και στο άλλο είναι

$x = x' + ut \quad (1)\,, \qquad y = y' \quad (2) \quad και \quad z = z' \quad (3)$

(β) Μετασχηματισμοί ταχύτητας

$$(1) \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = u + \frac{\Delta x\prime}{\Delta t} \rightarrow \cdots αλγεβρικά\ ισχύει: \quad u_{(x)} = u + u_{(x')} \quad (1)'$$

$$(2),(3) \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y\prime}{\Delta t} \rightarrow u_{(y)} = u_{(y\prime)} \quad (2)' \quad και \quad u_{(z)} = u_{(z\prime)} \quad (3)'$$

Αν το P έχει ταχύτητα που μπορεί να δώσει συνιστώσεις στους τρεις άξονες, τότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση μετασχηματισμού :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}}_{(\boldsymbol{O})} = \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{u}}_{(\boldsymbol{O'})} \quad (4)}$$

(γ) Μετασχηματισμοί επιτάχυνσης και δύναμης

Με παραγώγιση της (4) και δεδομένου ότι η $\vec{\boldsymbol{u}}$ είναι σταθερή (αδρανειακά γαρ τα συστήματα) έχουμε:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{(\boldsymbol{O})} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{(\boldsymbol{O'})} \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5) με τη μάζα m, προκύπτει ότι : $\overrightarrow{\boldsymbol{\Sigma F}}_{(\boldsymbol{O})} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Sigma F}}_{(\boldsymbol{O'})} \quad (6)$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ : Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου εφαρμόζονται σε αδρανειακά συστήματα, στα οποία η ταχύτητες είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός.
Στα συστήματα αυτά οι παρατηρητές :

- Συμφωνούν για την σχετική τους ταχύτητας, **διαφωνούν** όμως στο αλγεβρικό πρόσημο.
- Συμφωνούν για τη μάζα m ενός αντικειμένου.

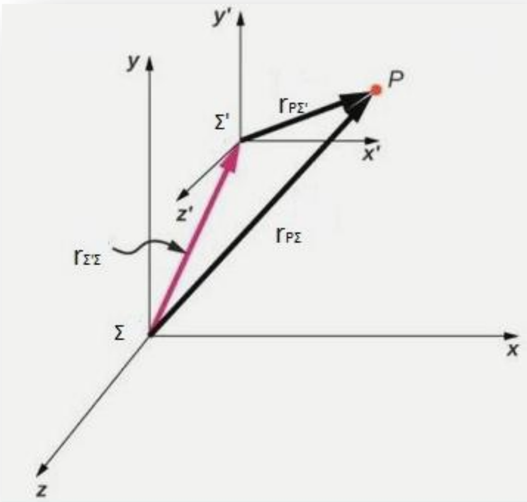
- Συμφωνούν στις χρονικές στιγμές (ότι λέει το ρολόι του ενός, λέει και του άλλου εφόσον αρχικά έχουν συγχρονιστεί).
- Συμφωνούν στις διαστάσεις του αντικειμένου.
- **Διαφωνούν** στη **θέση** και στη **ταχύτητα**, αλλά μπορούν να συνεννοηθούν με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου!
- Ταυτίζονται οι απόψεις τους για επιτάχυνση και συνισταμένη δύναμη.
- Ισχύουν οι αρχές διατήρησης ορμής και ενέργειας για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές και
- Οι νόμοι της φυσικής ισχύουν -στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς- με τη μορφή που τους ξέρουμε**.**

Σχετική ταχύτητα

▸ Υπάρχει ακίνητος παρατηρητής ;
Η απάντηση είναι όχι. ***Κάθε αδρανειακός παρατηρητής αισθάνεται ακίνητος***! Ζούμε σε ένα κόσμο όπου κινούνται οι πλανήτες , τα αστέρια, οι γαλαξίες , τα ηλεκτρόνια γύρω από τον πυρήνα, τα μόρια αερίου, …

▸ Ο Γαλιλαίος σε τι απαντά ;
Δίνει απάντηση σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν οι παρατηρήσεις **αδρανειακών** παρατηρητών, οι οποίοι μελετούν το ίδιο φαινόμενο κίνησης μάζας, καθώς και σε διάφορα συναφή (επιτάχυνση, δύναμη, ορμή, …)

▸ Σχετική ταχύτητα τι είναι ;
Είναι η ταχύτητα όπως αυτή μετράται από κάθε αδρανειακό παρατηρητή. Η εικόνα δίπλα, μας δίνει με ένα εύκολο τρόπο την δυνατότητα να αναφερθούμε σε σχετικές ταχύτητες. (αναφορά σε συμβολισμό και σε σχέσεις).



Για τα διανύσματα θέσης –στο σχήμα- έχουμε την εξίσωση:

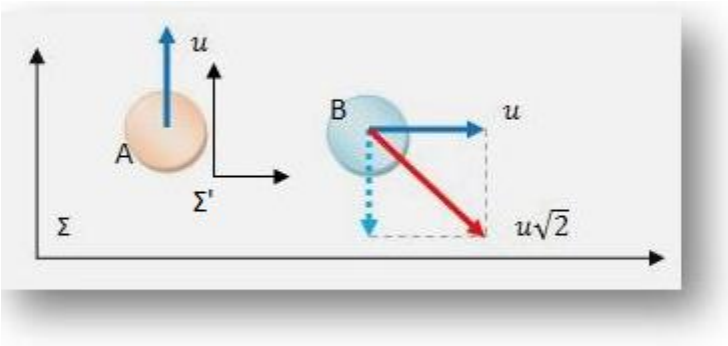
$$\vec{r}_{\Sigma'\Sigma} + \vec{r}_{P\Sigma'} = \vec{r}_{P\Sigma} \ \rightarrow \text{κι αν παραγωγίσουμε} \ \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{u}_{\Sigma'\Sigma} + \vec{u}_{P\Sigma'} = \vec{u}_{P\Sigma}} \qquad (1)$$

Σώμα Ρ κινείται ως προς το Σ' με (σχετική) ταχύτητα $\vec{u}_{P\Sigma'}$
και το Σ' κινείται ως προς το Σ με (σχετική) ταχύτητα $\vec{u}_{\Sigma'\Sigma}$.
Τότε το διανυσματικό άθροισμα τους θα μας δώσει τη (σχετική) ταχύτητα του Ρ ως προς το Σ.

Θα ‘λεγα, ιδιαίτερα απλή διατύπωση κι ως μνημονικός κανόνας!

Παράδειγμα Ι



Ο «ακίνητος» παρατηρητής Σ, βλέπει δυο αεροπλάνα να κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου u, το ένα Βόρεια και το άλλο Ανατολικά.

Πώς φαίνεται η κίνηση του Β, από το πιλοτήριο του Α αεροπλάνου;

Ο παρατηρητής του Α είναι σε αδρανειακό σύστημα Σ', που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα μέτρου u και κατεύθυνση προς βορρά και θέλει να μάθει την σχετική ταχύτητα του Β ως προς αυτόν.

$$\vec{u}_{\Sigma'\Sigma} + \vec{u}_{B\Sigma'} = \vec{u}_{B\Sigma} \rightarrow \vec{u}_{B\Sigma'} = \vec{u}_{B\Sigma} + (-\vec{u}_{\Sigma'\Sigma}) \rightarrow \sigma\chi\varepsilon\delta\acute{\iota}\alpha\sigma\eta \ldots \rightarrow u_{B\Sigma'} = u\sqrt{2} \ , \quad \ldots 45^o$$

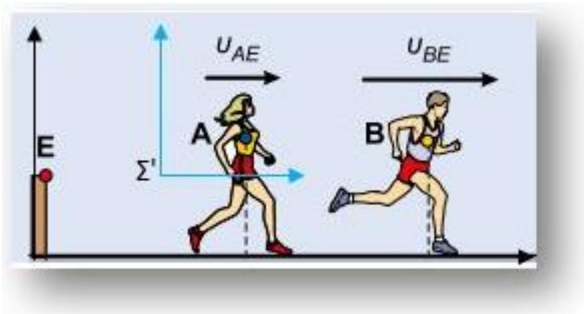
Παράδειγμα ΙΙ

Ο ακίνητος παρατηρητής Ε, αποδίδει ταχύτητες ως το σχήμα στους δυο αθλητές. Αποδίδω σύστημα Σ' στον Α και…

$$\vec{u}_{\Sigma'E} + \vec{u}_{B\Sigma'} = \vec{u}_{BE} \rightarrow \vec{u}_{B\Sigma'} = \vec{u}_{BE} - \vec{u}_{\Sigma'E} \quad (1)$$

Εδώ τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, οπότε με θετική φορά προς τα δεξιά έχουμε

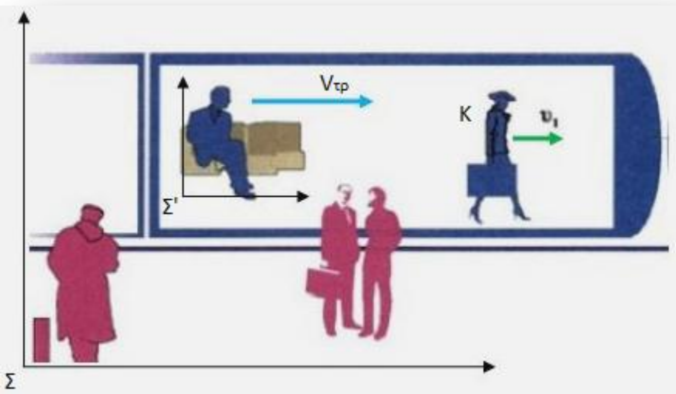
$$u_{B\Sigma'} = u_{BE} - u_{\Sigma'E} \quad \rightarrow \iota\sigma\acute{o}\tau\iota\mu\alpha\ \lambda\acute{\varepsilon}\mu\varepsilon\ u_{BA} = u_{BE} - u_{AE}$$



($\vec{u}_{BA}$ έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά αφού $u_{BE} > u_{AE}$!)

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: Όταν κινούμαστε σε ευθύ δρόμο οδηγώντας με 100 km/h και άλλος οδηγός μας προσπερνάει με 105 km/h, τότε το όλο σκηνικό μοιάζει σαν εμείς να είμαστε ακίνητοι και ο άλλος οδηγός να απομακρύνεται με ταχύτητα 5 km/h.

Παράδειγμα ΙΙΙ



Εδώ να φανταστούμε ότι τα συστήματα αναφοράς Σ και Σ' έχουν τους άξονες x και x' στον ίδιο φορέα, οπότε στην εξίσωση που θα γράψουμε, οι ταχύτητες έχουν ίδια διεύθυνση.

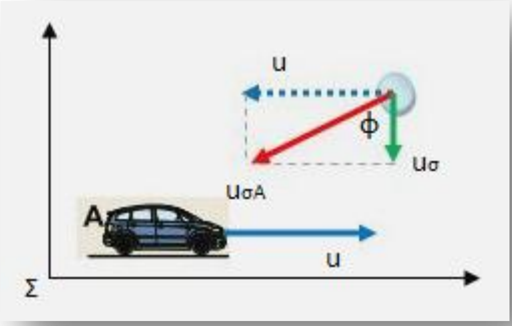
$$\vec{u}_{K\Sigma} = \vec{u}_{K\Sigma'} + \vec{u}_{\Sigma'\Sigma} \rightarrow \vec{u}_{K\Sigma} = \vec{u}_1 + \vec{V}_{\tau\rho} \qquad (1)$$

Θετική φορά προς τα δεξιά, οπότε η (1) δίνει…

$$u_{K\Sigma} = u_1 + V_{\tau\rho}$$

Αν η κυρία κινηθεί –πάνω στο βαγόνι- με σχετική ταχύτητα ως προς το τραίνο, αντίθετη αυτής του τραίνου, τότε ο Σ θα την βλέπει ακίνητη (συνεχώς θα είναι απέναντί του και …θα τον χαιρετά)

Άσκηση I
Μία βροχερή φθινοπωρινή μέρα χωρίς άνεμο, αρχίζουν να πέφτουν σταγόνες βροχής με κατακόρυφη κατεύθυνση, ως προς το έδαφος. Ο οδηγός ενός αυτοκίνητου, που ταξιδεύει με οριζόντια ταχύτητα u = 40 m/s βλέπει τις σταγόνες να πέφτουν υπό γωνία φ = 60^o με την κατακόρυφη διεύθυνση. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία πέφτουν οι σταγόνες ως προς το έδαφος.



Ο οδηγός του αυτοκινήτου (αδρανειακό Σ'), βλέπει τις σταγόνες τις βροχής να έρχονται πάνω του με γωνία φ=60^o και με σχετική ταχύτητα $u_{\sigma A}$.

$$\vec{u}_{A\Sigma} + \vec{u}_{\sigma A} = \vec{u}_{\sigma\Sigma} \rightarrow \vec{u}_{\sigma A} = \vec{u}_{\sigma\Sigma} + (-\vec{u}_{A\Sigma})$$

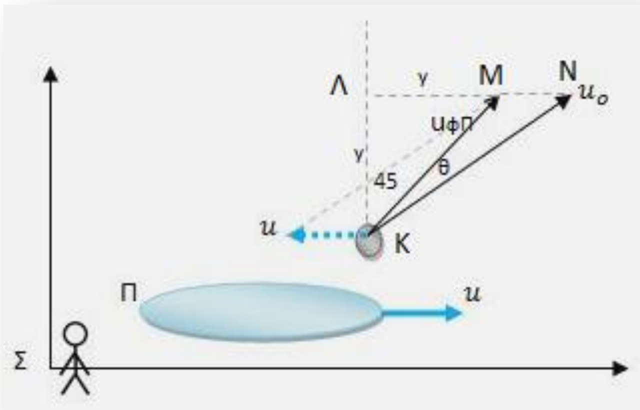
Τα διανύσματα δημιουργούν τις προϋποθέσεις να πούμε :

$$\varepsilon\varphi(\varphi) = \frac{u}{u_\sigma} \rightarrow u_\sigma = \frac{u}{\varepsilon\varphi(\varphi)} = \frac{40}{\varepsilon\varphi 60} \cong 23\ m/sec$$

Όπου εφ60^o=1,73

Άσκηση II
Μία φωτοβολίδα εκτοξεύεται από το πλοίο Α, υπό γωνία 45^o **ως το σχήμα** και αρχική ταχύτητα μέτρου $u_{\Phi\Pi} = 60\ km/h$ ως προς το πλοίο Π. Το πλοίο κινείται με ταχύτητα μέτρου u = 20 km/h ως προς την ήρεμη θάλασσα.
(α) Ποιά γωνία σχηματίζει η φωτοβολίδα ως προς κάποιο ψαρά, που βρίσκεται σε μια βάρκα ακίνητη στη θάλασσα;
(β) Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου, που κινείται οριζόντια, βλέπει τη φωτοβολίδα να εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Ποια είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου ως προς τη θάλασσα.

Εδώ ακίνητο σύστημα συντεταγμένων Σ είναι κάπου στην ήρεμη θάλασσα η βάρκα του ψαρά ή κάπου στη στεριά.



Έστω ότι η ταχύτητα της φωτοβολίδας ως προς τον ακίνητο παρατηρητή Σ, είναι u_o

Για τις ταχύτητες μπορούμε να γράφουμε :

$\vec{u}_{\Phi\Pi} = \vec{u}_{\Phi\Sigma} + (-\vec{u}_{\Pi\Sigma}) \rightarrow \vec{u}_{\Phi\Pi} = \vec{u}_o + (-\vec{u}\,)$ (1)

Η σχεδίαση της (1) φαίνεται στο σχήμα.

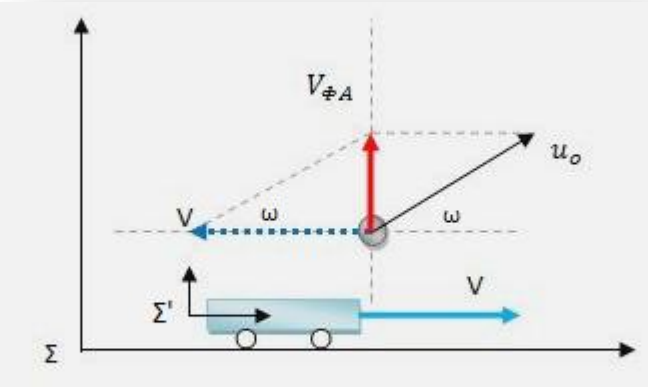
Στο σχήμα έχω ορίσει τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν. Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ οι πλευρές ΚΛ και ΛΜ είναι ίσες, αφού έχουμε γωνία 45^o $(K\Lambda = \Lambda M = έστω = y)$

$$\sigma\upsilon\nu 45 = \frac{y}{u_{\Phi\Pi}} \rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,60\ \frac{km}{h} \rightarrow y = 30\sqrt{2}\ \frac{km}{h}$$

$$\varepsilon\varphi(45+\theta) = \frac{u+y}{y} = 1 + \frac{u}{y} = 1 + \frac{20}{30\sqrt{2}} = 1 + \frac{2}{3\sqrt{2}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} = \cdots = 1{,}47$$

Οπότε … $45+\theta=55{,}8 \rightarrow$ *γωνία της* u_o $\omega=90-55{,}8=34{,}2^o$ *με τον ορίζοντα.*

Στο Β ερώτημα τώρα…



Χρειαζόμαστε την ταχύτητα της φωτοβολίδας u_o ως προς τον παρατηρητή Σ, έχουμε την κατεύθυνση της σχετικής ταχύτητας της $V_{\Phi A}$ ως προς το κινούμενο όχημα και ψάχνουμε την ταχύτητα του οχήματος ως προς τον ακίνητο παρατηρητή Σ.

Η γεωμετρία φαίνεται στο σχήμα…

$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{V}{u_o} \rightarrow V=u_o\,\sigma\upsilon\nu\omega$ (2)

Από το προηγούμενο σχήμα και στο τρίγωνο ΚΛΝ : $\sigma\upsilon\nu(45+\theta)=\frac{y}{u_o} \rightarrow u_o=\frac{y}{\sigma\upsilon\nu(45+\theta)}$ (3)

Παντρεύουμε τις (2) και (3) …

$$V=y.\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu(45+\theta)}=(*)=y\,\frac{\eta\mu(45+\theta)}{\sigma\upsilon\nu(45+\theta)}=y\,.\varepsilon\varphi(45+)=\;30\sqrt{2}\,.\varepsilon\varphi 55{,}8=\cdots=62{,}4\;km/h$$

(*) συμπληρωματικές γωνίες

Άσκηση ΙΙΙ

Ένα αεροπλάνο εκτελεί το δρομολόγιο Λάρνακας - Πάφου (κατεύθυνση Ανατολή - Δύση), με ταχύτητα μέτρου 360 km/h ως προς τον αέρα. Κατά τη διάρκεια της πτήσης φυσά αέρας με κατεύθυνση Βορρά - Νότου και ταχύτητα μέτρου 72 km/h.

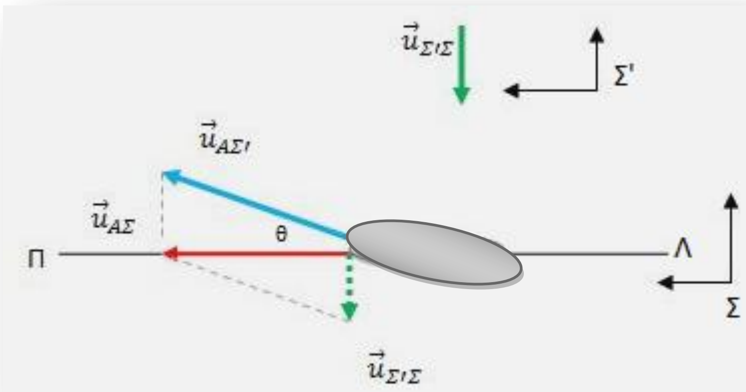
Α. Σε ποια κατεύθυνση πρέπει να πετά το αεροπλάνο, ώστε να φθάσει στην Πάφο;

Β. Η απόσταση Λάρνακας - Πάφου είναι 120 km (στην ευθεία διαδρομή του αεροπλάνου). Ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζεται το αεροπλάνο, για να φθάσει στον προορισμό του;

Μας ενδιαφέρει η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς το έδαφος (Σ), να κάθεται πάνω στη νοητή γραμμή ΛΠ.

Επιπλέον η διανυσματική σχέση των ταχυτήτων είναι η $\vec{u}_{A\Sigma}=\vec{u}_{A\Sigma'}+\vec{u}_{\Sigma'\Sigma}$

Οι παραπάνω όροι επιβάλλουν τη σχεδίαση που φαίνεται.



$$\eta\mu\theta=\frac{u_{\Sigma'\Sigma}}{u_{A\Sigma'}}=\frac{72}{360}=0{,}2 \rightarrow \theta\cong 11^o$$

(β) Ο ελάχιστος χρόνος έχει να κάνει με πτήση πάνω στη γραμμή ΛΠ = 120 km. Η ταχύτητα κίνησης αφορά το σύστημα Σ, δηλαδή είναι η $\vec{u}_{A\Sigma}$. Η συνέχεια δική σας…

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)