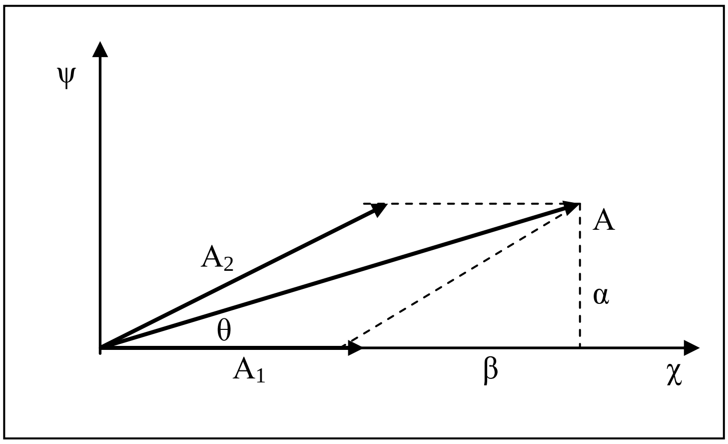
Σύνθεση δυο α.α.τ με ίδια θ.ι., ίδια διεύθυνση ταλάντωσης και ίδια ω

Σύνθεση ταλαντώσεων: μελέτη που αφορά τη κίνηση σώματος, όταν υποχρεούται να κάνει –ταυτόχρονα- τουλάχιστον δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις.

[A] 1ος τρόπος (ανυσματικά)

Ας δούμε τη σύνθεση των $x_1 = A_1 \cdot \eta\mu\omega t$ και $x_2 = A_2 \cdot \eta\mu(\omega t + \phi)$ εργαζόμενοι ανυσματικά.



θ = γωνία που εκφράζει τη αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης , της οποίας το πλάτος είναι Α.
Στο σχήμα η γωνία φ (η οποία εκφράζει διαφορά φάσης) είναι η γωνία μεταξύ των ανυσμάτων $\vec{A}_1$ και $\vec{A}_2$.

Κατά τα γνωστά ισχύει : $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\phi}$ (1)
και

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\alpha}{A_1 + \beta} = \frac{A_2 \cdot \eta\mu\phi}{A_1 + A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\phi} \qquad (2)$$

Έτσι η συνισταμένη ταλάντωση έχει εξίσωση : $\underline{x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \theta)}$ (3)

[B] 2ος τρόπος (αλγεβρικά, με χρήση αρχής της επαλληλίας δηλ. $x = x_1 + x_2$!)

Για να εργαστείτε με τον 2ο τρόπο πρέπει να έχετε εξισώσεις με ***ίδια πλάτη*** ή εξισώσεις με ***ίδια φάση***

Είναι πολύ πιθανό να κάνετε χρήση της εξίσωσης :

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \eta\mu\frac{\alpha + \beta}{2} \qquad (4)$$

Πάντως η εξίσωση (4) είναι απαραίτητη στη φυσική που διδάσκεται αυτή τη χρονιά. Συμπαθήστε την !

Ερωτήσεις

1. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις από τη σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων προκύπτει απλή αρμονική ταλάντωση;

Ίδια θ.ι. , ίδια διεύθυνση ταλάντωσης και ίδιο ω.

(Αν $A_1=A_2$, απαιτείται $\varphi \neq \pi$ rad)

2. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από το ίδιο σημείο, της ίδιας διεύθυνσης και με περίοδο Τ η καθεμιά. Τα πλάτη των ταλαντώσεων είναι A_1 και A_2 και οι αρχικές φάσεις $\varphi_1=0$ και $\varphi_2\neq 0$. Για την περίοδο της συνισταμένης ταλάντωσης μπορούμε να πούμε ότι :

I. Εξαρτάται από τα πλάτη των ταλαντώσεων.
II. Εξαρτάται από τις αρχικές φάσεις των δυο ταλαντώσεων
III. ***Ισούται με τη περίοδο Τ που έχουν οι δυο επιμέρους ταλαντώσεις***. **(Σ)**
IV. Ισούται με 2Τ

Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστή ;

3. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, ίδιας διεύθυνσης και ίδιας συχνότητας, γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη και οι αρχικές φάσεις των δυο ταλαντώσεων είναι A_1, A_2 και $\varphi_1=0$, $\varphi_2\neq 0$ αντίστοιχα. Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης θα είναι :

I. $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$, $\acute{o}\tau\alpha\nu\ \phi_2=\dfrac{\pi}{2}$ rad **(Σ)**

II. $A=A_1+A_2$ όταν $\varphi_2=0$ rad **(Σ)**

V. $A=A_1-A_2$ όταν $\varphi_2=\pi$ rad και $A_1>A_2$ **(Σ)**

III. $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1\cdot A_2\cdot \sigma\upsilon\nu\phi_2}$ **(Σ)**

Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστές ;

4. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις θα μπορούσαν να περιγράψουν μια απλή αρμονική ταλάντωση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

I. $x=\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t$ II. $x=\sigma\upsilon\nu^2 t-\eta\mu^2 t$

III. $x=\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t$ IV. $x=\eta\mu^2 t$

Απαντήσεις :

I. $x=\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t=\dfrac{1}{2}\cdot\eta\mu 2t\rightarrow \alpha.\alpha.\tau$

II. $x=\sigma\upsilon\nu^2 t-\eta\mu^2 t\Rightarrow x=\sigma\upsilon\nu 2t\Rightarrow x=\eta\mu\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)\rightarrow \alpha.\alpha.\tau$

III. και IV Όχι. Η (iv) είναι ημιτονική αλλά όχι αρμονική, αφού δίνει μόνο θετικές τιμές !

Ασκήσεις

1. Να γίνει σύνθεση των $x_1 = 3 \cdot \eta\mu 2t$ (SI) και $x_2 = 4 \cdot \eta\mu 2t$ (SI) , αν αυτές οι ταλαντώσεις έχουν ίδια θέση ισορροπίας και ίδια διεύθυνση ταλάντωσης.

Παρατηρώ ίδια φάση , οπότε θα εργαστώ με την αλγεβρική μορφή της αρχής της επαλληλίας : $x = x_1 + x_2 = 3 \cdot \eta\mu 2t + 4 \cdot \eta\mu 2t = 7 \cdot \eta\mu 2t$

Επομένως το προϊόν της σύνθεσης είναι α.α.τ. με πλάτος 7m , με αρχική φάση μηδέν και ω=2 rad/sec .

2. Σώμα συμμετέχει ταυτόχρονα σε δυο α.α.τ. με εξισώσεις : $x_1 = 4 \cdot \eta\mu\pi t$ (SI) και $x_2 = 4 \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (SI), με ίδια θέση ισορροπίας και ίδια διεύθυνση ταλάντωσης.
(α) Βρείτε την εξίσωση της συνισταμένης κίνησης.
(β) Βρείτε τη θέση της ταλαντωμένης μάζας όταν t=1/6 sec

Παρατηρώ ίσα πλάτη και ίσα ω, οπότε θα εργαστώ με την αλγεβρική μορφή της αρχής της επαλληλίας :

$$x = x_1 + x_2 = 4 \cdot \eta\mu\pi t + 4 \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\eta\mu\pi t + \eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \cdot \eta\mu\frac{\pi t + \pi t + \frac{\pi}{3}}{2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Αν στη εξίσωση που προσδιορίσαμε, θέσουμε t=1/6 sec , τότε θα προκύψει :

$$x = 4\sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6m \ !$$

3. Να γίνει σύνθεση στις α.α.τ. $x_1 = \eta\mu 2t$ (SI) και $x_2 = \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu 2t$ (SI), αν αυτές έχουν ίδια θ.ι και ίδια διεύθυνση ταλάντωσης.

Ισχύει : $x_2 = \sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$

Επαλληλία : $x = x_1 + x_2 = \eta\mu 2t + \sqrt{3} \cdot \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha\delta\iota\acute{\varepsilon}\xi o\delta o$

Σχολικό βιβλίο : $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1\cdot A_2\cdot \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_2^2}=\sqrt{1+3}=2m$

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\mathrm{A}_2\cdot\eta\mu\phi}{\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2\cdot\sigma\upsilon\nu\phi}=\frac{\sqrt{3}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2}}{1+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}\ \text{rad}\qquad 0\le\theta<\varphi\ !!$$

Άρα : $x=2\cdot\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$ (SI)

4. Να γίνει σύνθεση στις α.α.τ. $x_1=\eta\mu\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ (SI) και $x_2=\sqrt{3}\cdot\eta\mu\pi t$ (SI), αν αυτές έχουν ίδια θ.ι και ίδια διεύθυνση ταλάντωσης.

Σχόλιο : Η σχέση $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\mathrm{A}_2\cdot\eta\mu\phi}{\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2\cdot\sigma\upsilon\nu\phi}$ *δεν ισχύει ως έχει ! A_1 και A_2 πρέπει να ανταλλάξουν ...θέση.*

5. Να βρεθεί η θέση της ταλαντωμένης μάζας τη στιγμή t=1/6 sec, αν αυτή συμμετέχει ταυτόχρονα σε τρεις α.α.τ. $x_1=\eta\mu\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$ (SI) , $x_2=\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$ και $x_3=\sqrt{3}\cdot\eta\mu\pi t$ (SI), που έχουν ίδια θ.ι και ίδια διεύθυνση ταλάντωσης.

Δεν χρειάζεται να βρούμε την εξίσωση της ταλάντωσης και στη συνέχεια – αντικαθιστώντας τον δοσμένο χρόνο- να υπολογίσουμε τη θέση !

Εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας, όπως αυτή προσφέρεται από το σχολικό βιβλίο.

$$x=x_1+x_2+x_3\Rightarrow x_{t=1/6}=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{t=1/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}m$$

6. Σώμα συμμετέχει ταυτόχρονα σε δυο α.α.τ. με εξισώσεις : $x_1 = 4 \cdot \eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (SI) και $x_2 = 4 \cdot \eta\mu\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (SI), με ίδια θέση ισορροπίας και ίδια διεύθυνση ταλάντωσης.
Βρείτε την εξίσωση της συνισταμένης κίνησης.

Εδώ έχετε υποχρέωση να εργαστείτε αλγεβρικά, με την αρχή της επαλληλίας. Να εκμεταλλευτείτε δηλ. το γεγονός ότι οι ταλαντώσεις έχουν ίδιο πλάτος. Οι εξισώσεις (1) και (2) δεν ισχύουν !

(Αν τα πλάτη των δοσμένων ταλαντώσεων ήταν άνισα, τότε οι γνώσεις που σας παρέχει το σχολικό βιβλίο δεν αρκούν για να φτάσετε στη λύση)

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: Μπορείτε να φτάσετε εύκολα στο αποτέλεσμα αν εργαστείτε διανυσματικά.

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)