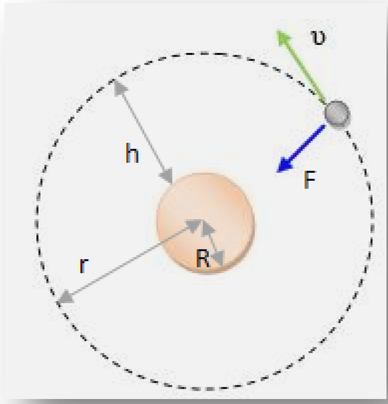
Ο δορυφόρος κάνει **ομαλή κυκλική κίνηση** με κέντρο της κυκλικής τροχιάς, το κέντρο της Γης. Η κίνηση είναι **περιοδική** με περίοδο Τ.



Ισχύουν όλες οι εξισώσεις της ομαλής κυκλικής κίνησης.

$$T = \frac{1}{f} \ , \quad f = \frac{N}{t}$$

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} \ , \ \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \ , \ \upsilon = \omega \cdot \mathrm{r} \ , \ \alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \frac{\upsilon^2}{r} \ , \ \mathrm{F}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \ , \ \ldots$$

Στη θεωρία δορυφόρων επιβάλλεται να ξεχωρίζουμε τα

- $R_{\Gamma H}$ (***ακτίνα*** Γης)
- r (***απόσταση*** δορυφόρου από κέντρο Γης. Ακτίνα δορυφορικής τροχιάς)
- h (ύψος. Μετρά την απόσταση του δορυφόρου από την Γήινη επιφάνεια)
- Προφανώς $r = R_{\Gamma H} + h$

Εύρεση δορυφορικής ταχύτητας

Η δύναμη παγκόσμιας έλξης που ασκεί η Γη σε δορυφόρο παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

$$F = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} \rightarrow G\frac{m_{\Gamma H} \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{G \cdot m_{\Gamma H}}{r}}$$

Σχόλια :

- Αφού $r = R_{\Gamma H} + h$, ισχύει και η εξίσωση $\upsilon = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_{\Gamma H}}{R_{\Gamma H} + h}}$
- Σε απόσταση r, είτε περιφέρεται φυσικός δορυφόρος, είτε τεχνητός, είτε φτερό, τα σώματα αυτά θα έχουν την ίδια δορυφορική ταχύτητα, διότι δεν εξαρτάται από τη μάζα m του δορυφόρου.
- Έχουμε $g_r = \dfrac{G \cdot m_{\Gamma H}}{r^2} \rightarrow g_O = \dfrac{G \cdot m_{\Gamma H}}{R_{\Gamma H}^2} \rightarrow G \cdot m_{\Gamma H} = g_O \cdot R_{\Gamma H}^2$ Από την ισότητα αυτή προκύπτει και μία άλλη χρήσιμη εξίσωση υπολογισμού δορυφορικής ταχύτητας
- $\upsilon = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_{\Gamma H}}{R_{\Gamma H} + h}} \xrightarrow{\text{ΦΕΥΓΕΙ ο ΤΖΙΜΗΣ}} \sqrt{\dfrac{g_O \cdot R_{\Gamma H}^2}{R_{\Gamma H} + h}}$

Εύρεση περιόδου Τ

🗝 Ξεκινάμε από την εξίσωση $u = \omega . r$

$$\upsilon = \omega \cdot r \rightarrow \upsilon = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot r \rightarrow \upsilon \cdot T = 2\pi \cdot r \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{\upsilon} \qquad (\mathrm{I})$$

Πρόσθετη εργασία πάνω στη παραπάνω σχέση (Ι)

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{\upsilon} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{\dfrac{G \cdot m_{\Gamma H}}{r}}} = \frac{2\pi \cdot r}{\dfrac{\sqrt{G \cdot m_{\Gamma H}}}{\sqrt{r}}} = \frac{\dfrac{2\pi \cdot r}{1}}{\dfrac{\sqrt{G \cdot m_{\Gamma H}}}{\sqrt{r}}} = \frac{2\pi \cdot r \cdot \sqrt{r}}{\sqrt{G \cdot m_{\Gamma H}}} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{r^2 \cdot r}}{\sqrt{G \cdot m_{\Gamma H}}} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot \sqrt{r^3}}{\sqrt{G \cdot m_{\Gamma H}}} \xrightarrow{\Phi\varepsilon\acute{\upsilon}\gamma\varepsilon\iota\ \mathrm{o\ TZIMH\Sigma}} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{g_O \cdot R_{\Gamma H}^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_{\Gamma H} + h)^3}{g_O \cdot R_{\Gamma H}^2}}$$

Το μήνυμα από την τελευταία σχέση είναι ότι : Η περίοδος Τ εξαρτάται μόνο από τα h και όχι από την μάζα m του δορυφόρου !

Ι. Ένας δορυφόρος μάζας m περιφέρεται γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά και σε ύψος h από την επιφάνειά της. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας στο ύψος περιστροφής είναι $\frac{1}{4} \cdot g_O$, να βρείτε τα : h , υ , Τ.

α) Εύρεση ύψους h

$$g_r = \frac{1}{4} \cdot g_O \xrightarrow{\alpha\nu\acute{\alpha}\pi\tau\upsilon\xi\eta} G \cdot \frac{M_{\Gamma H}}{r^2} = \frac{1}{4} \cdot G \cdot \frac{M_{\Gamma H}}{R_{\Gamma H}^2} \Rightarrow r^2 = 4 \cdot R_{\Gamma H}^2 \Rightarrow r = 2 \cdot R_{\Gamma H}$$

$$\Rightarrow R_{\Gamma H} + h = 2 \cdot R_{\Gamma H} \Rightarrow h = R_{\Gamma H}$$

β) Εύρεση ταχύτητας υ

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\Gamma H}}{r}} = \sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}^2}{2 \cdot R_{\Gamma H}}} = \sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}}{2}}$$

γ) Εύρεση περιόδου Τ

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{\upsilon} = \cdots$$

II. Ένας δορυφόρος περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από την Γη με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}}{3}}$. Βρείτε το ύψος και την περίοδο Τ. Αν ο δορυφόρος για κάποιο λόγο χάσει ύψος και κινείται σε ύψος h/2, να βρείτε την νέα ταχύτητα καθώς και την νέα Τ.

Αναπτύσσουμε την δοσμένη σχέση…

$$\upsilon = \sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}}{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{G \cdot M_{\Gamma H}}{r}} = \sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}}{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{R_{\Gamma H}^2}{r} = \frac{R_{\Gamma H}}{3} \Rightarrow \frac{R_{\Gamma H}}{r} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = 3 \cdot R_{\Gamma H} \Rightarrow h = 2 \cdot R_{\Gamma H}$$

Εύρεση Τ, όταν $h = 2 \cdot R_{\Gamma H}$: $T = \frac{2\pi \cdot r}{\upsilon} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot R_{\Gamma H}}{\sqrt{\frac{g_O \cdot R_{\Gamma H}}{3}}} = \cdots$

Το νέο ύψος –σύμφωνα με τα δεδομένα- είναι : $h' = \frac{h}{2} = \frac{2 \cdot R_{\Gamma H}}{2} = R_{\Gamma H}$ *Με βάση την τιμή, εύκολα υπολογίζουμε τις νέες τιμές των μεγεθών υ και Τ.*

Συγκρίνοντας τις τιμές, εύκολα προκύπτει ότι καθώς ο δορυφόρος χάνει ύψος, η ταχύτητα αυξάνει αλλά η περίοδος μειώνεται.

- Ποιος πλανήτης του ηλιακού συστήματος έχει max δορυφορική ταχύτητα ; Ποιος max περίοδο ; Ο Ερμής max ταχύτητα και ο Πλούτων max περίοδο!

III. Ένας τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος $h = 2R_{\Gamma H}$ Να βρείτε το βάρος του δορυφόρου στην τροχιά του, αν στη επιφάνεια της Γης έχει βάρος 90 Ν .

Ξέρω το βάρος στη γήινη επιφάνεια Ζητείται το βάρος σε μια άλλη θέση. Αυτό σημαίνει ότι θα κάνω ***σύγκριση***.

$$\frac{B_O}{B_r} = \frac{G\frac{M_{\Gamma H} \cdot m}{R_{\Gamma H}^2}}{G\frac{M_{\Gamma H} \cdot m}{r^2}} \Rightarrow \frac{B_O}{B_r} = \frac{r^2}{R_{\Gamma H}^2} \Rightarrow \frac{B_O}{B_r} = \frac{(3 \cdot R_{\Gamma H})^2}{R_{\Gamma H}^2} \Rightarrow \frac{B_O}{B_r} = \frac{9 \cdot R_{\Gamma H}^2}{R_{\Gamma H}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B_O}{B_r} = \frac{9}{1} \Rightarrow \frac{90}{B_r} = \frac{9}{1} \Rightarrow B_r = 10\ \text{N}$$

IV. Να βρείτε τη βαρυτική έλξη που δέχεται ένα σώμα μάζας m=200 Kgr, όταν βρίσκεται σε ύψος $h=\frac{R_{ΓΗ}}{2}$, από την επιφάνεια της Γης. Υποθέστε ότι ένα σώμα μάζας ενός χιλιόγραμμου στην επιφάνεια της Γης έχει βάρος 10 N .

Για το σώμα μάζας m_1=1 kg -όταν αυτό βρίσκεται στη γήινη επιφάνεια- έχουμε :

$$B_O = g_O \cdot m_1 \Rightarrow B_O = G\cdot\frac{M_{ΓΗ}\cdot m_1}{R_{ΓΗ}^2} \Rightarrow 10 = G\cdot\frac{M_{ΓΗ}\cdot 1}{R_{ΓΗ}^2} \Rightarrow G\cdot M_{ΓΗ} = 10\cdot R_{ΓΗ}^2 \quad (1)$$

Για το βάρος του σώματος μάζας m_2=200 Kgr σε ύψος $h=\frac{R_{ΓΗ}}{2}$ έχουμε :

$$B_r = G\frac{M_{ΓΗ}\cdot m_2}{r^2} \Rightarrow B_r = G\frac{M_{ΓΗ}\cdot m_2}{(R_{ΓΗ}+\frac{R_{ΓΗ}}{2})^2} \Rightarrow B_r = G\frac{M_{ΓΗ}\cdot m_2}{(\frac{3\cdot R_{ΓΗ}}{2})^2} \Rightarrow$$

$$B_r = G\frac{M_{ΓΗ}\cdot m_2}{\frac{9\cdot R_{ΓΗ}^2}{4}} \Rightarrow B_r = G\frac{M_{ΓΗ}\cdot m_2}{\frac{9\cdot R_{ΓΗ}^2}{4}} \Rightarrow B_r = G\frac{4\cdot M_{ΓΗ}\cdot 200}{9\cdot R_{ΓΗ}^2} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)} B_r = \frac{800\cdot 10\cdot R_{ΓΗ}^2}{9\cdot R_{ΓΗ}^2} = \frac{8000}{9}\,\mathrm{N}$$

Ερωτήματα

I. Ένα σώμα πέφτει από πολύ μεγάλο ύψος, κινούμενο μόνο με την επίδραση του βάρους του. Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνει η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή ;

Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας → επιτάχυνση βαρύτητας → ένταση βαρυτικού πεδίου και επομένως $g_r = G\frac{M_{ΓΗ}}{r^2} = G\frac{M_{ΓΗ}}{(R_{ΓΗ}+h)^2}$.

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι άμα το ύψος μειώνεται, τότε ρυθμός μεταβολής ταχύτητας αυξάνει !

II. Η σχέση $g_r = G\frac{M_{ΓΗ}}{r^2}$ πότε ισχύει ;

Επιβάλλεται $r \geq R_{ΓΗ}$. Η μάζα-πηγή είναι δυνατόν να είναι - εκτός της Γης - η μάζα οποιοδήποτε ουράνιου σώματος π.χ Σελήνης. Σε μια τέτοια περίπτωση μιλάμε για ένταση βαρυτικού πεδίου της Σελήνης.

III. Οι δορυφόροι απαιτούν κάποιο είδος καυσίμου για να κινηθούν ;

Όχι ! Απλά η έλξη της Γης έχοντας ρόλο κεντρομόλου, υποχρεώνει τους δορυφόρους του πλανήτη μας να κάνουν ομαλή κυκλική κίνηση, με κέντρο της κυκλικής τροχιάς , το γήινο κέντρο.

IV. Η μάζα του πλανήτη Πλούτωνα ήταν άγνωστη το 1978. Τη χρονιά εκείνη ανακαλύφτηκε ένας δορυφόρος του, του οποίου οι αστρονόμοι υπολόγισαν την ακτίνα περιφοράς R και την περίοδο T. Πως νομίζετε ότι μπόρεσαν με τα στοιχεία αυτά οι αστρονόμοι να υπολογίσουν τη μάζα του Πλούτωνα ;

Ισχύουν οι εξισώσεις $\upsilon = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_{\pi\lambda}}{R}}$ *(1) και* $\upsilon = \dfrac{2\pi \cdot R}{T}$ *(2)*

Από τις παραπάνω εξισώσεις θα προκύψει σχέση που θα συνδέει τη μάζα του Πλούτωνα με την περίοδο T του δορυφόρου του, καθώς και με την ακτίνα R της δορυφορικής τροχιάς.

$$\sqrt{\frac{G \cdot M_{\pi\lambda}}{R}} = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow \frac{G \cdot M_{\pi\lambda}}{R} = \frac{4\pi^2 \cdot R^2}{T^2} \Rightarrow M_{\pi\lambda} = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2}$$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)