76. Να υπολογιστεί η ένταση και το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ένα σημείο που βρίσκεται σε ύψος $h=R_\Gamma$ από τη επιφάνειά της. Δίνονται η ακτίνα της Γης R_Γ = 6400 km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης g_o=10 m/s^2.

- *Δείξαμε ότι* $G.M = g_o R^2$ *(όπου M , R είναι η μάζα και η ακτίνα της Γης)*

Ένταση (μέτρο) :

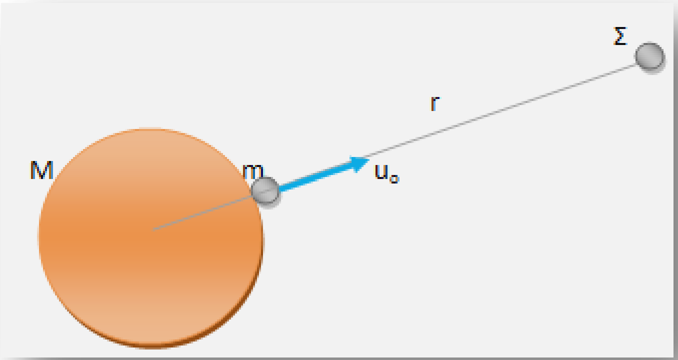
$$g = G.\frac{M}{r^2} = \frac{g_o.R^2}{(R+h)^2} = \frac{g_o.R^2}{(R+R)^2} = \frac{g_o.R^2}{(2R)^2} = \frac{1}{4}\,g_o = \frac{1}{4}.10\,\frac{m}{sec^2} = 2{,}5\,m/sec^2$$

Δυναμικό :

$$V_r = -G.\frac{M}{r} = -\frac{g_o.R^2}{2R} = -\frac{1}{2}g_o.R = \{s.i.\} = -\frac{1}{2}\,10\,.6400.1000\,\frac{joule}{kg} = -32\,.10^6\,\frac{joule}{kg}$$

77. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ_o=10^3 m/s. Υπολογίστε πόσο ψηλά θα φτάσει το σώμα. Δίνεται η ακτίνα της Γης R_Γ = 6400 km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης g_o=10m/s^2. Η αντίσταση του αέρα δε λαμβάνεται υπόψη.

- *Δείξαμε ότι* $G.M = g_o R^2$ *(όπου M , R είναι η μάζα και η ακτίνα της Γης)*



Μια εξίσωση ***ΑΔΜΕ*** *ή ΘΜΚΕ και … (ΑΔΜΕ αφού έχουμε έργο μόνο της βαρυτικής συντηρητικής δύναμης)*

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = \cancel{K_{\tau\varepsilon\lambda}} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \frac{1}{2}m.u_o^2 + \left(-G\frac{M.m}{R}\right) = 0 + \left(-G\frac{M.m}{r}\right) \rightarrow \frac{1}{2}u_o^2 - \frac{g_o R^2}{R} = -\frac{g_o R^2}{r} \rightarrow$$

$$\{s.i.\} \rightarrow \frac{1}{2}.10^6 - 10\,.\,6400\,.1000 = -\frac{10\,.\,6400\,.\,6400\,.\,1000\,.\,1000}{r} \rightarrow 0{,}5 - 64 = -\frac{64\,.64\,.10^5}{r} \rightarrow$$

$$-63{,}5.r = -64.64.10^5 \rightarrow r = \frac{64\,.64.\,10^5}{63{,}5}\,m \rightarrow r = 64{,}504\,10^5\,m = 6450{,}4\,km$$

Αυτό σημαίνει ότι το ύψος h=r-R = 6450,4 – 6400 = 50,4 km

78. Η μάζα της Γης είναι 81 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα της Σελήνης και ο λόγος των ακτίνων τους είναι 11/3.
α) Αν η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι g_o=10N/kg να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης.
β) Ένα σώμα έχει στην επιφάνεια της Γης βάρος 700 N. Ποιο θα είναι το βάρος του στην επιφάνεια της Σελήνης;

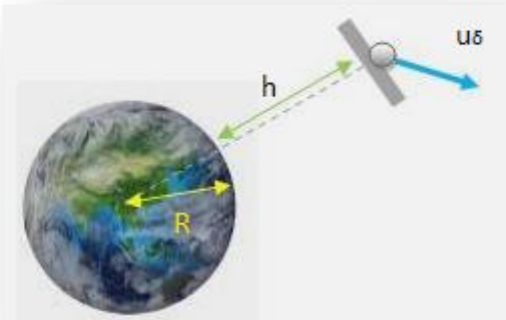
Δημιουργούμε λόγο, διότι έτσι –λέγε με απλοποίηση- θα απαλλαγούμε από 'άγνωστα' μεγέθη και ταυτόχρονα θα φτιάξουμε επιθυμητούς λόγους μεγεθών.

$$\frac{g_{0,\Gamma}}{g_{o,\Sigma}} = \frac{\frac{G\,.\,M_\Gamma}{R_\Gamma^2}}{\frac{G\,.\,M_\Sigma}{R_\Sigma^2}} \rightarrow \frac{g_{0,\Gamma}}{g_{o,\Sigma}} = \frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}\,.\left(\frac{R_\Sigma}{R_\Gamma}\right)^2 \rightarrow \frac{g_{0,\Gamma}}{g_{o,\Sigma}} = \frac{81}{1}\,.\left(\frac{3}{11}\right)^2 \rightarrow \frac{g_{0,\Gamma}}{g_{o,\Sigma}} = 6{,}02 \rightarrow \quad g_{o,\Sigma} = \frac{10}{6{,}02} = 1{,}66\ m/sec^2$$

Πάλι λόγος, βαρών όμως τώρα

$$\frac{B_\Gamma}{B_\Sigma} = \frac{m\,.g_{0,\Gamma}}{m\,.\,g_{o,\Sigma}} \rightarrow \frac{700}{B_\Sigma} = 6{,}02 \ \rightarrow\ B_\Sigma = 116{,}2\ N$$

79. Από διαστημική εξέδρα που βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης θέλουμε να εκτοξεύσουμε διαστημόπλοιο ώστε να εγκαταλείψει το πεδίο βαρύτητας της Γης. Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στο διαστημόπλοιο. Αγνοήστε τις επιδράσεις των άλλων ουράνιων σωμάτων πλην της Γης . Δίνονται η ακτίνα της Γης R_Γ και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειά της g_o.



Όταν η εκφώνηση δίνει την τιμή go και πρόκειται να εργαστείς σε ανομοιογενές βαρυτικό πεδίο, μία είναι η διαχείριση…

$$\ldots\ g_o = G.\frac{M}{R^2} \ \rightarrow\ G.M = g_o R^2 \qquad (1)$$

Ταχύτητα διαφυγής από το σημείο Σ …

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_\infty + U_\infty \rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = 0 + 0 \rightarrow \frac{1}{2}mu_\delta^2 + \left(-G\frac{M\,.m}{r}\right) = 0 \ \rightarrow\ u_\delta = \sqrt{G\,\frac{2M}{r}} \ \rightarrow\ u_\delta = \sqrt{\frac{2g_o\,R^2}{R+h}} \qquad (2)$$

Μη ξεχνάμε ότι η ταχύτητα διαφυγής ορίζεται ως η ελάχιστη τιμή ταχύτητας για να φτάσει στο άπειρο, χωρίς εκεί να κινείται.

80. Να βρείτε την ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια πλανήτη με μάζα m=$M_Γ$/8 και πυκνότητα ίση με αυτή της Γης. Η ταχύτητα διαφυγής από τη Γη είναι υ=11,2 km/s. Η Γη και ο πλανήτης να θεωρηθούν ομογενείς ακίνητες σφαίρες. Ο όγκος μιας σφαίρας δίνεται από τη σχέση

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Λίγα τα δεδομένα… Οπότε λόγος!

$$\frac{u_{\delta,\Gamma\eta}}{u_{\delta,\pi\lambda}} = \frac{\sqrt{G\frac{2M}{R}}}{\sqrt{G\frac{2m}{\rho}}} \rightarrow \frac{u_{\delta,\Gamma\eta}}{u_{\delta,\pi\lambda}} = \sqrt{\frac{M}{m}\cdot\frac{\rho}{R}} \rightarrow \frac{u_{\delta,\Gamma\eta}}{u_{\delta,\pi\lambda}} = \sqrt{\frac{8}{1}\cdot\frac{\rho}{R}} \qquad (1)$$

Όπου ρ είναι η ακτίνα του πλανήτη.

Πάμε τώρα να βρούμε λόγο ακτίνων, με τη βοήθεια της πυκνότητας d.

$$\frac{M}{m} = \frac{d\,.\,\frac{4}{3}\pi R^3}{d\,.\,\frac{4}{3}\pi\rho^3} \rightarrow \frac{8}{1} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^3 \rightarrow \frac{R}{\rho} = \frac{2}{1} \qquad (2)$$

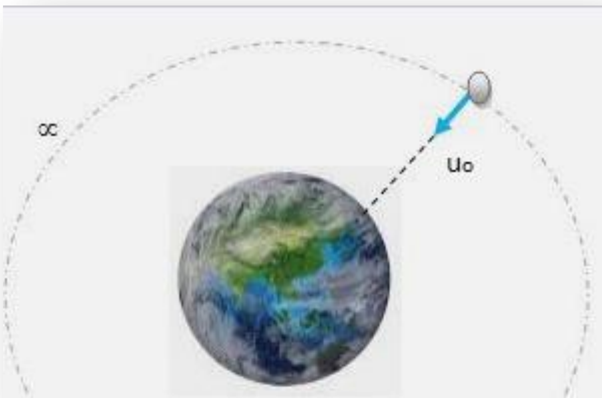
Από τις σχέσεις (1) και (2) …

$$\frac{u_{\delta,\Gamma\eta}}{u_{\delta,\pi\lambda}} = \sqrt{\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{11{,}2}{u_{\delta,\pi\lambda}} = \frac{2}{1} \rightarrow u_{\delta,\pi\lambda} = 5{,}6\ km/sec$$

81. Η ταχύτητα με την οποία φτάνει ένας μετεωρίτης στη Γη μπορεί να εκτιμηθεί από το μέγεθος του κρατήρα που θα ανοίξει κατά την πρόσκρουσή του στην επιφάνεια της Γης. Από το μέγεθος ενός τέτοιου κρατήρα εκτιμάμε ότι ένας μετεωρίτης έφτασε στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα υ=65.000km/h. Υπολογίστε την ταχύτητα που είχε ο μετεωρίτης όταν έμπαινε στα όρια της βαρυτικής επίδρασης της Γης. Θεωρήστε τις τριβές που αναπτύσσονται κατά την κίνηση του μετεωρίτη στην ατμόσφαιρα της Γης αμελητέες και αγνοήστε την επίδραση των άλλων ουράνιων σωμάτων, πλην της Γης, στην κίνησή του. Δίνονται $R_Γ$=6400 km, και g_o=10 m/s^2).

ΑΔΜΕ για μετάβαση του μετεωρίτη από το σημείο εισόδου (θεωρητικά στο άπειρο), μέχρι να φτάσει στην επιφάνεια της Γης. Μπορούμε με ΑΔΜΕ, διότι έχουμε έργο μόνο της βαρυτικής ελκτικής δύναμης, η οποία είναι συντηρητική.

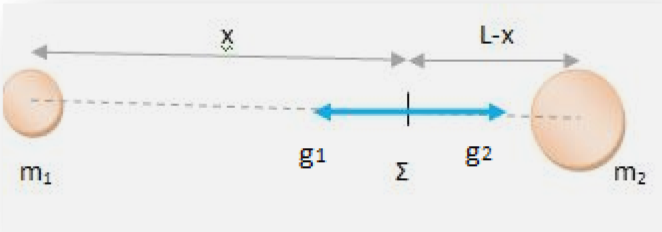
$$K_\infty + U_\infty = K_{\varepsilon\pi\iota\varphi} + U_{\varepsilon\pi\iota\varphi} \rightarrow \frac{1}{2}mu_o^2 + 0 = \frac{1}{2}mu_{\varepsilon\pi\iota\varphi}^2 + \left(-\frac{GM_{\Gamma\eta}.m}{R_{\Gamma\eta}}\right) \rightarrow u_o^2 = u_{\varepsilon\pi\iota\varphi}^2 - 2g_o.R_\Gamma$$



Αντικατάσταση τιμών και … $u_o = 14x10^3\ m/s$

82. Δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ βρίσκονται σε απόσταση *l* μεταξύ τους και έξω από οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας. Να βρεθεί το σημείο του χώρου στο οποίο η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργούν οι σφαίρες είναι μηδέν και στη συνέχεια να υπολογισθεί γι' αυτό το σημείο το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου. Δίνεται η σταθερά παγκόσμιας έλξης G.

*Μόνο **πάνω** στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δυο σημειακές μάζες είναι δυνατόν οι εντάσεις να γίνουν αντίθετες και να δώσουν το «νεκρό» σημείο.*



Σημείο Σ…

$$g_1 = g_2 \rightarrow G\frac{m}{x^2} = G\frac{2m}{(L-x)^2} \rightarrow \left(\frac{L-x}{x}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{L-x}{x} =$$

$$= \pm\sqrt{2} \qquad (1)^*$$

(*) Όταν $\alpha^2 = \beta^2 \leftrightarrow \alpha = \pm\beta$

Από τη σχέση (1)…

$$L - x = \sqrt{2}.x \rightarrow L = (1+\sqrt{2}).x \rightarrow x = \frac{L}{1+\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{L\ .\ (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2})} \rightarrow x = -L.(1-\sqrt{2}) \rightarrow x = L(\sqrt{2}-1) \qquad (2)$$

$$L - x = -\sqrt{2}.x \rightarrow L = (1-\sqrt{2}).x \rightarrow x = \frac{L}{1-\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{L\ .\ (1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2})} \rightarrow x = \cancel{-L.(1+\sqrt{2})} \qquad (3)$$

Η λύση (2) είναι δεκτή, διότι προσδιορίζει τιμή x που ανήκει στη περιοχή ανάμεσα στις δυο μάζες, ενώ η λύση (3) απορρίπτεται διότι παραπέμπει αριστερά της μάζας m_1

Το δυναμικό στο σημείο Σ, είναι άθροισμα –ως μονόμετρο μέγεθος- των επί μέρους δυναμικών…

$$V_\Sigma = V_1 + V_2 = -G\frac{m}{x} - G\frac{2m}{L-x} = -G.m\left(\frac{1}{L(\sqrt{2}-1)} + \frac{2}{L-L(\sqrt{2}-1)}\right) = \frac{-G.m}{L}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{1} + \frac{2}{2-\sqrt{2}}\right) =$$

$$\frac{-G.m}{L}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{1} + \frac{2.(2+\sqrt{2})}{2}\right) = \frac{-G.m}{L}\{\sqrt{2}+1+2+\sqrt{2}\} = -G\frac{m}{L}(2\sqrt{2}+3) \qquad (4)$$

Για να γεμίσει η σελίδα: *Ας μείνουμε για λίγο σε αυτό το σημείο. Ξέρουμε ότι το δυναμικό σε ένα σημείο βαρυτικού πεδίου εκφράζεται και από την εξίσωση…*

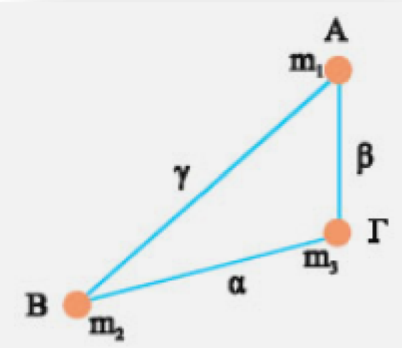
$$\boxed{V_\Sigma = \frac{W_{\underset{\Sigma\longrightarrow\infty}{\Delta υναμης\ πεδίου}}}{m}}$$

Σε τούτη την εξίσωση, αν θεωρήσουμε ότι από το Σ, μεταφέρεται στο άπειρο ποσότητα μάζας ίση με 1 Kg, τότε το δυναμικό και το έργο που αντιστοιχεί στη δύναμη του πεδίου ταυτίζονται αριθμητικά!

Αριθμητικό παράδειγμα: Το δυναμικό στο Σ είναι -10 joule/kg. Το έργο της δύναμης του πεδίου για μεταφορά 1 kg από το Σ στο άπειρο (πολύ μακριά), είναι ίσο με -10 Joule.

Βλέπεις το δυναμικό και αμέσως καταλαβαίνεις το μήνυμα που μας δίνει…

83. Στις κορυφές Α,Β, Γ ενός τριγώνου με πλευρές α, β, γ βρίσκονται οι σφαιρικές μάζες m_1, m_2, και m_3. Να υπολογιστεί η ενέργεια που απαιτείται για να τις απομακρύνουμε σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Δίνεται η σταθερά G.



Εδώ απαγορεύεται η χρήση ΑΔΜΕ, διότι το σύστημα αλλάζει δεχόμενο εξωτερικές δυνάμεις.

*Μπορούμε να εργαστούμε με ΘΜΚΕ ή **ΑΔΕ**.*

$$E_{αρχ} + W_{προσφέρω} = E_{τελ} \quad (1)$$

Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με τη δυναμική του ενέργεια. Κι αυτή με τη σειρά της είναι άθροισμα όλων των δυναμικών ενεργειών που έχουν τα ζεύγη μαζών.

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{γ} - G\frac{m_1 m_3}{β} - G\frac{m_2 m_3}{α} \qquad (2)$$

Η τελική ενέργεια του συστήματος είναι μηδενική διότι οι μάζες είναι σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους και κινητική ενέργεια δεν θέλουμε να υπάρχει στην τελική κατάσταση

Επομένως η ελάχιστη προσφερόμενη από τον εξωτερικό παράγοντα ενέργεια –για να διαλύσει το σύστημα – είναι ίση με :

$$G\frac{m_1 m_2}{γ} + G\frac{m_1 m_3}{β} + G\frac{m_2 m_3}{α}$$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)