2.57 Ποσότητα αερίων βρίσκεται μέσα σε κύλινδρο και καταλαμβάνει όγκο V. Το αέριο εκτονώνεται μέχρι διπλασιασμού του, η δε εκτόνωση μπορεί να γίνει ισόθερμα ή ισοβαρώς ή αδιαβατικά.
(α) Να παρασταθούν γραφικά σε P-V οι μεταβολές που περιγράφονται παραπάνω.
(β) Σε ποια από τις τρεις μεταβολές :
I. Το αέριο αποδίδει περισσότερο έργο ;
II. Το αέριο απορροφά το μικρότερο ποσό θερμότητας ;

Υπόδειξη : *Η άσκηση επιδέχεται μόνο ποιοτική λύση. Μέσα από το διάγραμμα P-V βρείτε την σχέση των έργων. Συγκρίνατε επίσης τις μεταβολές της U και εφαρμόστε τον 1^o θερμ. νόμο. (Θυμηθείτε τη διαχείριση στις ερωτήσεις 2.16 , 2.17 & 2.18)*

2.58 Στο σχήμα φαίνεται η κυκλική μεταβολή στην οποία υποβάλλεται 1mol αερίου.
(α) Να γίνουν τα διαγράμματα P=f(τ) και V=f(τ)
(β) Να υπολογιστεί το ολικό έργο (Σw)
Δίνεται ότι 1 atm=10^5 N/m^2

Υπόδειξη : *Οι σχεδιάσεις των διαγραμμάτων P-T και V-T θέλουν πρώτα-πρώτα να δείξετε ότι T_A=$T_Γ$. Ο υπολογισμός του ολικού έργου είναι ζήτημα ... «εμβαδού»*

2.60 Κυλινδρικό δοχείο με αδιαβατικά τοιχώματα έχει τον άξονα του κατακόρυφο και κλείνεται με έμβολο πάνω στο οποίο βρίσκονται διάφορα σταθμά. Στο δοχείο περιέχεται $V_1 = 1\,\text{m}^3$ υδρογόνου, σε θερμοκρασία $\theta_1 = 27^o$ C και πίεση $P_1 = 125\cdot 10^5$ N/m^2. Αφαιρώντας τα σταθμά κάνουμε την πίεση ίση με $P_2 = 10^5$ N/m^2. Να βρείτε :
(α) Ο όγκος και η θερμοκρασία του αερίου στη τελική κατάσταση.
(β) Το έργο που απέδωσε το αέριο κατά την εκτόνωσή του.

Λύση : *Εδώ πρέπει να γίνει αποδεκτό ότι* ***το α.θ.σ. κάνει αδιαβατική μεταβολή****. Νόμος Poisson :*

$$p_1 \cdot V_1^{\gamma} = p_2 \cdot V_2^{\gamma} \rightarrow 125\cdot 10^5 \cdot 1^{\frac{3}{2}} = 10^5 \cdot V_2^{\frac{3}{2}} \rightarrow (125)^{\frac{2}{3}} = V_2 \rightarrow V_2 = 25\ \text{m}^3$$

Εύρεση τελικής θερμοκρασίας : $\dfrac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \dfrac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow T_2 = \cdots\ 60\,\text{K}$

Ο υπολογισμός του έργου για τη παραπάνω αδιαβατική μεταβολή μπορεί να γίνει με δυο… τρόπους.

I. $W = \dfrac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{1-\gamma}$ *(αντικατάσταση… κ.ο.κ)*

II.
$$W = -\Delta U \rightarrow W = -n \cdot C_V .(T_\tau - T_\alpha) = -n \cdot C_V \left(\frac{P_\tau \cdot V_\tau}{n \cdot R} - \frac{P_\alpha \cdot V_\alpha}{n \cdot R} \right) =$$
$$= -\frac{C_V}{R}\left(P_\tau V_\tau - P_\alpha V_\alpha\right) \quad (1)$$

Εκφράστε το πηλίκο C_V/R συναρτήσει του γ και δείτε πως θα διαμορφωθεί η σχέση (1) !

2.61 Μια ποσότητα ιδανικού αερίου που αποτελείται από N=1,5 10^{24} μόρια, βρίσκεται σε θερμοκρασία $\theta_A = 27^o$ C. Θερμαίνουμε το αέριο μέχρι η θερμοκρασία να γίνει $\theta_B = 127^o$ C (i) με σταθερό όγκο και (ii) με σταθερή πίεση . Να υπολογιστούν σε κάθε περίπτωση :
(α) Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου
(β) Το έργο που αποδίδει το αέριο
(γ) Η θερμότητα που απορροφά το αέριο.
Δίνεται ότι R=8,3 J/(mol.K), N_A=6 10^{23} μόρια/mol

Υπόδειξη *: Η γνώση των moles (έμμεσα), θερμοκρασιών και του R φανερώνει ότι πρέπει να **εργαστείτε με αναλυτικές εκφράσεις των μεγεθών**, των οποίων τις τιμές ζητάτε.*
Το να φτιάξετε διάγραμμα P-V, δεν είναι κακή ιδέα, αφού «βλέπετε» ουσιαστικά τον χώρο εργασίας. (Προσοχή ! Στο P-V πάντα να φαίνονται οι ισόθερμες. Η εμπειρία μου λέει ότι «οι ισόθερμες στο P-V είναι ευλογία»…)

2.62 Η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής σε μια μηχανή Carnot είναι $\theta_1 = 127^o$ C και της ψυχρής $\theta_2 = 27^o$ C.
(α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής.
(β) Αν η μηχανή αποδίδει ισχύ P=10 HP (ίππους) να υπολογιστεί το ποσό θερμότητας που απορροφά από τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας σε χρόνο t=1 h.
Δίνεται 1 HP =745,7 watt.

(α) *Μηχανή Carnot σημαίνει απόδοση:* $e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{273+27}{273+127} = 1 - \frac{300}{400} = \frac{1}{4}$

(β) *Συνδυάζουμε την απόδοση με την ενέργεια με στόχο να εμφανιστεί η ισχύς*

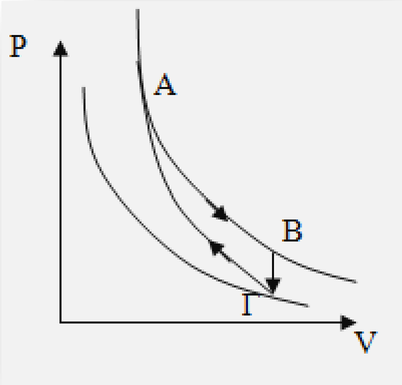
$$e = \frac{\Sigma W}{Q_{\alpha\pi o\rho}} = \frac{\frac{\Sigma W}{t}}{\frac{Q_{\alpha\pi o\rho}}{t}} = \frac{P_{\alpha\pi o\delta}}{\frac{Q_{\alpha\pi o\rho}}{t}} \rightarrow Q_{\alpha\pi o\rho} = \frac{P_{\alpha\pi o\delta} \cdot t}{e} = \cdots$$

2.67 Ένα mol ιδανικού αερίου, που βρίσκεται σε s.t.p. θερμαίνεται σε σταθερή πίεση μέχρι να διπλασιαστεί ο όγκος του και μετά ψύχεται με σταθερό όγκο μέχρι να υποδιπλασιαστεί η πίεσή του. Να βρείτε :
(α) Το έργο του αερίου
(β) Τη θερμότητα που αντάλλαξε το αέριο με το περιβάλλον.
Δίνεται R=8,314 J/(mol.K), ln2=0,7 και 1lt.atm=100 J

Υπόδειξη :

*Εύκολη αν … «ζωντανέψετε» τη πληροφορία : **Ένα mol ιδανικού αερίου, που βρίσκεται σε σε s.t.p.** …*
Εργαστείτε με αναλυτικές εκφράσεις μεγεθών, σχεδιάστε P-V για να βλέπετε τον χώρο εργασίας, φέρτε τις ισόθερμες .
Ίδια είναι και η 2.68

2.69 Ιδανικό αέριο έχει όγκο V_A=0,04 m^3, πίεση P_A=3.10^5 N/m^2 και θερμοκρασία T_A=600 K. Το αέριο εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι ο όγκος του να γίνει V_B=0,16 m^3, ύστερα ψύχεται με σταθερό όγκο ώσπου να αποκτήσει την κατάλληλη πίεση από όπου μια αδιαβατική συμπίεση θα το φέρει στην αρχική του κατάσταση. Να υπολογιστούν :
(α) Η εσωτερική ενέργεια του αερίου στην αρχική του κατάσταση, καθώς και στο τέλος της ισόθερμης και της ισόχωρης μεταβολής.
(β) Το ολικό έργο του κύκλου.
Δίνεται R=8,314 J/(mol.K), γ=5/3 , ln4=1,14 και $(0,25)^\gamma$=0,1



(α) $U_A = \frac{3}{2} \cdot nRT = \frac{3}{2} \cdot P_A \cdot V_A = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}04 = 18000\, J$

Προφανώς ίδια η τιμή της εσωτερική ενέργειας και στο σημείο B, αφού οι καταστάσεις A και B έχουν ίδια θερμοκρασία.

Δέσε το B με το Γ με εξίσωση της μεταβολής B→Γ. Δέσε το Γ με το A μέσω της εξίσωσης της μεταβολής Γ→A. Από τις δυο αυτές εξισώσεις θα πάρεις σχέση που θα αποκαλύπτει τον όγκο ή την πίεση ή την θερμοκρασία του Γ…
Κάνε σχήμα στο P-V → Φέρε ισόθερμες → Δούλεψε με αναλυτικές εκφράσεις των μεγεθών που ψάχνεις (θυμήσου : αν ξέρεις ένα από τα Cv, Cp, γ , τότε τα ξέρεις όλα!)

2.64 Ενδιαφέρουσα ! Είναι κλασσική άσκηση της υπομονής.

2.65 Καλή ! Δουλειά με αναλυτικές εκφράσεις…

2.66 ΑΠΟΔΟΣΗ : Καλή. Είναι η 1η άσκηση –περί απόδοσης- που πρέπει να διδαχτεί κάποιος. Εδώ μαθαίνει ότι πρέπει να ξεκινά από την εξίσωση $e = \frac{\Sigma Q_{ολικό}}{\Sigma Q_{απορ.}}$, να γεμίζει την έκφραση με θερμοκρασίες και στη συνέχεια –αφού τις συσχετίσει είτε μεταξύ τους , είτε με τα εμφανιζόμενα στην απόδοση μεγέθη, να ολοκληρώσει την λύση της άσκησης.

2.63 ΑΠΟΔΟΣΗ : Απαιτεί εργασία με αναλυτικές εκφράσεις των μεγεθών, αφού σας προσφέρει τιμές πίεσης, θερμοκρασίας, moles, Cv ,..
Η παράσταση του κύκλου σε άξονές P-V και V-T, είναι εύκολη αρκεί να αντιληφτείτε ότι οι μεταβολές Δ→A και B→Γ είναι ισόχωρες με τον όγκο των καταστάσεων A, Δ να είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο των B, Γ (γιατί ;)

2.62 ΑΠΟΔΟΣΗ : Όλα είναι εύκολα, αρκεί να προσέξετε ότι εργάζεστε με μηχανή Carnot.

2.71 ΑΠΟΔΟΣΗ : Την θεωρώ εύκολη. Δεν έχει κάποια παγίδα.

2.70 Κυλινδρικό δοχείο, με αδιαβατικά τοιχώματα, έχει τον άξονά του κατακόρυφο και κλείνεται –στο επάνω μέρος-με αδιαβατικό έμβολο A=10cm^2 και μάζας m=10kg. Ο κύλινδρος περιέχει ιδανικό αέριο και βρίσκεται σε χώρο όπου η εξωτερική πίεση είναι $P_{\alpha\tau\mu} = 10^5 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$. Μέσω μιας αντίστασης R που βρίσκεται μέσα στο δοχείο, το αέριο θερμαίνεται αργά. Αν το ποσό θερμότητας που προσφέρεται μέσω της αντίστασης είναι ίσο με Q=50 J, να βρείτε :
(α) Το είδος της μεταβολής για το αέριο.
(β) Τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου
(γ) Τη μετατόπιση του εμβόλου
Δίνεται ότι g=10 m/sec^2 και Cv=3R/2

(α) Η μεταβολή είναι ισοβαρής ! Η ύπαρξη αδιαβατικών τοιχωμάτων εξασφαλίζει την απορρόφηση όλου του ποσού θερμότητας –που προσφέρει η R-από το αέριο.

(β) Εύρεση ΔU για τη μεταβολή.

Αν σε ισοβαρή ξέρω δυο από τα Q , ΔU , W και γ , τότε υπολογίζω τα άλλα δυο !

$$\frac{Q}{\Delta U} = \frac{n \cdot C_p \cdot \Delta T}{n \cdot C_v \cdot \Delta T} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \rightarrow \Delta U = \frac{3 \cdot Q}{5} = 30 \ \mathrm{J}$$

(γ) Εύρεση το έργου για τη παραπάνω μεταβολή.

Q=ΔU+W → 50=30+W → W=20 J

Από την ισορροπία του εμβόλου προκύπτει κατά τα …γνωστά :

$$P = \frac{m \cdot g}{A} + P_{\alpha\tau\mu} = \frac{10 \cdot 10}{10 \cdot 10^{-4}} + 10^5 = 2 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Υπολογισμός της μετατόπισης του εμβόλου.

$$W = P \cdot \left(V_{\tau\varepsilon\lambda} - V_{\alpha\rho\chi}\right) = P \cdot A \cdot \Delta x \rightarrow 20 = 2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta x \rightarrow \Delta x = 0{,}1 \ \ \mathrm{m}$$

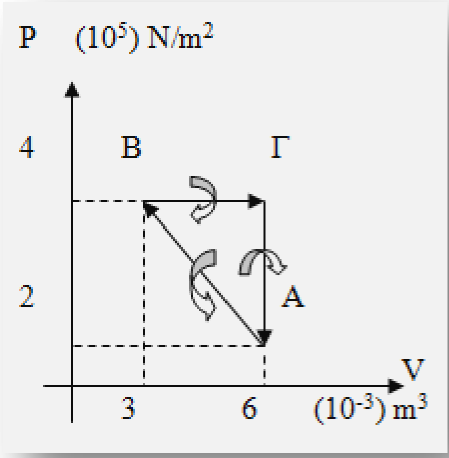
2.72 Η κυκλική μεταβολή n=2/R mol ιδανικού αερίου σε μια θερμική μηχανή αποτελείται από την μεταβολή ΑΒ, κατά τη διάρκεια της οποίας η πίεση και ο όγκος συνδέονται με τη σχέση
$P = -\frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot V + 6 \cdot 10^5$ (S.I) , την ΒΓ που είναι ισοβαρής και τέλος τη ΓΑ που είναι ισόχωρη.
Το αέριο στις καταστάσεις Α και Β έχει όγκο $V_A = 6 \cdot 10^{-3} m^3$ και $V_B = 3 \cdot 10^{-3} m^3$.
Να βρείτε τον συντελεστή απόδοσης της μηχανής.

- Εύρεση συντεταγμένων των καταστάσεων Α, Β στο P-V.

$$P = -\frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot V + 6 \cdot 10^5 \rightarrow \mathrm{P_A} = -\frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot 6 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^5 \ \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Ομοίως εργαζόμενοι έχουμε $P_B = 4\cdot 10^5 \ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

- Υπολογισμός απόδοσης κύκλου



$$e = \frac{Q_{AB} + Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A}}{Q_{B\Gamma}} \qquad (1)$$

Πράγματι –όπως θα δούμε- μόνο το $Q_{B\Gamma}$ είναι απορροφημένο ποσό θερμότητας.

$$Q_{\Gamma A} = n\cdot C_V\cdot(T_A - T_\Gamma) =$$
$$= n\cdot C_V\cdot\left(\frac{P_A\cdot V_A - P_\Gamma\cdot V_\Gamma}{n\cdot R}\right) =$$
$$= \frac{C_V}{R}(P_A\cdot V_A - P_\Gamma\cdot V_\Gamma) = \cdots = -18\cdot 10^2 \ \text{J}$$

$$Q_{B\Gamma} = n\cdot C_P\cdot(T_\Gamma - T_B) = n\cdot C_P\cdot\left(\frac{P_\Gamma\cdot V_\Gamma - P_B\cdot V_B}{n\cdot R}\right) = \frac{C_P}{R}(P_\Gamma\cdot V_\Gamma - P_B\cdot V_B) \rightarrow$$
$$= \cdots = +30\cdot 10^2 \ \text{J}$$

- Σύγκριση θερμοκρασιών T_A και T_B.

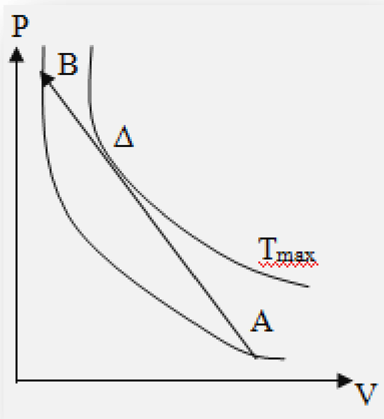
$$T_A = \frac{P_A\cdot V_A}{n\cdot R} = \frac{12\cdot 10^2}{\mathrm{n}\cdot\mathrm{R}} = 600 \quad \& \quad T_B = \frac{P_B\cdot V_B}{n\cdot R} = \frac{12\cdot 10^2}{\mathrm{n}\cdot\mathrm{R}} = 600 \ \rightarrow \text{Επομένως } T_A = T_B$$

Μετά την σύγκριση των θερμοκρασιών μπορούμε να εφαρμόσουμε το 1$^{\text{ο}}$ θερ. Νόμο στην μεταβολή A→B[1] :

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \xrightarrow{\Delta U_{AB}=0} Q_{AB} = -\text{"εμβαδόν"} = \cdots = -9\cdot 10^2 \ \text{J} \ (*)$$

Η σχέση (1) δίνει πλέον : $e = \dfrac{(-9+30-18)\cdot 10^2}{30} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ ή 10%

Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία κατά την μετάβαση του αερίου από την κατάσταση Α στην Β;



Ξεκινώ από την σχέση $P = -\dfrac{2}{3}\cdot 10^8\cdot V + 6\cdot 10^5$ (S.I) *και «διώχνω» τον όγκο V, εμφανίζοντας σε εξίσωση τη σχέση P και T.*

$$P = -\frac{2}{3}\cdot 10^8\cdot\frac{n\cdot R}{P}\cdot T + 6\cdot 10^5 \ \rightarrow$$

$$\mathrm{P}^2 - 6\cdot 10^5\cdot P + \frac{2}{3}\cdot 10^8 nR\cdot T = 0 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathrm{nR=2}} \mathrm{P}^2 - 6\cdot 10^5\cdot P + \frac{4}{3}10^8\cdot T = 0 \qquad (1)$$

Για να έχει πραγματικές λύσεις η (1) επιβάλλεται η διακρίνουσα να είναι μη αρνητική.

(*) Στην συνέχεια της άσκησης θα δούμε ότι ο υπολογισμός του Q_{AB}-όπως αναπτύσσεται παραπάνω- ενδεχομένως να είναι Λ Α Ν Θ Α Σ Μ Ε Ν Ο Σ !

$$\Delta \geq 0 \rightarrow 36 \cdot 10^{10} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{8} \cdot T \geq 0 \rightarrow T \leq \frac{3 \cdot 36 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 4 \cdot 10^{8}} \rightarrow T \leq 675\ \text{K} \qquad (2)$$

Η σχέση (2) λέει ότι $T_{\max} = 675\ \text{K}$

Από την εξίσωση (1) εύκολα υπολογίζεται η πίεση P_Δ ! Μετά η καταστατική εξίσωση θα δώσει και την τιμή του V_Δ !!

Την προσοχή σας τώρα…

Κατά την μετάβαση Α→Δ έχουμε $W_{Α\Delta} < 0$ και $\Delta U > 0$ και επομένως υπάρχει ενδεχόμενο να είναι το $Q_{Α\Delta} > 0$

Κατά την μετάβαση Δ→Β έχουμε $W_{Α\Delta} < 0$ και $\Delta U < 0$ και επομένως είναι βέβαιο ότι και το $Q_{\Delta Α} < 0$

Σε περίπτωση λοιπόν που $Q_{Α\Delta} > 0$, επιβάλλεται ο συντελεστής απόδοσης να είναι ίσος με :

$$e = \frac{Q_{AB} + Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A}}{Q_{B\Gamma} + Q_{A\Delta}}, \quad \text{όπου } Q_{AB} = Q_{A\Delta} + Q_{\Delta B} \qquad (3)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση η απόδοση 10% που βρήκαμε δεν είναι σωστή[2].

[2] Βέβαια εδώ δεν μπορούμε να έχουμε άποψη περί της ορθότητας ή μη, της τιμής 10%, διότι δεν γνωρίζουμε τα mol του αερίου, αφού εγώ έδωσα αυθαίρετα ότι δήθεν n=2R.
Ένα είναι βέβαιο. Αυτοί που επέλεξαν την άσκηση ήταν απρόσεκτοι, η δε πολιτεία χρόνια τώρα δεν λέει να την διορθώσει…