Προβλήματα στο ανομοιογενές βαρυτικό πεδίο

3.104 Διαστημικό όχημα με μάζα m=8000 kg κατευθύνεται προς τη Γη. Τη στιγμή που βρίσκεται σε ύψος $h=R_Γ$ η ταχύτητά του είναι $υ_o=8\times10^2 m/s$.

α) Αν δεν λειτουργήσουν οι ανασχετικοί πύραυλοί του να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία θα προσκρούσει στην επιφάνεια της Γης

β) Αν κατά τη διάρκεια της καθόδου του οχήματος, από το ύψος h μέχρι την επιφάνεια της Γης, λειτουργήσουν οι πύραυλοι, δημιουργώντας σταθερή ανασχετική δύναμη F, να υπολογιστεί η τιμή της ώστε το όχημα να φτάσει στην επιφάνεια της Γης με μηδενική ταχύτητα. Δίνεται η ακτίνα της Γης $R_Γ$ = 6400 km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_o=10 m/s^2$. Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπόψη.

3.104 α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου -ενέργειας για την κίνηση του διαστημικού οχήματος από το σημείο Α (που βρίσκεται σε ύψος h) μέχρι το σημείο Γ (που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης)

$$W_w = \Delta K \quad \text{επομένως} \quad (V_A - V_Γ)m = \frac{1}{2}mυ^2 - \frac{1}{2}mυ_o^2 \quad \text{ή}$$

$$-G\frac{M_Γ}{R_Γ+h} + G\frac{M_Γ}{R_Γ} = \frac{1}{2}υ^2 - \frac{1}{2}υ_o^2 \quad \text{ή}$$

$$-\frac{g_o R_Γ^2}{2R_Γ} + \frac{g_o R_Γ^2}{R_Γ} = \frac{1}{2}υ^2 - \frac{1}{2}υ_o^2$$

$$\text{άρα} \quad υ = \sqrt{g_o R_Γ + υ_o^2} = 8\sqrt{2}\times10^3\, m/s$$

Για το ΘΜΚΕ η μόνη δύναμη που δρα στη μάζα είναι η ελκτική βαρυτική δύναμη της Γης.
Θα μπορούσαμε να εργαστούμε και με ΑΔΜΕ !

β) Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του διαστημικού οχήματος από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ βρίσκουμε

$$W_F + W_w = \Delta K\,, \quad \text{επομένως} \quad -Fh + (V_A - V_Γ)m = -\frac{1}{2}mυ_o^2 \quad \text{ή}$$

$$-Fh + \left(-G\frac{M_Γ}{R_Γ+h} + G\frac{M_Γ}{R_Γ}\right)m = -\frac{1}{2}mυ_o^2 \quad \text{ή}$$

$$-Fh + \frac{g_o R_Γ m}{2} = -\frac{1}{2}mυ_o^2 \quad \text{και} \quad F = \frac{m(υ_o^2 + g_o R_Γ)}{2R_Γ} = 8\times10^4\,\text{N}$$

Εδώ εργαζόμαστε μόνο με ΘΜΚΕ. Δεν επιτρέπεται η χρήση της ΑΔΜΕ, διότι έχουμε έργο μη συντηρητικής δύναμης (αυτή είναι η σταθερή δύναμη ανάσχεσης)

Να η ΑΔΜΕ του πρώτου ερωτήματος …

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{αρχ} \rightarrow \frac{1}{2}mu_o^2 + \left(-G\frac{M.m}{R+h}\right) = \frac{1}{2}mu^2 + \left(-G\frac{M.m}{R}\right) \rightarrow \cdots$$

3.105 Διαστημικός σταθμός περιστρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη, με ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από το κέντρο της r_1= 7x10^6 m και r_2= 7x10^5 m, αντίστοιχα. Αν η ταχύτητά του όταν βρίσκεται σε απόσταση r_1 (ελάχιστη) είναι $υ_1$=8x10^{3}m/s, να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητά του όταν βρίσκεται σε απόσταση r_2 (μέγιστη)

β) Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί σε μια συσκευή, μάζας m=140 kg, που βρίσκεται στο διαστημικό σταθμό, για να φτάσει στο άπειρο. Δικαιολογήστε γιατί η ενέργεια αυτή είναι ίδια από οποιοδήποτε σημείο της ελλειπτικής τροχιάς και αν πραγματοποιηθεί η βολή.

Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_Γ$ = 6400 km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης g_o=10m/s^2.

Σημειώσεις: Ι)Η περιστροφή του διαστημικού σταθμού γίνεται χωρίς οποιαδήποτε χρήση πυραύλων. ΙΙ) Η ελκτική δύναμη μεταξύ συσκευής και διαστημικού σταθμού είναι αμελητέα

3.105 α) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Γη-σταθμός διατηρείται, δηλαδή $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

επομένως $-G\dfrac{M_Γ m}{r_1} + \dfrac{1}{2}mυ_1^2 = -G\dfrac{M_Γ m}{r_2} + \dfrac{1}{2}mυ_2^2$

ή $-\dfrac{g_o R_Γ^2}{r_1} + \dfrac{υ_1^2}{2} = -\dfrac{g_o R_Γ^2}{r_2} + \dfrac{υ_2^2}{2}$ άρα

$$υ_2 = \sqrt{2g_o R_Γ^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + υ_1^2} = 6{,}16\times10^3\, m/s$$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται, διότι δεν υπάρχει έργο μη συντηρητικής δύναμης. Επομένως έχουμε την ίδια $E_{μηχ}$ σε οποιαδήποτε θέση της ελλειπτικής τροχιάς.

β) Η ενέργεια E που πρέπει να προσφερθεί στη συσκευή ώστε να φτάσει στο άπειρο χωρίς κινητική ενέργεια, θα βρεθεί από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$E_{ΑΡΧ} + E = E_{ΤΕΛ}$ (1) όπου $E_{ΑΡΧ}$, $E_{ΤΕΛ}$ η αρχική και τελική ενέργεια του συστήματος συσκευής – Γη. Επειδή κατά την περιφορά της συσκευής γύρω από τη Γη η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται, η $E_{ΑΡΧ}$ είναι ίδια για όλα τα σημεία της τροχιάς.

Σύμφωνα με την (1)

$$-G\frac{M_Γ m}{r_1} + \frac{1}{2}mυ_1^2 + E = 0 \text{ ή } E = \frac{g_o R_Γ^2 m}{r_1} - \frac{mυ_1^2}{2} = 3{,}7\times10^9 J$$

Προσφορά ενέργειας σημαίνει όχι χρήση ΑΔΜΕ. Άρα θα εργαστούμε είτε με ΑΔΕ είτε με ΘΜΚΕ

ΘΜΚΕ :

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F\ πεδίου} + W_{προσφερόμενο} \rightarrow 0 - \frac{1}{2}mυ^2 = \left(-G\frac{M_{ΓΗ}}{r_1} - \cancel{V_\infty}^{\,0}\right).m + W_{προσφερόμενο} \quad κλπ$$

3.106 Ένα διαστημικό όχημα ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα από το έδαφος και κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση $\alpha=32\ m/s^2$. Τη στιγμή που η ταχύτητά του αποκτά τιμή τέτοια που του επιτρέπει να απομακρυνθεί από το πεδίο βαρύτητας της Γης σταματά η λειτουργία των πυραύλων και το όχημα συνεχίζει την πορεία του. Να υπολογιστεί το ύψος στο οποίο παύουν να λειτουργούν οι πύραυλοι. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_Γ= 6400\ km$ και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_o=10 m/s^2$.

3.106 Η κίνηση του οχήματος μέχρι το ύψος h στο οποίο αποκτάει την ταχύτητα διαφυγής είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

$$\upsilon_\delta = at \quad \text{και} \quad h=\frac{1}{2}at^2 \quad \text{άρα} \quad h=\frac{\upsilon_\delta^2}{2\alpha} \quad (1)$$

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_Γ}{R_Γ+h}} = \sqrt{\frac{2g_o R_Γ^2}{R_Γ+h}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) έχουμε $h=\dfrac{g_o R_Γ^2}{a(R_Γ+h)}$ ή

$$h^2+64\times10^5 h-128\times10^{11}=0 \quad \text{από όπου βρίσκουμε} \quad h=1{,}6\times10^6 m$$

Θα μπορούσαμε να φτάσουμε στη σχέση (1), εργαζόμενοι με ΘΜΚΕ και όχι με εξισώσεις ΕΟΜΚ. (ΑΔΜΕ όχι!) Ας το δούμε !

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{ΣF} \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = ΣF.h \rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = ma\,.h \rightarrow h=\frac{\upsilon^2}{2\alpha}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Θα βρισκόμασταν μπροστά σε αδιέξοδο, αν στο ΘΜΚΕ γράφαμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F\ \pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\upsilon} + W_{F\ \pi\rho o\omega\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \pi\upsilon\rho\alpha\acute{\upsilon}\lambda o\upsilon}\ ,$$

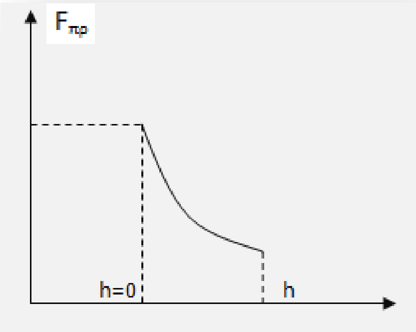
διότι ναι μεν για το έργο της δύναμης του πεδίου έχουμε εξίσωση υπολογισμού , αλλά πώς θα υπολογίζαμε το έργο της προωστικής δύναμης του πυραύλου;

Για δείτε σε μια τυχαία θέση της διαδρομής τι έχουμε:

$$\overrightarrow{ΣF} = \vec{F}\pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\upsilon + \vec{F}\pi\rho o\omega\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta} \rightarrow m.a = -G\frac{M_{ΓH}.m}{r^2} + F\pi\rho o\omega\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta} \rightarrow$$

$F\pi\rho o\omega\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta} = \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}\ \delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta,\ \varepsilon\xi\alpha\rho\tau\acute{\omega}\mu\varepsilon\nu\eta\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau o\ r\ !$

Ποιοτικό διάγραμμα της προωστικής δύναμης. Το έργο της δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα...



3.107 Θέλουμε να στείλουμε στο Διάστημα ένα σώμα μάζας m=200 kg. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε πύραυλο που εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης, κατακόρυφα προς τα πάνω. Ο πύραυλος ξεκινάει με ταχύτητα μηδέν. Θεωρούμε ότι το σώμα δέχεται από τον πύραυλο σταθερή προωστική δύναμη F=4000 N και ότι τα καύσιμα του πυραύλου διαρκούν μέχρι να φτάσει σε ύψος 0,6 $R_Γ$ από την επιφάνεια της Γης.
Να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο το σώμα θα έχει αποκτήσει την απαραίτητη ταχύτητα για να διαφύγει στο Διάστημα και την ταχύτητα που θα έχει το σώμα όταν βγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης.
Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_Γ$ = 6400 km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης g_o=10m/s^2.

3.107 Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του σώματος από την επιφάνεια της Γης (σημείο Γ) μέχρι το σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος x και στο οποίο το σώμα αποκτάει την ταχύτητα διαφυγής.

$$W_F + W_w = \Delta K \quad \text{επομένως} \quad Fx + (V_Γ - V_Α)m = \frac{1}{2}m\upsilon_δ^2 \quad \text{ή}$$

Μόνο ΘΜΚΕ εδώ, διότι η F δεν είναι συντηρητική !

$$Fx + \left(-G\frac{M_Γ}{R_Γ} + G\frac{M_Γ}{R_Γ + x}\right)m = \frac{1}{2}m\frac{2GM_Γ}{R_Γ + x} \quad \text{ή}$$

$$Fx + \left(-\frac{g_o R_Γ^2}{R_Γ} + \frac{g_o R_Γ^2}{R_Γ + x}\right)m = m\frac{g_o R_Γ^2}{R_Γ + x} \quad \text{ή} \quad Fx - g_o R_Γ m = 0$$

$$\text{άρα} \quad x = \frac{g_o R_Γ m}{F} = 3{,}2\times10^6\, m$$

β) Από το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του σώματος από την επιφάνεια της Γης μέχρι το άπειρο, βρίσκουμε

$$W_F + W_w = \Delta K \quad \text{επομένως} \quad Fh + V_Γ m = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \text{ή}$$

$$\text{ή} \quad Fh - \frac{g_o R_Γ^2}{R_Γ}m = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

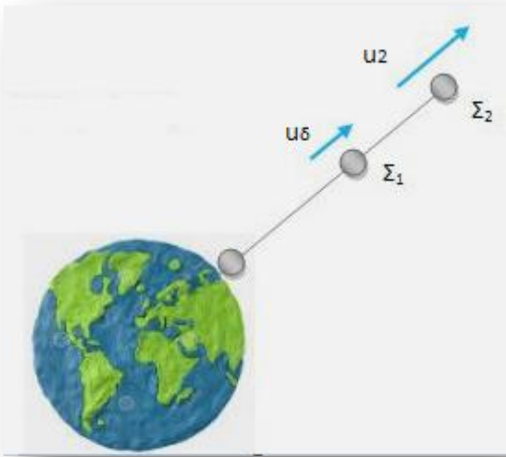
Και στο β) ερώτημα θα εργαστούμε μόνο με ΘΜΚΕ.

$$\text{άρα} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2(Fh - g_o R_Γ m)}{m}} = 5{,}06\times10^3\, m/s$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : *Ο πύραυλος αποκτά ταχύτητα διαφυγής στη θέση Σ1, σε ύψος x= 3200 km. Όμως ο πύραυλος συνεχίζει να επιταχύνεται μέχρι τη θέση Σ2, η οποία βρίσκεται σε ύψος h=0,6 $R_{ΓΗ}$ = 3840 km.*

Επομένως ΑΔΜΕ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για μετάβαση του πυραύλου από θέση Σ1 μέχρι το άπειρο!

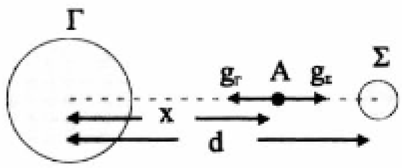
Είναι ιδιαίτερα σπουδαία η επιλογή να δουλέψουμε με ΘΜΚΕ από επιφάνεια της Γης μέχρι το άπειρο.



3.108 Ο λόγος των μαζών της Γης και της Σελήνης είναι $M_Γ/M_Σ = 81$ και η απόσταση των κέντρων τους είναι $d = 60\,R_Γ$. Να βρεθεί σε ποιο σημείο της ευθείας που ενώνει τα κέντρα Γης και Σελήνης η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι μηδενική.Δίνεται η ακτίνα της Γης $R_Γ$. Αγνοήστε οποιαδήποτε άλλη βαρυτική επίδραση εκτός από αυτές της Γης και της Σελήνης.

Το σημείο που ψάχνουμε να βρούμε, δεν μπορεί να είναι εκτός της ευθείας που περνά από τα κέντρα των σφαιρικών μαζών, διότι εκτός της εν λόγω ευθείας τα διανύσματα της έντασης σχηματίζουν γωνία μικρότερη από 180^o, οπότε είναι αδύνατο να δώσουν άθροισμα μηδέν.
Επίσης εκατέρωθεν των μαζών και επί της ευθείας, τα διανύσματα είναι ομόρροπα… Άρα ψάχνουμε ένα σημείο ανάμεσα στις μάζες!

Έστω ότι η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι μηδέν στο σημείο Α που απέχει από το κέντρο της Γης απόσταση x. Στο σημείο αυτό:



Σχ. 3.20

$g_Γ = g_Σ$ επομένως

$$G\frac{M_Γ}{x^2} = G\frac{M_Σ}{(d-x)^2} \quad ή$$

$$\frac{x}{d-x} = \pm\sqrt{\frac{M_Γ}{M_Σ}} = \pm 9$$

Από $\frac{x}{d-x} = 9$ ή $\frac{x}{60R_Γ - x} = 9$ έχουμε $x = 54R_Γ$

Από $\frac{x}{d-x} = -9$ ή $\frac{x}{60R_Γ - x} = -9$ έχουμε $x = 67{,}5R_Γ$. Η λύση αυτή απορρίπτεται γιατί το σημείο αυτό βρίσκεται πέρα από τη Σελήνη και στα σημεία αυτά οι εντάσεις που οφείλονται στη Γη και τη Σελήνη είναι ομόρροπες.

► Τι θα συμβεί αν στο σημείο Α, τοποθετηθεί μια μάζα;
Απαντάμε, θα δεχτεί συνισταμένη δύναμη μηδέν, οπότε η μάζα θα παραμείνει εκεί αιωρούμενη!

► Με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να βληθεί ένα σώμα από τη Γη για να φτάσει στη Σελήνη ;
*Απαντάμε, αρκεί να φτάσει –**μόλις**- στο 'νεκρό σημείο' Α…*

► Ένα σώμα m είναι στο σημείο Α. Ποια η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να του δοθεί, ώστε να πάει στο άπειρο χωρίς ταχύτητα εκεί ;

Η ΑΔΕ είναι η καλύτερη επιλογή μας. Δουλεύει και το ΘΜΚΕ και η ΑΔΜΕ.

$$U_{Γη,Σελ} + U_{Γη,\,m} + U_{Σελ\,,\,m} + W_{προσφέρω} = U_{Γη,Σελ} \rightarrow W_{προσφέρω} = G\frac{m\,.\,M_{Γη}}{χ} + G\frac{m\,.\,M_{Σελ}}{d-x} \rightarrow k.o.k$$

3.109 Διαστημικό όχημα ξεκινά από την επιφάνεια της Γης και κινείται κατακόρυφα. Η προωστική δύναμη των πυραύλων του είναι σε κάθε θέση, για όλη τη διάρκεια της κίνησης, διπλάσια κατά μέτρο και αντίθετης φοράς με το βάρος του. Υπολογίστε την ταχύτητα του όταν φτάσει σε ύψος $h = R_Γ$.
Δίνονται: $R_Γ = 6400$ km, $g_o=10m/s^2$.

3.109 Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του οχήματος από την επιφάνεια της Γης (σημείο Γ) μέχρι το ύψος h (σημείο Α).

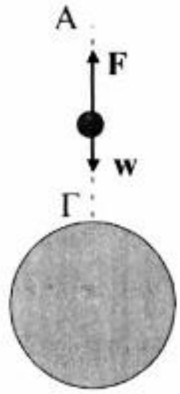
$W_F + W_w = \Delta K$ (1)

Όμως $W_F = -2W_w$, επομένως η (1) γίνεται $-W_w = \Delta K$ ή

$$-(V_Γ - V_Α)m = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad ή$$

$$G\frac{M_Γ}{R_Γ} - G\frac{M_Γ}{R_Γ + h} = \frac{1}{2}\upsilon^2 \quad ή$$

$$\frac{g_oR_Γ^2}{R_Γ} - \frac{g_oR_Γ^2}{2R_Γ} = \frac{1}{2}\upsilon^2 \quad \text{από όπου} \quad \upsilon = \sqrt{g_oR_Γ} = 8\times10^3 m/s$$



Σχ. 3.21

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Νομίζω ότι η λύση της άσκησης προϋποθέτει την κατανόηση και χρήση της σχέσης $W_F = -2W_W$. Το έργο του βάρους $W_w = m\,.(V_Γ - V_A)$ είναι αρνητικό, οπότε επιβάλλεται να βάλλουμε το πρόσημο (-) μπροστά του για να εκφράσουμε το θετικό αλγεβρικό πρόσημο του έργου της F, μιας και αυτή η δύναμη ως ομόρροπη με τη πορεία της διαδρομής, το δικαιούται.

Να δώσω ένα αριθμητικό παράδειγμα :

$W_w = -30\ joule$. *Το έργο της F θα είναι* $W_F = -2.W_w = -2\,.(-30) = 60\ joule$

Συνέχεια …

3.110 Ένας δορυφόρος με μάζα m=100 kg περιστρέφεται, αρχικά σε ύψος $R_Γ$ πάνω από την επιφάνεια της Γης. Μετά από ορισμένο χρόνο, χάνοντας σιγά – σιγά ύψος, λόγω της αραιής ατμόσφαιρας, περιστρέφεται σε ύψος 7 $R_Γ$/9.

α) Να υπολογιστεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του δορυφόρου.

β) Αν η αραιή ατμόσφαιρα δημιουργεί στην περιοχή της περιστροφής αντίσταση A = 0,2N, να υπολογιστεί το συνολικό μήκος της ελικοειδούς τροχιάς που διέγραψε ο δορυφόρος για να φτάσει από την αρχική στην τελική τροχιά.

Δίνονται: $R_Γ$ = 6400 km, g_o=10m/s^2.

3.110 α) Κατά την κυκλική κίνηση του δορυφόρου η δύναμη της βαρύτητας λειτουργεί ως κεντρομόλος $G\dfrac{M_Γ m}{(R_Γ+h)^2}=m\dfrac{υ^2}{R_Γ+h}$

επομένως η ταχύτητα του δορυφόρου είναι $υ=\sqrt{\dfrac{GM_Γ}{R_Γ+h}}$ (1)

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του δορυφόρου κατά την αλλαγή της τροχιάς του είναι

$$ΔK=\frac{1}{2}mυ_2^2-\frac{1}{2}mυ_1^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{GM_Γ}{16R_Γ/9}-\frac{GM_Γ}{2R_Γ}\right) \quad ή$$

$$ΔK=\frac{1}{2}m\left(\frac{9g_oR_Γ^2}{16R_Γ}-\frac{g_oR_Γ^2}{2R_Γ}\right)=\frac{1}{32}mg_oR_Γ=2\times10^8 J$$

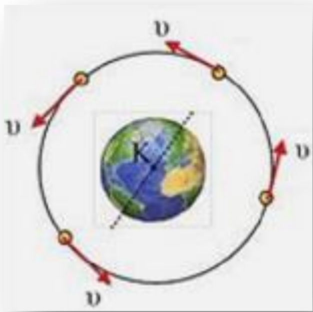
$$W_w=(V_2-V_1)m=\left(-\frac{GM_Γ}{16R_Γ/9}+\frac{GM_Γ}{2R_Γ}\right)m=4\times10^8 J \qquad (2)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου - ενέργειας κατά την κίνηση του δορυφόρου από την αρχική στην τελική τροχιά

$$W_w-W_A=ΔK \quad ή \quad W_w-As=ΔK \quad άρα \quad s=10^9 m$$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: *Το βάρος του δορυφόρου είναι κάθετο στη τροχιά, οπότε δεν υπάρχει έργο βάρους για όσο χρόνο η κυκλική τροχιά έχει ακτίνα σταθερή. Όταν όμως η κυκλική τροχιά μειώνει την ακτίνα έχουμε έργο βάρους, το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια του δυναμικού { Δες σχέση (2) }.*

Να θυμίσω κάτι από τους δορυφόρους…



- *Κέντρο δορυφορικής κυκλικής τροχιάς είναι το κέντρο της Γης.*
- *Ισχύει η θεωρία της ομαλής κυκλικής κίνησης (περίοδος, συχνότητα, γωνιακή και γραμμική ταχύτητα, κεντρομόλος επιτάχυνση και δύναμη.*
- *Η ταχύτητα κίνησης του δορυφόρου προκύπτει από την χρήση της κεντρομόλου δύναμης { Δες σχέση (1) }.*

3.111 Διαστημικό όχημα με μάζα $M = 8ton$ που μεταφέρει σεληνάκατο μάζας $m = 1{,}5ton$, σε τροχιά γύρω από τη Σελήνη σε ύψος $h = R/20$ από την επιφάνειά της (R : η ακτίνα της Σελήνης). Κατά τη διάρκεια της περιστροφής κάποια στιγμή το διαστημικό όχημα ελευθερώνει τη σεληνάκατο με τέτοιο τρόπο ώστε η ταχύτητα της να είναι μηδέν. Η σεληνάκατος αρχίζει τότε να κατεβαίνει προς τη Σελήνη εκτελώντας ευθύγραμμη κίνηση και φτάνει στην επιφάνειά της με την κατάλληλη χρήση των ανασχετικών πυραύλων έχοντας ταχύτητα μηδέν.

α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος αμέσως μετά την αποβολή της σεληνακάτου.

β) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης των ανασχετικών πυραύλων.

Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης $g_o = 1{,}6 m/s^2$ και η ακτίνα της Σελήνης $R_\Gamma = 1680\ km$. Αγνοήστε την επίδραση άλλων σωμάτων, πλην της Σελήνης.

3.111 α) Κατή την περιφορά του διαστημικού οχήματος γύρω από τη Σελήνη η δύναμη της βαρύτητας λειτουργεί ως κεντρομόλος

$$G\frac{M_\Sigma(M+m)}{(R+h)^2} = (M+m)\frac{\upsilon^2}{R+h}$$

επομένως η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος και της σεληνακάτου είναι

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Sigma}{R+h}} = \sqrt{\frac{20g_oR^2}{21R}} = \sqrt{\frac{20g_oR}{21}} \quad (1)$$

Κατά την απελευθέρωση της σεληνακάτου η ορμή του συστήματος όχημα –σεληνάκατος διατηρείται:

$\mathbf{p}_{\Pi PIN} = \mathbf{p}_{META}$ επομένως $(M+m)\upsilon = Mv$ όπου v η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος αμέσως μετά την απελευθέρωση της σεληνακάτου.

ΑΔΟ σημαίνει γνώση ταχυτήτων...

Λαμβάνοντας υπόψη και την (1) έχουμε $v = \dfrac{M+m}{M}\sqrt{\dfrac{20g_oR}{21}} = 1900 m/s$

β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας από το σημείο στο οποίο ελευθερώθηκε η σεληνάκατος (σημείο Α) μέχρι την επιφάνεια της Σελήνης (σημείο Σ) :

$$W_F + W_w = \Delta K$$

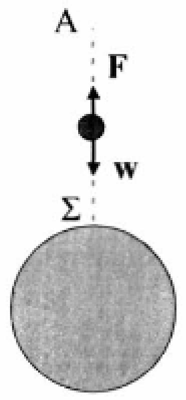
επομένως $W_F + (V_A - V_\Sigma)m = 0$ ή

$$W_F + \left(-G\frac{M_\Sigma}{R+h} + G\frac{M_\Sigma}{R_\Sigma}\right)m = 0 \quad ή$$

Εφόσον υπάρχει έργο μη συντηρητικής δύναμης, είμαστε υποχρεωμένοι να εργαστούμε με ΘΜΚΕ.

$$W_F + \left(-\frac{20g_oR^2}{21R} + \frac{g_oR^2}{R}\right)m = 0$$

άρα $W_F = -\dfrac{g_oR}{21}m = -192\times10^6 J$



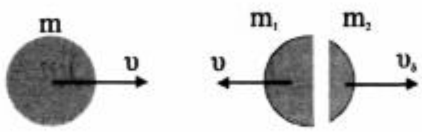
Σχ. 3.22

3.112 Ένας δορυφόρος με μάζα m κινείται κυκλικά γύρω από τη Γη με ταχύτητα υ. Εσωτερική διάταξη προκαλεί έκρηξη με αποτέλεσμα ο δορυφόρος να χωριστεί σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα, μάζας m_1, συνεχίζει να κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά που είχε ο δορυφόρος πριν την έκρηξη ενώ το άλλο, μάζας m_2, αποκτά την απαραίτητη ταχύτητα για να διαφύγει από την έλξη της Γης. Υπολογίστε τις μάζες m_1 και m_2 στις οποίες χωρίστηκε ο δορυφόρος.

Τα γεγονότα συμβαίνουν σε κάποιο ύψος h. Σε αυτό το ύψος υπολογίζεται η δορυφορική ταχύτητα περιφοράς με την πάγια σκέψη «Η βαρυτική δύναμη παίζει ρόλο κεντρομόλου»… Η δορυφορική ταχύτητα σε κάποιο ύψος h είναι ανεξάρτητη της μάζας του δορυφόρου.

Η ΑΔΟ επιβάλλει ‘γνώση’ για τις ταχύτητες πριν και μετά την διάσπαση. Το σχήμα 3.23 φυσικά βοηθάει!

3.112 Κατά την κυκλική κίνηση ενός δορυφόρου η δύναμη της βαρύτητας λειτουργεί ως κεντρομόλος



Σχ. 3.23

$$G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma+h)^2}=m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma+h}$$

επομένως η ταχύτητα ενός δορυφόρου είναι $\upsilon=\sqrt{\dfrac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}$

Η ταχύτητα διαφυγής στο ύψος h είναι : $\upsilon_\delta=\sqrt{\dfrac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}=\upsilon\sqrt{2}$

Κατά την έκρηξη, η ορμή διατηρείται: $\mathbf{p}_{\text{ΑΜΕΣΩΣ ΠΡΙΝ}}=\mathbf{p}_{\text{ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΤΑ}}$

Επομένως $m\upsilon=-m_1\upsilon+m_2\upsilon_\delta$ ή $m\upsilon=-m_1\upsilon+m_2\sqrt{2}\upsilon$ ή

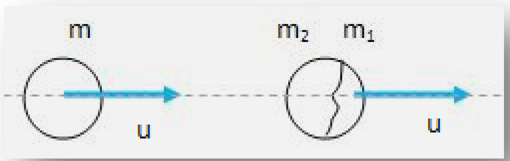
$m=-m_1+m_2\sqrt{2}$ (1)

Όμως $m=m_1+m_2$ (2)

Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε

$m_1=m(3-2\sqrt{2})$ και $m_2=2m(\sqrt{2}-1)$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ : *Αν υποθέσουμε ότι το κομμάτι μάζας m1, το οποίο συνεχίζει να είναι δορυφόρος στο ίδιο ύψος, έχει φορά περιστροφής ίδια με αυτή της μάζας m, θα δείξουμε ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί…*



$m.\vec{u}=m_1\vec{u}+m_2\overrightarrow{u_\delta}\ \rightarrow\ (m-m_1).\vec{u}=m_2\overrightarrow{u_\delta}\ \rightarrow (m-m_1)u=m_2.u\sqrt{2}\ \rightarrow m-m_1=m_2\sqrt{2}$ *(1)*

Όμως $m=m_1+m_2\ \rightarrow\ m-m_1=m_2$ *(2)*

Από τις εξισώσεις (1) και (2) : $\sqrt{2}=1$ *απορρίπεται.*

3.113 Δύο σφαιρικοί πλανήτες έχουν, ο πρώτος ακτίνα $R_1 = 1334 x 10^3$ m και μάζα $m_1 = 1209 x 10^{19} kg$ και ο δεύτερος μάζα $m_2 = 4m_1$. Οι πλανήτες περιστρέφονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους, εκτελώντας κυκλικές κινήσεις χωρίς την επίδραση άλλων δυνάμεων εκτός από τη μεταξύ τους έλξη. Η απόσταση ανάμεσα στα κέντρα τους είναι $l = 40R_1$.

Δίνεται $G = 6,673 x 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

α) Να υπολογιστούν οι ακτίνες περιστροφής τους.

β) Να υπολογιστεί η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να βληθεί ένα βλήμα από την επιφάνεια του πρώτου πλανήτη ώστε να φτάσει στο δεύτερο.

Σημείωση: Θα θεωρήσετε ότι οι πλανήτες δεν περιστρέφονται γύρω από τον άξονά τους και ότι δεν έχουν ατμόσφαιρα.

Κέντρο μάζας… Ένα σημείο που αφορά ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων. Μπορεί να ανήκει στο σώμα ή μπορεί να είναι εκτός αυτού. π.χ

Το κέντρο μάζας μια ομογενούς και ισοπαχούς ευθείας ράβδου, είναι στο μέσο αυτής. Το κέντρο μάζας μιας συμπαγούς ομογενούς σφαίρας είναι στο κέντρο της σφαίρας, …

Το κέντρο μάζας μιας κυκλικής στεφάνης είναι στο γεωμετρικό κέντρο, ενός μπαστουνιού είναι έξω από το μπαστούνι, …

- *Γενικά, το κ.μ. σε **ομογενή** σώματα βρίσκεται στο κέντρο συμμετρίας (αν υπάρχει) ή σε κάποιο επίπεδο συμμετρίας.*
- *Όταν σε ένα σύστημα σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε το κέντρο μάζας ισορροπεί (είναι ακίνητο ή κινείται με ΕΟΚ)*.

3.113 α) Οι πλανήτες περιστρέφονται περί το κέντρο μάζας τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

Μεταξύ των πλανητών ασκείται δύναμη $F = G\dfrac{m_1 m_2}{l^2}$. Η δύναμη αυτή λειτουργεί ως κεντρομόλος σε κάθε πλανήτη. Επομένως για τον πλανήτη μάζας m_1 ισχύει :

$$G\frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{r_1} \quad \text{ή} \quad G\frac{m_2}{l^2} = \frac{\omega^2 r_1^2}{r_1} \quad \text{ή} \quad G\frac{m_2}{l^2} = \omega^2 r_1 \quad (1)$$

και για τον πλανήτη μάζας m_2: $G\dfrac{m_1}{l^2} = \omega^2 r_2 \quad (2)$

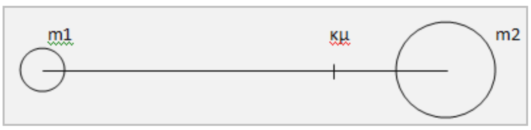
Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{r_1}{r_2}$ ή $\dfrac{r_1}{r_2} = 4 \quad (3)$

$r_1 + r_2 = l \quad (4)$

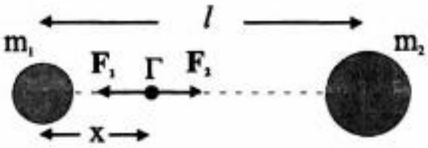
Από το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) βρίσκουμε :

$r_1 = 42,69 \times 10^6 m$ και $r_2 = 10,67 \times 10^6 m$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Οι μάζες βλέπουν η μια την άλλη και ταυτόχρονα βλέπουν το ακίνητο κμ, το οποίο –για λόγους συμμετρίας- βρίσκεται στη διάκεντρο. Επομένως οι μάζες είναι κάθε στιγμή απέναντι ! Αυτό σημαίνει ότι έχουν ίδιες τιμές στα T, f, ω.



β) Το βλήμα αρκεί να φτάσει μέχρι το σημείο Γ στο οποίο οι ελκτικές δυνάμεις που δέχεται από τους δύο πλανήτες είναι αντίθετες.



Σχ. 3.24

$$G\frac{m_1 m}{x^2} = G\frac{m_2 m}{(l-x)^2} \quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{l-x}{x}\right)^2 = 4 \qquad \text{άρα} \qquad x = \frac{l}{3} = \frac{40R_1}{3}$$

Αν Α το σημείο εκτόξευσης στην επιφάνεια του πρώτου πλανήτη

$$V_A = -G\frac{m_1}{R_1} - G\frac{m_2}{39R_1} = -\frac{43}{39}\frac{Gm_1}{R_1} \quad (5)$$

$$V_\Gamma = -G\frac{m_1}{40R_1/3} - G\frac{m_2}{40R_1 - 40R_1/3} = -\frac{18}{80}\frac{Gm_1}{R_1} \quad (6)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου - ενέργειας για την κίνηση του βλήματος από το σημείο Α ως το σημείο Γ έχουμε:

$$W_w = \Delta K \quad \text{επομένως} \quad (V_A - V_\Gamma)m = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Αντικαθιστώντας τα δυναμικά από τις σχέσεις (5) και (6) βρίσκουμε $\upsilon = 1025{,}8 m/s$

Δοκιμάστε και με ΑΔΜΕ…

ΣΗΜΕΙΩΜΑ : Αυτή εδώ η άσκηση ήταν και συνεχίζει να είναι ιδιαίτερα δύσκολη και χρειάζεται αρκετή δουλειά για να μπορέσει ένας μαθητής της Β λυκείου να λύσει άσκηση «διπλού συστήματος αστέρων». Απλά την έβαλα εδώ 'τιμής ένεκεν'…

Πάντως είναι μια διδακτική άσκηση, αφού επιτρέπει να κατανοήσουμε γιατί –ως παράδειγμα- η γη κινείται γύρω από τον ήλιο και όχι ο ήλιος γύρω από τη γη. Επίσης γιατί ένα αστέρι που έχει μια έστω ανεπαίσθητη κυκλική κίνηση μας δίνει τη δυνατότητα να ανιχνεύσουμε πλανήτες (αόρατοι αυτοί) που γυρίζουν γύρω από αυτό το αστέρι…

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)