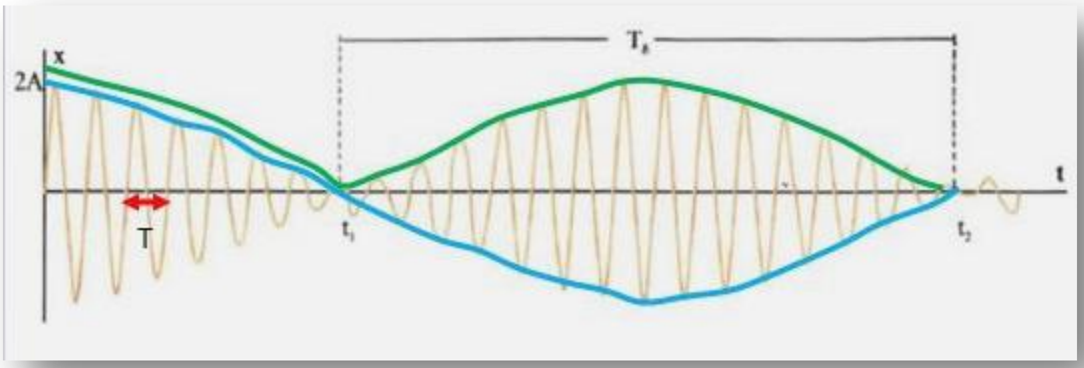
Να γίνει σύνθεση των ταλαντώσεων $x_1 = A \cdot \eta\mu\omega_1 \cdot t$ και $x_2 = A \cdot \eta\mu\omega_2 \cdot t$, αν αυτές έχουν ίδια διεύθυνση ταλάντωσης και γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο.

Αρχή επαλληλίας

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = A(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) \Rightarrow x = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\,\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \eta\mu\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \;\cdot \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = A_t^{'} \cdot \eta\mu\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \qquad (1)$$

Η κίνηση που περιγράφει η (1) είναι ***πολύπλοκη***. Όμως εμείς θα δείξουμε ενδιαφέρον για την περίπτωση που οι γωνιακές συχνότητες διαφέρουν λίγο σε σχέση με το μέγεθος της τιμής των.



Το αποτέλεσμα της σύνθεσης –όπως την ορίσαμε- εμφανίζεται στο σχήμα.

1. Η κοκκινωπή συνεχής γραμμή εκφράζει την χρονοεξέλιξη του μεγέθους απομάκρυνση x.

2. Η σύνθετη ταλάντωση εμφανίζει μια περιοδικότητα T, που αφορά τα περάσματα της ταλαντούμενης μάζας από τη θέση ισορροπίας προς την ίδια κατεύθυνση ή αν θέλετε κάθε πότε επανέρχεται σε άνω ακραία θέση ή κάθε πότε επανέρχεται σε κάτω ακραία θέση.
Η κίνηση είναι περιοδική (όχι αρμονική, αφού δεν έχουμε σταθερό πλάτος ταλάντωσης) με περίοδο T «κρυμμένη» στο Ω του **ημ** !

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\frac{2\pi}{T_1} + \frac{2\pi}{T_2}}{2} \rightarrow \frac{2}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \rightarrow \text{όμως } T_1 \approx T_2 \rightarrow T \approx T_1 \approx T_2$$

3. Η μπλε γραμμή εκφράζει τη συνάρτηση $A_t^{'} = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\,\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$, η οποία είναι ημιτονική με περίοδο T' «κρυμμένη» στο $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, αν $\omega_1 > \omega_2$. Αρκετά εύκολα αποδεικνύεται ότι T'>>T!

Ας το δούμε… Εξ αρχής ορίσαμε ότι οι γωνιακές συχνότητες διαφέρουν λίγο σε σχέση με το μέγεθος της τιμής των και αυτό σημαίνει…

$\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1$ ή $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1$ ή $\boxed{\omega_1 - \omega_2 \ll \Omega\ !!!}$

Συνεχίζοντας…

$$\omega_1 - \omega_2 \ll \Omega \rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \Omega \rightarrow \Omega' \ll \Omega \rightarrow \frac{2\pi}{T'} \ll \frac{2\pi}{T} \rightarrow T' \gg T$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στο σχήμα η περίοδος της $A_t' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ μπορεί να εμφανιστεί μόνο κατά τα 3/4.

4. Η (1) ***δεν*** περιγράφει α.α.τ. διότι $A_t' \neq \sigma\tau\alpha\theta$. (αλλάζει αργά). Η μορφή της (1) σε συνδυασμό με την αργή μεταβολή του A_t' μας παραπέμπει στο να θεωρήσουμε την συνάρτηση A_t' να παίζει ρόλο πλάτους. Η συνάρτηση A_t' «χορεύει» αρμονικά μεταξύ +2Α και -2Α.

Όμως το πλάτος είναι πάντα θετικό , άρα :

$$\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma = \left|A_t'\right|$$, «χορεύει» μεταξύ του 0 και +2Α.

Η πράσινη γραμμή στο σχήμα, δείχνει την περιοδική μεταβολή του πλάτους.

5. Αυτή η αλλαγή του πλάτους μεταξύ του 0 και 2Α δηλ. η περιοδική αυξομείωση του πλάτους ονομάζεται στη βιβλιογραφία δ ι α κ ρ ό τ η μ α .

6. Εύρεση περιόδου T_δ σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο. (T_δ= χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους).

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} t = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Δίνοντας δυο διαδοχικές τιμές στο ακέραιο k έχουμε :

$k = 0 \rightarrow t_o = \dfrac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$ και $k = 1 \rightarrow t_1 = \dfrac{3\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$

Έτσι εύκολα προκύπτει ότι :

$$\Delta t = T_\delta = \cdots \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$

Βάλαμε απόλυτη τιμή διότι ενδέχεται να είναι $\omega_1 > \omega_2$ ή $\omega_2 > \omega_1$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ: Είναι ολοφάνερο από το σχήμα, ότι $T_\delta = T'/2$ οπότε θα μπορούσαμε και από εδώ να βρούμε τη περίοδο του διακροτήματος.

Παρατηρήσεις που απαιτούν προσοχή

1. Αν ζητηθεί η περίοδος και η συχνότητα της συνισταμένης κίνησης , τότε απαντάμε : $T \cong T_1 \cong T_2$
T= όπως την έχουμε ορίσει πιο πάνω…

2. Αν ζητηθεί η συχνότητα αυξομείωσης του πλάτους ή συχνότητα του διακροτήματος, τότε απαντάμε : $f_\delta = |f_1 - f_2|$

3. …Ακούγονται π.χ. τρία (3) μέγιστα του ήχου σε κάθε sec. Τότε λέμε :
$f_\delta = 3\,\text{Hz}$

Θυμηθείτε τη σχέση $f = \dfrac{N}{t}$

4. Για να έχουμε διακρότημα πρέπει να συμβαίνουν δυο πράγματα :
$f_1 \cong f_2$ και επιπλέον $|f_1 - f_2| << f_1 , f_2$

5. Αν ζητηθεί το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης κάποια στιγμή t, τότε υπολογίστε τη τιμή της συνάρτησης $A_t' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ και στο τέλος αν υπάρξει (-), «εξαφανίστε το»

6. Αν ζητηθεί η τιμή της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης, τότε «φορτώστε» τη τιμή του χρόνου t στην εξίσωση :

$$x = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \eta\mu \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Αν τυχόν η $A_t' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ εμφανίσει (-) τότε «αφήστε το», διότι η απομάκρυνση έχει και αρνητικές τιμές.

Ερωτήσεις

1. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους γύρω από το ίδιο σημείο, στην ίδια διεύθυνση και με συχνότητες που διαφέρουν μεταξύ τους κατά 0,1 Hz. Μπορούμε να πούμε ότι στη σύνθετη κίνηση του σώματος έχουμε διακρότημα ;

Εξαρτάται αν ικανοποιείται ή όχι η συνθήκη : $|f_1 - f_2| << f_1 , f_2$

2. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από το ίδιο σημείο με ίδιο πλάτος και με συχνότητες f_1 και f_2 που διαφέρουν κατά 1 Hz. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις μπορούμε να πούμε ότι στη σύνθετη κίνηση του σώματος έχουμε διακρότημα ;

I. Οι δυο ταλαντώσεις γίνονται στην ίδια διεύθυνση και έχουν $f_1 = 1\,Hz$ και $f_2 = 2\,\text{Hz}$.

II. ***Οι δυο ταλαντώσεις γίνονται στην ίδια διεύθυνση και έχουν*** $f_1 = 2000\,Hz$ ***και*** $f_2 = 2001\,\text{Hz}$. **(Σ)**

III. Οι δυο ταλαντώσεις γίνονται κάθετες διευθύνσεις και έχουν $f_1 = 1000\,Hz$ και $f_2 = 999\,\text{Hz}$.

IV. ***Οι δυο ταλαντώσεις γίνονται στη ίδια διεύθυνση και η περίοδος της μιας από αυτές είναι*** 10^{-3} ***sec***. **(Σ)**

IV. Αφού η περίοδος της μιας είναι 10^{-3} sec σημαίνει ότι έχει συχνότητα f=1000 Hz. Όμως σύμφωνα με το σενάριο, οι δυο συνιστώσες ταλαντώσεις διαφέρουν 1 Hz και έτσι πρέπει η συχνότητα της άλλης συνιστώσας να είναι 999 Hz ή 1001 Hz. Μια χαρά για να έχουμε διακρότημα.

3. Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις $x_1 = 5 \cdot \eta\mu 502\pi t$ και $x_2 = 5 \cdot \eta\mu 500\pi t$, της ίδιας διεύθυνσης και γύρω από το ίδιο σημείο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ;

I. Η ***συχνότητα της σύνθετης περιοδικής κίνησης είναι f=250,5 Hz*** **(Σ)**

II. Η συχνότητα του διακροτήματος είναι f_δ=250,5 Hz

III. ***Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της σύνθετης κίνησης είναι Δt=1 sec*** **(Σ)**

IV. ***Στον χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών μέγιστων του πλάτους της σύνθετης κίνησης το σώμα εκτελεί περίπου 250 ταλαντώσεις***. **(Σ)**

4. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις με εξισώσεις $x_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi f_1 t$ και $x_2 = A\eta\mu 2\pi f_2 t$. Οι ταλαντώσεις έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια θέση ισορροπίας και συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές ;

I. ***Το σώμα εκτελεί μια περιοδική κίνηση, η οποία όμως δεν είναι απλή αρμονική ταλάντωση***. **(Σ)**

II. Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο. (Λ)

III. ***Η μέγιστη τιμή του πλάτους της συνισταμένης κίνησης είναι 2Α***. **(Σ)**

V. ***Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης κίνησης είναι σταθερός***. **(Σ)**

IV. ***Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της συνισταμένης κίνησης εξαρτάται από τη διαφορά*** f_1-f_2 ***και αυξάνεται όταν η διαφορά αυτή μικραίνει***. **(Σ)**

Συνέχεια…

Ασκήσεις

1. Από δυο διαφορετικές μουσικές πηγές παράγονται δυο απλοί ήχοι με συχνότητες $f_1 = 2000\,Hz$ και $f_2 = 1998\,\mathrm{Hz}$. Το αυτί ενός ανθρώπου αντιλαμβάνεται ένα ήχο ο οποίος άλλοτε αποκτά μέγιστη ένταση και άλλοτε «σβήνει». Να βρείτε το ελάχιστο χρονικό διάστημα μεταξύ ενός μηδενισμού της έντασης του ήχου και μιας μεγιστοποίησης αυτού.

Σχήμα σχολικού βιβλίου : $\Delta t = \dfrac{T_\delta}{2} = \dfrac{1}{2|f_1 - f_2|} = 0{,}25\ \mathrm{Hz}$

2. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους, γύρω από το ίδιο σημείο, στην ίδια διεύθυνση και συχνότητες που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους. Αν η διαφορά των συχνοτήτων είναι 0,5 Hz και είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με τις ίδιες τις συχνότητες, να βρείτε την περίοδο T_δ του διακροτήματος που προκύπτει.

Προφανώς έχουμε αναφορά για μια πολύπλοκη χρονικά περιοδική ταλάντωση που παρουσιάζει διακροτήματα...

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{1}{0{,}5} = 2\ \sec$$

3. Οι ήχοι που παράγονται από δυο διαπασών έχουν την ίδια ένταση και συχνότητες $f_1 = 7000\,Hz$ και $f_2 = 7060\,\mathrm{Hz}$
   I. Ο ήχος που φτάνει στα αυτιά μας είναι περιοδικός και, αν ναι, τι περίοδο έχει.
   II. Πόσος χρόνος περνάει μεταξύ δυο διαδοχικών μέγιστων του ήχου.
   III. Πόσες «παύσεις» έχουμε σε χρόνο t=10 sec.

Ίδια ένταση = Ίδια πλάτη

I. Το προϊόν της σύνθεσης είναι πολύπλοκη χρονικά περιοδική με :

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi(f_1 + f_2)}{2} \Rightarrow T = \frac{2}{f_1 + f_2} = \frac{2}{14060} = \frac{1}{7030}\ \sec$$

II. $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|} = \dfrac{1}{60}\ \sec$

III. $f_\delta = \dfrac{N}{t} \Rightarrow \dfrac{1}{T_\delta} = \dfrac{N}{t} \Rightarrow N = \dfrac{t}{T_\delta} = 600$

Ο αριθμός των παύσεων αν sec είναι η f_δ .

4. Οι ήχοι που παράγονται από δυο διαπασών έχουν την ίδια ένταση και οι συχνότητες είναι $f_1 = 10000\,Hz$ και $f_2 = 10010\,\mathrm{Hz}$ Αν τα διαπασών βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο, να βρείτε :
   I. Την περίοδο του ήχου που ακούμε.
   II. Πόσα μέγιστα του ήχου ακούμε σε χρόνο t=2 sec.

Βρείτε $T = \dfrac{1}{10005}\ \sec$ *και N=20 μέγιστα .*

5. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα γύρω από το ίδιο σημείο δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, ίδιας διεύθυνσης, ίδιου πλάτους $A_1=A_2=10$ cm και με συχνότητες $f_1 = 200\,Hz$ και $f_2 = 202\,\text{Hz}$. Να βρείτε :

I. Τη συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης.
II. Την εξίσωση του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης.
III. Την περίοδο του διακροτήματος.

Βρείτε εύκολα ότι : *f=201 Hz* , $A = \left|A_{(t)}\right| = \frac{1}{5}\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\, 2\pi t\right|$ *και Τδ=0,5 sec.*

6. Δυο διπλανά πλήκτρα ενός πιάνου εκπέμπουν ήχους με την ίδια θεμελιώδη συχνότητα f=600 Hz. Να βρείτε πόση πρέπει να γίνει η συχνότητα του ενός, ώστε όταν δονούνται ταυτόχρονα, να ακούμε έξι (6) μέγιστα του ήχου σε κάθε δευτερόλεπτο.

$f_\delta = \left|f_1 - f_2\right| \Rightarrow f_\delta = \left|600 - f_2\right| \quad (1)$ Όμως $f_\delta = \frac{N}{t} = \frac{6}{1} = 6\ \text{Hz} \quad (2)$

Από τις (1), (2) έχουμε :

$$6 = \left|600 - f_2\right| \Rightarrow 600 - f_2 = \pm 6 \Rightarrow f_2 = 594\ \text{Hz}\ \text{ή}\ f_2 = 606\ \text{Hz}$$

7. Ένα διαπασών άγνωστης συχνότητας και ένα πρότυπο διαπασών συχνότητας f=404 Hz εκπέμπουν ταυτόχρονα ήχους και παρατηρούνται τρία (3) μέγιστα του ήχου σε κάθε δευτερόλεπτο. Να βρείτε τη συχνότητα του διαπασών αυτού.

$f_\delta = \left|f_1 - f_2\right| \to \cdots \to \frac{N}{t} = \left|f_1 - f_2\right| \Rightarrow 3 = \left|f_1 - 404\right|$ κ.ο.κ.

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)