Ασκήσεις στις φθίνουσες ταλαντώσεις όπου $\Sigma F_{αντ} = -b.u$

1. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ισχύει : $A_t = 32.e^{-\Lambda t}$, (cm, sec). Μετά από δυο περιόδους βρέθηκε ότι A_2=8cm. Ποια η τιμή του πλάτους ύστερα από μια περίοδο ;

Εδώ «μπλέξαμε» με A_o , A_1 , A_2 . Υπάρχει απλή σχέση για εργασία!

$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{32}{A_1} = \frac{A_1}{8} \Rightarrow A_1 = \sqrt{8\cdot 32}\ \text{cm} \Rightarrow \mathrm{A}_1 = \sqrt{8\cdot 8\cdot 4}\ \text{cm} \Rightarrow \mathrm{A}_1 = 16\,\text{cm}$$

2. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ισχύει : $A_{(t)} = A_o.e^{-4t}$. Αν σε χρόνο t=2T το πλάτος μειώνεται κατά 50%, βρείτε την περίοδο T.

*Μείωση κατά 50% του πλάτους σημαίνει ότι το πλάτος όταν t=2T, **είναι** το 50% του A_o*

δηλ. $A_{2T} = \frac{50}{100}\cdot A_o = \frac{A_o}{2}$

Έτσι : $$A_{(t)} = A_o\cdot e^{-4\cdot t} \Rightarrow \frac{A_o}{2} = A_o\cdot e^{-4\cdot 2T} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-8T} \Rightarrow ...T = \frac{\ln 2}{8}$$

ΣΗΜΕΙΩΜΑ : Κάναμε χρήση της ιδιότητας $ln e^k = k$

3. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση ισχύει $A_{(t)} = A_o.e^{-\Lambda t}$. Ύστερα από χρονικό διάστημα t_1 όπου γίνονται 40 πλήρεις ταλαντώσεις το πλάτος είναι $A_o/5$. Ποιο το πλάτος όταν πραγματοποιηθούν **ακόμη** 80 πλήρεις ταλαντώσεις ;

40 πλήρεις ταλαντώσεις σημαίνει t_1 =40T

Ακόμη 80 ταλαντώσεις σημαίνει t_2 =40T+80T=120T !

Τα πλάτη A_{t_1} , A_{t_2} *δεν μπορούμε να τα συσχετίσουμε άμεσα, αλλά μπορούμε έμμεσα μέσου του A_o !!!*

$$A_{(t_1)} = \frac{A_o}{5} = A_o\cdot e^{-\Lambda\cdot 40 T} \quad (1)$$ *και έτσι :*

$$A_{(t_2)} = A_o\cdot e^{-\Lambda\cdot 120T} = A_o\cdot\left(e^{-\Lambda\cdot 40T}\right)^3 \xrightarrow{(1)} A_{(t_2)} = A_o\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{A_0}{125}$$

4. Σε μια φθίνουσα (ϕ_o=π/2 rad) ταλάντωση όπου $\Sigma F_{\alpha\nu\tau} = -b.\upsilon$ είναι A_1=5 cm και A_3=2 cm. Βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης όταν t=2T.

Εργαστείτε όπως στην 1η άσκηση και βρείτε $A_2 = \sqrt{10}$ cm

5. *Χρόνος υποδιπλασιασμού*. Κάποια στιγμή t=t_1 το πλάτος της ταλάντωσης είναι A_{t_1}. Να βρείτε μετά πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης θα γίνει $A_{t_1}/2$.

Ισχύει : $A_{(t_1)} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t_1}$. *Έστω t_2 η στιγμή όπου το πλάτος θα υποδιπλασιαστεί.*

$$A_{(t_2)} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t_2} \Rightarrow \frac{A_{(t_1)}}{2} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t_2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t_1} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{\Lambda (t_1 - t_2)}$$

$$\Rightarrow -\ln 2 = \Lambda \cdot (t_1 - t_2) \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Ο χρόνος αυτός δεν εξαρτάται από την αρχική τιμή του A_o , αλλά ούτε από την επιλεγείσα τιμή t_1. Συμβολίζεται δε ως $T_{\frac{1}{2}}$ και ονομάζεται χρόνος υποδιπλασιασμού.

6. Την στιγμή t=0, το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης είναι A_o. Αν για την φθίνουσα ταλάντωση είναι Λ=2 sec^{-1} . Σε πόσο χρόνο θα μειωθεί το πλάτος κατά $15A_o/16$;

*Αφού η μείωση είναι $15A_o/16$, η τελική τιμή **είναι** $A_o/16$! Κάνοντας χρήση της λογικής του υποδιπλασιασμού προκύπτει το παρακάτω γράφημα που περιγράφει την χρονοεξέλιξη του πλάτους.*

A_o $\longleftrightarrow$ $A_o/2$ $\longleftrightarrow$ $A_o/4$ $\longleftrightarrow$ $A_o/8$ $\longleftrightarrow$ $A_o/16$

$T_{\frac{1}{2}}$ $T_{\frac{1}{2}}$ $T_{\frac{1}{2}}$ $T_{\frac{1}{2}}$

Προφανώς $\Delta t = 4 \cdot T_{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{\ln 2}{\Lambda} = 2 \cdot \ln 2$ sec

Υπάρχει και άλλος τρόπος εργασίας που στηρίζεται στη αλγεβρική διαχείριση της εκθετικής εξίσωσης…

$$A_t = A_o e^{-\Lambda t} \rightarrow \frac{A_o}{16} = A_o e^{-\Lambda t} \rightarrow 2^{-4} = e^{-\Lambda t} \rightarrow -4ln2 = -\Lambda t \rightarrow t = 2ln2\, sec$$

7. Σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος της οποίας μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A_{(t)} = A_o . e^{-\Lambda t}$. Τη στιγμή t=0 η ταλάντωση είχε πλάτος A_o=32 cm ενώ τη στιγμή t_1=10 sec το πλάτος γίνεται 16cm. Ποια χρονική στιγμή το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι 1cm ;

Για t=t₁ έχουμε $A_{(t_1)} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t_1} \Rightarrow 16 = 32 \cdot e^{-10\Lambda} \Rightarrow e^{-10\Lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln 2 = 10 \cdot \Lambda$ *(1)*

Για t=t₂ έχουμε $A_{(t_2)} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t_2} \Rightarrow 1 = 32 \cdot e^{-\Lambda \cdot t_2} \Rightarrow ... \Lambda \cdot t_2 = 5 \ln 2$ *(2)*

Από τις σχέσεις (1) και (2) εύκολα προκύπτει ότι t₂=50 sec.

Αυτή εδώ η άσκηση είναι η μόνη … προσφορά του σχολικού βιβλίου !

8. Να αποδείξετε ότι αν το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A_{(t)} = A_o . e^{-\Lambda t}$, τότε οι τιμές της ενέργειας ταλάντωσης E_1, E_2, E_3 , … κατά τις χρονικές στιγμές Τ, 2Τ, 3Τ, …ικανοποιούν τη σχέση :
$\frac{E_{KT}}{E_{(K+1)T}} = \sigma\tau\alpha\theta.$

$$E_{kT} = \frac{1}{2} D A_{kT}^2 = \frac{1}{2} D A_o^2 e^{-2\Lambda kT} \rightarrow E_{kT} = E_o e^{-2\Lambda kT} \quad (1)$$

Ομοίως

$$E_{(k+1)T} = \frac{1}{2} D A_{(k+1)T}^2 = \frac{1}{2} D A_o^2 e^{-2\Lambda(k+1)T} \rightarrow E_{(k+1)T} = E_o e^{-2\Lambda(k+1)T} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη, θα βρούμε τον ζητούμενο λόγο ίσο με $e^{2\Lambda T}$ *, που είναι σταθερός ανεξάρτητος της τιμής του ακέραιου k και αφορά δυο διαδοχικά πλάτη μετρούμενα τις στιγμές kT και (k+1).T*

9. Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση όπου το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο $A_{(t)} = A_o . e^{-\Lambda t}$, τη χρονική στιγμή t_o=0 η μηχανική ενέργεια ταλάντωσης είναι E_o=100 J, ενώ τη χρονική στιγμή t_1=T είναι 80 J. Να βρείτε την ενέργεια ταλάντωσης την χρονική στιγμή 2T .

$...E_1 = E_o \cdot e^{-2\Lambda T} \Rightarrow e^{-2\Lambda T} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ *(1)*

Όταν t=2T ισχύει : $E_2 = E_o \cdot e^{-2\Lambda \cdot 2T} = E_o \cdot \left(e^{-2\Lambda T}\right)^2 = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 64 \text{ J}$

10. Σώμα μάζας m στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου. Το σώμα υποχρεώνεται σε ταλάντωση με αρχικό πλάτος A_o=0,16 m. Το σώμα κάνει φθίνουσα ταλάντωση της οποίας το πλάτος ελαττώνεται, εξαιτίας τριβών, κατά 25% σε κάθε πλήρη ταλάντωση. Να υπολογίσετε πόσο θα μειωθεί το πλάτος μετά 4 πλήρεις ταλαντώσεις του σώματος.

Αρχικά $t_o=0 \quad A_o$

$t_1=T \quad A_1=A_o.e^{-\Lambda T}$. *Οπότε :* $\frac{75}{100}\cdot A_o = A_o \cdot e^{-\Lambda\cdot T} \Rightarrow e^{-\Lambda\cdot T} = \frac{3}{4}$ *(1)*

$t_2=4.T$

$$A_{t_2} = A_o \cdot e^{-\Lambda\cdot 4T} = A_o \cdot \left(e^{-\Lambda T}\right)^4 = A_o \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{16}{100}\cdot\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{4\cdot4\cdot4\cdot4} = \frac{3\cdot27}{1600} = \frac{81}{1600} \cong \frac{80}{160\cdot10} \Rightarrow$$

$$A_{t_2} = \frac{1}{20}\,\text{cm}$$

Άρα η ***μεταβολή*** *του πλάτους είναι :* $\Delta A = \frac{1}{20} - \frac{16}{100} = \frac{5}{100} - \frac{16}{100} = -\frac{11}{100}$ cm

11. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση που το πλάτος μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A_{(t)} = A_o.e^{-\Lambda t}$, η ενέργεια της ταλάντωσης μειώθηκε κατά 84% της αρχικής, εντός χρόνου 10 sec. Να βρείτε τη σταθερή Λ .

$$A_t = A_o \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow A_t^2 = A_o^2 \cdot e^{-2\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2}D\cdot A_t^2 = \frac{1}{2}D\cdot A_o^2 \cdot e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E_t = E_o \cdot e^{-2\Lambda t} \qquad (1)$$

$t=0$: E_o

$t_1=10$ sec :

$$E_1 = E_o \cdot e^{-2\Lambda\cdot 10} \Rightarrow E_o - \frac{84}{100}\cdot E_o = E_o \cdot e^{-2\Lambda\cdot10} \Rightarrow \frac{16}{100} = e^{-2\Lambda\cdot10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ...\Lambda = \ln\frac{5}{2}\cdot 10^{-1}\ \text{sec}^{-1}$$

12. Το πλάτος φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης ακολουθεί τον εκθετικό νόμο $A_{(t)} = A_o.e^{-\Lambda t}$, όπου Αο το αρχικό πλάτος και Λ σταθερή ποσότητα.

Σε πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης θα γίνει $A_o/2$;

Αν για κάθε πλήρη ταλάντωση η επί τοις % ελάττωση της ενέργειας ταλάντωσης είναι 36%, να βρείτε το αντίστοιχο ποσοστό μεταβολής του πλάτους της ταλάντωσης.

$$E_{k+1}=E_k-\frac{36}{100}E_k \Rightarrow \cdots \frac{E_{k+1}}{E_k}=\frac{64}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot D\cdot A_{k+1}^2}{\frac{1}{2}\cdot D\cdot A_k^2} \Rightarrow \frac{A_{k+a}^2}{A_k^2}=\frac{64}{100} \Rightarrow \frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{4}{5} \qquad (1)$$

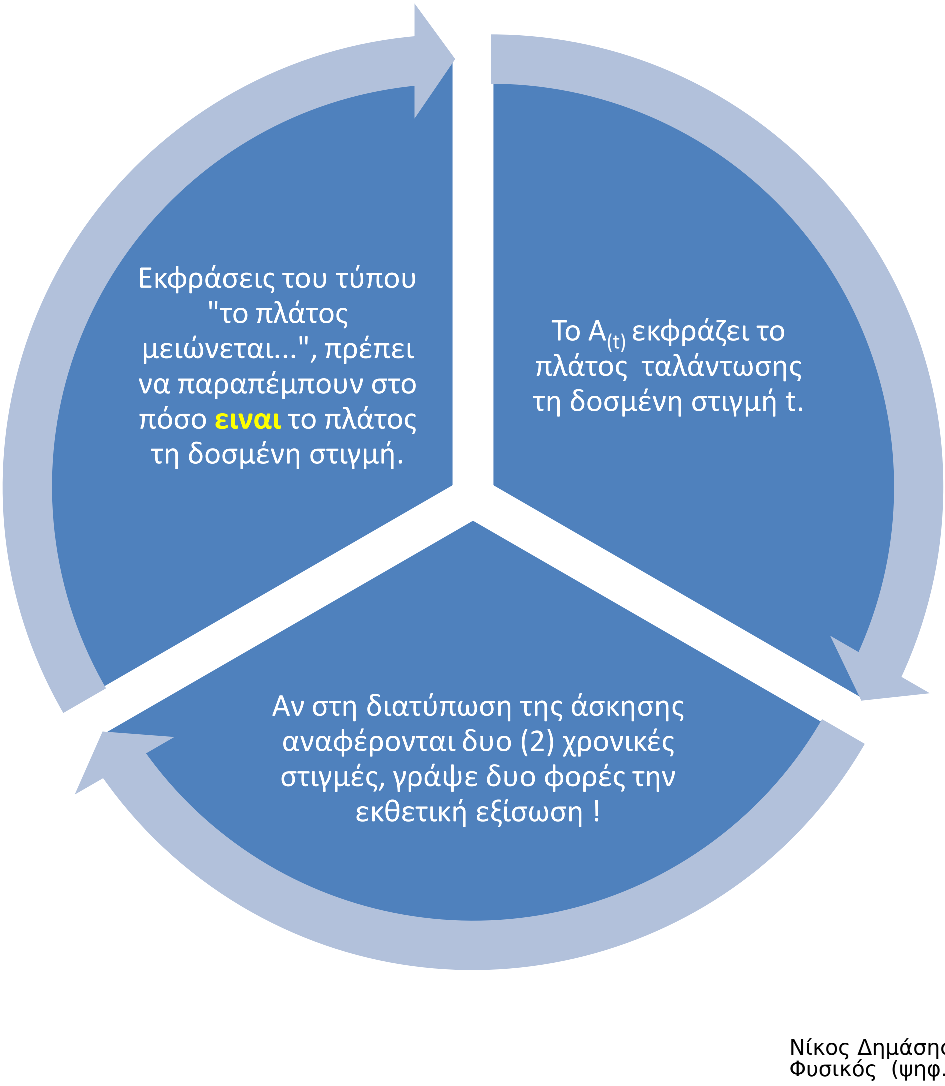
Μεταβολή πλάτους $\Delta A = A_{k+1}-A_k=-\frac{1}{5}A_k$

Όταν έχω πλάτος A_k *τότε η μείωση είναι 0,2* A_k

100 x ; x=20%

Θεωρώ «δύσκολη» τη παραπάνω κομψή διαχείριση αφού : Από δοσμένο ποσοστό → αναδείξαμε σχέση κλασματική → υπολογίστηκε η διαφορά → δημιουργία νέου ποσοστού !

Δείτε την φιλοσοφία της εκθετικής εξίσωσης $\boldsymbol{A_{(t)}=A_o.e^{-\Lambda t}}$



Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)