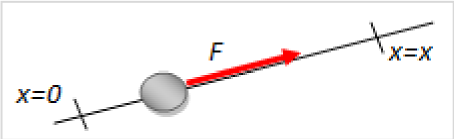
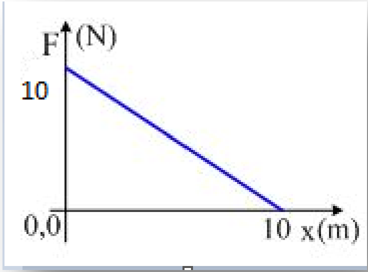
Ασκήσεις και προβλήματα με παρουσία μεταβλητής δύναμης F(x)

11. Να βρείτε το έργο μιας δύναμης η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά x = 10m, κατά τη διεύθυνσή της αν το μέτρο της είναι:

A. F = 4N B. F = (10 - x)N





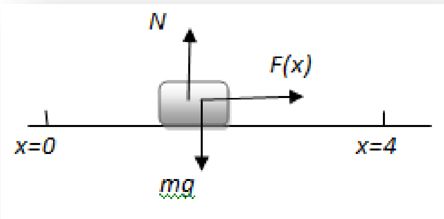
Κάνουμε την γραφική παράσταση της μεταβλητού μέτρου δύναμης.

Το έργο που αντιστοιχεί (παράγει όπως λένε λανθασμένα αρκετοί) ισούται με το «εμβαδόν» που ορίζεται από τους άξονες (τη δύναμη F, την θέση x) και το γράφημα.

$$W_F = \text{εμβαδόν} = \frac{1}{2}\, b.y = \frac{1}{2}\, 10\; 10 = 50\, joule$$

Αυτό ήταν!...

18. Ένα κιβώτιο μάζας m = 2kg είναι ακίνητο, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Υποθέστε ότι στο κιβώτιο ασκούμε οριζόντια δύναμη, που η τιμή της μεταβάλλεται όπως φαίνεται στην εικόνα. Πόση είναι η ταχύτητα του κιβωτίου όταν η μετατόπιση του είναι 4m;

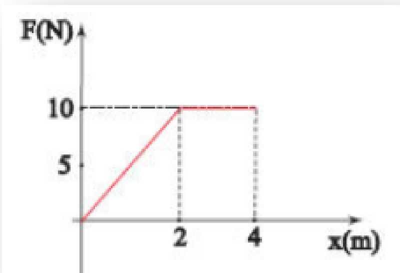


ΘΜΚΕ, διότι πρέπει να διαχειριστούμε έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου, μη συντηρητικής!

Τριβές δεν έχουμε... και αρχικά το κιβώτιο είναι ακίνητο.

$$\tfrac{1}{2}mu_{τελ}^2 - \tfrac{1}{2}mu_{αρχ}^2 = W_B + W_N + W_F \to \tfrac{1}{2}mu_{τελ}^2 - 0 = 0 + 0 + W_F$$
(1)

$$W_F = '\text{εμβαδόν τραπεζίου}' = \frac{4+2}{2}.10 = 30\, joule$$

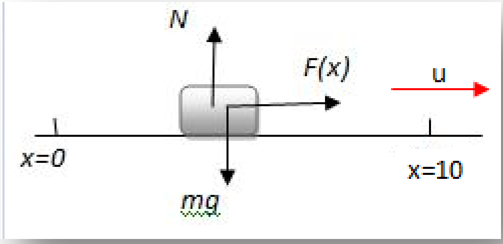


Έτσι η (1) δίνει στο s.i. :

$$\tfrac{1}{2} 2\, u_{τελ}^2 = 30 \to u_{τελ} = \sqrt{30}\, m/sec$$

15. Ένα σώμα μάζας m, είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα οριζόντια δύναμη, που η τιμή της μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση F = 8 - x (x σε m, F σε N). Αν η ταχύτητα του σώματος μετά από μετακίνησή του κατά 10m είναι υ = 2m/s, να βρείτε τη μάζα m του σώματος.

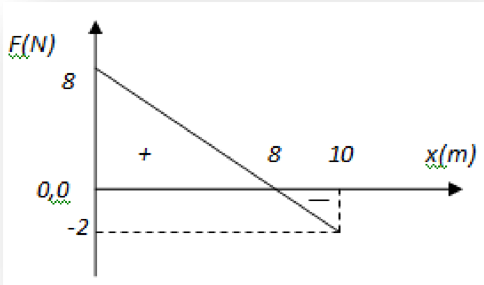
ΘΜΚΕ, διότι πρέπει να διαχειριστούμε έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου, μη συντηρητικής!



Τριβές δεν έχουμε… και αρχικά το κιβώτιο είναι ακίνητο.

$$\frac{1}{2}mu_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}mu_{\alpha\rho\chi}^2 = W_B + W_N + W_F \rightarrow$$

$\rightarrow \ \frac{1}{2}mu_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - 0 = 0 + 0 + W_F \qquad$ *(1)*



$$W_F = E1 + E2 = \frac{1}{2}\,8\,.8 + \frac{1}{2}\,2\,.(-2) = 32 + (-2) = \ 30\,joule$$

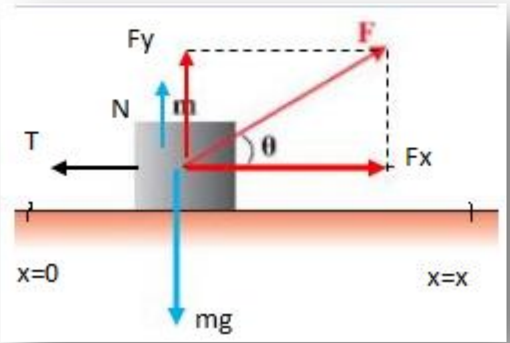
Από την (1) έχουμε πλέον : $\frac{1}{2}m\,2\,.\,2 = 30 \ \rightarrow m = 15\ kg$

(*)

E1 εμβαδόν τριγώνου με συντεταγμένες στις κορυφές 0 , 8m , 8N

E2 εμβαδόν τριγώνου με συντεταγμένες στις κορυφές 8 m , 10m , (-2N)

21. Ένα σώμα μάζας m = 2kg ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει μ=0,25. Ασκούμε στο σώμα δύναμη F, που η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση x του σημείου εφαρμογής της, σύμφωνα με τη σχέση F = 10 + 5x (x σε m, F σε N). Να υπολογίσετε:
Α. Κατά πόσο θα μετακινηθεί το σώμα, πριν εγκαταλείψει το οριζόντιο επίπεδο;
Β. Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει το οριζόντιο επίπεδο.
Δίνεται: ημθ=0,8, συνθ=0,6 και g=10m/s^2.



Συνιστώσες της μεταβλητής δύναμης

$$F_x = F.\sigma\upsilon\nu\theta = (10 + 5x).0{,}6 = 6 + 3x \qquad (1)$$

$$F_y = F.\eta\mu\theta = (10 + 5x).0{,}8 = 8 + 4\chi \qquad (2)$$

*Στο πρόβλημα έχουμε μεταβλητές δυνάμεις και τριβή οπότε είναι φανερό ότι θα εργαστούμε με ΘΜΚΕ. Η ανάλυση δυνάμεων σε άξονες επιβάλλεται **κι** όταν δουλεύουμε με έργα…*

- Αρχικά να δούμε αν θα ξεκινήσει το σώμα να κινείται! Δηλαδή να μελετήσουμε τη θέση x=0

T_{max} = μ . N , όπου N+Fy =mg → N=mg – Fy → N=2 . 10 – (8+4x) → N = 12-4x (3)

Η σχέση (3) λέει ότι στη θέση x=0, η N=12 N και επομένως η μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει η τριβή είναι

T_{max} = μ . N= 0,25 . 12 = 3N

Στη θέση x=0, η συνιστώσα Fx έχει τιμή –σύμφωνα με την (1) – Fx= 6 N

Επομένως το σώμα θα αρχίσει να κινείται, αφού διαμορφώνεται οριζόντια συνισταμένη στη θέση x=0. Ούφ!

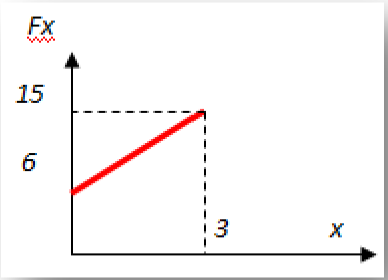
Α. Η σχέση (3) λέει ότι καθώς κινείται το σώμα, η μεταβλητού μέτρου δύναμη N, μειώνεται! Επομένως όταν αυτή μηδενιστεί, τότε θα έχει χαθεί η επαφή του σώματος με το έδαφος (απογείωση το λέμε στα αεροπλάνα)

Ώστε : Απογείωση όταν N=0 → λόγω της (3) → 12-4x=0 → x=3 m

Β. ΘΜΚΕ για μετάβαση από θέση x=0 έως θέση απογείωσης x=3

$$\frac{1}{2}mu_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}mu_{\alpha\rho\chi}^2 = W_B + W_N + W_{Fx} + W_{Fy} + W_T \rightarrow \frac{1}{2}mu_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - 0 = 0 + 0 + W_{Fx} + 0 + W_T \qquad (4)$$

Τα έργα όμως στη (4) είναι έργα μεταβλητών δυνάμεων, οπότε πρέπει να εργαστούμε με διαγράμματα!



Πανεύκολα πλέον :

$$W_{FX} = '\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon' = \frac{15+6}{2}.3 = 31{,}5\ Joule$$

T= μ . N = μ . (12-4x) = 0,25 (12-4x) = 3-x (si)

$$W_T = '\varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon' = \frac{1}{2}\,3\,.3 = 4{,}5\ Joule$$

Η (4) πλέον δίνει: $\frac{1}{2}\,2\,u_{\tau\varepsilon\lambda}^2 = 31{,}5 + (-4{,}5) \rightarrow u_{\tau\varepsilon\lambda} = \sqrt{27}\ m/sec$

22. Ένα σώμα μάζας m = 1kg ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο σώμα κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα επάνω, που η τιμή της είναι F = 30 - x (x σε m, F σε N). Αν η δύναμη καταργείται αμέσως μετά το μηδενισμό της να υπολογίσετε:

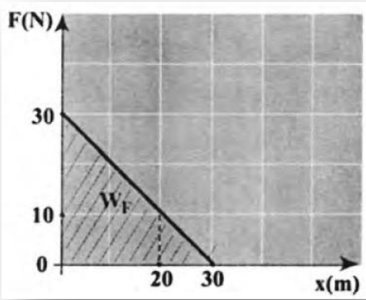
Α. Το έργο της δύναμης.

Β. Τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα ανεβαίνοντας.

Γ. Τη μέγιστη ανύψωση του σώματος.

Δ. Την ταχύτητα με την οποία το σώμα επιστρέφει στο οριζόντιο επίπεδο.

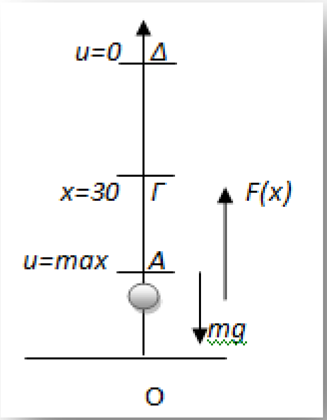
(g= 10m/s^2).



Α. Το έργο μεταβλητής δύναμης υπολογίζεται από το εμβαδόν, υπό τον όρο ότι η δύναμη είναι παράλληλη στη μετατόπιση. Αν δεν είναι αναλύουμε…

Για x=0 έχουμε F > mg, οπότε πράγματι θα υπάρξει ανέβασμα!

$W_F =' εμβαδόν' = \frac{1}{2}\, 30\,.30 = 450\, Joule$



Β. Για όσο χρόνο η κατακόρυφη δύναμη έχει μεγαλύτερο μέτρο από το βάρος, το σώμα θα επιταχύνεται (συνεχή αύξηση ταχύτητας)

Ώστε, επιτάχυνση εφόσον F > mg → 30-x > 1 . 10 → x < 20 m Άρα η ταχύτητα στη θέση x=20 m είναι μέγιστη, αφού μετά τη θέση αυτή Β > F με συνέπεια την επιβράδυνση, κάπου θα φτάσει σε ένα ανώτατο όριο και θα ακολουθήσει ελεύθερη πτώση...

ΘΜΚΕ Ο →Α : $\frac{1}{2}mu_{max}^2 - 0 = W_F + W_B \rightarrow \frac{1}{2}\, 1\, u_{max}^2 = \frac{10+30}{2}.20 - 1.10.20 \rightarrow \frac{u_{max}^2}{2} = 400 - 200 \rightarrow u_{max} = 20\, m/sec$

Γ. Πάλι με ΘΜΚΕ θα εργαστούμε, υπό τον όρο ότι μεταβλητή δύναμη F(x) έχει παρουσία μέχρι τη θέση Γ, όπου x=30m.

ΘΜΚΕ Ο →Δ : $0 - 0 = W_F + W_B \rightarrow 0 = \frac{1}{2}\, 30\,.30 - 1\,.10\,.(ΟΔ) \rightarrow \cdots \rightarrow (ΟΔ) = 45\, m$

Δ. Θα προτιμήσω μια ΑΔΜΕ για μετάβαση του σώματος από θέση Δ σε θέση Ο, μιας και σε αυτή τη διαδρομή υπάρχει μόνο η δύναμη του βάρους (συντηρητική γαρ)

Σύντομα … $mg(ΟΔ) = \frac{1}{2}\, m\, u_{τελική}^2 \rightarrow u_{τελική} = \sqrt{2\,.g\,.(ΟΔ)} = \cdots = 30\, m/sec$

Νίκος Δημάσης
Φυσικός (ψηφ.υπ.)