

Νεπέριος λογάριθμος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Λύκειο όλα τα παιδιά ξέρουν τον αριθμό π . Ένας αριθμός καθαρός και με ιδιαίτερη σημασία στα δρώμενα της φυσικής (όπου υπάρχει κύκλος ή επανάληψη, εκεί θα είναι και ο αριθμός $\pi=3,14\dots$). Ο αριθμός π δεν τελειώνει κάπου στο δεκαδικό του μέρος, είναι ένας **άρρητος** αριθμός.

Θυμίζω :

$$\text{περιφέρεια κάθε κύκλου} = 2\pi \cdot \text{ακτίνα} \rightarrow \pi = \frac{\text{περιφέρεια}}{\text{διάμετρο}} = \text{αυτό είναι το } \pi !$$

Εκτός του π , υπάρχει και ένας άλλος άρρητος αριθμός ιδιαίτερα σημαντικός. Είναι ο νεπέριος αριθμός e με τιμή περίπου 2,718... Επίσης καθαρός !

Ο νεπέριος αριθμός e

Είναι ιδιαίτερα σημαντικός στον χώρο της φυσικής, αφού συμμετέχει σε εξισώσεις που περιγράφουν φαινόμενα όπως στη :

- Θερμοδυναμική
- Φθίνουσες ταλαντώσεις
- Ραδιενεργές διασπάσεις
- κ.α.

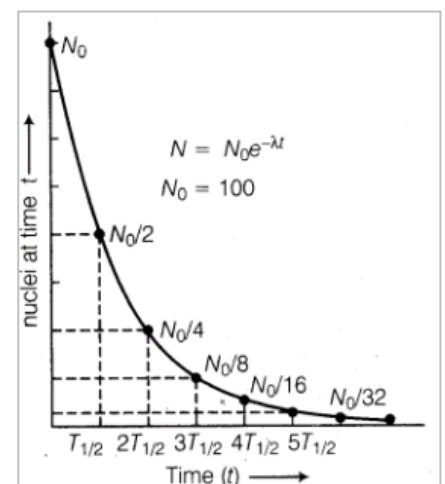
παράδειγμα...

Έστω ένα ραδιενεργό δείγμα, όπου υπάρχουν N_0 αδιάσπαστοι πυρήνες κάποιου στοιχείου. Καθώς ο χρόνος κυλά, μέρος αυτών των πυρήνων διασπάται χωρίς αιτία. Μετά από χρόνο t , οι αδιάσπαστοι πυρήνες θα είναι λιγότεροι, έστω N_t .

Λοιπόν!

Να η εξίσωση που περιγράφει *-νομοτελειακά-* την χρονοεξέλιξη του φαινομένου :

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$



Δείτε την παρουσία του νεπέριου αριθμού στη παραπάνω εξίσωση. Δείτε επίσης πως αυτός ο *άρρητος* αριθμός στην εν λόγω εξίσωση, μας δίνει μια γραφική παράσταση με την εξής *ομαλότητα* :

Κάθε χρονικό διάστημα ίσο με $T_{1/2}$ (όπου $T_{1/2} \cong \frac{0.7}{\lambda}$) οι αδιάσπαστοι πυρήνες υποδιπλασιάζονται !

Ο νεπέριος λογάριθμος

Ο νεπέριος αριθμός e εμπλέκεται και σε μια σύνθετη μαθηματική δομή, η οποία ακούει στο όνομα νεπέριος λογάριθμος.

Γράφουμε και διαβάζουμε –ως παράδειγμα :

$$\ln_e 2 = 0.7 \quad (1)$$

Ο νεπέριος λογάριθμος του αριθμού 2 , είναι ο αριθμός 0.7

Ποια η μαθηματική λογική ;

Δείτε την ! $e^{0.7} = 2 \quad (2)$

Εν γένει :

$$\ln_e a = x \leftrightarrow e^x = a \text{ ή λίγο πιο απλά } \boxed{\ln a = x \leftrightarrow e^x = a} \quad (3)$$

Ο νεπέριος του a , είναι αριθμός x εφόσον ο e υψωθεί στη δύναμη του x και δώσει τον a !

Βασιζόμενοι στον ορισμό :

$$\ln e = 1 \text{ διότι } e^1 = e, \quad \ln 1 = 0 \text{ διότι } e^0 = 1, \quad \ln e^k = k \text{ διότι } e^k = e^k$$

$\ln 0 = \text{δεν ορίζεται}$. Πράγματι δεν υπάρχει δύναμη του e που να δίνει αποτέλεσμα μηδενικό!

$\ln(\text{αρνητικού αριθμού}) = \text{δεν ορίζεται...}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ποιος είναι ο νεπέριος λογάριθμος του 100 ; του 300, του 2018, ...

Δεν ξέρω, όπως δεν ξέρω και ποιο είναι το ημίτονο της γωνίας των 20°! Οπότε τι κάνουμε; Απλά! Καταφεύγουμε σε λογαριθμικούς πίνακες είτε σε χρήση υπολογιστή.

$\ln 100 \approx 4.6$ (τέσσερα κι έξι δέκατα)

...Πάντως θυμάμαι ότι $\ln 2 = 0.7$!

ln(100) =

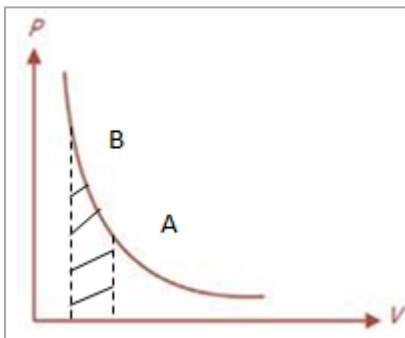
4.60517018599						
Rad		x!	()	%	AC
Inv	sin	ln	7	8	9	÷
π	cos	log	4	5	6	×
e	tan	√	1	2	3	-
Ans	EXP	x ^y	0	.	=	+

Ιδιότητες νεπέριου λογαρίθμου (βασικές)

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ απλό παράδειγμα : $\ln 4 = \ln(2 \cdot 2) = \ln 2 + \ln 2 \approx 0.7 + 0.7 = 1.4$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ απλό παράδειγμα : $\ln 50 = \ln(100/2) = \ln 100 - \ln 2 \approx 4.6 - 0.7 = 3.9$
- $\ln a^k = k \cdot \ln a$ απλό παράδειγμα : $\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2 \approx 4 \cdot 0.7 = 2.8$
- ... (δύο τρεις ακόμη)

Ας λύσουμε μια άσκηση φυσικής (θερμοδυναμική) β λυκείου θετικής κατεύθυνσης

2.42 Δύο mol αερίου βρίσκονται σε θερμοκρασία 27°C . Διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία συμπιέζουμε το αέριο ώστε η πίεσή του να διπλασιαστεί. Να υπολογιστεί το έργο του αερίου.
Δίνονται $R = 8,314\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$, $\ln 2 = 0,6931$.
[Απ : -3458J]



Στο σχήμα το αέριο συμπιέστηκε ισόθερμα και πήγε από την κατάσταση A στην κατάσταση B, διπλασιάζοντας την πίεση.

Το έργο που αντιστοιχεί στη μεταβολή είναι αρνητικό (συμπίεση) και υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$w = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (1) \quad (V_B = \text{τελικός όγκος και } V_A = \text{αρχικός όγκος})$$

Λόγω ισόθερμης μεταβολής ισχύει :

$$p \cdot V = \text{σταθ.} \rightarrow P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{P_A}{P_B} = \text{< θέλει η άσκηση >} = \frac{P}{2P} = \frac{1}{2}$$

Έτσι η (1) δίνει :

$$w = nRT \ln \frac{1}{2} = nRT(\ln 1 - \ln 2) = nRT(0 - \ln 2) = -nRT \ln 2 = -2 \cdot 8.314 \cdot 300 \cdot 0.6931 \approx -3458 \text{ J}$$

Μπορείς επίσης να γράψεις $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2^{-1} = -1 \ln 2 = -0.6931$

Θεωρώ ότι έγραψα για τον νεπέριο λογάριθμο είναι υπερ-αρκετό, απευθυνόμενος στον μαθητή της Β τάξης θετικής κατεύθυνσης...