2ο Πειραματικό Γενικό
Λύκειο Αθηνών

Ο αριθμός e

Λυκούδης Παντελής
Παπαναγιώτου Χρίστος
Σαλμάς Φαίδων
Σιούγκρος Δημήτρης

Η υπολογιστική μηχανή «Λογάριθμος»

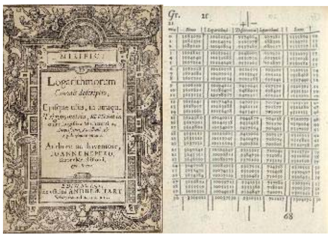
Η ιστορία του πολυσυζητημένου αριθμού e δεν μπορεί να ξεκινήσει αν δεν γίνει πρώτα λόγος για τους λογαρίθμους.

Τον 16ο – 17ο αιώνα παρατηρήθηκε μια σημαντική ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης σε όλους τους κλάδους. Οι ανακαλύψεις των νέων χωρών, ο γύρος του κόσμου από τον Μαγγελάνο και η ανάπτυξη του ναυτικού εμπορίου δημιούργησαν την ανάγκη παραγωγής χαρτών (Gerhard Mercator 1596). Η εισβολή των μαθηματικών στην αστρονομία και στη φυσική μετά τον Κοπέρνικο, τον Γαλιλαίο και τον Κέπλερ και το πλήθος των δεδομένων που προέκυψαν προς επεξεργασία στις προαναφερόμενες επιστήμες, απαιτούσαν από τους επιστήμονες την διεκπεραίωση περίπλοκων υπολογισμών. Έπρεπε να επινοηθούν τρόποι που θα τους απάλλασσαν από αυτό το βάρος. Επειδή είναι ευκολότερο να προσθέτουμε παρά να πολλαπλασιάζουμε βρέθηκε τρόπος μετατροπής της πρόσθεσης σε πολλαπλασιασμός , **ο λογάριθμος** .

Ο **John Napier (1550-1617) of Merchistoun** 8ος Λόρδος του Merchistoun στη Σκωτία γνωστός για τα θρησκευτικού περιεχομένου βιβλία του, ήταν ο πρώτος που δεχόμενος την πρόκληση μετατροπής μιας πράξης σε μια άλλη πιο απλή, παρατήρησε τη σχέση των όρων μιας γεωμετρικής προόδου και των αντίστοιχων εκθετών τους, που ακολουθούν αριθμητική πρόοδο.

Παίρνοντας ως βάση τον αριθμό $\mathbf{1\text{-}10^{-7}}$ υποστήριξε ότι κάθε θετικός αριθμός Ν μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{N=10^{7}(1\text{-}10^{-7})^{L}}$

Έτσι έχουμε τον πρώτο ορισμό του Νεπέριου λογάριθμου: **L=Nap logN.**



Επί 20 χρόνια συμπλήρωνε τους διαδοχικούς όρους της γεωμετρικής προόδου που κατασκεύασε συγκεντρώνοντας τους τελικά στο έργο του

Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.

***Παρατήρηση*:**

Εδώ εμφανίζεται και για πρώτη φορά η τιμή της ακολουθίας $\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ όταν το ν είναι πάρα πολύ μεγάλο, ως βάση για λογαρίθμους.

Το χρήμα είναι μαθηματικά

Τον 17^{o} αιώνα κάποιος ανώνυμος έμπορος ή τοκογλύφος παρατήρησε μια παράξενη συμπεριφορά στην αύξηση του τόκου στις τραπεζικές συναλλαγές, που στηρίζονται σε ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο διαιρεμένο σε ν ίσα μέρη, όταν ο αριθμός ν είναι πάρα πολύ μεγάλος.

Ας παρακολουθήσουμε το φαινόμενο:

Η συνήθης τραπεζική μέθοδος αύξησης του δανειζόμενου κεφαλαίου είναι ο:

► Ανατοκισμός

Έστω ότι καταθέτουμε Κ € σε ένα λογαριασμό που αποδίδει ε% ετήσιο επιτόκιο και ανατοκίζεται κάθε χρόνο.

Τέλος του $1^{ου}$ έτους: $K_1 = K\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$

Τέλος του $2^{ου}$ έτους: $K_2 = K\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^2$

⋮ ⋮

Τέλος του $N^{ου}$ έτους: $K_N = K\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^N$

Άλλη συνήθης τραπεζική συναλλαγή είναι ο:

► Ανατοκισμός ν φορές το χρόνο με ετήσιο επιτόκιο διαιρεμένο σε ν ίσα μέρη.

Δηλαδή αν καταθέσουμε 100€ σε ένα λογαριασμό που αποδίδει 5% και τοκίζεται κάθε χρόνο. **Τέλος $1^{ου}$ έτους: 105,00 €**

Αν καταθέτουμε 100€ σε ένα λογαριασμό που αποδίδει 5% το χρόνο και ανατοκίζεται κάθε **εξάμηνο** σε ένα χρόνο ανατοκίζεται δύο (2) φορές με επιτόκιο 2,5%. **Τέλος $1^{ου}$ έτους: 105,06 €**

ανατοκίζεται κάθε **τρίμηνο** σε ένα χρόνο ανατοκίζεται τρεις (3) φορές με επιτόκιο 1,66%. **Τέλος $1^{ου}$ έτους: 105,09 €**

ανατοκίζεται κάθε **μήνα** σε ένα χρόνο ανατοκίζεται δώδεκα (12) φορές με επιτόκιο 0,416%. **Τέλος $1^{ου}$ έτους: 105,12 €**

ανατοκίζεται κάθε **ημέρα** σε ένα χρόνο ανατοκίζεται τριακόσιες εξήντα πέντε (365) φορές με επιτόκιο 0,0137 %. **Τέλος $1^{ου}$ έτους: 105,19 €**

Έστω ότι ο ανατοκισμός γίνεται ν φορές το χρόνο.

Το ετήσιο επιτόκιο $\frac{\varepsilon}{\nu}$%.

Τέλος $1^{ου}$ έτους:	
Για ε=100 ν	$K_\nu = K\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$
1	2K
2	2.25K
3	2.37037K
4	2.44141K
5	2.48832K
10	2.59374K
50	2.69159K
100	2.70481K
1000	2.71692K
10000	2.71815K
100000	2.71827K
1000000	2.71828K
10000000	2.71828K

***Παρατήρηση*:** Το τελικό κεφάλαιο για «περίοδο μετατροπής» πάρα πολύ μικρή π.χ. $\frac{1}{1000000}$ του έτους , $\frac{1}{10000000}$ του έτους δεν ξεπερνά το 2,72 του αρχικού κεφαλαίου.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ πλησιάζει μια τιμή χωρίς να τη φτάνει και αυτή είναι ο αριθμός e.

Τότε λέμε ότι η ακολουθία με τύπο $\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ έχει όριο τον αριθμό e.

Το *e* ως όριο

Ο αριθμός όπως διαπιστώσαμε είναι όριο της ακολουθίας $\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$.

Ας κάνουμε κάποιους υπολογισμούς.

Στο τύπο $\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)$ καθώς το ν γίνεται πάρα πολύ μεγάλο (τείνει στο

άπειρο) η τιμή του $\frac{1}{\nu}$ πλησιάζει το 0.

Θα μπορούσε λοιπόν κανείς εσφαλμένα να υποστηρίξει πως αφού η σχέση τείνει στο 1 και αφού το 1 υψωμένο σε οποιονδήποτε αριθμό κάνει 1, άρα e=1.

Ένας άλλος λάθος τρόπος προσέγγισης του θέματος είναι η σκέψη πως αφού το $\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)$είναι πάντα μεγαλύτερο του 1, και καθώς κάθε αριθμός μεγαλύτερος του 1 υψωμένος σε κάποια δύναμη αυξάνει την τιμή του, τότε το $\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ γίνεται πάρα πολύ μεγάλο, με ν να τείνει στο άπειρο.

Είναι φανερό ότι οι μέθοδοι προσέγγισης της έννοιας του ορίου που χρησιμοποιήθηκαν είναι λάθος. Το κυριότερο πρόβλημα στις προαναφερθείσες διαδικασίες είναι ο εσφαλμένος χειρισμός της έννοιας του απείρου.

Ο κλασσικός αλγεβρικός λογισμός θα επιλύσει το πρόβλημα.

Καθώς όμως η σχέση $\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ είναι ένα διώνυμο υψωμένο σε κάποιο εκθέτη, ας να μελετήσουμε τις ιδιότητες των διωνύμων της μορφής

$$(\alpha+\beta)^{\nu}=C_1^{\nu}\alpha^{\nu}+C_2^{\nu}\alpha^{\nu-1}\beta+C_3^{\nu}\alpha^{\nu-2}\beta^2+\ldots+C_{\nu-1}^{\nu}\alpha\beta^{\nu-1}+C_{\nu}^{\nu}\beta^{\nu}$$

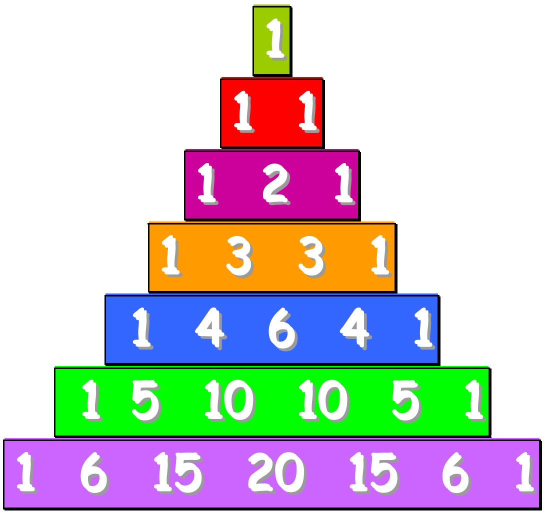
Με C_{κ}^{ν} συμβολίζομε τους συντελεστές των μονωνύμων $\alpha^{\nu}\beta^{\nu-\kappa}$

Όπου (κ+1) η θέση του συντελεστή στην ανάπτυξη της ταυτότητας και ν ο βαθμός του διωνύμου.

Τρόποι υπολογισμών των συντελεστών C_{κ}^{ν}

<u>Τρίγωνο Pascal</u>

Ονομάστηκε έτσι προς τιμή του Γάλλου μαθηματικού **Blaise Pascal (1623 -1662)** που το ανακάλυψε



Επειδή όμως η μέθοδος του τρίγωνο Pascal είναι χρονοβόρα για πολύ μεγάλες τιμές του ν , ευτυχώς υπάρχει ένας τύπος που μας επιτρέπει να βρίσκουμε όλους τους αυτούς τους συντελεστές.

<u>Ο τύπος με τη βοήθεια της συνδυαστικής είναι:</u>

$$ {}^{\nu}C_{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\nu)!} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\kappa+1)}{\kappa!} $$ Άρα

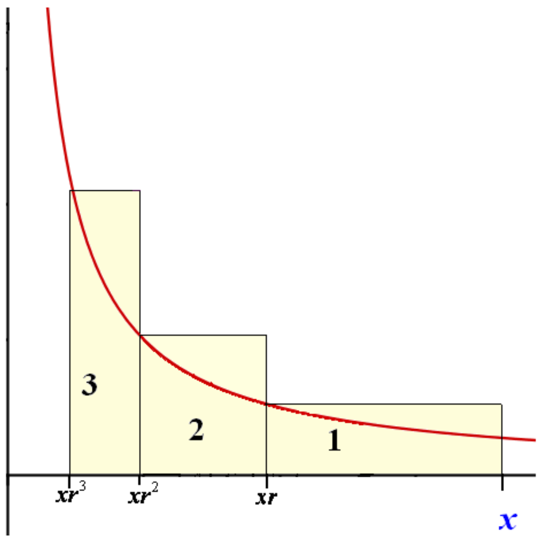
$$ \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = 1+\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)+\frac{\nu(\nu-1)}{2!}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{2}+\ldots+\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = 1+1+\frac{(1-\frac{1}{\nu})}{2!}+\ldots+\frac{1}{\nu^{\nu}} $$

έχουμε: $$ (1+\frac{1}{\nu})^{\nu} \simeq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots $$

Συνεπώς $$ \boxed{e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots} $$

Ο τετραγωνισμός της υπερβολής

Ο **Gregorius de Saint – Vincent (1584 – 1667)** στη προσπάθεια τετραγωνισμού της υπερβολής διαπιστώνει, ότι αν οι τετμημένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης μεταβάλλονται με γεωμετρική πρόοδο τότε το εμβαδόν που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των τετμημένων και της υπερβολής μεταβάλλεται με αριθμητική πρόοδο.



Έστω $x > 0$ και $1 > r > 0$

Αν οι τετμημένες

$x, \quad xr, \quad xr^2, \quad xr^3 \ldots$

ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο

τα εμβαδά

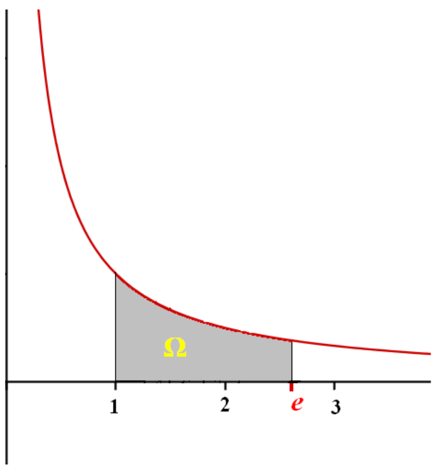
$E_1 = 1 - r$,

$E_1 + E_2 = 2(1 - r)$,

$E_1 + E_2 + E_3 = 3(1 - r) \ldots$

ακολουθούν αριθμητική πρόοδο

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι, το εμβαδό που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των τετμημένων και της υπερβολής υπολογίζεται με τη βοήθεια της λογαριθμικής συνάρτησης.



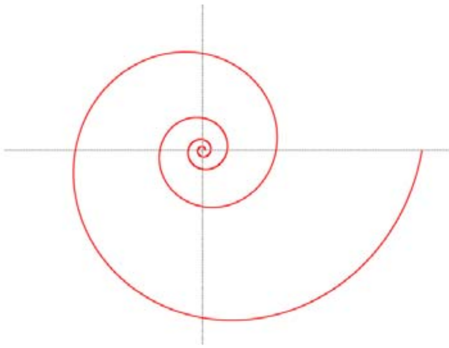
Αποδεικνύεται ότι:

$\boxed{\text{Το εμβαδόν του χωρίου } \mathbf{\Omega = 1}}$

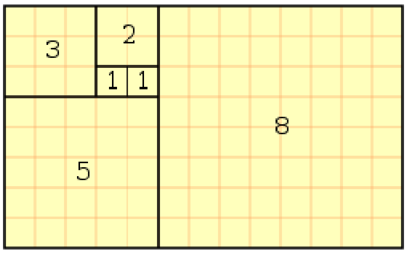
Όταν το *e* συναντά το φ

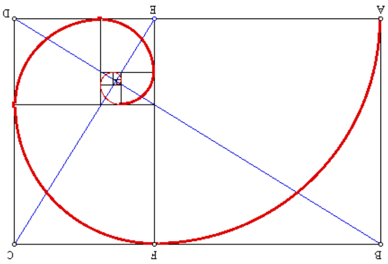
Λογαριθμική σπείρα

Ο Jakob Bernoulli (1654 – 1705) μελέτησε την λογαριθμική σπείρα και την ονόμασε *spira mirabilis* λόγω των σπανίων μαθηματικών ιδιοτήτων της, που την καθιστούν μετά τον κύκλο το πιο προσφιλές διακοσμητικό μοτίβο.



Η λογαριθμική σπείρα περιγράφεται ως καμπύλη με αφετηρία ένα σημείο (τον πόλο) και ανελίσσεται με τρόπο ώστε η απόσταση των σημείων της από το πόλο να αυξάνει με γεωμετρική πρόοδο εφόσον η γωνία περιστροφής αυξάνει με αριθμητική πρόοδο. Κάθε ευθεία που διέρχεται από τον πόλο τέμνει την σπείρα υπό την ίδια γωνία.





Το γεγονός ότι η λογαριθμική σπείρα εγγράφεται σε αρμονικά ορθογώνια (ο λόγος των πλευρών τους ισούται με τον αριθμό φ) την κατατάσσει στις αρμονικές καμπύλες.

Αχιβάδα Ναυτίλος

Σπειροειδής Γαλαξίας

Η λογαριθμική σπείρα είναι μια από τις καμπύλες που συναντάται συχνά στη φύση.

Πεδία εφαρμογής εκθετικής –λογαριθμικής συνάρτησης

►**<u>ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ</u>:** Σύμφωνα με τον νόμο των Weber-Fechner υπάρχει λογαριθμική σχέση μεταξύ αισθήματος και μεγέθους ερεθισμού:

Αν S(αίσθημα), K (σταθερά του Weber), R (μέγεθος ερεθισμού), τότε

$$S=K\cdot \ln R$$

►**<u>ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ</u>:** Το φαινόμενο μέγεθος μετράει τη λαμπρότητα των αστέρων λογαριθμικά, μιας και το μάτι ανταποκρίνεται επίσης λογαριθμικά στη λαμπρότητα: Είναι $m=2{,}5\ln l+c$, (m:φαινόμενο μέγεθος*, l:φαινόμενη λαμπρότητα, c σταθερά που εξαρτάται από το όργανο (ανιχνευτή) παρατήρησης).

►**<u>ΧΗΜΕΙΑ</u>:** Για να περιγραφεί η οξύτητα ενός διαλύματος χρησιμοποιείται ο αριθμός που συμβολίζεται με pH. Εξ' ορισμού είναι: $pH=-\log[H^+]$. ($[H^+]$ είναι η συγκέντρωση των H^+ σε γραμμοϊόντα ανά λίτρο).Ένα διάλυμα θεωρείται:

όξινο αν $[H^+]>10^{-7}$ (pH<7) και βασικό αν $[H^+]<10^{-7}$ (pH>7).

►**<u>ΣΕΙΣΜΟΛΟΓΙΑ:</u>** Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος R ενός σεισμού εντάσεως I δίνεται από τον τύπο:

$R=\log I/I_0$, όπου I_0 μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.

►**<u>ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ:</u>** Στη φυσική εντροπία των Clausius και Boltzman. Η εντροπία ενός συστήματος εκφράζει το βαθμό απροσδιοριστίας του και η μαθηματική της έκφραση περιέχει τη λογαριθμική συνάρτηση: Είναι $S=k\cdot\ln\Gamma$ (k=1,38J/K είναι η παγκόσμια σταθερά του Boltzman, Γ ο αριθμός των μικροκαταστάσεων που αντιστοιχεί σε κάθε μακροκατάσταση του συστήματος).

►**<u>ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ</u>**: εκτός από τη φυσική εντροπία υπάρχει και η πληροφοριακή εντροπία των <u>Hartley και Shannon.</u> Οι δύο εξισώσεις του Shannon που βρίσκονται στη βάση της θεωρίας των επικοινωνιών είναι:

$$I=-p\cdot\log_2 p \text{ και}$$

$$C=W\cdot\log_2(1+S/N)$$

► **ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ:** Η μονάδα bel και η περισσότερο χρησιμοποιούμενη decibel(=0,1 bel) ορίζονται με τη βοήθεια των δεκαδικών λογαρίθμων. Αυτό συμβαίνει επειδή το αυτί ανταποκρίνεται λογαριθμικά στην ακουστική ισχύ.

► **ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΤΟΝ ΕΙΔΙΚΟ ΡΥΘΜΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΙΚΡΟΒΙΩΝ – ΕΞΙΣΩΣΗ ARRHENIUS**

$$\mu = Ae^{-E/RT}$$

Όπου : μ = ειδικός ρυθμός ανάπτυξης

A = σταθερά Arrhenius

R = παγκόσμια σταθερά αερίων

E = ενέργεια ενεργοποίησης

T = απόλυτη θερμοκρασία

Λογαριθμίζοντας : $\ln \mu = -E/RT + \ln A$

Έτσι είναι εύκολος ο προσδιορισμός των A και E. Οι τυπικές τιμές της E για τη μικροβιακή ανάπτυξη είναι 13 - 17 kcal / mol

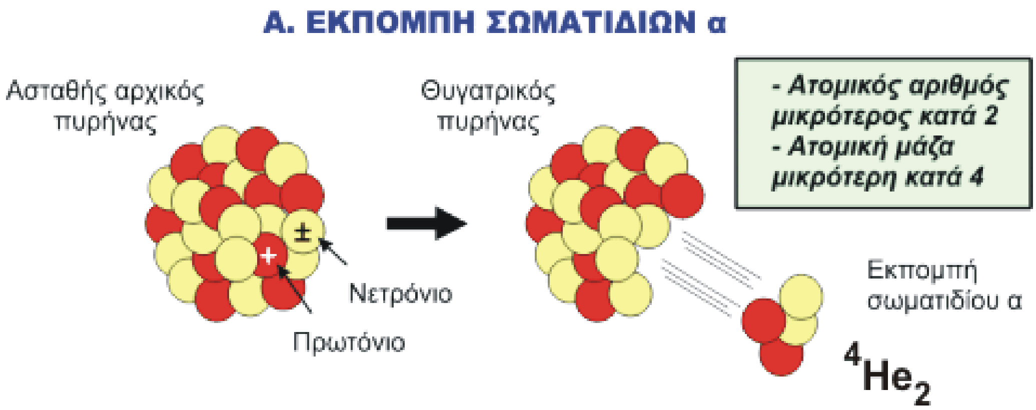
► **ΡΑΔΙΕΝΕΡΓΕΣ ΔΙΑΣΠΑΣΕΙΣ – ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΜΕ ΕΚΠΟΜΠΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ α**

Ένα σωματίδιο α αποτελείται από δύο νετρόνια και δύο πρωτόνια, ισχυρά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Τα α σωματίδια, τα οποία είναι όμοια με τον πυρήνα του ^4He, εκπέμπονται από τους ασταθείς πυρήνες κατά την α-διάσπαση.

Σ' αυτό το είδος της διάσπασης ο ατομικός αριθμός του ατόμου ελαττώνεται κατά δύο εξαιτίας της απομάκρυνσης δύο πρωτονίων, ενώ ο μαζικός αριθμός ελαττώνεται κατά τέσσερα.

Παράδειγμα μιας τέτοιας διάσπασης είναι:

$$^{238}U_{92} \Rightarrow\ ^{234}Th_{90} + \alpha + \gamma + \text{ενέργεια}$$



►**<u>ΡΑΔΙΟΧΡΟΝΟΛΟΓΗΣΗ - ΗΜΙΠΕΡΙΟΔΟΣ ΖΩΗΣ</u>**

Η ανακάλυψη της ραδιενέργειας υπήρξε ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα των φυσικών επιστημών. Μεταξύ των πλέον σημαντικών αποτελεσμάτων της ανακάλυψης της ραδιενέργειας είναι η **ραδιοχρονολόγηση**, η εύρεση δηλαδή της ηλικίας ορυκτών και πετρωμάτων. Η ραδιοχρονολόγηση αποτελεί μια αξιόπιστη μέθοδο στη γεωλογία γιατί ο ρυθμός με τον οποίο διασπώνται τα ραδιενεργά ισότοπα είναι σταθερός και δεν επηρεάζεται από κανένα χημικό ή φυσικό παράγοντα. Ο ρυθμός της ραδιενεργούς διάσπασης ενός ισοτόπου εκφράζεται με την **ημιπερίοδο ζωής** του ισοτόπου αυτού.

<u>Ορισμός</u>: **Ημιπερίοδος ζωής** θεωρείται ο χρόνος που απαιτείται για τη διάσπαση του **μισού πυρήνα** ενός ραδιενεργού ισοτόπου σε ένα δείγμα.

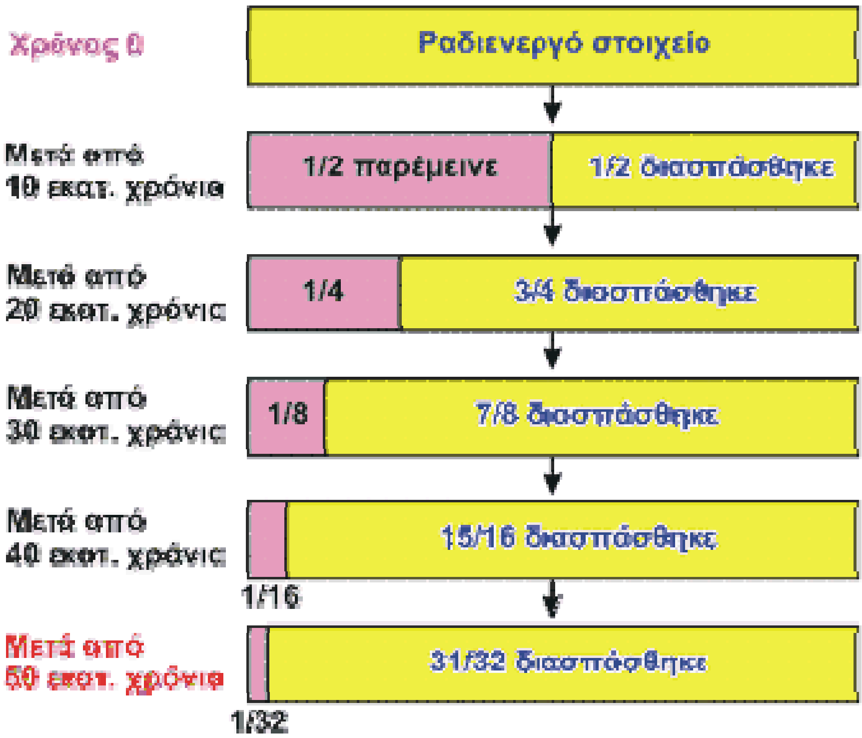
Εάν θεωρήσουμε ότι αρχίζει η διάσπαση ενός ραδιενεργού υλικού βάρους ενός κιλού, η διάσπαση του μισού κιλού θα συντελεστή σε μία ημιπερίοδο ζωής, το μισό του υπολοίπου υλικού, δηλαδή το ένα τέταρτο, θα διασπαστεί σε μία άλλη ημιπερίοδο ζωής, το μισό του υπολοίπου, δηλαδή το ένα όγδοο, σε μία άλλη, κ.ο.κ.

Η αρχή της ραδιοχρονολόγησης μπορεί να εκφραστεί με το σχήμα 4 όπου χρησιμοποιείται ένα υποθετικό ραδιενεργό μητρικό υλικό, με ημιπερίοδο ζωής 10 εκ. χρόνων, το οποίο διασπάται κατευθείαν στο σταθερό θυγατρικό προϊόν.

Υπολογίζοντας τα ποσοστά του ραδιενεργού μητρικού και του σταθερού θυγατρικού μπορούμε να προσδιορίσουμε την ηλικία του δείγματος.

Στο παράδειγμα του σχήματος, όταν οι ποσότητες του μητρικού και του θυγατρικού είναι ίσες (αναλογία 1:1), γνωρίζουμε ότι έχει παρέλθει μία ημιπερίοδος ζωής και ότι η ηλικία του δείγματος είναι 10 εκ. χρόνια.

Οταν η αναλογία είναι 1:3 σημαίνει ότι έχουν παρέλθει δύο ημιπερίοδοι ζωής και η ηλικία του δείγματος είναι 20 εκ. χρόνια ενώ όταν η αναλογία είναι 1:31 η ηλικία του δείγματος είναι 50 εκ. χρόνια αφού η αναλογία αυτή δείχνει παρέλευση πέντε ημιπεριόδων ζωής.



Από τα διάφορα ραδιενεργά ισότοπα τα οποία βρίσκονται στη φύση, πέντε έχουν αποδειχθεί σημαντικά για την αξιόπιστη ραδιοχρονολόγηση των πετρωμάτων. Τα ισότοπα αυτά με τα αντίστοιχα σταθερά θυγατρικά τους και τις ημιπεριόδους ζωής τους απεικονίζονται στον πίνακα .

Ραδιενεργό στοιχείο		Σταθερό ισότοπο (προϊόν διάσπασης)		Ημιπεριόδος ζωής
Ουράνιο-238	^{238}U	Μόλυβδος-206	^{206}Pb	4,5 δισεκατ. έτη
Ουράνιο-235	^{235}U	Μόλυβδος-207	^{207}Pb	713 εκατ. έτη
Θόριο-232	^{232}Th	Μόλυβδος-208	^{208}Pb	14,1 δισεκατ. έτη
Ρουβίδιο-87	^{87}Rb	Στρόντιο-87	^{87}Sr	47 δισεκατ. έτη
Κάλιο-40	^{40}K	Αργό-40	^{40}Ar	1,3 δισεκατ. έτη

Παρόλο που η βασική αρχή της ραδιοχρονολόγησης είναι σχετικά απλή, η όλη διαδικασία είναι αρκετά πολύπλοκη και απαιτεί τη χρήση ακριβών και εξειδικευμένων οργάνων, των φασματογράφων μάζας. Οι αναλύσεις με τις οποίες προσδιορίζονται οι ποσότητες των μητρικών και θυγατρικών στοιχείων πρέπει να είναι μεγάλης ακρίβειας και γίνονται σε ειδικά εργαστήρια κάτω από συνθήκες μεγάλης καθαριότητας.
Εκτός από αυτό, μερικά ραδιενεργά ισότοπα δεν διασπώνται κατευθείαν στο θυγατρικό τους προϊόν, όπως ήταν η περίπτωση του υποθετικού παραδείγματος που δώσαμε, γεγονός που κάνει την ανάλυση ακόμη πιο δύσκολη. Στην περίπτωση του ^{238}U, σχηματίζονται δεκατρία ενδιάμεσα ασταθή προϊόντα, πριν από το σχηματισμό του τελικού σταθερού ισοτόπου ^{206}Pb.

Βιβλιογραφία

Eli Maor, *e*: *Η ιστορία ενός αριθμού*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 2005