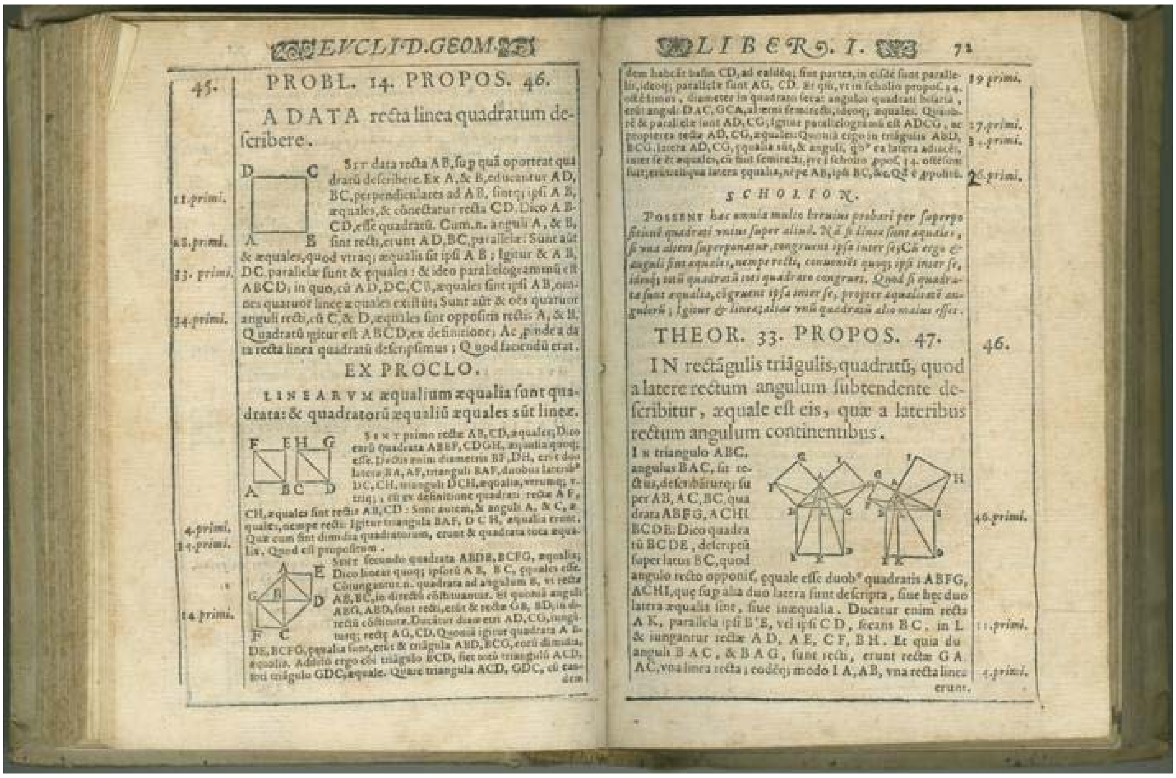
2ο Πειραματικό Γενικό
Λύκειο Αθηνών

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ



Σιδέρη Αλεξάνδρα
Σταυρακάκη Μαρία

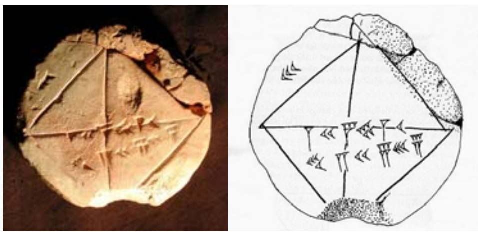
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Το Θεώρημα γεννιέται πριν από 4000 χρόνια

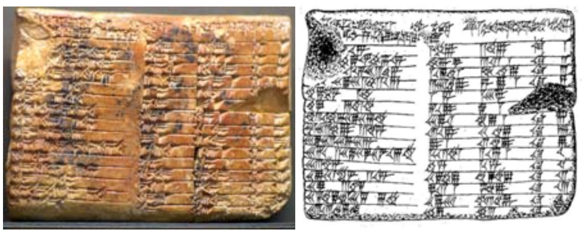
Οι ρίζες του Πυθαγορείου Θεωρήματος βρίσκονται στη Γεωμετρία. Το θεώρημα διαδραματίζει κεντρικό ρόλο σε πολυάριθμους επιστημονικούς κλάδους, θεωρητικούς ή εφαρμοσμένους. Περισσότερες από τετρακόσιες αποδείξεις του θεωρήματος είναι γνωστές, και ο αριθμός τους αυξάνεται.

Σήμερα, θεωρούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως μια αλγεβρική σχέση, τη $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, μέσω της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου αν είναι γνωστά τα μήκη των δύο άλλων πλευρών. Όμως ο Πυθαγόρας το έβλεπε ως μια γεωμετρική πρόταση σχετική με εμβαδά.

Ειδικές περιπτώσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος είναι ήδη γνωστές στους Βαβυλωνίους – περίπου το 1800 με 1600 π.χ. – την περίοδο της ηγεμονίας Hammurabi. Συναντούμε το θεώρημα στις πινακίδες YBC 7289 και Plimpton 322, που αποτελούν αξιοσημείωτα παραδείγματα της δεξιοτεχνίας τω Βαβυλωνίων στη Γεωμετρία και τη Θεωρία Αριθμών.



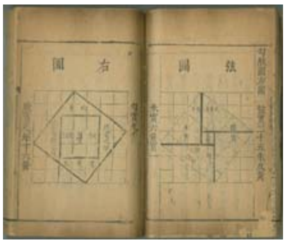
YBC 7289



Plimpton 322

Berlin 6619

Στο πάπυρο Berlin 6619 υπάρχει ένα πρόβλημα ανακάλυψης πυθαγορείων τριάδων, η μοναδική ένδειξη ότι οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι ασχολήθηκαν με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παρά τις ιστορίες περί των «αρπεδοναπτών», οι οποίοι υποτίθεται ότι κατασκεύαζαν ορθογώνια τρίγωνα με τη βοήθεια ενός σχοινιού με $3+4+5=12$ κόμπους.



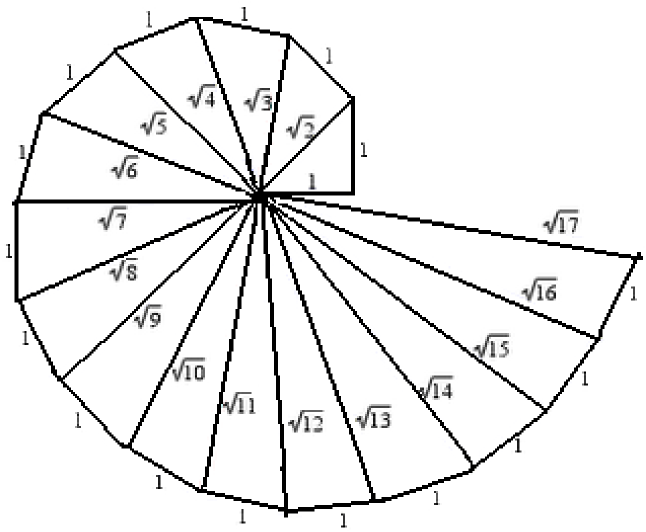
Ένα από τα παλαιότερα κινέζικα μαθηματικά βιβλία είναι το Chou Pei Suan Ching (周髀算经), πιθανότατα η συγγραφή του ανάγεται στην εποχή της δυναστείας των Χάν.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα αναφέρεται ως "Πρόταση Gougu " (勾股定理)

Στα ινδικά μαθηματικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα αναφέρεται ως Θεώρημα Bhaskara

Κάποιες εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος

- Υπολογισμός τετραγωνικών ριζών φυσικών αριθμών με τη βοήθεια της Πυθαγόρειας Έλικας

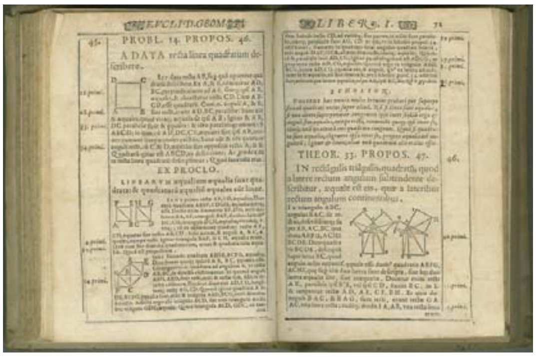


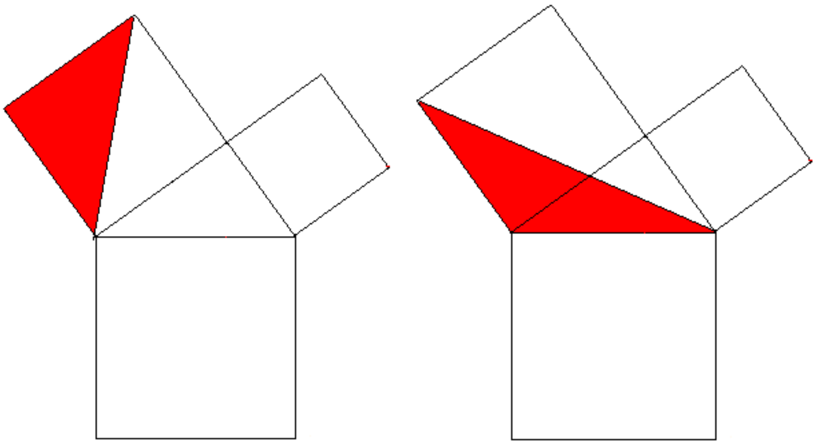
- Υπολογισμός της απόστασης στο Καρτεσιανό Επίπεδο.
- Ο τύπος της τριγωνομετρίας $συν^2θ+ημ^2θ=1$ αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος.
- Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι ισοδύναμο με το V Αίτημα των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Από τις 528 αποδείξεις του Πυθαγορείου

1.

Η απόδειξη της πρότασης 47 στο Βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη

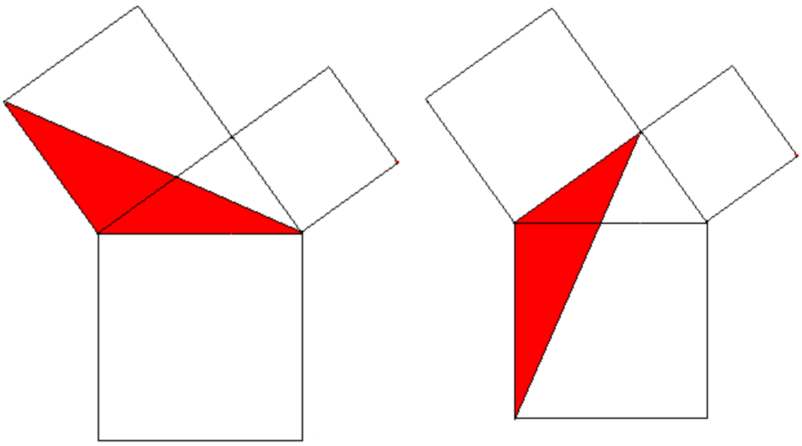




<u>Βήμα 1º</u>

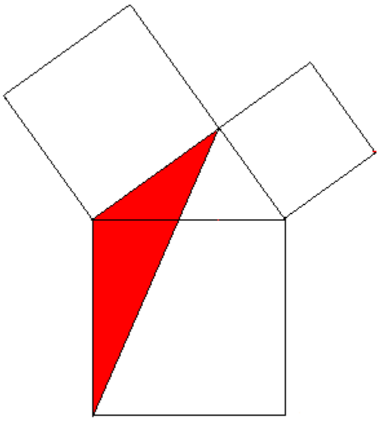
Τα κόκκινα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν

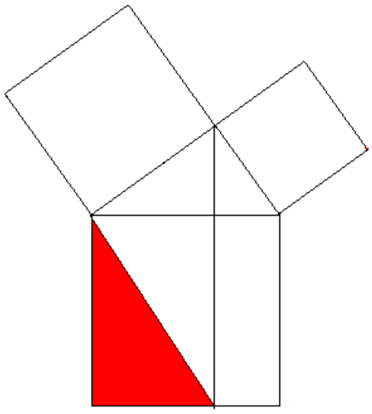
« ***Τρίγωνα που έχουν κοινή βάση και οι τρίτη κορυφή τους κείται σε ευθεία παράλληλη με τη βάση έχουν το ίδιο εμβαδόν.*** »



<u>Βήμα 2º</u>

Τα κόκκινα τρίγωνα είναι ίσα



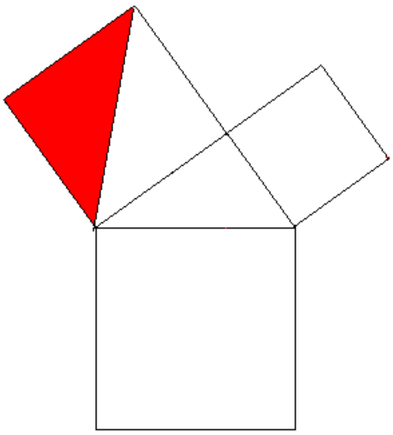


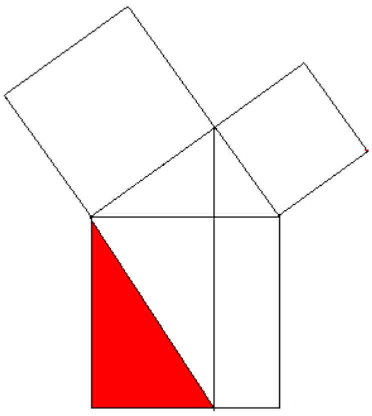
Βήμα 3º

Τα κόκκινα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν

« ***Τρίγωνα που έχουν κοινή βάση και οι τρίτη κορυφή τους κείται σε ευθεία παράλληλη με τη βάση έχουν το ίδιο εμβαδόν.***»

Συνεπώς

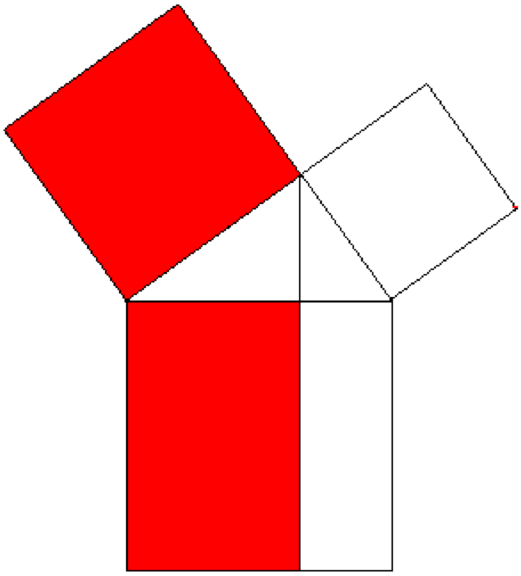




Βήμα 4º

Τα κόκκινα τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν

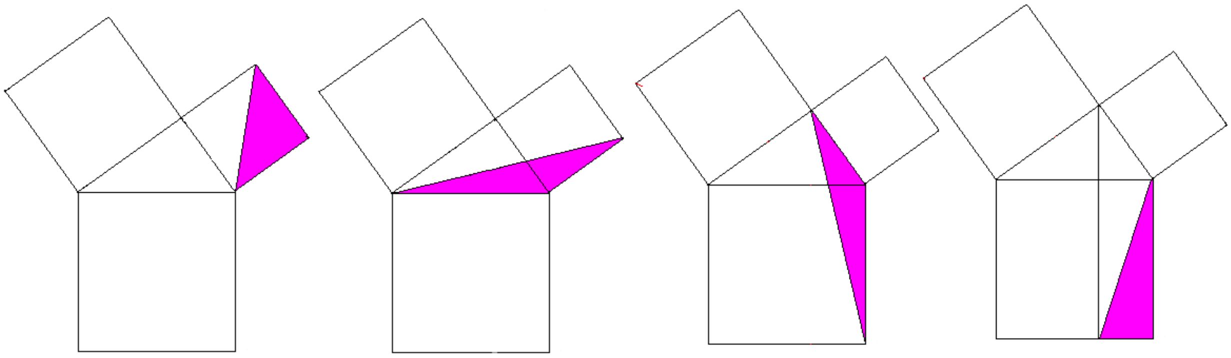
Δηλαδή

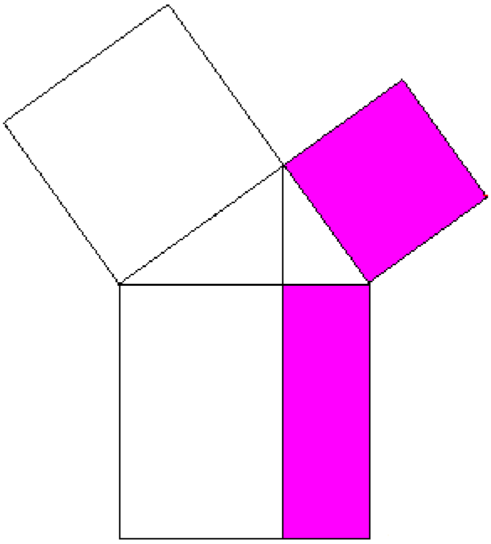


Το κόκκινο τετράγωνο
και
το κόκκινο ορθογώνιο
έχουν ίσα εμβαδά

(1)

Ομοίως

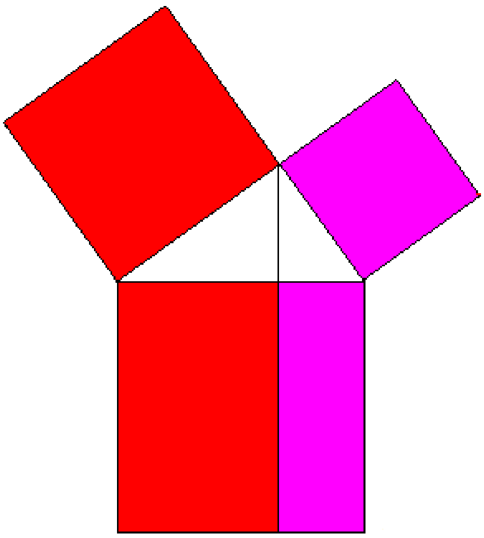




Το κόκκινο τετράγωνο
και
το κόκκινο ορθογώνιο
έχουν ίσα εμβαδά

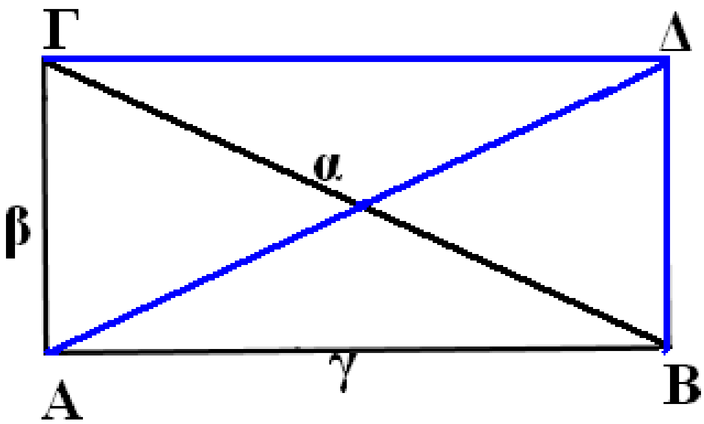
(2)

Από
(1), (2)



2.

Απόδειξη με τη βοήθεια του Θεωρήματος Πτολεμαίου

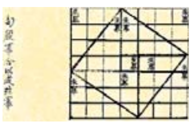


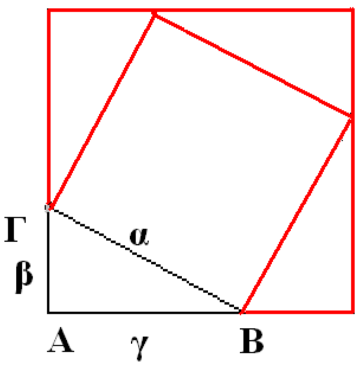
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Πτολεμαίου στο ορθογώνιο ΑΒΔΓ προκύπτει $(\mathrm{A\Delta})\cdot(\mathrm{B\Gamma})=(\mathrm{AB})\cdot(\Gamma\Delta)+(\mathrm{A\Gamma})\cdot(\mathrm{B\Delta})$

Συνεπώς $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

3.

Η κινέζικη απόδειξη





Η εξίσωση των εμβαδών μας δίνει

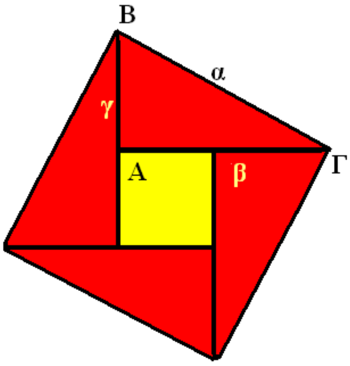
$$(\beta+\gamma)^2=\alpha^2+4\frac{1}{2}\beta\gamma$$

δηλαδή

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

4.

Η απόδειξη του Bhaskara



Η εξίσωση των εμβαδών μας δίνει

$$\alpha^2 = (\beta - \gamma)^2 + 4\frac{1}{2}\beta\gamma$$

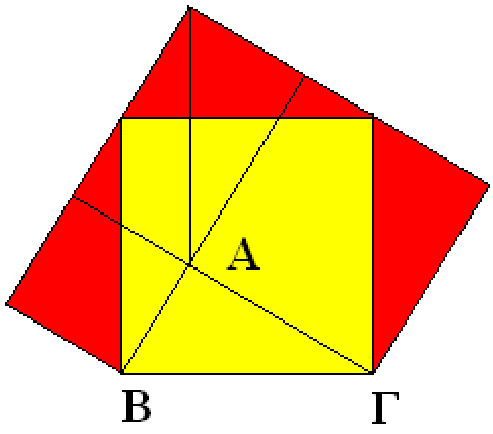
δηλαδή

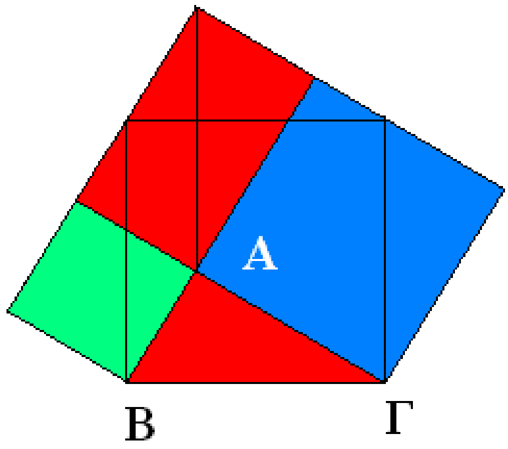
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

5.

Η απόδειξη του Thâbit ibn Qurra's

Ο Thâbit ibn Qurra's είναι ο μαθηματικός , που πρώτος απέδειξε το νόμο των συνημιτόνων.



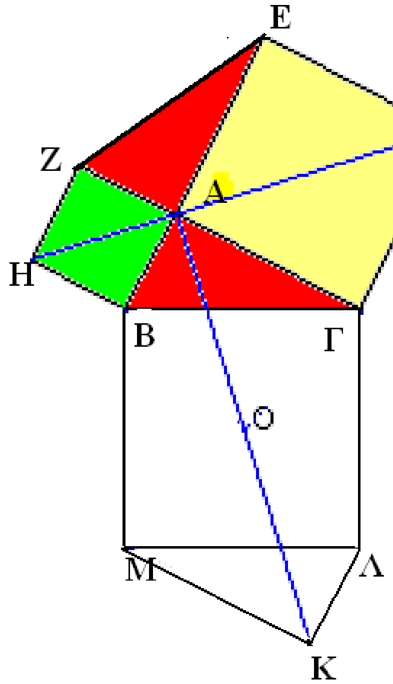


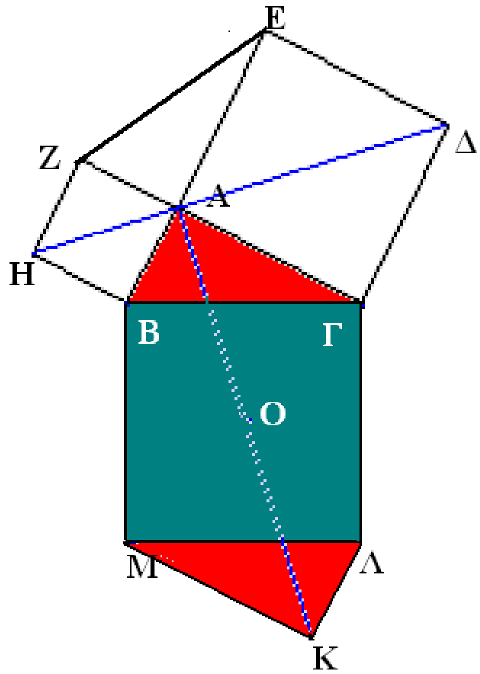
Από τα δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα το πιο πάνω σχήματος αφαιρούμε από το καθένα τρία (3) κόκκινα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς

Το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών του πράσινου και του γαλάζιου τετραγώνων.

6.

Η απόδειξη του Leonardo da Vinci





<u>Βήμα 1º</u>

Τα τετράπλευρα ΗΖΕΔ, ΗΒΓΔ, ΑΒΜΚ, ΑΓΛΚ είναι ίσα

Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΖΕ, ΜΚΛ είναι ίσα.

<u>Βήμα 2º</u>

Επειδή (ΒΓΔΕΖΗ) = (ΗΖΕΔ)+(ΗΒΓΔ)

και (ΑΒΜΚΛΓ)= (ΑΒΜΚ)+(ΑΓΛΚ)

Τα πολύγωνα ΒΓΔΕΖΗ και ΑΒΜΚΛΓ έχουν ίσα εμβαδά.

<u>Βήμα 3º</u>

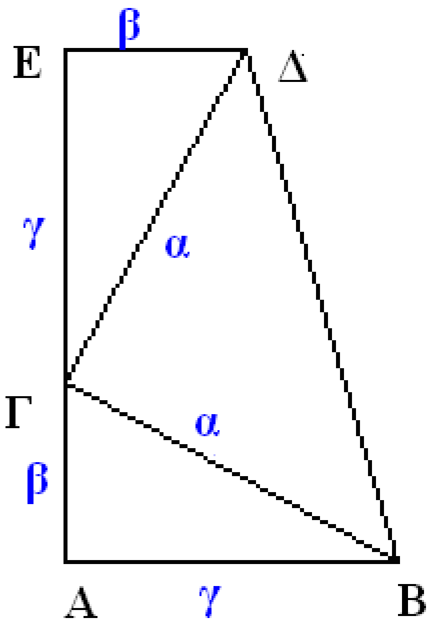
Επειδή (ΑΒΗΖ)+(ΑΓΔΕ)= (ΒΓΔΕΖΗ) – 2 (ΑΒΓ)

και (ΒΓΛΜ)= (ΑΒΜΚΛΓ) – 2 (ΑΒΓ)

Άρα (ΑΒΗΖ)+(ΑΓΔΕ)= (ΒΓΛΜ)

7.

Η απόδειξη
του προέδρου των Η.Π.Α
J.A. Garfield



<u>Βήμα 1º</u>

Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΕ είναι $(AB\Delta E)=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2$. **(1)**

<u>Βήμα 2º</u>

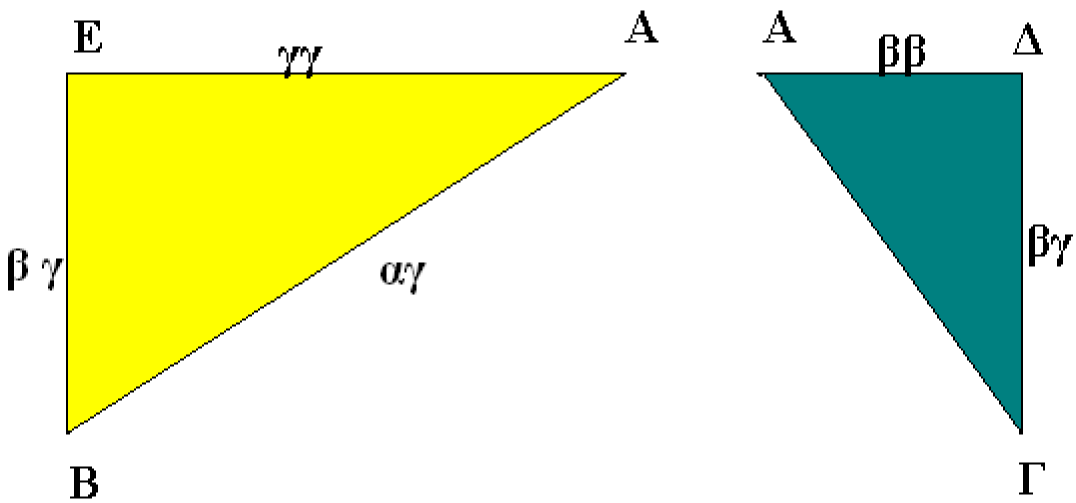
Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΕ είναι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ, ΓΔΕ,

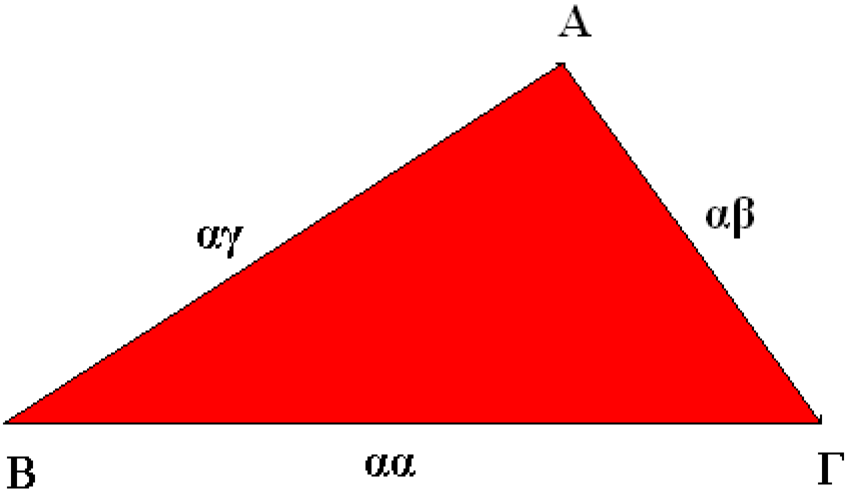
$(AB\Delta E)=2\frac{1}{2}\beta\gamma+\frac{1}{2}\alpha^2$ **(2)**

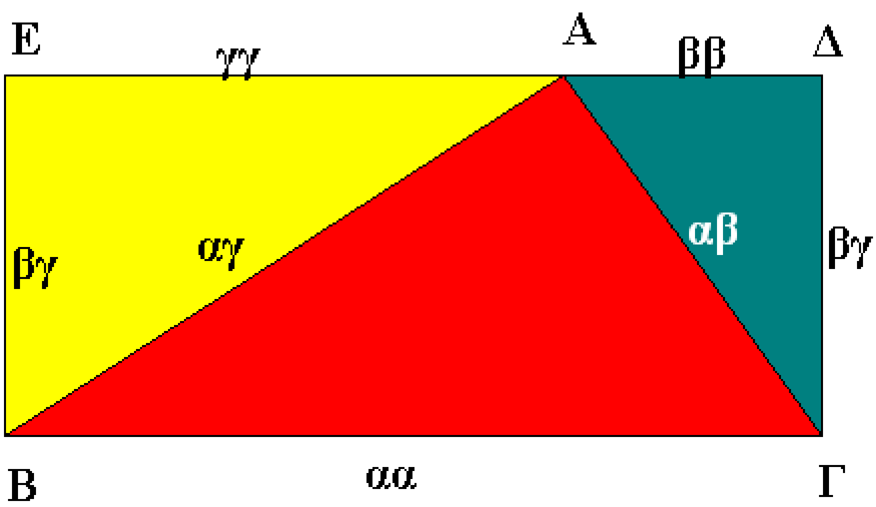
Από **(1), (2)** συμπεραίνουμε $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

8.

Απόδειξη με ομοιότητα

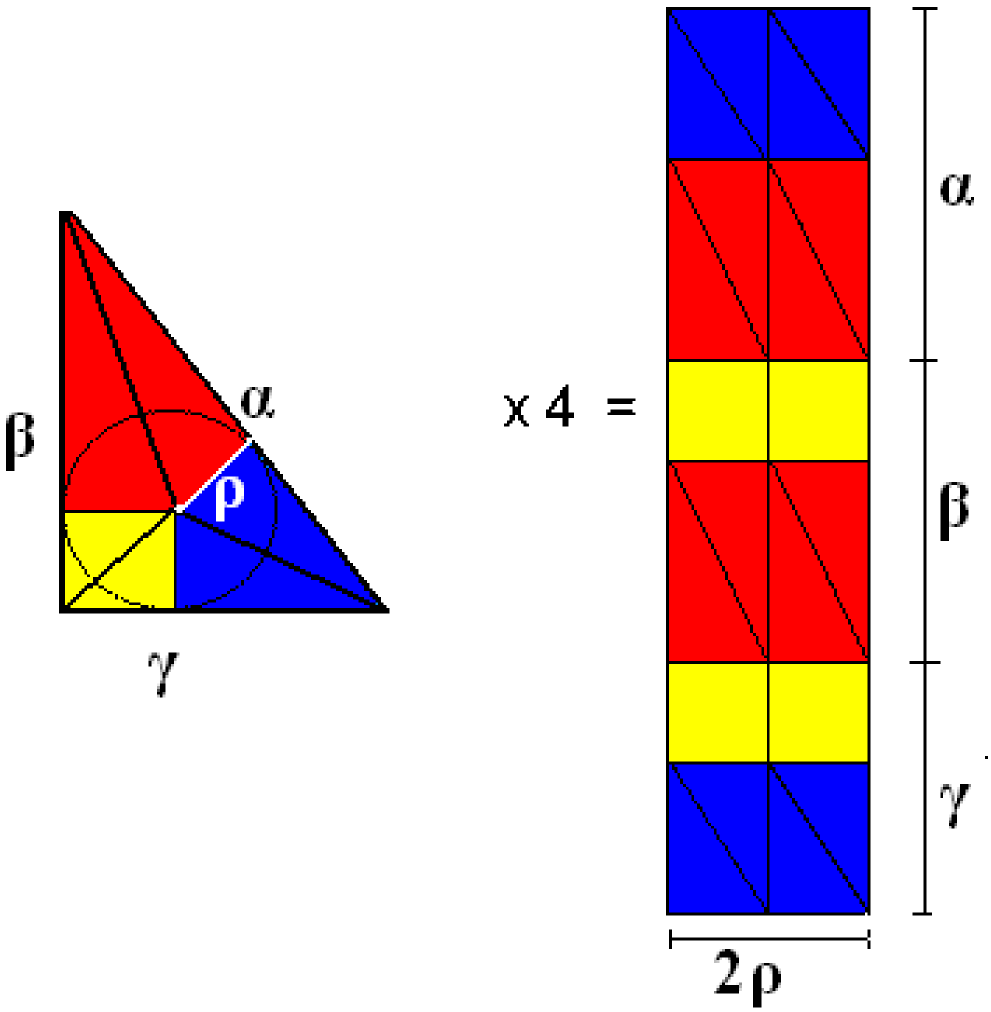






9.

Απόδειξη με τη βοήθεια του εγγεγραμμένου κύκλου



Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου.

Δηλαδή $4\frac{1}{2}\beta\gamma = 2\rho(\alpha+\beta+\gamma)$

επίσης $2\rho = \beta+\gamma-\alpha$

Συνεπώς $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Βιβλιογραφία

1. Loomis E. S., *The Pythagorean Proposition*, NCTM, Αθήνα 1968
2. Maor Eli, *Το Πυθαγόρειο Θεώρημα*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 2009