

# Άλγεβρα

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

### ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

#### 1. Πράξεις

##### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι πράξεις:  $\left(-2+\frac{1}{3}\right)-\left(4+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{5}\right)$ .

Απ.:  $-\frac{43}{15}$

2. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : (-2) - \left(3 + \frac{3}{4}\right) : \left(-3 + \frac{1}{2}\right)$$

$$B = \frac{\left(\frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) : (-3)}{1 + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3} + 1\right) : (-4)} - (-2) : \frac{1}{3}$$

Απ.:  $A = \frac{19}{12}$ ,  $B = \frac{67}{10}$

3. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \alpha - 2(\beta - \gamma) - \left\{ - \left[ 4\alpha - \beta - \gamma - 2(\alpha + \beta + \gamma) \right] \right\}$$

$$B = 8(\beta - \gamma) - \left\{ - \left[ \alpha - \beta - 3(\gamma - \beta + \alpha) \right] \right\}$$

Απ.:  $A = -\alpha + \beta + 5\gamma$ ,  $B = -2\alpha + 10\beta - 11\gamma$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $-7(8-x) + 5(11-x) + 2(1-x) + 5 = 0$

β)  $x - \frac{2}{5}(x+1) = 5$

Απ.: α) Αδύνατη, β)  $x = 9$

#### 2. Δυνάμεις

##### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α)  $5^{-3} \cdot (-5)^{-4}$ , β)  $\left[(-3)^{-4}\right]^2$

$$\text{Απ.: } \alpha) \frac{1}{78125}, \beta) \frac{1}{6561}$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{[(2x^{-2} \cdot \psi)^2]^{-4}}{(2x \cdot \psi^2)^{-5}}$ , αν  $x = -1$  και  $\psi = -2$ .

$$\text{Απ.: } A = -\frac{1}{2}$$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{(-2)^3 + 2^2 + (-1)^{12}}{4^{-2} - 2^{-3} + [(-2)^3]^{-1}}, \quad \beta) 12 \cdot \left[ 3^{-4} : \left( 2^4 : 3^2 - 2^2 : \frac{9}{8} \right) \right] + \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \right)^{-2}$$

$$\text{Απ.: } \alpha) 2^4, \beta) \frac{23}{300}$$

### 3. Ρίζες

#### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΕΙΣ

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση:  $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{48}$ .

$$\text{Απ.: } 2\sqrt{3}$$

2. Να βρεθεί το εξαγόμενο:  $\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{6}$ .

$$\text{Απ.: } \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

3. Να αποδείξετε ότι:  $\sqrt{25} - \sqrt{75} + \sqrt{12} + \sqrt{\sqrt{16}} = 7 - 3\sqrt{3}$ .

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) (2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 3\sqrt{2}), \quad \beta) \frac{\sqrt{4 \cdot 10^{-9}}}{\sqrt{16 \cdot 10^{-7}}}, \quad \gamma) 9\sqrt{3} : \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\text{Απ.: } \alpha) -5\sqrt{6}, \beta) \frac{1}{20}, \gamma) 27$$

5. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$ .

$$\text{Απ.: } -9 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$$

6. Να λύθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2x - 3 = \sqrt{3x} + \sqrt{2}, \quad \beta) \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Απ.: } x = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}$$

## 4. Διάταξη

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν  $\alpha > 1$  και  $\beta > 1$  να αποδείξετε ότι:  $\alpha + \beta < 1 + \alpha\beta$ .

2. Αν  $0 < \alpha < \beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha^2 < \beta^2$ .

3. Αν  $\beta < 0$ , να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$\Gamma = \alpha - \{ \alpha - (\beta + \alpha) - [\alpha - (2\alpha - \beta)] \}.$$

Απ.:  $\Gamma = 2\beta < 0$

4. Αν  $1 < x < 2$  και  $2 < \psi < 3$ , να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \quad x + \frac{1}{2}, \quad \beta) \quad -2x + 3, \quad \gamma) \quad -x, \quad \delta) \quad 2x - 3\psi$$

$$\text{Απ.: } \alpha) \quad \frac{3}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{5}{2}, \quad \beta) \quad -1 < -2x + 3 < 1, \quad \gamma) \quad -2 < -x < -1, \quad \delta) \quad -7 < 2x - 3\psi < -2$$

### ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = -[ -(-5) - (-3) ] + [ -(-8) ] \quad B = -\left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) + \left[ -7 + \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right]$$

Απ.:  $A = 0$ ,  $B = -6$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{(x^2)^5 \cdot x^7}{x^{15}}$$

$$B = \frac{(x^{-3})^2 \cdot x^2}{(x^{-2})^5}$$

$$\Gamma = \frac{(x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z)^{-2}}{x^4 \cdot z^{-4}}$$

$$\Delta = \frac{(-2)^7 \cdot x^3 \cdot y^2}{2^6 \cdot (x^{-3} \cdot y^{-2})^{-1}}$$

Απ.:  $A = x^2$ ,  $B = x^6$ ,  $\Gamma = x^{-2} \cdot y^2 \cdot z^2$ ,  $\Delta = -2$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i)} \quad \sqrt{24} + \sqrt{54} + \sqrt{96}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{11\sqrt{8} - 3\sqrt{50} + 9\sqrt{98}}{5\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 9\sqrt{32}}$$

iii)

$$(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$$

$$\text{iv)} \quad 3\sqrt{5} + 4\sqrt{20} - 5\sqrt{45}$$

4. Εάν  $-1 \leq x \leq 4$  και  $3 \leq y \leq 7$ , μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = -2y + 1,$$

$$B = -x + 2y$$

Απ.:  $-13 \leq A \leq -5$ ,  $2 \leq B \leq 15$

## 5. Μονώνυμα - Αναγωγή ομοίων όρων

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. (10/41) Να βρεθούν τα γινόμενα:

$$\text{ii)} \quad x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}axy\right) \cdot (9yx^2) \qquad \text{iv)} \quad \left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}x^3\right) \cdot (-4x)$$

**ΛΥΣΗ**

$$\text{ii)} \quad x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}axy\right) \cdot (9yx^2) = -\frac{9}{3}x^9ay^2 = -3x^9ay^2$$

$$\text{iv)} \quad \left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}x^3\right) \cdot (-4x) = -\frac{12}{4}x^6 = -3x^6$$

2. (11/41) Να βρεθούν τα γινόμενα:

$$\text{v)} \quad 2(-x) \cdot (-y) \cdot 7(-w) \qquad \text{vi)} \quad (-a)^2 \cdot (-b^2)$$

**ΛΥΣΗ**

$$\text{v)} \quad 2(-x) \cdot (-y) \cdot 7(-w) = 2xy \cdot 7(-w) = -14xyw$$

$$\text{vi)} \quad (-a)^2 \cdot (-b^2) = (+a^2) \cdot (-b^2) = -a^2 \cdot b^2$$

3. (12/41) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{v)} \quad (-16a\beta^3x) : (32a^2\beta) \qquad \text{vi)} \quad (42x^3y^2) : (xy)$$

$$\text{vii)} \quad (a^2\beta) : (4a\beta)$$

**ΛΥΣΗ**

$$\text{v)} \quad (-16a\beta^3x) : (32a^2\beta) = (-16a\beta^3x) \cdot \frac{1}{32a^2\beta} = \frac{-16a\beta^3x}{32a^2\beta} = \frac{-\beta^2x}{2a}$$

$$\text{vi)} \quad (42x^3y^2) : (xy) = (42x^3y^2) \cdot \frac{1}{xy} = \frac{42x^3y^2}{xy} = 42x^2y$$

$$\text{vii)} \quad (a^2\beta) : (4a\beta) = (a^2\beta) \cdot \frac{1}{4a\beta} = \frac{a^2\beta}{4a\beta} = \frac{a}{4}$$

4. (6/43) Να γίνει αναγωγή ομοίων όρων στις παραστάσεις:

$$\text{ii)} \quad 11x - [(5x + 3y) - 5y - (4x - 5y)]$$

$$\text{iii)} \quad [4a^4 - (5\beta^2\gamma^3 + \gamma^2)] - [7\gamma^2 - (\beta - \beta^2\gamma^3)] - (\gamma^2 + \beta)$$

**ΛΥΣΗ**

$$\text{ii)} \quad 11x - [(5x + 3y) - 5y - (4x - 5y)] = 11x - (5x + 3y - 5y - 4x + 5y) = 11x - x - 3y = 10x - 3y$$

$$\text{iii)} \quad [4a^4 - (5\beta^2\gamma^3 + \gamma^2)] - [7\gamma^2 - (\beta - \beta^2\gamma^3)] - (\gamma^2 + \beta) = 4a^4 - 5\beta^2\gamma^3 - \gamma^2 - (7\gamma^2 - \beta + 2\beta^2\gamma^3) - \gamma^2 - \beta =$$

$$= 4\alpha^4 - 5\beta^2\gamma^3 - \gamma^2 - 7\gamma^2 + \beta - 2\beta^2\gamma^3 - \gamma^2 - \beta = 4\alpha^4 - 7\beta^2\gamma^3 - 9\gamma^2$$

## 6. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. (6/46) Να γίνουν οι πράξεις:

ii)  $(3-x)(2x+1)(3x-4)$

iv)  $(2\mu^2-3\mu+5)(4-8\mu-\mu^2)$

**ΛΥΣΗ**

ii)  $(3-x)(2x+1)(3x-4) = (6x+3-2x^2-x)(3x-4) = (5x+3-2x^2)(3x-4) =$   
 $= 15x^2 - 20x + 9x - 12 - 6x^3 + 8x^2 = -6x^3 + 23x^2 - 11x - 12$

iv)  $(2\mu^2-3\mu+5)(4-8\mu-\mu^2) = 8\mu^2 - 16\mu^3 - 2\mu^4 - 12\mu + 24\mu^2 + 3\mu^3 + 20 - 40\mu - 5\mu^2 =$   
 $= 2\mu^4 - 13\mu^3 + 27\mu^2 - 52\mu + 20$

## 7. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

**ΟΡΙΣΜΟΙ**

1. Το τετράγωνο αθροίσματος:  $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

2. Το τετράγωνο διαφοράς:  $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

3. Η διαφορά επί άθροισμα:  $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

4. Ο κύβος αθροίσματος:  $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

5. Ο κύβος διαφοράς:  $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

6. Το άθροισμα κύβων δύο όρων:  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

7. Η διαφορά κύβων δύο όρων:  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

8. Το τετράγωνο αθροίσματος τριών όρων:  
 $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**Α΄ ΟΜΑΔΑ**

1. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:  
 $K = 7\alpha - \{-3\beta - [2\alpha + (4\alpha - 3\beta)] + (\alpha - 5\beta) - 2\alpha\} + 2\beta$ .

**Απ.:  $K = 14\alpha + 7\beta$**

2. Αν  $A = 2x^2 - 6x + 3$ ,  $B = 4x^2 - 1$ ,  $\Gamma = x^3 + 2x - 4$  και  $\Delta = x^2 - 7x$ , να βρεθούν τα:

α)  $A + 2B - \Gamma$ , β)  $A - B - [2(B + \Gamma) - \Delta]$ .

**Απ.:  $\alpha = -x^3 + 10x^2 - 8x + 5$ ,  $\beta = -2x^3 - 9x^2 - 17x + 14$**

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) (2x-3) - [-2x - (x^2-2)] - \{x^2 - [3x+4 - (x^2-1)]\}$$

$$\beta) \alpha^2 - 2\alpha\beta - \{2\alpha^2 - [3\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - 3\alpha^2] - \alpha\beta\}$$

$$\gamma) 3x^2 - \{x^2 - [x - (1-x^3) + 2x]\} - \{2x^3 + [x + (x^2-3) - 3x^2] - 1\} - 4$$

$$\text{Απ.: } \alpha) -x^2 + 7x, \beta) -5\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2, \gamma) -x^3 + 4x^2 - 2x - 1$$

**Β' ΟΜΑΔΑ**

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή των εξαγομένων για τις τιμές των γραμμάτων που αναφέρονται:

$$\alpha) (x^2y - 2xy^2)(2x - y) - 2x^3(x + y) - (x - y)(-2y^3), \text{ για } x = -1 \text{ και } y = 2$$

$$\beta) \alpha^2 + \alpha\beta^2 - [\alpha^3 - (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)], \text{ για } \alpha = -2 \text{ και } \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Απ.: } \alpha) -86, \beta) \frac{-41}{8}$$

2. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) (2x+1)^2 - (3x-2)^2 - (2x+5)(5-2x)$$

$$\beta) (2x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 1) + (x-3)(x+1) - 4(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$\text{Απ.: } \alpha) -x^2 + 16x - 28, \beta) 0$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) 8(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + (x^2 - 4x + 2)^2 - (x^4 - x^2 + 1)$$

$$\beta) (3x+2)^3 - (3x-2)^3$$

4. Να δείχθει ότι:  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma)$ .

5. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) (12x^5 - 6x^4 - 3x^3) : (-3x^3)$$

$$\beta) (2x^3y^2 - 6x^2y^3 + 3x^2y^2) : (3x^2y^2)$$

6. Να βρεθεί το αποτέλεσμα των πράξεων στην παράσταση:

$$A = \frac{x^3 - 27}{x - 3} - \frac{x^4 - 16}{x + 2} \cdot \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

$$\text{Απ.: } A = x^4 + 4x^2 + 18, x \neq -2, 1, 3$$

7. Να αντικαταστήσετε τον αστερίσκο έτσι ώστε να προκύψουν τριώνυμα που να είναι τέλεια τετράγωνα διωνύμου:

$$\alpha) x^2 + 2x + *, \quad \beta) 9x^2 + 4y^2 + *, \quad \gamma) x^2 + \frac{6}{5}x + *, \quad \delta)$$

$$49x^6 + \beta^8 + *$$

8. Να αποδείξετε τις ισότητες:

$$\alpha) (\alpha - \beta)^2 - (\beta - \alpha)^2 = 0$$

$$\beta) (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$\gamma) (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 4\beta^2$$

**Γ' ΟΜΑΔΑ**

- Αν  $x+y=\alpha$  και  $xy=\beta$ , να δείξετε ότι:
  - $x^2+y^2=\alpha^2-2\beta$
  - $x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta$
  - $x^4+y^4=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2$
- Να δείξετε την ισότητα:  $(\alpha+\beta)^3=\alpha(\alpha-3\beta)^2+\beta(\beta-3\alpha)^2$ .
- Αν  $\alpha+\beta+\gamma=0$ , να δείξετε ότι:  $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(\gamma^2-\alpha\beta)$ .
- Αν  $\alpha+\beta+\gamma=0$ , να δείξετε ότι:  $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2+9\alpha\beta\gamma=0$ .
- Αν  $\alpha\beta=1+3\lambda$  και  $\alpha+\beta=2+2\lambda$ , να δείξετε ότι:  $(2\alpha-3)(2\beta-3)=1$ .
- Αν  $\alpha+\beta=1$  και  $\alpha\beta=1$ , να δείξετε ότι:  $\alpha^3+\beta^3=1$ .

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**

- Πότε ένα πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού και πότε μηδενικό;
- Πώς βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο μονωνύμων;
- Πώς προσθέτουμε δύο πολυώνυμα;
- Πώς πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο με πολυώνυμο;
- Πώς υψώνουμε ένα μονώνυμο σε δύναμη;
- Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα;
- Γράψτε τα αναπτύγματα των παρακάτω παραστάσεων:  
 $(\alpha+\beta)^2$ ,  $(\alpha-\beta)^2$ ,  $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ ,  $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ ,  $(\alpha+\beta)^3$ ,  $(\alpha-\beta)^3$ ,  $\alpha^3+\beta^3$ ,  $\alpha^3-\beta^3$   
 Διατυπώστε τους αντίστοιχους κανόνες.

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1<sup>ο</sup>****Α' ΟΜΑΔΑ**

- Να γίνουν οι πράξεις:
  - $3x(x^2-1)-4x(x+2)-3x+4(x^2-1)$
  - $2\alpha(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-\beta^3-(\alpha-\beta)(-3\alpha\beta)-4\alpha^2\beta$

**Απ.: α)  $-x^3-4x^2-6x-4$ , β)  $2\alpha^3-3\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3$**
- Να βρείτε τα αναπτύγματα:
  - $(3\alpha-2\beta)^2$ , β)  $(3xy+1)^2$ , γ)  $(-3x+2y)^2$

**Β' ΟΜΑΔΑ**

- Να γίνουν οι πράξεις:
  - $(x+2)^2-(x+3)(x-3)-2(2x-3)$
  - $2(\alpha-2\beta)^2-3(\alpha+3\beta)^2-(2\alpha+3\beta)(3\alpha-2\beta)$