

2.4 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε κλασματική εξίσωση κάθε εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή.

Για παράδειγμα οι εξισώσεις $\frac{4}{x-4} + \frac{7}{x} = 5$, $\frac{2x}{x-1} + \frac{6}{x^2-1} = 1$

είναι κλασματικές

ενώ οι εξισώσεις $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} = 3x$, $4x + \frac{2x}{5} = \frac{3x}{4}$ δεν είναι κλασματικές

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Η διαδικασία που ακολουθούμε για την λύση μιας κλασματικής εξίσωσης είναι η εξής:

- Κάνουμε παραγοντοποίηση παρονομαστών.
- Παίρνουμε περιορισμούς για τους παρονομαστές(να μην είναι μηδέν).
- Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών.
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.
- Κάνουμε τις απλοποιήσεις οπότε μετά τις πράξεις προκύπτει μια εξίσωση πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
- Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει κατά τα γνωστά.
- Εξετάζουμε αν οι λύσεις είναι δεκτές ή απορρίπτονται λόγω των περιορισμών που θέσαμε.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες :
- α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$ ορίζονται αν $x \neq 0$ και $x \neq 1$.
- β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$.
- γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$, τότε αυτή γράφεται $5x + 3 = 2$.
- δ) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2+1} = x$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Οι όροι της εξίσωσης για να ορίζονται πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 1$. (Σ)
- β) Ο αριθμός 0 δεν είναι λύση της εξίσωσης γιατί $x \neq 0$ (ο x είναι παρονομαστής) (Λ)
- γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της παραπάνω εξίσωσης τότε προκύπτει η $5x + 3 = 2x^2$. (Λ)
- δ) Πράγματι ορίζεται για κάθε x γιατί $x^2+1 > 0$ άρα και $x^2+1 \neq 0$.
- Επίσης είναι $\frac{x^3}{x^2+1} = x \rightarrow (x^2+1) \frac{x^3}{x^2+1} = x(x^2+1) \rightarrow x^3 - x(x^2+1) = 0$
 $x[x^2 - (x^2+1)] = 0 \rightarrow x(x^2 - x^2 - 1) = 0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0$
 Άρα είναι σωστό (Σ)
2. Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε $\frac{3}{4}$. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση ;
- α) $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$ γ) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$ δ) $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η σωστή απάντηση είναι η γ

3. Η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$ έχει ως λύση τον αριθμό
- α) $x = 1$ β) $x = -1$ γ) $x = 0$ δ) $x = 2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι λύσεις που αποκλείονται καταρχάς είναι οι α) και β) γιατί μηδενίζουν τους παρονομαστές των δύο κλασματικών παραστάσεων και επομένως αυτές δεν ορίζονται. Η τρίτη λύση $x = 0$ αν αντικατασταθεί στην εξίσωση μας δίνει $-2+4=6$ που είναι λάθος, ενώ η $x = 2$ αν αντικατασταθεί στην εξίσωση μας δίνει $4+2=6$ που είναι αληθής. Επομένως η παραπάνω εξίσωση έχει ως λύση την δ) $x=2$.

4. Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση $2x-1=1$ που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό $x = 1$. Η απάντησή του είναι σωστή ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι λάθος γιατί λόγω των παρονομαστών πρέπει να υπάρχει ο περιορισμός $x \neq 1$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}, \quad \beta) \frac{7}{2y-3} = \frac{-1}{3}, \quad \gamma) \frac{4x+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$$

$$\delta) \frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}, \quad \epsilon) \frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}, \quad \sigma\tau) 1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{2}{x-1} &= \frac{1}{2} \\ 2(x-1) \frac{2}{x-1} &= \frac{1}{2} 2(x-1) \\ 4 &= x-1 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

α) Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε.Κ.Π($x-1$, 2) = $2(x-1)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $2(x-1) \neq 0$ οπότε $x-1 \neq 0$ και $x \neq 1$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π

Προκύπτει μια εξίσωση πρώτου βαθμού

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και βρίσκουμε την λύση.

$$\beta) \frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$$

$$3(2y-3) \frac{7}{2y-3} = 3(2y-3) \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$21 = -2y + 3$$

$$2y = 3 - 21$$

$$2y = -18$$

$$y = -9$$

$$\gamma) \frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$$

$$(\omega-2) \frac{4\omega+1}{\omega-2} = (\omega-2) \frac{9}{\omega-2}$$

$$4\omega+1=9$$

$$4\omega=8$$

$$\omega=2$$

$$\delta) \frac{7}{5\alpha} + \frac{3}{10} = \frac{2}{\alpha}$$

$$10\alpha \frac{7}{5\alpha} + 10\alpha \frac{3}{10} = 10\alpha \frac{2}{\alpha}$$

$$14 + 3\alpha = 20$$

$$3\alpha = 6$$

$$\alpha = 2$$

$$\epsilon) \frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$$

$$\frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$$

$$(x-3) \frac{2x+1}{x-3} = (x-3)2 + (x-3) \frac{7}{x-3}$$

$$2x+1=2x-6+7$$

$$0x=0$$

β) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το

$$\text{Ε. Κ. Π}(2y-3, 3) = 3(2y-3).$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $3(2y-3) \neq 0$ οπότε $y \neq \frac{3}{2}$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε. Κ. Π

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Προκύπτει μια εξίσωση πρώτου βαθμού οπότε χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και βρίσκουμε κατά τα γνωστά την λύση της, **η οποία είναι δεκτή.**

γ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών

$$\text{Ε. Κ. Π}[\omega-2, \omega-2] = \omega-2$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $\omega-2 \neq 0$ οπότε $\omega \neq 2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε. Κ. Π

Κάνουμε τις απλοποιήσεις

Προκύπτει μια εξίσωση πρώτου βαθμού οπότε χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και βρίσκουμε κατά τα γνωστά την λύση της, η οποία απορρίπτεται γιατί μηδενίζει τους παρονομαστές. **Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.**

δ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών

$$\text{Ε. Κ. Π}[5\alpha, 10, \alpha] = 10\alpha$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $10\alpha \neq 0$ οπότε $\alpha \neq 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Προκύπτει μια εξίσωση α' βαθμού την οποία και λύνουμε.

Η λύση που βρίσκουμε **είναι δεκτή.**

ε) Αλλάζουμε το πρόσημο στο τελευταίο κλάσμα για να φτιάξουμε τον παρονομαστή

κοινό με του πρώτου κλάσματος.

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών

$$\text{Ε. Κ. Π}[x-3, x-3] = x-3.$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $x-3 \neq 0$ οπότε $x \neq 3$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Προκύπτει μια εξίσωση α' βαθμού η οποία είναι **αόριστη ή ταυτότητα**, δηλαδή έχει σαν λύση οποιοδήποτε αριθμό εκτός του 3.

$$\sigma\tau) 1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$$

$$1 - \frac{5}{y-2} = -\frac{6-y}{y-2}$$

$$(y-2)1 - (y-2)\frac{5}{y-2} = -(y-2)\frac{6-y}{y-2}$$

$$y-2-5 = -6+y$$

$$0y = 1$$

στ) Αλλάζουμε το πρόσημο στο τελευταίο κλάσμα για να φτιάξουμε τον παρονομαστή κοινό με του πρώτου κλάσματος.

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών Ε. Κ. Π $[y-2, y-2] = y-2$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $y-2 \neq 0$ οπότε $y \neq 2$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Προκύπτει μια εξίσωση α' βαθμού η οποία είναι **αδύνατη**

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1, \quad \beta) \frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2, \quad \gamma) \frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2},$$

$$\delta) \frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1, \quad \epsilon) \frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}, \quad \sigma\tau) \frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$$

$$x^2 \frac{4}{x} - x^2 \frac{3}{x^2} = 1 \cdot x^2$$

$$4x - 3 = x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Στην εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχουμε $\alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 3$, οπότε:

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ δεκτή} \\ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

α) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το Ε. Κ. Π $[x, x^2, 1] = x^2$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $x^2 \neq 0$, οπότε $x \neq 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και επειδή προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού μεταφέρουμε όλους τους όρους σε ένα μέλος και την λύνουμε όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\beta) \frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2$$

$$y(y-1)\frac{5}{y} + y(y-1)\frac{4}{y-1} = 2y(y-1)$$

$$5(y-1) + 4y = 2y(y-1)$$

$$5y - 5 + 4y = 2y^2 - 2y$$

$$2y^2 - 11y + 5 = 0$$

β) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το Ε. Κ. Π $[y, y-1] = y(y-1)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $y(y-1) \neq 0$ οπότε $y \neq 0$ και $y \neq 1$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π. Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων και προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού.

Στην εξίσωση $2y^2 - 11y + 5 = 0$ είναι $\alpha = 2, \beta = -11, \gamma = 5$, οπότε έχουμε:

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 121 - 40 = 81 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 9}{4} = \begin{cases} y_1 = \frac{11+9}{4} = 5 \text{ δεκτή} \\ y_2 = \frac{11-9}{4} = \frac{1}{2} \text{ δεκτή} \end{cases}$$

$$\gamma) \frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2}$$

$$\omega^2(\omega+2)\frac{7}{\omega} - \omega^2(\omega+2)\frac{3}{\omega+2} =$$

$$= \omega^2(\omega+2)\frac{6}{\omega^2}$$

$$7\omega(\omega+2) - 3\omega^2 = 6(\omega+2)$$

$$7\omega^2 + 14\omega - 3\omega^2 = 6\omega + 12$$

$$4\omega^2 + 8\omega - 12 = 0$$

γ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το Ε. Κ. Π $[\omega, \omega+2, \omega^2] = \omega^2(\omega+2)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $\omega^2(\omega+2) \neq 0$ οπότε $\omega \neq 0$ και $\omega \neq -2$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Αφού μεταφέρουμε τους όρους σε ένα μέλος κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων και προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού.

Στην εξίσωση $4\omega^2 + 8\omega - 12 = 0$ είναι $\alpha = 4, \beta = 8, \gamma = -12$, οπότε έχουμε:

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12) = 64 + 192 = 256 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 4} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{-8+16}{8} = 1 \text{ δεκτή} \\ \omega_2 = \frac{-8-16}{8} = -3 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad & \frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1 \\ & (\alpha-2)^2 \frac{4}{(\alpha-2)^2} - (\alpha-2)^2 \frac{3}{\alpha-2} = 1(\alpha-2)^2 \\ & 4 - 3(\alpha-2) = (\alpha-2)^2 \\ & 4 - 3\alpha + 6 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 \\ & \alpha^2 - \alpha - 6 = 0 \end{aligned}$$

δ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το Ε. Κ. Π[(α-2)², α-2, 1] = (α-2)².

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: (α-2)² ≠ 0 οπότε α ≠ 2 Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π. Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα (α-β)² = α² - 2αβ + β²

Αφού μεταφέρουμε τους όρους σε ένα μέλος κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων και προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού.

Στην εξίσωση α² - α - 6 = 0 είναι α = -1, β = 1, γ = -6, οπότε έχουμε:

Η διακρίνουσα είναι Δ = β² - 4αγ = (-1)² - 4 · 1 · (-6) = 1 + 24 = 25 > 0

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ δεκτή} \\ \alpha_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \quad & \frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3} \\ & x(x+3) \frac{6}{x(x+3)} = \\ & = x(x+3) \frac{x+2}{x} + x(x+3) \frac{x+1}{x+3} \\ & 6 = (x+3)(x+2) + x(x+1) \\ & 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 + x^2 + x \\ & 2x^2 + 6x = 0 \\ & 2x(x+3) = 0 \\ & x = 0 \text{ ή } x = -3 \text{ απορρίπτονται και οι δύο} \end{aligned}$$

ε) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το Ε. Κ. Π[x(x+3), x, x+3] = x(x+3).

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: x(x+3) ≠ 0 οπότε x ≠ 0 και x ≠ -3.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Αφού μεταφέρουμε τους όρους σε ένα μέλος κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων και προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού (ελλιπής μορφή) την οποία λύνουμε με την βοήθεια της παραγοντοποίησης και της ιδιότητας α·β=0 τότε α=0 ή β=0. Λόγω των περιορισμών οι δύο λύσεις απορρίπτονται και η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

$$\begin{aligned}
 \text{στ)} \quad & \frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)} \\
 & y(y+1) \frac{y-1}{y} - y(y+1) \frac{2}{y+1} = \\
 & = y(y+1) \frac{y+3}{y(y+1)} \\
 & (y+1)(y-1) - 2y = y+3 \\
 & y^2 - 1 - 2y = y+3 \\
 & y^2 - 3y - 4 = 0
 \end{aligned}$$

στ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που

εδώ είναι το Ε. Κ. Π $[y, y+1, y(y+1)] = y(y+1)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $y(y+1) \neq 0$ οπότε $y \neq 0$ και $y \neq -1$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.

Κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων και προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού.

Στην εξίσωση $y^2 - 3y - 4 = 0$ είναι $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = -4$, οπότε έχουμε:

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} y_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ δεκτή} \\ y_2 = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ απορρίπτεται} \\ \text{λόγω των περιορισμών} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x+5}{x^2-5} = \frac{3}{x+5}, \quad \beta) \frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\gamma) \frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}, \quad \delta) \frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{x+5}{x^2-5} = \frac{3}{x+5}$$

$$\frac{x+5}{(x+5)(x-5)} = \frac{3}{x+5}$$

$$(x+5)(x-5) \frac{x+5}{(x+5)(x-5)} = (x+5)(x-5) \frac{3}{x+5}$$

$$x+5 = 3(x-5)$$

$$x+5 = 3x-15$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10$$

α) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε.Κ.Π.(x+5)(x-5,x+5) = (x+5)(x-5).

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: (x+5)(x-5) ≠ 0, οπότε είναι x ≠ -5 και x ≠ 5.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. Κάνουμε τις πράξεις εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα. Προκύπτει μια εξίσωση α' βαθμού. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

Η λύση x=10 είναι δεκτή

$$\beta) \frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\frac{y+1}{(y+1)(y-2)} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$(y+1)(y-2) \frac{y+1}{(y+1)(y-2)} -$$

$$(y+1)(y-2) \frac{1}{y-2} = 0$$

$$y+1 - (y+1) = 0$$

$$y+1 - y - 1 = 0$$

$$0y = 0$$

β) Παραγοντοποιούμε τον πρώτο παρονομαστή που είναι τριώνυμο με δοκιμές.

Εδώ ψάχνουμε να βρούμε δύο αριθμούς που έχουν γινόμενο -2 και άθροισμα 1. Αυτοί είναι το 1 και το -2.

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε.Κ.Π[(y+1)(y-2), y-2] = (y+1)(y-2).

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: (y+1)(y-2) ≠ 0

Οπότε έχουμε y ≠ -1 και y ≠ 2.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. Κάνουμε τις απλοποιήσεις και διώχνουμε την παρένθεση. Η εξίσωση πρώτου βαθμού που προκύπτει είναι **αόριστη**. Δέχεται σαν λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός του -1 και το 2.

$$\begin{aligned}
 \gamma) \quad & \frac{\omega^2 + 5}{\omega^2 - \omega} - \frac{\omega + 5}{\omega - 1} = \frac{1}{\omega} \\
 & \frac{\omega^2 + 5}{\omega(\omega - 1)} - \frac{\omega + 5}{\omega - 1} = \frac{1}{\omega} \\
 & \omega(\omega - 1) \frac{\omega^2 + 5}{\omega(\omega - 1)} - \\
 & - \omega(\omega - 1) \frac{\omega + 5}{\omega - 1} = \omega(\omega - 1) \frac{1}{\omega} \\
 & \omega^2 + 5 - \omega(\omega + 5) = \omega - 1 \\
 & \omega^2 + 5 - \omega^2 - 5\omega - \omega + 1 = 0 \\
 & -6\omega = -6 \\
 & \omega = 1 \text{ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta) \quad & \frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \\
 & \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \\
 & \alpha(\alpha - 2) \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)} + \alpha(\alpha - 2) \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \alpha(\alpha - 2) \frac{\alpha}{\alpha - 2} \\
 & 1 + (\alpha - 1)(\alpha - 2) = \alpha^2 \\
 & 1 + \alpha^2 - 2\alpha - \alpha + 2 = \alpha^2 \\
 & -3\alpha = -3 \\
 & \alpha = 1 \text{ δεκτή}
 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 \alpha) \quad & 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2 - y} = 0, \beta) \quad \frac{2\omega^2}{\omega^2 + 2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega + 2}, \\
 \gamma) \quad & \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}, \delta) \quad 1 + \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha + 4}{\alpha^2 - 3\alpha + 2}
 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ

γ) Παραγοντοποιούμε τον πρώτο παρονομαστή

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε. Κ. Π $[\omega(\omega - 1), \omega - 1, \omega] = \omega(\omega - 1)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $\omega(\omega - 1) \neq 0$

Οπότε έχουμε $\omega \neq 0$ και $\omega \neq 1$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Η εξίσωση πρώτου βαθμού που προκύπτει είναι **αδύνατη** γιατί η μοναδική λύση που έχει απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

δ) Παραγοντοποιούμε τον πρώτο παρονομαστή

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε. Κ. Π $[\alpha(\alpha - 2), \alpha, \alpha - 2] = \alpha(\alpha - 2)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $\alpha(\alpha - 2) \neq 0$

Οπότε έχουμε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 2$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Η εξίσωση πρώτου βαθμού που προκύπτει έχει **μοναδική λύση που είναι δεκτή**

$$\alpha) 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2 - y} = 0$$

$$1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y(y-1)} = 0$$

$$1y(y-1) - y(y-1)\frac{1}{y} - y(y-1)\frac{1}{y(y-1)} =$$

$$= 0y(y-1)$$

$$y(y-1) - (y-1) - 1 = 0 \quad \text{ή}$$

$$y^2 - y - y + 1 - 1 = 0$$

$$y^2 - 2y = 0 \quad \text{ή} \quad y(y-2) = 0$$

$$y = 0 \text{ απορρίπτεται} \quad \text{ή} \quad y = 2 \text{ δεκτή}$$

$$\beta) \frac{2\omega^2}{\omega^2 + 2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega + 2}$$

$$\frac{2\omega^2}{\omega(\omega + 2)} = 3 - \frac{4}{\omega + 2}$$

$$\omega(\omega + 2) \frac{2\omega^2}{\omega(\omega + 2)} =$$

$$= 3\omega(\omega + 2) - \omega(\omega + 2) \frac{4}{\omega + 2}$$

$$2\omega^2 = 3\omega^2 + 6\omega - 4\omega \quad \text{ή} \quad \omega^2 + 2\omega = 0$$

$$\text{ή} \quad \omega(\omega + 2) = 0 \text{ οπότε } \omega = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = -2$$

α) Παραγοντοποιούμε τον δεύτερο παρονομαστή

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το

Ε. Κ. Π[1, y, y(y-1)] = y(y-1).

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: y(y-1) ≠ 0 οπότε y ≠ 0 και

y ≠ 1. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π. Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Αφού μεταφέρουμε τους όρους σε ένα μέλος κάνουμε αναγωγές όμοιων όρων και προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού(ελλειπής μορφή) την οποία λύνουμε με την βοήθεια της παραγοντοποίησης και της ιδιότητας α.β=0 τότε α = 0 ή β = 0. Λόγω των περιορισμών η μία από τις δύο λύσεις απορρίπτεται και η εξίσωση έχει ως μοναδική λύση την y=2

β) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι το

Ε. Κ. Π[ω(ω+2), ω+2] = ω(ω+2).

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: ω(ω+2) ≠ 0 οπότε ω ≠ 0 και ω ≠ -2. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων.

Προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού την οποία λύνουμε με παραγοντοποίηση.

Από τις δύο λύσεις καμία δεν είναι δεκτή λόγω των περιορισμών

Επομένως η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

$$\begin{aligned}
 \gamma) \quad & \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x - 1}{x^2 - 4} \\
 & \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 2)} \\
 & (x + 2)(x - 2)^2 \cdot \frac{1}{(x - 2)^2} = \\
 & = (x + 2)(x - 2)^2 \cdot \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 2)} \\
 & x + 2 = (x - 2)(2x - 1) \\
 & x + 2 = 2x^2 - x - 4x + 2 \\
 & 2x^2 - 6x = 0 \\
 & 2x(x - 3) = 0 \\
 & x = 0 \text{ ή } x = 3 \\
 \delta) \quad & 1 + \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha + 4}{\alpha^2 - 3\alpha + 2} \\
 & 1 + \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{\alpha + 4}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)} \\
 & 1(\alpha - 2)(\alpha - 1) + (\alpha - 2)(\alpha - 1) \frac{3\alpha}{\alpha - 2} = \\
 & = (\alpha - 2)(\alpha - 1) \frac{\alpha + 4}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)} \\
 & (\alpha - 2)(\alpha - 1) + 3\alpha(\alpha - 1) = \alpha + 4 \\
 & \alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2 + 3\alpha^2 - 3\alpha = \alpha + 4 \\
 & 4\alpha^2 - 7\alpha - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Στην εξίσωση $4\alpha^2 - 7\alpha - 2 = 0$ είναι $\alpha = 4, \beta = -7, \gamma = -2$, οπότε έχουμε:

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 49 + 32 = 81 > 0$
Επομένως οι λύσεις είναι:

γ) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές (ο πρώτος είναι ανάπτυγμα και ο δεύτερος διαφορά τετραγώνων).

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών που εδώ είναι το
Ε.Κ.Π $[(x-2)^2, (x-2)(x+2)] = (x-2)^2(x+2)$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $(x-2)^2(x+2) \neq 0$

οπότε $x \neq 2$ και $x \neq -2$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων.

Προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού (ελλiptής μορφή) την οποία λύνουμε με παραγοντοποίηση.

Οι λύσεις είναι και οι δύο δεκτές.

Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές ο δεύτερος βρίσκεται με την μέθοδο των δοκιμών (ψάχνω δύο αριθμούς με άθροισμα -3 και γινόμενο 2).

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών που εδώ είναι το

Ε.Κ.Π $[(\alpha-2), (\alpha-2)(\alpha-1)] = (\alpha-2)(\alpha-1)$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $(\alpha-2)(\alpha-1) \neq 0$

οπότε $\alpha \neq 2$ και $\alpha \neq 1$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων.

Προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm 9}{8} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{7+9}{8} = 2 \\ \text{απορρίπτεται} \\ \alpha_2 = \frac{7-9}{8} = -\frac{1}{4} \text{ δεκτή} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3}, \quad \beta) \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{x}{x - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{\frac{x^2}{x} - \frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x}{\frac{x^2-4}{x}} = \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{4}{3}$$

$$3(x+2)(x-2) \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} = 3(x+2)(x-2) \frac{4}{3}$$

$$3x^2 = 4(x^2-4) \quad \text{ή} \quad 3x^2 = 4x^2 - 16$$

$$x^2 - 16 = 0 \quad \text{ή} \quad (x+4)(x-4) = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

α) Στο κλάσμα του πρώτου μέλους κάνουμε τις πράξεις στον παρονομαστή. Αφού κάνουμε ομώνυμες τις κλασματικές παραστάσεις και τις προσθέσουμε κάνουμε το σύνθετο κλάσμα απλό.

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που είναι Ε. Κ. Π[(x+2)(x-2), 3] = 3(x+2)(x-2)

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: 3(x+2)(x-2) ≠ 0 και x ≠ 0 (λόγω του παρονομαστή του σύνθετου κλάσματος)

οπότε x ≠ 2 και x ≠ -2 και x ≠ 0. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε. Κ. Π

Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων.

Προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού (ελλιπής μορφή) την οποία λύνουμε με παραγοντοποίηση. Οι λύσεις είναι και οι δύο δεκτές.

$$\begin{aligned}
 \beta) \quad & \frac{1}{1+\frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \\
 & \frac{1}{\frac{x+3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \\
 & \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \\
 & \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{(x+3)(x-3)} \\
 & (x+3)(x-3) \frac{x}{x+3} - (x+3)(x-3) \frac{2}{x-3} = \\
 & = (x+3)(x-3) \frac{x-6}{(x+3)(x-3)} \\
 & x(x-3) - 2(x+3) = x-6 \\
 & x^2 - 3x - 2x - 6 = x-6 \quad \text{ή} \quad x^2 - 6x = 0 \\
 & x(x-6) = 0 \quad \text{οπότε} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 6
 \end{aligned}$$

β) Στο πρώτο κλάσμα του πρώτου μέλους κάνουμε τις πράξεις στον παρονομαστή

Αφού κάνουμε ομώνυμες τις κλασματικές παραστάσεις και τις προσθέσουμε κάνουμε το σύνθετο κλάσμα απλό.

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που είναι

$$\begin{aligned}
 \text{Ε. Κ. } \Pi[(x+3), (x-3), (x+3)(x-3)] &= \\
 &= (x+3)(x-3)
 \end{aligned}$$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $(x+3)(x-3) \neq 0$ και $x \neq 0$ (λόγω του παρονομαστή του σύνθετου κλάσματος) οπότε $x \neq 3$ και $x \neq -3$ και $x \neq 0$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε. Κ.

Π. Κάνουμε τις απλοποιήσεις και εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων.

Προκύπτει μια εξίσωση β' βαθμού (ελλιπής μορφή) την οποία λύνουμε με παραγοντοποίηση.

Από τις λύσεις μόνο η δεύτερη είναι δεκτή

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λύσετε τους τύπους:

$$\alpha) p = \frac{m}{V} \quad \text{ως προς } V \quad \beta) E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \quad \text{ως προς } R, \quad \gamma) R = \rho \frac{1}{S} \quad \text{ως προς } S,$$

$$\delta) \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{ως προς } T_1, \quad \epsilon) \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ως προς } R,$$

$$\sigma\tau) \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad \text{ως προς } \alpha, \quad \zeta) \frac{1}{v_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{ως προς } v_\alpha^2,$$

$$\eta) S = \frac{\alpha}{1-\lambda} \quad \text{ως προς } \lambda$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) p = \frac{m}{V} \quad \text{ή} \quad V \cdot p = V \cdot \frac{m}{V}$$

$$V \cdot p = m \quad \text{ή} \quad \frac{V \cdot p}{p} = \frac{m}{p}$$

$$V = \frac{m}{p}$$

$$\beta) E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

$$4R \cdot E = 4R \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \quad \text{ή} \quad 4E \cdot R = \alpha\beta\gamma$$

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$$

$$\gamma) R = \rho \frac{l}{S} \quad \text{ή} \quad S \cdot R = S \cdot \rho \frac{l}{S}$$

$$\text{ή} \quad S \cdot R = \rho \cdot l \quad \text{ή} \quad \frac{S \cdot R}{R} = \frac{\rho \cdot l}{R} \quad \text{ή} \quad S = \frac{\rho \cdot l}{R}$$

$$\delta) \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$T_1 T_2 \frac{P_1 V_1}{T_1} = T_1 T_2 \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$T_2 P_1 V_1 = T_1 P_2 V_2$$

$$\frac{T_2 P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{T_1 P_2 V_2}{P_2 V_2} \quad \text{ή} \quad T_1 = \frac{T_2 P_1 V_1}{P_2 V_2}$$

$$\epsilon) \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$RR_1 R_2 \frac{1}{R} =$$

$$= RR_1 R_2 \frac{1}{R_1} + RR_1 R_2 \frac{1}{R_2}$$

α) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π(V,1) = V

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου $p \neq 0$.

β) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π(1,4R) = 4R.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

γ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π[1,S]=S.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

δ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π[T₁,T₂] = T₁T₂

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

ε) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π[R,R₁,R₂] = RR₁R₂

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Ο άγνωστος μας είναι στο δεύτερο μέλος.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

$$R_1 R_2 = R R_2 + R R_1$$

$$R_1 R_2 = R(R_2 + R_1) \text{ ή } R = \frac{R_1 R_2}{(R_2 + R_1)}$$

$$\sigma\tau) \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

$$\alpha\beta\gamma \frac{2}{\beta} = \alpha\beta\gamma \frac{1}{\alpha} + \alpha\beta\gamma \frac{1}{\gamma}$$

$$2\alpha\gamma = \beta\gamma + \alpha\beta \text{ ή } 2\alpha\gamma - \alpha\beta = \beta\gamma$$

$$(2\gamma - \beta)\alpha = \beta\gamma \text{ ή } \alpha = \frac{\beta\gamma}{2\gamma - \beta}$$

$$\zeta) \frac{1}{v_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

$$v_\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \frac{1}{v_\alpha^2} =$$

$$= v_\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \frac{1}{\beta^2} + v_\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\beta^2 \gamma^2 = v_\alpha^2 \gamma^2 + v_\alpha^2 \beta^2$$

$$\frac{\beta^2 \gamma^2}{\gamma^2 + \beta^2} = \frac{v_\alpha^2 (\gamma^2 + \beta^2)}{\gamma^2 + \beta^2}$$

$$v_\alpha^2 = \frac{\beta^2 \gamma^2}{\gamma^2 + \beta^2}$$

$$\eta) S = \frac{\alpha}{1-\lambda} \text{ ή } (1-\lambda)S = (1-\lambda) \frac{\alpha}{1-\lambda}$$

$$(1-\lambda)S = \alpha \text{ ή } S - \lambda S = \alpha$$

$$\lambda S = S - \alpha \text{ ή } \lambda = \frac{S - \alpha}{S}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα $\frac{17}{4}$.

στ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π[β, α, γ] = αβγ. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Ο άγνωστος μας είναι στο πρώτο και δεύτερο μέλος.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

ζ) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π[v_α^2 , β^2 , γ^2] = $v_\alpha^2 \beta^2 \gamma^2$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Ο άγνωστος μας είναι στο δεύτερο μέλος.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

η) Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π[1, 1-λ] = 1-λ.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ για να βρούμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$.

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

ΛΥΣΗ

α) Αν x είναι ο αριθμός, τότε ο αντίστροφος του θα είναι $\frac{1}{x}$ οπότε είναι

$$x + \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$$

$$4x \cdot x + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4x \cdot \frac{17}{4}$$

$$4x^2 + 4 = 17x$$

$$4x^2 - 17x + 4 = 0$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π(1,x,4) = 4x.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $4x \neq 0$ οπότε $x \neq 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

Στην εξίσωση $4x^2 - 17x + 4 = 0$ είναι $\alpha = 4, \beta = -17, \gamma = 4$, οπότε έχουμε

Η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 289 - 64 = 225 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = \begin{cases} x_1 = \frac{17+15}{8} = 4 \text{ Δεκτή.} \\ x_2 = \frac{17-15}{8} = \frac{1}{4} \text{ Δεκτή.} \end{cases}$$

β) Αν x είναι ο αριθμός, τότε $\frac{3+x}{5+x} = \frac{4}{5}$

$$\frac{3+x}{5+x} = \frac{4}{5}$$

$$5(5+x) \frac{3+x}{5+x} = 5(5+x) \frac{4}{5}$$

$$5(3+x) = 4(5+x)$$

$$15 + 5x = 20 + 4x$$

$$5x - 4x = 20 - 15 \text{ ή } x = 5$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π(5+x,5) = 5(5+x).

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $5(5+x) \neq 0$ οπότε $x \neq -5$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Η λύση που βρίσκουμε είναι δεκτή.

γ) Έστω x ο ένας άρτιος, τότε ο άλλος θα είναι $x+2$ οπότε είναι $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$$

$$4(x+2) \frac{x}{x+2} = 4(x+2) \frac{3}{4}$$

$$4x = 3(x+2)$$

$$4x = 3x + 6$$

$$4x - 3x = 6$$

$$x = 6$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π. $(2+x, 4) = 4(x+2)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $5(x+2) \neq 0$ οπότε $x \neq -2$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Η λύση που βρίσκουμε είναι δεκτή.

Άρα οι δύο διαδοχικοί άρτιοι είναι οι 6,8

ΑΣΚΗΣΗ 8

Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 ευρώ. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει καθένας 9 ευρώ παραπάνω από αυτά που έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;

ΛΥΣΗ

Έστω x τα άτομα που γευμάτισαν. Εφόσον τα παιδιά ήταν 3, οι ενήλικες ήταν $x-3$. Δημιουργούμε μια εξίσωση με τα χρήματα που θα πληρώσουν οι ενήλικες για να καλύψουν το ποσό των 84 ευρώ.

$$(x-3) \cdot \frac{84}{x} + 9(x-3) = 84$$

$$x \cdot (x-3) \cdot \frac{84}{x} + 9x \cdot (x-3) = 84x$$

$$84(x-3) + 9x \cdot (x-3) = 84x$$

$$84x - 252 + 9x^2 - 27x - 84x = 0$$

$$9x^2 - 27x - 252 = 0$$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε. Κ. Π. $(x, 1, 1) = x$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $x \neq 0$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

Στην εξίσωση $x^2 - 3x - 28 = 0$ είναι $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = -28$, οπότε έχουμε

Η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{121}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+11}{2} = 7 \text{ Δεκτή.} \\ x_2 = \frac{3-11}{2} = -4 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Επομένως τα άτομα που γευμάτισαν ήταν 7.(4 ενήλικες-3 παιδιά)

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτιρίου και έδωσε 240 ευρώ. Πριν από αρκετούς μήνες, που η τιμή κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 ευρώ μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.

ΛΥΣΗ

Έστω x οι πυροσβεστήρες που αγόρασε. Δημιουργούμε μια εξίσωση με τα χρήματα που πλήρωσε να αγοράσει τον ένα πυροσβεστήρα.

Τώρα τον αγοράζει $\frac{240}{x}$, ενώ σύμφωνα με το πρόβλημα πριν αγόραζε 2

παραπάνω $x+2$ και η τιμή τους ήταν μικρότερη κατά 4 ευρώ, δηλαδή

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+2} + 4$$

$$x(x+2)\frac{240}{x} = x(x+2)\frac{240}{x+2} + 4x(x+2)$$

$$240(x+2) = 240x + 4x(x+2)$$

$$240x + 480 = 240x + 4x^2 + 8x$$

$$-4x^2 + 240x - 240x - 8x + 480 = 0$$

$$-4x^2 - 8x + 480 = 0 \text{ ή } x^2 + 2x - 120 = 0$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε. Κ. Π($x, x+2, 1$) = $x(x+2)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $x(x+2) \neq 0$ οπότε $x \neq 0$ και $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

Στην εξίσωση $x^2 + 2x - 120 = 0$ είναι $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -120$, οπότε έχουμε
Η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120) = 4 + 480 = 484 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+22}{2} = 10 \text{ Δεκτή.} \\ x_2 = \frac{-2-22}{2} = -12 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Επομένως αγόρασε 10 πυροσβεστήρες.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Αναμειγνύουμε 12 gr ενός διαλύματος Α με 15 gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm³ ενός διαλύματος Γ. Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι 0,2 gr/cm³ μικρότερη.

ΛΥΣΗ

Έστω x η πυκνότητα του διαλύματος Α τότε ο όγκος του διαλύματος Α σύμφωνα με τον τύπο $v = \frac{m}{\rho}$ (όγκος = μάζα/ πυκνότητα) θα είναι $\frac{12}{x}$ και ο

όγκος του διαλύματος Β θα είναι $\frac{15}{x-0,2}$. Ο συνολικός όγκος που είναι το

άθροισμα αυτών των δύο είναι 25 cm³. Η εξίσωση των όγκων είναι:

$$\frac{12}{x} + \frac{15}{x-0,2} = 25$$

$$x(x-0,2)\frac{12}{x} + x(x-0,2)\frac{15}{x-0,2} = 25x(x-0,2)$$

$$12(x-0,2) + 15x = 25x(x-0,2)$$

$$12x - 2,4 + 15x = 25x^2 - 5x$$

$$-25x^2 + 12x + 15x + 5x - 2,4 = 0$$

$$-25x^2 + 32x - 2,4 = 0$$

$$25x^2 - 32x + 2,4$$

Στην εξίσωση $25x^2 - 32x + 2,4 = 0$ είναι $\alpha = 25, \beta = -32, \gamma = 2,4$, οπότε έχουμε

Η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-32)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (2,4) = 1024 - 240 = 784 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-32) \pm \sqrt{784}}{2 \cdot 25} = \begin{cases} x_1 = \frac{32 + 28}{50} = 1,2 \text{ Δεκτή.} \\ x_2 = \frac{32 - 28}{50} = 0,08 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Επομένως η πυκνότητα του διαλύματος Α είναι 1,2 gr/cm³.

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π(x, x-0,2, 1) = x(x-0,2).
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $x(x-0,2) \neq 0$ οπότε $x \neq 0$ και $x \neq 0,2$
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.
Κάνουμε τις απλοποιήσεις.
Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα
Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας.

ΛΥΣΗ

Έστω x οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας. Δημιουργούμε μια εξίσωση με την ποσότητα των προϊόντων που θα συσκευάσει κάθε υπάλληλος πριν και μετά την απουσία των συναδέλφων τους.

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x-2} - 3$$

$$x(x-2)\frac{120}{x} = x(x-2)\frac{120}{x-2} - 3x(x-2)$$

$$120(x-2) = 120x - 3x^2 + 6x$$

$$120x - 240 = 120x - 3x^2 + 6x$$

$$3x^2 + 120x - 120x - 6x - 240 = 0$$

$$3x^2 - 6x - 240 = 0$$

Στην εξίσωση $3x^2 - 6x - 240 = 0$ είναι $\alpha = 3, \beta = -6, \gamma = -240$, οπότε έχουμε

Η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-240) = 36 + 2880 = 2916 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{2916}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} x_1 = \frac{6+54}{6} = 10 \text{ Δεκτή.} \\ x_2 = \frac{6-54}{6} = -8 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Επομένως οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας είναι 10.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 Km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως, λόγω ολισθηρότητας του δρόμου, μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 Km/h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση.

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε. Κ. Π($x, x-2, 1$) = $x(x-2)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $x(x-2) \neq 0$ οπότε $x \neq 0$ και $x \neq 2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

Έστω x η μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση, τότε σύμφωνα με το πρόβλημα. Δημιουργούμε μια εξίσωση με τον χρόνο σύμ-

φωνα με τον τύπο $t = \frac{s}{u}$, όπου s το διάστημα και u η ταχύτητα.

$$\frac{210}{x} - \frac{210}{x+10} = \frac{1}{2}$$

$$2x(x+10) \frac{210}{x} - 2x(x+10) \frac{210}{x+10} = \frac{1}{2} 2x(x+10)$$

$$420(x+10) - 420x = x(x+10)$$

$$420x + 4200 - 420x = x^2 + 10x$$

$$-x^2 + 420x - 420x - 10x + 4200 = 0$$

$$-x^2 - 10x + 4200 = 0$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π $(x, x+10, 2) = 2x(x+10)$.
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $2x(x+10) \neq 0$ οπότε $x \neq 0$ και $x \neq -10$
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.
Κάνουμε τις απλοποιήσεις.
Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα
Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

Στην εξίσωση $-x^2 - 10x + 4200 = 0$ είναι $\alpha = -1, \beta = -10, \gamma = 4200$, οπότε έχουμε

Η διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4200 = 100 + 9600 = 16800 > 0$$

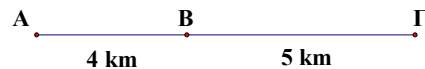
Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16800}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{10 + 130}{-2} = -70 \text{ Απορρίπτεται.} \\ x_2 = \frac{10 - 130}{-2} = 60 \text{ Δεκτή} \end{cases}$$

Επομένως η μέση ταχύτητα του πούλμαν ήταν 60 km/h.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε ένας ποδηλάτης από τη θέση Α στη θέση Β είναι 2 km/h μικρότερη από την ταχύτητα με την οποία κινήθηκε από τη θέση Β στη θέση Γ. Κατά την επιστροφή από το Γ στο Α κινήθηκε με ταχύτητα ίση με το ημίθροισμα των προηγούμενων ταχυτήτων. Να βρείτε τις ταχύτητες με τις οποίες κινήθηκε ο ποδηλάτης αν, ο χρόνος μετάβασης και επιστροφής είναι ο ίδιος.



ΛΥΣΗ

Έστω x η ταχύτητα με την οποία κινείται ο ποδηλάτης από τη θέση Β στη θέση Γ. Τότε η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε από τη θέση Α στη θέση Β είναι $x-2$. Ενώ η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε κατά την επιστροφή είναι $\frac{x-2+x}{2} = x-1$, άρα σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος έχουμε

την κλασματική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-2} + \frac{5}{x} &= \frac{9}{x-1} \\ x(x-2)(x-1) \frac{4}{x-2} + x(x-2)(x-1) \frac{5}{x} &= \\ &= x(x-2)(x-1) \frac{9}{x-1} \\ 4x(x-1) + 5(x-2)(x-1) &= 9x(x-2) \\ 4x^2 - 4x + 5x^2 - 15x + 10 &= 9x^2 - 18x \\ 4x^2 - 4x + 5x^2 - 15x + 10 - 9x^2 + 18x &= 0 \\ -x + 10 &= 0 \rightarrow x = 10 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι Ε. Κ. Π($x, x-2, x-1$) = $x(x-1)(x-2)$.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $x(x-1)(x-2) \neq 0$ οπότε $x \neq 0$ και $x \neq 1$ και $x \neq 2$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις. Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Προκύπτει μια α' βαθμού εξίσωση.

Άρα η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε ο ποδηλάτης από τη θέση Β στη θέση Γ είναι 10 km/h και η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε από τη θέση Α στη θέση Β είναι $10-2=8$ km/h ενώ τέλος η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε κατά την επιστροφή είναι $10-1=9$ km/h.

- 2.** Ένα ποταμόπλοιο εκτελεί τη διαδρομή από το Α στο Β ($AB=24$ km) και επιστρέφει στο σημείο Α κάνοντας συνολικά χρόνο 5 ώρες. Κατά την μετάβαση από το Α στο Β προστίθεται και η ταχύτητα 2 km/h με την οποία κινείται το νερό του ποταμού, ενώ κατά την επιστροφή αφαιρείται. Να βρείτε με ποια ταχύτητα κινείται το ποταμόπλοιο.

ΛΥΣΗ

Έστω x η ταχύτητα του πλοίου οπότε η ταχύτητα του όταν πηγαίνει σύμφωνα με το ρεύμα του ποταμού θα είναι $x+2$ και η ταχύτητα του όταν πηγαίνει αντίθετα με το ρεύμα του ποταμού θα είναι $x-2$. Σύμφωνα με τον τύπο

$t = \frac{s}{u}$ της φυσικής δημιουργούμε την κλασματική εξίσωση:

$$\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5$$

$$\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5$$

$$(x+2)(x-2)\frac{24}{x+2} + (x+2)(x-2)\frac{24}{x-2} =$$

$$= 5(x+2)(x-2)$$

$$24(x-2) + 24(x+2) = 5x^2 - 20$$

$$24x - 48 + 24x + 48 - 5x^2 + 20 = 0$$

$$-5x^2 + 48x + 20 = 0$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε. Κ. $\Pi(x-2, x+2) =$

$= (x+2)(x-2).$

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: $(x+2)(x-2) \neq 0$ οπότε $x \neq -2$ και $x \neq 2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

Στην εξίσωση $-5x^2 + 48x + 20 = 0$ είναι $\alpha = -5, \beta = 48, \gamma = 20$, οπότε έχουμε
Η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 48^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 20 = 2304 + 400 = 2704 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-48 \pm \sqrt{2704}}{2 \cdot (-5)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-48 + 52}{-10} = -\frac{2}{5} \text{ Απορρίπτεται.} \\ x_2 = \frac{-48 - 52}{-10} = 10 \text{ Δεκτή} \end{cases}$$

Επομένως η ταχύτητα του πλοίου ήταν 10 km/h.

- 3.** Ένας έμπορος πλήρωσε 3000 ευρώ και προμηθεύτηκε CD ενός καλλιτέχνη. Πούλησε ορισμένα από αυτά και εισέπραξε 1800 ευρώ κερδίζοντας από το κάθε CD 3 ευρώ. Επειδή του έμειναν αδιάθετα ακόμα 100 CD, αναγκάστηκε να τα πουλήσει στην τιμή που τα προμηθεύτηκε. Να βρείτε σε ποια τιμή πούλησε ο έμπορος τα τελευταία 100 CD.

ΛΥΣΗ

Έστω x η τιμή που πούλησε ο έμπορος τα τελευταία 100 CD τότε σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος έχουμε την κλασματική εξίσωση:

$$\frac{3000}{x} - \frac{1800}{x+3} = 100$$

$$x(x+3) \frac{3000}{x} - x(x+3) \frac{1800}{x+3} =$$

$$= 100x(x+3)$$

$$3000(x+3) - 1800x = 100x(x+3)$$

$$3000x + 9000 - 1800x = 100x^2 + 300x$$

$$3000x + 9000 - 1800x - 100x^2 - 300x = 0$$

$$-100x^2 + 900x + 9000 = 0$$

$$-x^2 + 9x + 90 = 0$$

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π των παρονομαστών που εδώ είναι

Ε. Κ. Π(x, x+3) =

= x (x+3).

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ: x(x+3) ≠ 0 οπότε x ≠ 0 και x ≠ -3

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

Κάνουμε τις απλοποιήσεις.

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

Προκύπτει μια β' βαθμού εξίσωση.

Στην εξίσωση $-x^2 + 9x + 90 = 0$ είναι $\alpha = -1, \beta = 9, \gamma = 90$, οπότε έχουμε

Η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 90 = 81 + 360 = 441 > 0$

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{441}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-9 + 21}{-2} = -6 \text{ Απορρίπτεται.} \\ x_2 = \frac{-9 - 21}{-2} = 15 \text{ Δεκτή} \end{cases}$$

Επομένως η τιμή που πούλησε τα τελευταία 100 CD ήταν 15 ευρώ.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση; (2 μονάδες)

B. Αν διαιρέσουμε έναν ακέραιο αριθμό x με τον προηγούμενο ακέραιο βρίσκουμε τον αριθμό 2. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την προηγούμενη πρόταση;

α) $\frac{x+1}{x+3} = 2$, β) $\frac{x}{x+1} = 2$, γ) $\frac{x-1}{x} = 2$, δ) $\frac{x}{x-1} = 2$ (2 μονάδες)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-3} + \frac{3}{x-2} = \frac{20}{x}$ έχουν νόημα αν $x \neq 3$ και $x \neq 2$

β) Ο αριθμός -1 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = -2$.

γ) Η εξίσωση $\frac{12}{x} + \frac{5(x+3)}{x-1} = 19$ γράφεται $12(x-1) + 5x(x+3) = 19$

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x}{3x-9} + \frac{1}{x} = \frac{3}{3x-x^2}$. (7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς τέτοιους ώστε το πηλίκο του πρώτου προς τον δεύτερο αυξημένο κατά το πηλίκο του δεύτερου προς

τον τρίτο να ισούται με $\frac{7}{6}$.

(6 μονάδες)