ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

3Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε: $f(x_0)=\eta$.

(Μονάδες 7)

Α2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν για τις συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$, $g:A\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in A$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in A$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in A$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
β . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

(Μονάδες 4)

Α3. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

(Μονάδες 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την ένδειξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

β. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$

γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ε. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 1-\ln x, & 0<x\leq 1 \\ -x^2+2x-1, & x>1 \end{cases}$

Β1. Να μελετήσετε τη παραπάνω συνάρτηση ως προς τη συνέχεια και μετά να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 6)

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Β3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, της f και να την ορίσετε.

(Μονάδες 7)

Β4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=1-\alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln(1-x)+1$, $x<1$ και $g(x)=2-\frac{2}{x+1}$, $x>-1$

Γ1. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς την μονοτονία.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

(Μονάδες 7)

Γ3. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+1$, $-1<x<1$ τότε, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Γ4. Αν $-1<\alpha<\beta<1$ τότε, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $h(\xi)=2\ln\left(\frac{2-(\alpha+\beta)}{2+\alpha+\beta}\right)+1$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)-2f(1-x)=3x-3-e^{-x}+2e^{x-1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x)=x-e^{-x}+1$

(Μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες , το πρόσημο της συνάρτησης f και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{-x}-x-2)+e>0$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει:

$$e^{x_0}\cdot(x_0-2020)=1$$

(Μονάδες 7)

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:
Τα θέματα επιμελήθηκε ο **Βαβουρανάκης Μιχάλης, Μαθηματικός -MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.**
Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**