ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΟΥ 2ου ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΧΑΛΚΙΔΑΣ ΑΝΑΒΙΩΝΟΥΝ ΤΑ « ΟΠΤΙΚΑ » ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου

(Με συμμετοχή του 2ου ΓΕΛ Χαλκίδας)

Ρεαλιστικά Μαθηματικά και Μοντελοποίηση

« Μέθοδος μέτρησης ενός απρόσιτου ύψους - Επαναδιαπραγμάτευση της πρότασης του Ευκλείδη με νεότερα μαθηματικά αλλά και τεχνολογικά εργαλεία »

Ο Θαλής (624 π.Χ. - 546 π.Χ) όταν ταξίδεψε στην Αίγυπτο μέτρησε το ύψος της κάθε πυραμίδας και απέσπασε το θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου Άμασι. Για τη μέτρηση του ύψους των πυραμίδων χρησιμοποίησε το μήκος της σκιάς ενός ραβδιού, **δηλαδή χρησιμοποίησε τις ηλιακές ακτίνες**.

Ο Ευκλείδης (325 π.Χ. - 270 π.Χ).επιλύει το πρόβλημα της μέτρησης ενός απρόσιτου ύψους **“ σαν να μην υπήρχε ήλιος ”** (όπως περιγράφει στο έργο του « Οπτικά ») δηλαδή χωρίς την βοήθεια των ηλιακών ακτινών και της σκιάς που προκύπτει από αυτές. **Χρησιμοποιεί όμως τις οπτικές ακτίνες.**

Η παρακάτω δραστηριότητα υλοποιήθηκε σε διδακτική ώρα των μαθηματικών της Γ΄ τάξης του 2ου Γυμνασίου Χαλκίδας την **14η εβδομάδα του έτους 2022**. Όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητές μας, εφαρμόσαμε τις αρχές της **Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης – ΡΜΕ,** εμπνευστής και θεμελιωτής της οποίας θεωρείται ο **Hans Freudenthal (1905 – 1990)**. Στη δραστηριότητα συμμετείχαν και δύο τμήματα της Β΄ Λυκείου του 2ου ΓΕΛ Χαλκίδας, ύστερα από πρόσκλησή μας.

Η κατάσταση προβλήματος

Βρισκόσαστε μπροστά σε ένα κτήριο και στο έδαφος υπάρχει ένα μικρός καθρέφτης. Προχωράτε μπρος πίσω, μέχρι να δείτε την κορυφή του κτηρίου στον καθρέφτη. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου; (Πρόταση 19 από τα οπτικά του Ευκλείδη)

Στα « *Οπτικά* » του Ευκλείδη καταγράφεται η πρώτη συστηματική προσπάθεια μέτρησης με ένα απλό εργαλείο, **έναν απλό καθρέπτη**. Στην επόμενη δραστηριότητα θα εξερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να κάνουμε μία τέτοια μέτρηση και το πιο σημαντικό, ποια μαθηματικά τεκμηριώνουν την αξιοπιστία των μετρήσεων, **μέσα από την προσομοίωση των εργαλείων αυτών**.

Μεθοδολογία Εργασίας

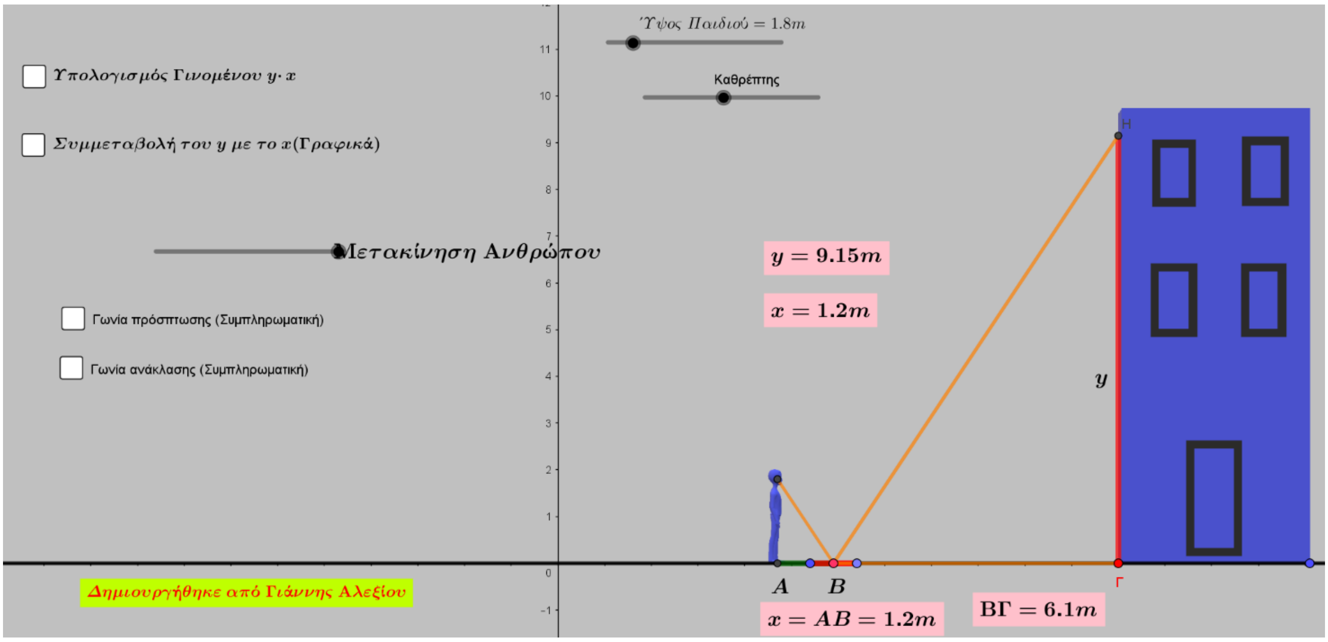
Περίοδος υλοποίησης της δραστηριότητας : 14η εβδομάδα του έτους 2022

1ο στάδιο (Στη τάξη)

- **(Ιστορία των Μαθηματικών)** Έγινε συζήτηση στη τάξη για τον Ευκλείδη, τον Έλληνα μαθηματικό, που δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Έγινε αναφορά στο γνωστότερο έργο του που είναι τα **Στοιχεία**, το οποίο αποτελείται από 13 βιβλία. Στη συνέχεια μιλήσαμε για το άλλο έργο του, τα « οπτικά », ένα από τα ελάχιστα διασωζόμενα κείμενα γεωμετρικής οπτικής το οποίο αποτελείται από 58 προτάσεις. Στις προτάσεις 18-21 επιλύονται διάφορα προβλήματα μέτρησης ύψους ή βάθους με τη βοήθεια των ακτινών του ήλιου ή των οπτικών ακτινών. **Συγκεκριμένα, στη πρόταση 19, ο Ευκλείδης επιλύει το πρόβλημα της μέτρησης ενός απρόσιτου ύψους “ σαν να μην υπήρχε ήλιος ” , δηλαδή χωρίς την βοήθεια των ηλιακών**

ακτινών και της σκιάς που προκύπτει από αυτές. Χρησιμοποιεί όμως τις οπτικές ακτίνες με την παραδοχή ότι προέρχονται από το μάτι του παρατηρητή, τις οποίες οδηγεί να ανακλασθούν σ' ένα οριζόντιο επίπεδο κάτοπτρο και μετά την εκτροπή να συναντήσουν το ανώτατο σημείο του αντικειμένου που θέλει να μετρήσει.

- Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία στη συνέχεια να δούνε μια **προσομοίωση της δραστηριότητας** που αναπτύχθηκε με το **λογισμικό geogebra** από τον Μαθηματικό Αλεξίου Ιωάννη (βλ. **εικόνα 1**)



Εικόνα 1: Προσομοίωση του προβλήματος με το λογισμικό geogebra (Δημιουργήθηκε από τον Αλεξίου Ιωάννη, Μαθηματικό του 2ου Γυμνασίου Χαλκίδας)

- **Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με το πρόβλημα:** *Βρισκόσαστε μπροστά σε ένα κτήριο και στο έδαφος υπάρχει ένα μικρός καθρέφτης. Προχωράτε μπρος πίσω, μέχρι να δείτε την κορυφή του κτηρίου στον καθρέφτη. Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου; (Πρόταση 19 από τα οπτικά του Ευκλείδη)*
- Με χρήση του λογισμικού geogebra και φύλλο εργασίας οι μαθητές πραγματοποιούν **προσομοίωση** του προβλήματος και **ανακαλύπτουν** ποια μαθηματικά τεκμηριώνουν την αξιοπιστία των μετρήσεων.

  Γνωστικά αντικείμενα: α) Η έννοια της γραφικής παράστασης συνάρτησης (*Β΄ Λυκείου*) **β)** Αντιστρόφως ανάλογα ποσά (*Β Λυκείου και Γ΄ Γυμνασίου*) και **γ) Ομοιότητα τριγώνων** (*Β΄ Λυκείου και Γ΄ Γυμνασίου*)

2ο στάδιο δραστηριότητας (υλοποίηση προσομοίωσης)

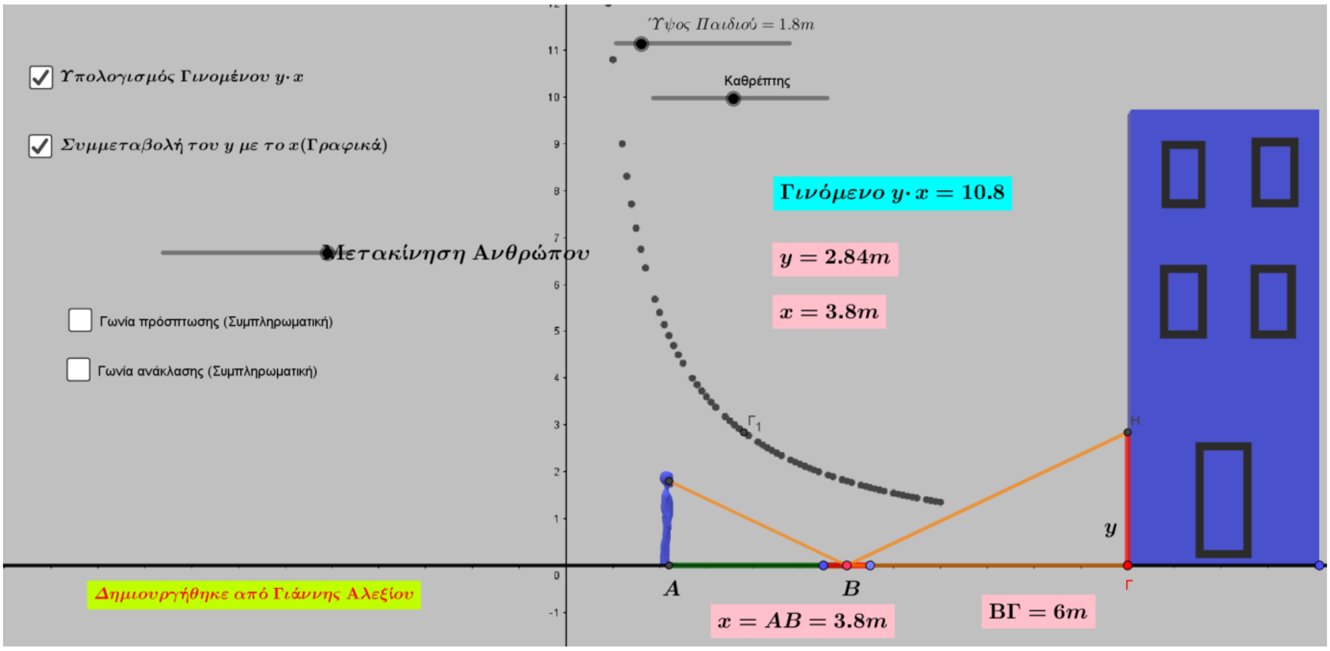
Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με τους μαθητές να εφαρμόζουν τα συμπεράσματα της προσομοίωσης σε πραγματικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, το τμήμα χωρίστηκε σε ομάδες, χρησιμοποίησαν ένα μικρό καθρέφτη, ένας μαθητής από κάθε ομάδα τοποθετήθηκε σε μια απόσταση x από αυτόν και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της προσομοίωσης, υπολόγισαν το ύψος του κτηρίου στο οποίο φτάνει η οπτική τους ακτίνα, **μέσω της ομοιότητας των τριγώνων** ή **της συνάρτησης που ανακάλυψαν στην προσομοίωση**.

Τα υλικά που χρειάστηκαν ήταν:

1. Κάτοπτρο (καθρεφτάκι)
2. Πινέζα και κλωστή
3. Βαρελάκι - Βαρίδι
4. Μονωτική ταινία και μετροταινία

- Οι **μαθητές της Γ΄ Τάξης Γυμνασίου** μετά τις απαραίτητες μετρήσεις που πήραν υπολόγισαν, αρχικά, το ύψος της μπασκέτας του Γηπέδου μπάσκετ το οποίο είχαν αρχικά μετρήσει με την βοήθεια της μετροταινίας. Παρατήρησαν ότι με ένα καθρεπτάκι και λίγα Μαθηματικά κατάφεραν να υπολογίσουν με μεγάλη ακρίβεια το πραγματικό ύψος. Έτσι προχώρησαν στον υπολογισμό του απρόσιτου ύψους του σχολικού κτιρίου **μέσω της ομοιότητα τριγώνων**.

- Στη συνέχεια, **μαθητές της Β΄ Τάξης Λυκείου** υπολόγισαν το ύψος του σχολικού κτιρίου μέσω της συνάρτησης της υπερβολής (*κατά την διάρκεια της προσομοίωσης με το λογισμικό geogebra κατάφεραν να «* ***ανακαλύψουν*** *» την συμμεταβολή του ύψους y που βλέπουν μέσα από το κάτοπτρο και της απόστασής τους x από το κάτοπτρο, μια υπερβολή* όπως στο σχήμα 2)



Εικόνα 2: Συμμεταβολή του y με το x

Συμπεράσματα

1. Οι μαθητές έδειξαν μεγάλο ενδιαφέρον για την δραστηριότητα, **αναγνωρίζοντας τη σημασία των Μαθηματικών στην καθημερινή πραγματικότητα**.
2. Οι μαθητές εργάστηκαν με έννοιες καθημερινές και κατάφεραν να τις συνδέσουν με τα μαθηματικά.
3. **Η χρήση υπολογιστή, εκτός από την οπτικοποίηση, επέτρεψε στο μαθητή να πειραματιστεί και να αναζητήσει ακραίες καταστάσεις του προβλήματος μέσα από μετρήσεις, συγκρίσεις, δυναμικές αλλαγές.**
4. Το μάθημα των Μαθηματικών έγινε πιο **ελκυστικό**, μέσα από αυτήν την βιωματική δραστηριότητα.
5. Οι μαθητές **διαπίστωσαν** την σπουδαιότητα της **ομοιότητας** και της **συνάρτησης** στον υπολογισμό του ύψους κτιρίων.
6. Οι μαθητές πήραν **πρωτοβουλίες** και μετατράπηκαν σε **μικρούς ερευνητές** και **ανακάλεσαν** εκείνες τις μαθηματικές γνώσεις που χρειάστηκαν για την επίτευξη του στόχου τους.
7. Οι μαθητές **ανακάλυψαν,** μέσα από την συζήτηση των αποτελεσμάτων τους **(Ιδεοθύελλα**), τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να προσεγγίσουν το πρόβλημα (μέσω της συνάρτησης ή της ομοιότητας)
8. **Η Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών** είχε θετική επίδραση στην κατάκτηση της έννοιας που είχαν διδαχθεί, την ομοιότητα των τριγώνων.

Συντονιστής της Δράσης

Αλεξίου Ιωάννης, Μαθηματικός *MSc*

Συμμετείχε η εκπαιδευτικός του 2ου Γυμνασίου Χαλκίδας

Ευγενία Καραχάλιου, Μαθηματικός Τ.Ε

Συμμετείχαν οι εκπαιδευτικοί του 2ου ΓΕΛ Χαλκίδας

Δερβετζή Κατερίνα, Μαθηματικός

Παπαγεωργίου Λευτέρης, Μαθηματικός

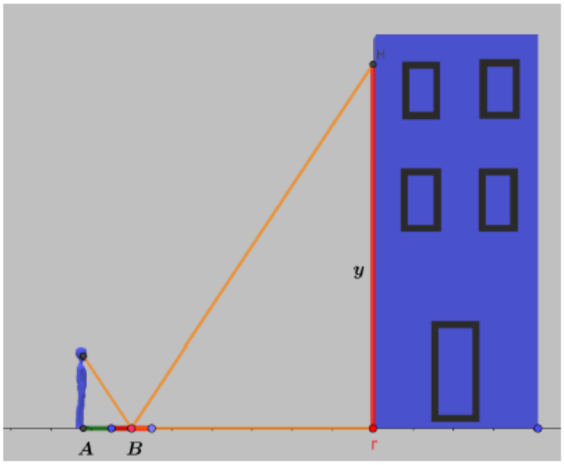
Στιγμιότυπο από το φύλλο εργασίας των μαθητών στην αυλή

Χαλκίδα, 07/04/2022

Φύλλο Εργασίας Μαθητή – Υπολογισμός Ύψους Κτιρίου

Πείραμα στην αυλή

2° Γυμνάσιο Χαλκίδας με την συμμετοχή του 2ου ΓΕΛ Χαλκίδας

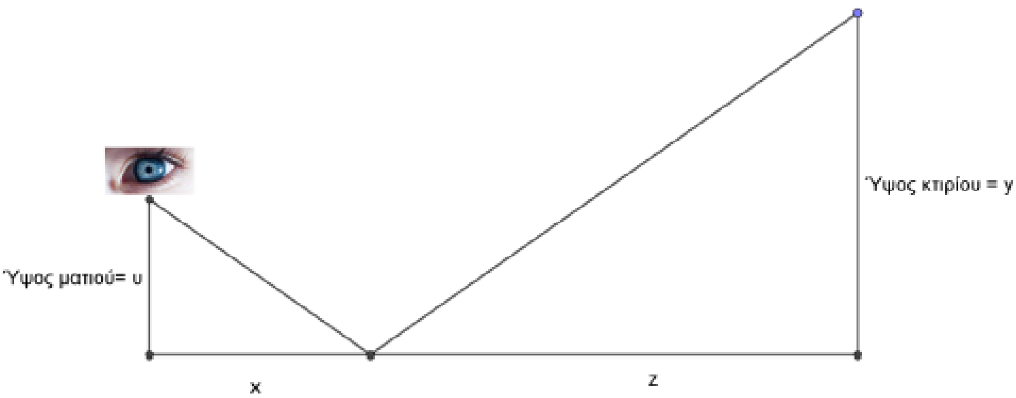


1η Προσέγγιση (Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$)

1. Για συγκεκριμένη τιμή του y που θα ορίσει η κάθε ομάδα (*σημαδέψτε τον τοίχο και μετρήστε το y με την μετροταινία*) μετακινηθείτε μέχρι να δείτε το σημάδι στον καθρέπτη και βρείτε την τιμή του x, όπου x = *AB* η απόστασή σας από τον καθρέπτη. Υπολογίστε την τιμή του a.
   - Είναι ίδια η τιμή για κάθε ομάδα;……………………..……………
   - Από τι εξαρτάται; ………………………………………………..
   - Τελικά, a = …….

Χαλκίδα, 07/04/2022

2η Προσέγγιση (Ομοιότητα τριγώνων)



1. Μετακινηθείτε μέχρι να δείτε το ψηλότερο σημείο του κτιρίου στον καθρέπτη και βρείτε την τιμή του x (όπου x η απόστασή σας από τον καθρέπτη)
   - x = ………………..

2. Μετρήστε την απόσταση z του καθρέπτη από το κτίριο.
   - Είναι ίδια η τιμή για κάθε ομάδα;……………………..……………

Με ένα καθρέπτη και λίγα Μαθηματικά…..υπολογίσαμε το ύψος του σχολικού κτιρίου!!!