8. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΦΥΣΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Επιφανειακό ολοκλήρωμα 1ου είδους βαθμωτής συνάρτησης

Θεωρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση **f(x,y,z)** π.χ. η πυκνότητα ρ(x,y,z) της ύλης στο χώρο, και μια επιφάνεια Α με παραμετρική εξίσωση:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\hat{x} + y(u,v)\cdot\hat{y} + z(u,v)\cdot\hat{z} \qquad (1)$$

Αν διαμερίσουμε την επιφάνεια Α σε n στοιχειώδη τμήματα επιφανειών ΔA_{11}, ΔA_{12},….,ΔA_{ij} ($i\to\infty$, $j\to\infty$ $|\Delta A_{ij}|_{max}\to 0$), και σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο P_{11}, P_{12},…,P_{ij}, ως επιφανειακό ολοκλήρωμα Ι της βαθμωτής συνάρτησης f(x,y,z) πάνω στην επιφάνεια Α ορίζουμε:

$$\boxed{I = \lim_{\substack{\max \Delta A_{ij}\to 0 \\ i\to\infty,\ j\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(P_{ij})\cdot \Delta A_{ij} = \iint_A f(x,y,z)\cdot dA} \qquad (2)$$

Για δεδομένες τιμές της παραμέτρου v η σχέση (1) αντιστοιχεί σε μια οικογένεια καμπυλών $\vec{r}(u)_1, \vec{r}(u)_2,....$, ενώ για δεδομένες τιμές της παραμέτρου u έχουμε αντίστοιχα μια οικογένεια καμπυλών $\vec{r}(v)_1, \vec{r}(v)_2,....$ οι οποίες στο επίπεδο uv ορίζουν μια περιοχή Τ. Αντίστοιχα, μέσω της απεικόνισης (1), στον τρισδιάστατο χώρο xyz ορίζουν την επιφάνεια Α.

Επομένως το διάνυσμα: $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}\cdot\hat{x} + \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u}\cdot\hat{y} + \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u}\cdot\hat{z}$ είναι εφαπτομενικό στις καμπύλες $\vec{r}(u)$

και το διάνυσμα: $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}\cdot\hat{x} + \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v}\cdot\hat{y} + \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v}\cdot\hat{z}$ είναι εφαπτομενικό στις καμπύλες $\vec{r}(v)$

Τέλος το διάνυσμα: $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$

είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο της επιφάνειας. Το στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$dA = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\cdot dv \qquad (3)$$

και επομένως επιφανειακό ολοκλήρωμα θα εκφραστεί ως διπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_T f(u,v)\cdot\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\cdot dv \qquad (4)$$

όπου Τ η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο uv.

- Στην περίπτωση που η επιφάνεια έχει την μορφή z=f(x,y) τότε εξίσωση της επιφάνειας μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{r}(x,y) = x\cdot\hat{x} + y\cdot\hat{y} + f(x,y)\cdot\hat{z} \tag{4}$$

τότε το στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dA μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$dA = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right| dx\cdot dy \tag{5}$$

όπου:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x}\\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\hat{x} - \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\hat{y} + \hat{z} \tag{6}$$

με μέτρο:
$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \tag{7}$$

και τελικά:

$$dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dx\cdot dy \tag{8}$$

και το επιφανειακό ολοκλήρωμα (2) παίρνει τη μορφή διπλού ολοκληρώματος:

$$\boxed{I = \iint_T f(x,y,z)\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dx\cdot dy} \tag{9}$$

όπου T η προβολή της επιφάνειας A στο επίπεδο xy.

- Στην περίπτωση που η επιφάνεια έχει την μορφή F(x,y,z)=0 τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \iint_T f(x,y,z)\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\cdot dx\cdot dy = \iint_T f(x,y,z)\cdot\frac{\left|\vec{\nabla}\cdot F\right|}{\vec{\nabla}\cdot F\cdot\hat{z}}\cdot dx\cdot dy$$

στα σημεία όπου $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$. Επειδή: $\boxed{\frac{\vec{\nabla}\cdot F}{\left|\vec{\nabla}\cdot F\right|} = \hat{n}}$, το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$\boxed{I = \iint_T f(x,y,z)\cdot\frac{dx\cdot dy}{\hat{n}\cdot\hat{z}}}$ όταν η επιφάνεια προβάλλεται στο επίπεδο xy.

Εφαρμογές επιφανειακών ολοκληρωμάτων 1ου είδους:
Αν η βαθμωτή συνάρτηση f(x,y,z)=1, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα μας υπολογίζει το εμβαδόν της επιφάνειας Α.

Αν η βαθμωτή συνάρτηση είναι η πυκνότητα ρ(x,y,z) της επιφάνειας Α, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα μας υπολογίζει τη μάζα της επιφάνειας: $M=\iint_A \rho(x,y,z)\cdot dA$

Υπολογισμός συντεταγμένων κέντρο μάζας C.M. (x_K, y_K, z_K) υλικής επιφάνειας:

$$x_K=\frac{1}{M}\iint_A x\cdot\rho(x,y,z)\cdot dA \qquad y_K=\frac{1}{M}\iint_A y\cdot\rho(x,y,z)\cdot dA \qquad z_K=\frac{1}{M}\iint_A z\cdot\rho(x,y,z)\cdot dA$$

Ροπές αδράνειας υλικών επιφανειών:

Ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων Ο: $I_o=\int_C (x^2+y^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)\cdot dA$

Ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Οx: $I_{ox}=\int_C (y^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)\cdot dA$

Παράδειγμα 1: Υπολογισμός της επιφάνειας σφαίρας ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων.

1ος τρόπος: Οι εξισώσεις των δύο ημισφαιρίων της σφαίρας είναι:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \Leftrightarrow z=\pm\left(R^2-x^2-y^2\right)^{1/2} \qquad (10)$$

Επομένως η επιφάνεια του κάθε ημισφαιρίου θα υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα:

$$I=\iint_T \sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\left(R^2-x^2-y^2\right)^{1/2}}\right]^2+\left[\frac{1}{2}\frac{2y}{\left(R^2-x^2-y^2\right)^{1/2}}\right]^2}\cdot dx\cdot dy \Rightarrow$$

$$I=\iint_T \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\cdot dx\cdot dy \Rightarrow I=\iint_T \frac{R}{\left(R^2-x^2-y^2\right)^{1/2}}\cdot dx\cdot dy \qquad (11)$$

Η προβολή του κάθε ημισφαιρίου στο επίπεδο xy είναι κύκλος ακτίνας R, οπότε χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες θα έχουμε:

x=rcosφ, y= rsinφ και dx·dy=r·dr·dφ, 0≤φ<2π rad

και το ολοκλήρωμα (10) γίνεται: $I=R\iint_T \frac{r\cdot dr\cdot d\varphi}{\left(R^2-r^2\right)^{1/2}} \Leftrightarrow I=R\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_0^R -\frac{1}{2}\frac{d\left(R^2-r^2\right)}{\left(R^2-r^2\right)^{1/2}} \Leftrightarrow$

$$I=2\pi R\cdot\left[-\left(R^2-r^2\right)^{1/2}\right]_0^R \Leftrightarrow I=2\pi R^2$$ το εμβαδόν κάθε ημισφαιρίου

Επομένως για όλη τη σφαίρα: $E = 2I = 4\pi R^2$

2ος τρόπος: Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε την παραμετρική εξίσωση της επιφάνειας της σφαίρας:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = R\sin\theta\cos\varphi \times \hat{x} + R\sin\theta\sin\varphi \times \hat{y} + R\cos\theta \times \hat{z} \tag{12}$$

$$I = \iint_T \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| d\varphi \cdot d\theta \tag{13}$$

με:
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial(R\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial(R\sin\theta\sin\varphi)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial(R\cos\theta)}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial(R\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial(R\sin\theta\sin\varphi)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial(R\cos\theta)}{\partial\theta} \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi \cdot \hat{x} - R^2\sin^2\theta\sin\varphi \cdot \hat{y} - R^2\sin\theta\cos\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \cdot \hat{z} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -R^2\left(\sin^2\theta\cos\varphi \cdot \hat{x} + \sin^2\theta\sin\varphi \cdot \hat{y} + \sin\theta\cos\theta \cdot \hat{z}\right) \tag{14}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{R^4\left(\sin^2\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(\sin^2\theta\sin\varphi\right)^2 + \left(\sin\theta\cos\theta\right)^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = R^2\sqrt{\sin^4\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \sin^2\theta\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = R^2\sqrt{\sin^2\theta\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)} = R^2\sin\theta \tag{15}$$

Επομένως η (13) λόγω της (15) γίνεται:

$$I = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta \Rightarrow I = 2\pi R^2 \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \Rightarrow I = 4\pi R^2$$

Παράδειγμα 2: Υπολογισμός της ροπής αδράνειας σφαιρικού κελύφους ακτίνας R και επιφανειακής πυκνότητας ρ με κέντρο την αρχή των αξόνων ως προς τον άξονα z’z.

$$I_{z'z} = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dA \tag{16}$$

Η παραμετρική εξίσωση της επιφάνειας της σφαίρας είναι:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = R\sin\theta\cos\varphi \times \hat{x} + R\sin\theta\sin\varphi \times \hat{y} + R\cos\theta \times \hat{z}$$

οπότε:
$$I_{z'z} = \iint_T (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| d\varphi \cdot d\theta \tag{17}$$

με:
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial(R\sin\theta\cos\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(R\sin\theta\sin\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(R\sin\theta\cos\varphi)}{\partial \theta} & \frac{\partial(R\sin\theta\sin\varphi)}{\partial \theta} & \frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial \theta} \end{vmatrix} = R^2\sin\theta$$

Επομένως:
$$I_{z'z} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[(R\sin\theta\cos\varphi)^2 + (R\sin\theta\sin\varphi)^2\right]\cdot\rho\cdot R^2\sin\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta \Rightarrow$$

$$I_{z'z} = \rho R^4\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cdot d\theta \Rightarrow I_{z'z} = 2\pi\rho R^4\cdot\left(-\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot d\cos\theta\right) \Rightarrow$$

$$I_{z'z} = 2\pi\rho R^4\cdot\left[-\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\cdot d\cos\theta\right] \Rightarrow I_{z'z} = 2\pi\rho R^4\cdot\left(-[\cos\theta]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}\right) \Leftrightarrow$$

$$I_{z'z} = 2\pi\rho R^4\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow I_{z'z} = \frac{2}{3}R^2\rho 4\pi R^2 \xrightarrow{\rho 4\pi R^2 = M} I_{z'z} = \frac{2}{3}MR^2$$

2. Επιφανειακό ολοκλήρωμα 2^ου^ είδους διανυσματικής συνάρτησης

Θεωρούμε μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\hat{x} + F_2(x,y,z)\hat{y} + F_3(x,y,z)\hat{z}$ π.χ. η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου, και μια επιφάνεια Α με παραμετρική εξίσωση:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\hat{x} + y(u,v)\cdot\hat{y} + z(u,v)\cdot\hat{z} \qquad (1)$$

Το εσωτερικό γινόμενο της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = \dfrac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}$ που είναι κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια επί το στοιχειώδες εμβαδόν $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\cdot dv$ μας δίνει **τη ροή της διανυσματικής συνάρτησης μέσα από τη στοιχειώδη επιφάνεια**. Επομένως το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\boxed{I = \iint_T \vec{F}\cdot\vec{n}\cdot\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\cdot dv} \qquad (3)$$

Υπολογίζει τη ροή του διανυσματικού πεδίου μέσα από την επιφάνεια Α.

Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι κλειστή, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\boxed{I = \oiint_T \vec{F}\cdot\vec{n}\cdot\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\cdot dv = \oiint_T \vec{F}\cdot d\vec{A}} \qquad (4)$$

Θυμίζουμε ότι το διάνυσμα: $$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\\ \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\end{vmatrix}=$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\left[\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\right]\cdot\hat{x}-\left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\right]\cdot\hat{y}+$$

$$+\left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\right]\cdot\hat{z}$$

Παράδειγμα 1: Επιβεβαίωση του νόμου του Gauss στον ηλεκτρομαγνητισμό.
Θεωρούμε ένα ακίνητο σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή η οποία διέρχεται από ένα ημισφαίριο ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων και βάση το επίπεδο xy.

Η ηλεκτρική ροή υπολογίζεται από τη σχέση: $$I=\iint_T \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

όπου:

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}x\cdot\hat{x}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}y\cdot\hat{y}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}z\cdot\hat{z}\Rightarrow$$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}\left(x\cdot\hat{x}+y\cdot\hat{y}+z\cdot\hat{z}\right)$$

σε καρτεσιανές συντεταγμένες και επειδή η ένταση που προκαλεί το σημειακό φορτίο έχει σφαιρική συμμετρία θα την εκφράσουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες: $$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$$

Επίσης η επιφάνεια του ημισφαιρίου σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=R\sin\theta\cos\varphi\times\hat{x}+R\sin\theta\sin\varphi\times\hat{y}+R\cos\theta\times\hat{z}$$ με $0\le\varphi<2\pi$ rad και $0\le\theta<\pi/2$ rad

$$I=\iint_T \vec{E}\cdot d\vec{A}=\iint_{T'}\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^3}\left(x\cdot\hat{x}+y\cdot\hat{y}+z\cdot\hat{z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)\cdot d\varphi\cdot d\theta$$

με

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial\left(R\sin\theta\cos\varphi\right)}{\partial\varphi} & \frac{\partial\left(R\sin\theta\sin\varphi\right)}{\partial\varphi} & \frac{\partial\left(R\cos\theta\right)}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial\left(R\sin\theta\cos\varphi\right)}{\partial\theta} & \frac{\partial\left(R\sin\theta\sin\varphi\right)}{\partial\theta} & \frac{\partial\left(R\cos\theta\right)}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\ldots=$$

$$=-R^2\left(\sin^2\theta\cos\varphi\cdot\hat{x}+\sin^2\theta\sin\varphi\cdot\hat{y}+\sin\theta\cos\theta\cdot\hat{z}\right)$$

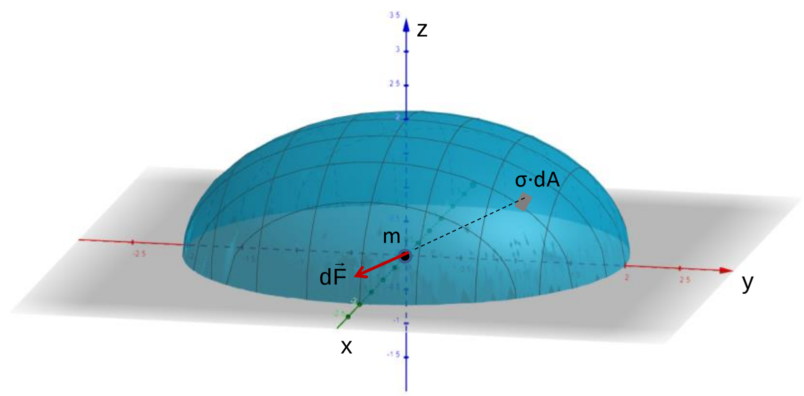
Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\iint_{T'}\left(-R^3\right)\left(\sin^3\theta\cos^2\varphi+\sin^3\theta\sin^2\varphi+\sin\theta\cos^2\theta\right)\cdot d\varphi\cdot d\theta\Rightarrow$$

$$I=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\iint_{T'}\left(-\sin^3\theta-\sin\theta\cos^2\theta\right)\cdot d\varphi\cdot d\theta\Rightarrow I=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\left(-\sin\theta\right)\cdot d\theta\Rightarrow$$

$$I=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot 2\pi\cdot(-1)\Rightarrow I=-\frac{q}{2\varepsilon_o}$$

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε ακίνητη σημειακή μάζα m στην αρχή των αξόνων. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη βαρυτική δύναμη που δέχεται η μάζα m από μια υλική επιφάνεια σχήματος ημισφαιρίου ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων και βάση το επίπεδο xy, επιφανειακής πυκνότητας σ.



Η δύναμη βαρύτητας dF στη μάζα m από ένα στοιχειώδες τμήμα του τεταρτοκυκλίου dM δίνεται από τη σχέση:

$$d\vec{F}=G\frac{m\cdot dM}{r^2}\hat{r}\xrightarrow[r=R]{dM=\sigma\cdot dA}\vec{F}=G\frac{m\cdot\sigma}{R^3}\iint_T\vec{r}\cdot dA$$

Η παραμετρική εξίσωση της επιφάνειας του ημισφαιρίου:

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=R\sin\theta\cos\varphi\times\hat{x}+R\sin\theta\sin\varphi\times\hat{y}+R\cos\theta\times\hat{z}$$ με $0\le\varphi<2\pi$ rad και $0\le\theta<\pi/2$ rad

και

$$dA=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|\cdot d\varphi\cdot d\theta$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $\vec{F}=G\dfrac{m\cdot\sigma}{R^3}\iint_T\left(R\sin\theta\cos\varphi\cdot\hat{x}+R\sin\theta\sin\varphi\cdot\hat{y}+R\cos\theta\cdot\hat{z}\right)\cdot R^2\sin\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta\Rightarrow$

$$\vec{F}=Gm\cdot\sigma\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cdot d\theta\cdot\hat{x}+\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cdot d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cdot d\theta\cdot\hat{y}+\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\cdot d\theta\cdot\hat{z}\right)\Rightarrow$$

$$\vec{F}=Gm\cdot\sigma\left(2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot d\sin\theta\cdot\hat{z}\right)\Rightarrow\vec{F}=2\pi Gm\cdot\sigma\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\cdot\hat{z}\Rightarrow$$

$$\vec{F}=\pi Gm\cdot\sigma\cdot\hat{z}$$

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί η μαγνητική ροή που διέρχεται από το επίπεδο με εξίσωση z=x+y, με -a≤x≤a, -b≤y≤b όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση: $\vec{B}=B_o\cdot\hat{x}+B_o\cdot\hat{y}$.

Η εξίσωση της επιφάνειας είναι: $\vec{r}(x,y)=x\cdot\hat{x}+y\cdot\hat{y}+(x+y)\cdot\hat{z}$ με -a≤x≤a, -b≤y≤b

Η ζητούμενη μαγνητική ροή υπολογίζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\Phi=\iint_T\vec{B}\cdot d\vec{A}=\iint_{T'}B_o\left(\hat{x}+\hat{y}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right)\cdot dx\cdot dy$$

με

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial(x+y)}{\partial x}\\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial(x+y)}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\Phi=\iint_{T'}B_o\left(\hat{x}+\hat{y}\right)\cdot\left(-\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}\right)\cdot dx\cdot dy\Leftrightarrow\Phi=B_o\int_{-a}^{a}dx\cdot\int_{-b}^{b}dy\Leftrightarrow\Phi=4B_oab$$