6. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Α. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους βαθμωτής συνάρτησης

Θεωρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση **f(x,y,z)** π.χ. το δυναμικό V(x,y,z) ενός ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο, και μια καμπύλη C με παραμετρική εξίσωση:

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\hat{x} + y(t)\cdot\hat{y} + z(t)\cdot\hat{z} \qquad (6.1)$$

Αν θεωρήσουμε ένα τμήμα ΑΒ της καμπύλης C και διαμερίσουμε το τόξο αυτό σε k τόξα μήκους Δs ($k\to\infty$, $|\Delta s|_{max}\to 0$), ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα I της βαθμωτής συνάρτησης f(x,y,z) κατά μήκος του τμήματος ΑΒ ορίζουμε:

$$\boxed{I = \lim_{\substack{\max\Delta s_k\to 0\\ k\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k, y_k, z_k)\cdot\Delta s_k = \int_C f(x,y,z)\cdot ds}$$

Στην περίπτωση που η καμπύλη έχει την παραμετρική μορφή (1) τότε:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt$$

και το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή απλού του ολοκληρώματος:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt$$

Εφαρμογές επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων 1ου είδους:

Αν η βαθμωτή συνάρτηση f(x,y,z)=1, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μας υπολογίζει το μήκος της καμπύλης.

Αν η βαθμωτή συνάρτηση είναι η πυκνότητα ρ(x,y,z) της υλικής καμπύλης C, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μας υπολογίζει τη μάζα της καμπύλης: $M = \int_C \rho(x,y,z)\cdot ds$ (6.2)

Υπολογισμός συντεταγμένων κέντρο μάζας C.M. (x_K, y_K, z_K) υλικής καμπύλης:

$$x_K = \frac{1}{M}\int_C x\cdot\rho(x,y,z)\cdot ds, \qquad y_K = \frac{1}{M}\int_C y\cdot\rho(x,y,z)\cdot ds, \qquad z_K = \frac{1}{M}\int_C z\cdot\rho(x,y,z)\cdot ds \qquad (6.3)$$

Υπολογισμός ροπών αδράνειας υλικών καμπυλών:

ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων Ο: $I_o = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\cdot\rho(x,y,z)\cdot ds$

ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Οx: $I_{ox} = \int_C (y^2 + z^2)\cdot\rho(x,y,z)\cdot ds$

Παράδειγμα 1: Υπολογισμός της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r.

Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης του κύκλου είναι:

$$\vec{r}(\theta) = r\cos\varphi\cdot\hat{x} + r\sin\varphi\cdot\hat{y} \qquad \text{με } 0\le\varphi<2\pi \text{ rad}$$

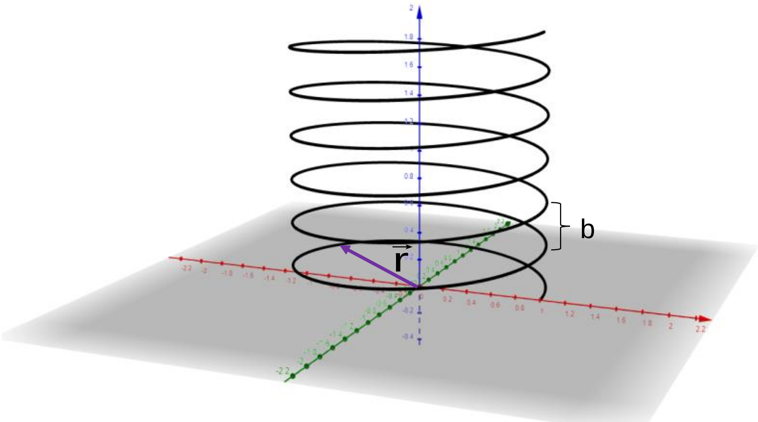
όπου:

$x=r\cos\varphi$ και $y=r\sin\varphi$

Το μήκος της περιφέρειας δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\Pi=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\cdot d\varphi\Rightarrow\Pi=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin\varphi)^2+(r\cos\varphi)^2}\cdot d\varphi\Rightarrow\Pi=\int_0^{2\pi}r\cdot d\varphi\Leftrightarrow\Pi=2\pi r$$

Παράδειγμα 2: Υπολογισμός της μάζας σπειροειδούς ελατηρίου σταθερής γραμμικής πυκνότητας ρ με εξίσωση κυκλικής έλικας:



$$\vec{r}(\theta)=r\cos\varphi\cdot\hat{x}+r\sin\varphi\cdot\hat{y}+\frac{b}{2\pi}\varphi\cdot\hat{z}$$

με $0\le\varphi<N\cdot 2\pi$ rad

ακτίνας r και βήματος b, π.χ. N=6 σπειρών:

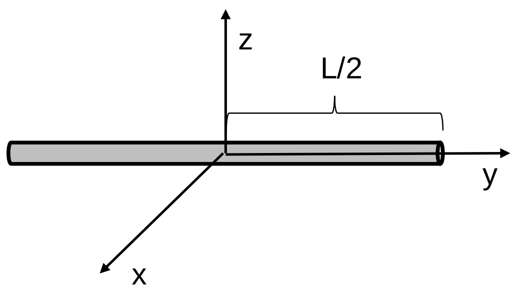
$$M=\int_0^{12\pi}\rho\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\cdot d\varphi\Rightarrow$$

$$M=\rho\cdot\int_0^{12\pi}\sqrt{(-r\sin\varphi)^2+(r\cos\varphi)^2+\frac{b}{4\pi^2}^2}\cdot d\varphi\Rightarrow$$

$$M=\rho\cdot\int_0^{12\pi}\sqrt{r^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}\cdot d\varphi\Rightarrow M=\rho\cdot\sqrt{r^2+\frac{b^2}{4\pi^2}}\cdot 12\pi\Rightarrow$$

$$M=6\rho\cdot\sqrt{(2\pi r)^2+b^2}$$

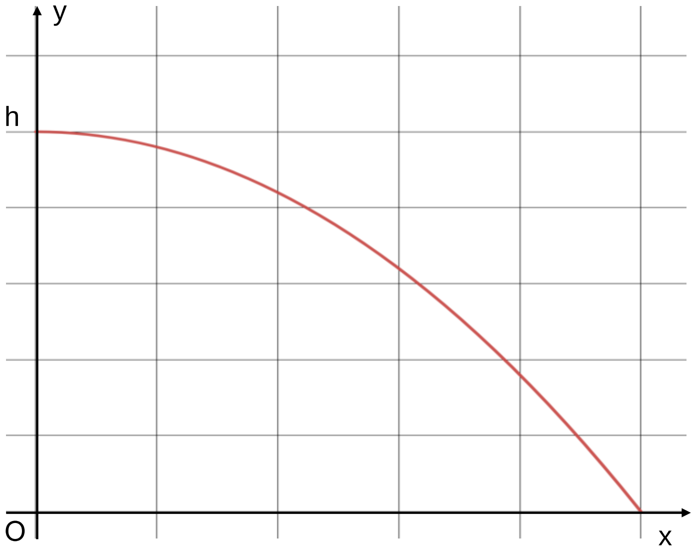
Παράδειγμα 3: Υπολογισμός της ροπής αδράνειας ράβδου σταθερής γραμμικής πυκνότητας ρ μήκους L η οποία βρίσκεται στον άξονα y'y, ως προς τον άξονα z'z που διέρχεται από το κέντρο μάζας της:



$$I_{z'z}=\int_C y^2\cdot\rho\cdot dy\Rightarrow I_{z'z}=\rho\cdot\int_{-L/2}^{L/2}y^2dy\Rightarrow I_{z'z}=\rho\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2}\Rightarrow$$

$$I_{z'z}=\rho\left[\frac{L^3}{24}-\left(-\frac{L^3}{24}\right)\right]\Rightarrow I_{z'z}=\rho\frac{L^3}{12}\xrightarrow{M=\rho L}I_{z'z}=\frac{ML^2}{12}$$

Παράδειγμα 4: Υπολογισμός του μήκους της τροχιάς ενός σώματος που εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα u_o από ύψος h από το έδαφος (αντίσταση από τον αέρα αμελητέα).



Η τροχιά είναι παραβολική με παραμετρική εξίσωση:

$$\vec{r}(t) = u_o t \cdot \hat{x} + \left(h - \frac{gt^2}{2}\right) \cdot \hat{y}$$

με $\quad 0 \leq t < \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Το μήκος της τροχιάς μέχρι το έδαφος δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$L = \int_0^{\sqrt{2h/g}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt \Rightarrow L = \int_0^{\sqrt{2h/g}} \sqrt{u_o^2 + (gt)^2} \cdot dt \Rightarrow L = \frac{u_o^2}{a} \int_0^{\sqrt{2h/g}} \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{u_o}\right)^2} \cdot d\left(\frac{gt}{u_o}\right) \longrightarrow \ldots$$

$$L = \frac{u_o^2}{2g}\left\{ \frac{gt}{u_o}\left[\sqrt{\left(\frac{gt}{u_o}\right)^2 + 1}\right]_0^{\sqrt{2h/g}} + \left[\ell n\left(\sqrt{\left(\frac{gt}{u_o}\right)^2 + 1} + \frac{gt}{u_o}\right)\right]_0^{\sqrt{2h/g}} \right\} \Rightarrow$$

$$L = \frac{u_o^2}{2g}\left[\frac{\sqrt{2gh}}{u_o}\sqrt{\frac{2gh}{u_o^2} + 1} + \ell n\left(\sqrt{\frac{2gh}{u_o^2} + 1} + \frac{\sqrt{2gh}}{u_o}\right)\right]$$

Β. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 2ου είδους διανυσματικής συνάρτησης

Θεωρούμε μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\hat{x}+F_2(x,y,z)\hat{y}+F_3(x,y,z)\hat{z}$ π.χ. η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα και μια καμπύλη C με παραμετρική εξίσωση*:

$$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\hat{x}+y(t)\cdot\hat{y}+z(t)\cdot\hat{z} \qquad (6.2)$$

Αν θεωρήσουμε ένα τμήμα ΑΒ της καμπύλης C και διαμερίσουμε το τόξο αυτό σε ν τόξα ($\nu\to\infty$, $|\Delta\vec{r}|_{max}\to 0$), ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα Ι της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(x,y,z)$ κατά μήκος του τμήματος ΑΒ ορίζουμε:

$$\boxed{I=\lim_{\Delta\vec{r}_k\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\vec{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta\vec{r}_k=\int_C\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}}$$

Στην περίπτωση που η καμπύλη έχει την παραμετρική μορφή (1) τότε:

$$d\vec{r}=\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\left[\frac{dx(t)}{dt}+\frac{dy(t)}{dt}+\frac{dz(t)}{dt}\right]\cdot dt$$

και το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\left[F_1(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}+F_2(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}+F_3(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{dz(t)}{dt}\right]\cdot dt$$

- Στην περίπτωση που η καμπύλη C είναι κλειστή, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{I=\oint_C\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}}$$

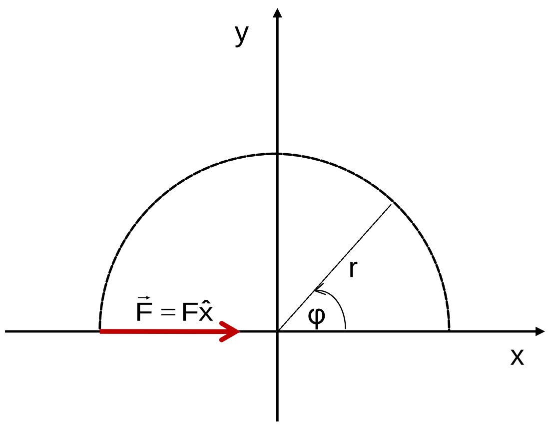
- Αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x,y,z)$ αποτελεί την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης f(x,y,z) π.χ. $\vec{E}(x,y,z)=-\vec{\nabla}V(x,y,z)$ στο ηλεκτροστατικό πεδίο, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από ένα σημείο P_1 σε ένα σημείο P_2 του πεδίου είναι:

$$I=\int_C\vec{E}(x,y,z)\cdot d\vec{r}\Rightarrow I=-\int_{P_1}^{P_2}\vec{\nabla}V(x,y,z)\cdot d\vec{r}\Rightarrow$$

$$I=-\int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(dx\cdot\hat{x}+dy\cdot\hat{y}+dz\cdot\hat{z}\right)\Rightarrow I=-\int_{P_1}^{P_2}dV\Leftrightarrow I=V_{P_1}-V_{P_2}$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση δηλαδή είναι ανεξάρτητο της καμπύλης C που συνδέει τα σημεία P_1 και P_2.

Παράδειγμα 1: Υπολογισμός του έργου σταθερής δύναμης $\vec{F}=F\hat{x}$ κατά μήκος της περιφέρειας ημικυκλίου ακτίνας r με παραμετρική εξίσωση:



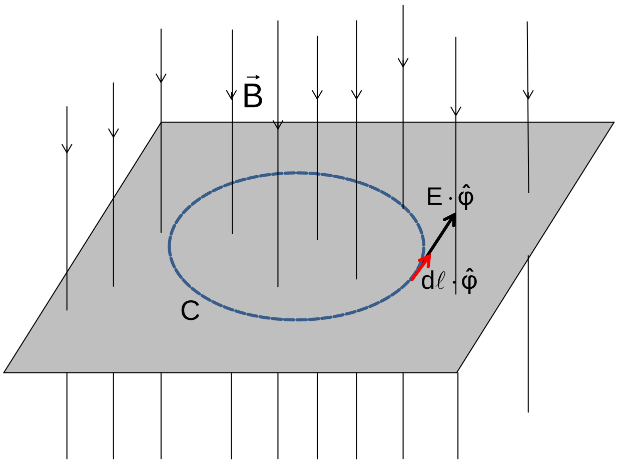
$\vec{r}(\theta)=r\cos\varphi\cdot\hat{x}+r\sin\varphi\cdot\hat{y}$ με 0≤φ<π rad.

$$W=\int_{\pi}^{0}\left[F\cdot r\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\right]\cdot d\varphi\Leftrightarrow W=Fr\cdot[\cos\varphi]_{\pi}^{0}\Leftrightarrow W=2Fr$$

Παράδειγμα 2: Νόμος Faraday

Η μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από μια επιφάνεια, η οποία οριοθετείται από μια κλειστή καμπύλη C, επάγει ένα ηλεκτρικό πεδίο. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης $\vec{E}$ κατά μήκος της καμπύλης C είναι ίσο με το αντίθετο της μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από την επιφάνεια:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\iint_S B ds \qquad (1)$$



Θεωρούμε ομογενές μαγνητικό πεδίο του οποίου η ένταση B(t) μεταβάλλεται (αυξάνεται) με το χρόνο. Στην περίπτωση αυτή η καμπύλη C που επιλέγουμε, λόγω συμμετρίας του προβλήματος, είναι ένας κύκλος ακτίνας r με το επίπεδό του κάθετο στις δυναμικές γραμμές, όπου η ένταση $\vec{E}(x,y) = \vec{E}(r,\varphi) = E\cdot\hat{\varphi}$ είναι σταθερή στην περιφέρεια της καμπύλης C και εφαπτομενική σε αυτή. Το διάνυσμα $d\vec{\ell}$ σε πολικές συντεταγμένες είναι $d\vec{\ell} = r\cdot d\varphi\cdot\hat{\varphi}$. Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

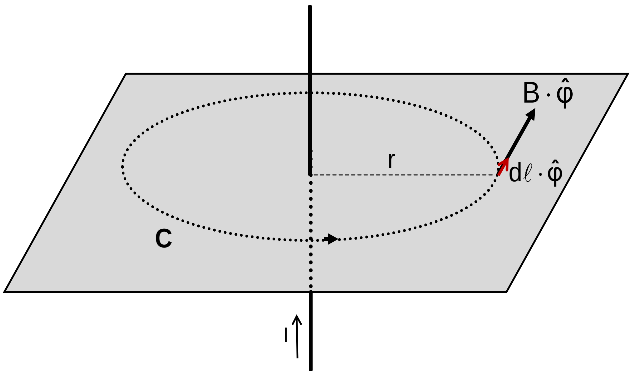
$$\oint_C E\cdot r d\varphi = -\frac{d}{dt}\iint_S B(t) ds \Leftrightarrow E\cdot\oint_C r d\varphi = -\frac{dB(t)}{dt}\iint_S ds \Leftrightarrow E\cdot 2\pi r = -\frac{dB(t)}{dt}\pi r^2 \Leftrightarrow E = -\frac{r}{2}\frac{dB(t)}{dt} \qquad (2)$$

Επομένως η ένταση του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι: $\boxed{E = -\frac{r}{2}\frac{dB(t)}{dt}\cdot\hat{\varphi}}$

Παράδειγμα 3: Νόμος Ampere

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης $\vec{E}$ κατά μήκος της καμπύλης C είναι ίσο με το αντίθετο της μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από την επιφάνεια:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{\ell} = \mu_o I \qquad (1)$$



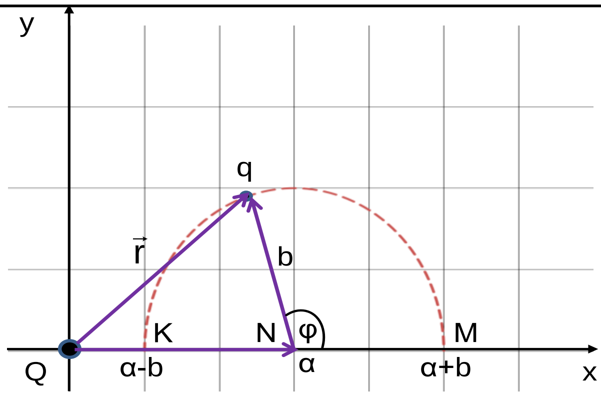
Θεωρούμε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγού πολύ μεγάλου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Στην περίπτωση αυτή η καμπύλη C που επιλέγουμε, λόγω συμμετρίας του προβλήματος, είναι ένας κύκλος ακτίνας r με το επίπεδό του κάθετο στον αγωγό, όπου η ένταση $\vec{B}(x,y) = \vec{B}(r,\varphi) = B\cdot\hat{\varphi}$ είναι σταθερή στην περιφέρεια της καμπύλης C και εφαπτομενική σε αυτή. Το διάνυσμα $d\vec{\ell}$ σε πολικές συντεταγμένες είναι $d\vec{\ell} = r\cdot d\varphi\cdot\hat{\varphi}$. Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\oint_C B\cdot r d\varphi = \mu_o I \Rightarrow B\cdot\oint_C r d\varphi = \mu_o I \Rightarrow B\cdot 2\pi r = \mu_o I \Leftrightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad (2)$$

Άρα η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι: $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\cdot\hat{\varphi}}$

Παράδειγμα 4: Ένα ακίνητο σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης που ασκεί σε ένα άλλο σημειακό φορτίο q για να μετακινηθεί κατά μήκος του τόξου C του κύκλου με κέντρο το σημείο (+α, 0) και ακτίνα r=b<a, από το σημείο K(α-b, 0) ως το σημείο M(α+b, 0) με y>0. Το έργο υπολογίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$



1^{ος} τρόπος: Από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$F = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot r^2}\hat{r} = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot r^3}\vec{r} = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}(x\cdot\hat{x}+y\cdot\hat{y})$$

Σε πολικές συντεταγμένες (π rad≤ φ ≤ 0):

$$\vec{r} = x\cdot\hat{x}+y\cdot\hat{y} = (\alpha+b\cos\varphi)\cdot\hat{x}+b\sin\varphi\cdot\hat{y} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = -b\sin\varphi\cdot\hat{x}+b\cos\varphi\cdot\hat{y}$$

Οπότε:

$$W = \int_\pi^0 \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot\left[\left(\alpha+b\cos\varphi^2\right)+\left(b\sin\varphi\right)^2\right]^{3/2}}\left[(\alpha+b\cos\varphi)\cdot\hat{x}+b\sin\varphi\cdot\hat{y}\right]\frac{d\vec{r}}{d\varphi}d\varphi \Rightarrow$$

$$W = \int_\pi^0 \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot\left(\alpha^2+b^2+2\alpha b\cos\varphi\right)^{3/2}}\left[(\alpha+b\cos\varphi)\cdot\hat{x}+b\sin\varphi\cdot\hat{y}\right]\left(-b\sin\varphi\cdot\hat{x}+b\cos\varphi\cdot\hat{y}\right)\cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$W = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_\pi^0 \frac{(\alpha+b\cos\varphi)(-b\sin\varphi)}{\left(\alpha^2+b^2+2\alpha b\cos\varphi\right)^{3/2}}\cdot d\varphi + \int_\pi^0 \frac{b^2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\alpha^2+b^2+2\alpha b\cos\varphi\right)^{3/2}}\cdot d\varphi\right] \Rightarrow$$

$$W = -\frac{Q\cdot q\cdot\alpha b}{4\pi\varepsilon_o}\int_\pi^0 \frac{\sin\varphi}{\left(\alpha^2+b^2+2\alpha b\cos\varphi\right)^{3/2}}\cdot d\varphi \Rightarrow W = \frac{Q\cdot q}{8\pi\varepsilon_o}\int_\pi^0 \frac{d(\alpha^2+b^2+2\alpha b\cos\varphi)}{\left(\alpha^2+b^2+2\alpha b\cos\varphi\right)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$W = -\frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\left(\alpha^2+b^2+2\alpha b\cos\varphi\right)^{-1/2}\right]_\pi^0 = -\frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2+2\alpha b}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2-2\alpha b}}\right) \Leftrightarrow$$

$$W = -\frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\alpha+b} - \frac{1}{\alpha-b}\right) \Leftrightarrow W = \frac{Q\cdot q\cdot b}{2\pi\varepsilon_o\left(\alpha^2-b^2\right)}$$

2^{ος} τρόπος: Σε πολικές συντεταγμένες:

$$F = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot r^2}\hat{r} \qquad \text{και} \qquad \vec{r} = r\cdot\hat{r}+r\varphi\cdot\hat{\varphi} \rightarrow d\vec{r} = dr\cdot\hat{r}+d(r\varphi)\cdot\hat{\varphi}$$

Επομένως:

$$W=\int_C \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot r^2}dr=-\left[\frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o\cdot r}\right]_{\alpha-b}^{\alpha+b}\Leftrightarrow W=\frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\alpha-b}-\frac{1}{\alpha+b}\right)\Leftrightarrow W=\frac{Q\cdot q\cdot b}{2\pi\varepsilon_o\left(\alpha^2-b^2\right)}$$

3^{ος} τρόπος: Ακόμα πιο εύκολα: $W=\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r}\Rightarrow W=-\int_K^M \vec{\nabla}U(x,y,z)\cdot d\vec{r}\Leftrightarrow s$

$$W=-\int_K^M\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(dx\cdot\hat{x}+dy\cdot\hat{y}+dz\cdot\hat{z}\right)\Leftrightarrow W=-\int_K^M dU\Rightarrow$$

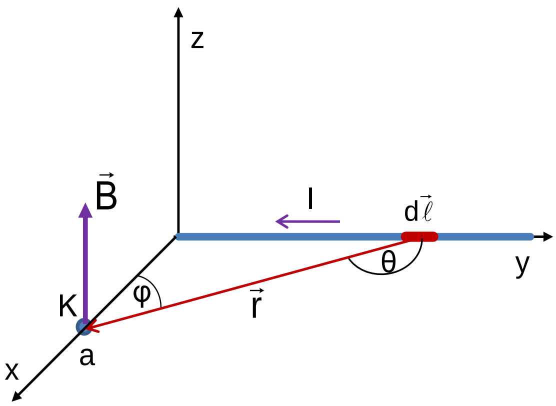
$$W=U_K-V_M\Rightarrow W=\frac{Q\cdot q\cdot b}{2\pi\varepsilon_o\left(\alpha^2-b^2\right)}$$

Γ. Ειδικές περιπτώσεις επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων σε φυσικά συστήματα

Στην κατηγορία επίσης των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων ανήκουν περιπτώσεις όπου χρειάζεται να υπολογίσουμε μια διανυσματική ποσότητα π.χ. τη δύναμη ή την ένταση κάποιου πεδίου σε δεδομένο σημείο του χώρου, η οποία προκαλείται από μια φυσική οντότητα (όπως η μάζα, το ηλεκτρικό φορτίο ή το ρεύμα) που κατανέμεται πάνω σε μια καμπύλη C. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων ολοκληρωμάτων είναι τα παρακάτω:

Παράδειγμα 1: Νόμος Biot-Savart

Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους που εκτείνεται στον ημιάξονα Oy και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I (με κατεύθυνση προς τα αρνητικά του άξονα y'y) σε σημείο K με συντεταγμένες (a, 0, 0).



$$\vec{B}=\frac{\mu_o I}{4\pi}\int_C\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_o I}{4\pi}\int_C\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}\Rightarrow$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_o I}{4\pi}\int_\infty^0\frac{-dy\cdot\hat{y}\times(a\cdot\hat{x}-y\cdot\hat{y})}{r^3}$$

όπου: $$-dy\cdot\hat{y}\times\left(a\cdot\hat{x}-y\cdot\hat{y}\right)=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\0&-dy&0\\a&-y&0\end{vmatrix}=a\cdot dy\cdot\hat{z}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται: $$\vec{B}=\frac{\mu_o Ia}{4\pi}\int_\infty^0\frac{dy}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\cdot\hat{z}$$

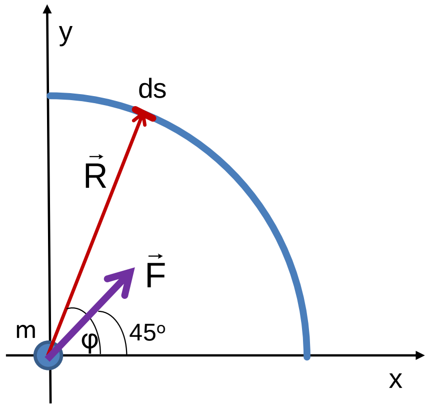
Με αλλαγή μεταβλητής:

$$\tan\varphi=\frac{y}{a}\Rightarrow\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{dy}{a}\Rightarrow\frac{\cos\varphi d\varphi}{\cos^3\varphi}=\frac{dy}{a}\xrightarrow{\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}}\frac{\cos\varphi d\varphi}{a^2}=\frac{dy}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $$\vec{B}=\frac{\mu_o I}{4\pi a}\cdot\hat{z}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot d\varphi=\frac{\mu_o I}{4\pi a}\cdot\hat{z}\int_0^{\pi/2}d\sin\varphi\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_o I}{4\pi a}\cdot\hat{z}$$

Παράδειγμα 2: Βαρύτητα

Να υπολογιστεί η βαρυτική δύναμη που δέχεται μια σημειακή μάζα m, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων από μια άλλη μάζα M σχήματος τεταρτοκυκλίου, με κέντρο την αρχή των αξόνων, ακτίνας R και γραμμικής πυκνότητας ρ.



Η δύναμη βαρύτητας dF στη μάζα m από ένα στοιχειώδες τμήμα του τεταρτοκυκλίου dM δίνεται από τη σχέση:

$$d\vec{F} = G\frac{m\cdot dM}{r^2}\hat{r} \xrightarrow[r=R]{dM=\rho\cdot ds} \vec{F} = G\frac{m\cdot\rho}{R^3}\int_C \vec{r}\cdot ds \qquad (1)$$

Με χρήση πολικών συντεταγμένων:

$$\vec{r} = R\cos\varphi\cdot\hat{x} + R\sin\varphi\cdot\hat{y} \qquad \text{και}$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\cdot d\varphi = \sqrt{(-R\sin\varphi)^2 + (R\cos\varphi)^2}\cdot d\varphi = R\cdot d\varphi$$

Η σχέση (1) γίνεται: $$\vec{F} = G\frac{m\cdot\rho}{R^3}\int_0^{\pi/2}(R\cos\varphi\cdot\hat{x} + R\sin\varphi\cdot\hat{y})\cdot R\cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{F} = G\frac{m\rho R}{R^2}\left(\hat{x}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot d\varphi + \hat{y}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot d\varphi\right) \Rightarrow \vec{F} = G\frac{m\rho R}{R^2}\left(\hat{x}\cdot[\sin\varphi]_0^{\pi/2} + \hat{y}\cdot[-\cos\varphi]_0^{\pi/2}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = G\frac{m\rho R}{R^2}(\hat{x}+\hat{y}) \xrightarrow{M=\rho\frac{\pi R}{2}} \vec{F} = 2G\frac{mM}{\pi R^2}(\hat{x}+\hat{y})$$

Η δύναμη, όπως ήταν αναμενόμενο, έχει διεύθυνση πάνω στη διχοτόμο του 1^{ου} τεταρτημορίου.

Παραμετρικές εξισώσεις καμπυλών:
Οι καμπύλες, όπως είναι η τροχιά ενός κινητού, είναι συνεχείς γραμμές στον τρισδιάστατο χώρο όπου κάθε σημείο τους με συντεταγμένες x, y, z αποτελεί συνάρτηση μίας μεταβλητής π.χ. του χρόνου t, x(t), y(t), z(t). Με άλλα λόγια οι καμπύλες αποτελούν το γεωμετρικό τόπο ενός σημείου που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο έχοντας στην ουσία όμως έναν βαθμό ελευθερίας.
Γενικά το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ οποιουδήποτε σημείου μιας καμπύλης έχει τη μορφή:

$$\vec{r}(t) = x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} + z \cdot \hat{z}$$

Αν οι συντεταγμένες x, y, z, αποτελούν συναρτήσεις μιας μεταβλητής π.χ. του χρόνου t, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{x} + y(t) \cdot \hat{y} + z(t) \cdot \hat{z}$$

και αποτελεί την παραμετρική εξίσωση της καμπύλης (τροχιάς).

Παραδείγματα παραμετρικών εξισώσεων καμπυλών:

1. Παραμετρική εξίσωση κύκλου ακτίνας R στο επίπεδο xy με κέντρο την αρχή των αξόνων:

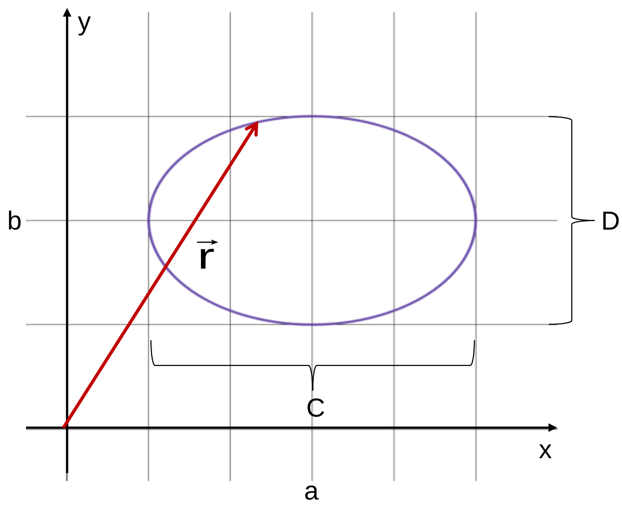
$$\vec{r}(\varphi) = R \cdot \cos\varphi \cdot \hat{x} + R \cdot \sin\varphi \cdot \hat{y} \qquad \text{με } 0 \le \varphi < 2\pi \text{ rad}$$

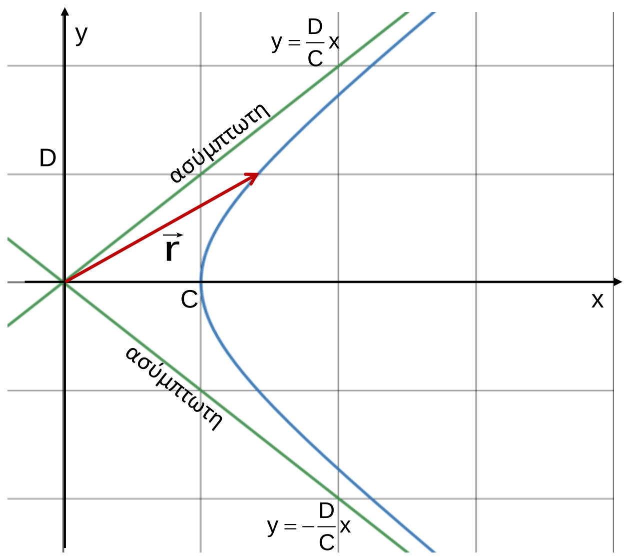
Αν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στη θέση (a, b) τότε η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\vec{r}(\varphi) = \left(a + R \cdot \cos\varphi\right) \cdot \hat{x} + \left(b + R \cdot \sin\varphi\right) \cdot \hat{y} \qquad \text{με } 0 \le \varphi < 2\pi \text{ rad}$$

2. Παραμετρική εξίσωση έλλειψης στο επίπεδο xy με κέντρο το σημείο (a, b) και ημιάξονες μήκους 2C και 2D

$$\vec{r}(\varphi) = \left(a + C \cdot \cos\varphi\right) \cdot \hat{x} + \left(b + D \cdot \sin\varphi\right) \cdot \hat{y} \quad \text{με } 0 \le \varphi < 2\pi \text{ rad}$$





3. Παραμετρική εξίσωση υπερβολής στο επίπεδο xy με κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες μήκους 2C και 2D

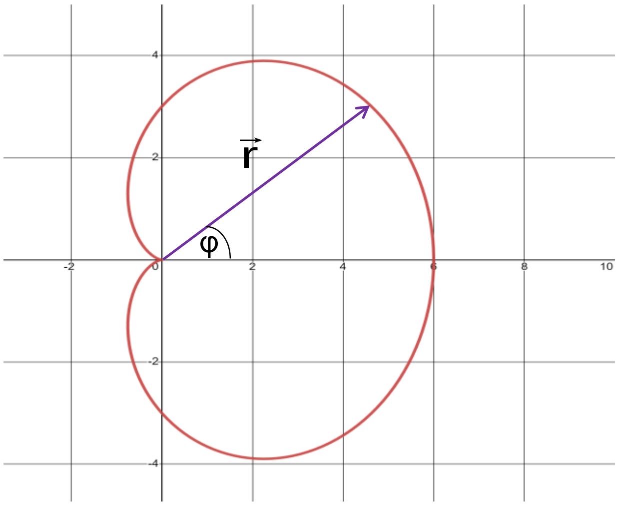
$$\vec{r}(\varphi) = C \cdot \cosh\varphi \cdot \hat{x} + D \cdot \sinh\varphi \cdot \hat{y} \qquad \text{με } 0 \le \varphi < 2\pi \text{ rad}$$

4. Παραμετρική εξίσωση παραβολής στο επίπεδο xy με κορυφή την αρχή των αξόνων:

$$\vec{r}(t) = t \cdot \hat{x} + t^2 \cdot \hat{y}$$

5. Εξίσωση καρδιοειδούς καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες:

$$r = a(1+\cos\varphi) \text{ με } 0 \le \varphi < 2\pi \text{ rad}$$



Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες γράφεται:

$$\vec{r} = r \times \hat{r} + r\varphi \times \hat{\varphi} \quad \text{με } 0 \le \varphi < 2\pi \text{ rad}$$

Επομένως το στοιχείο μήκους είναι:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + [d(r \cdot \varphi)]^2} \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left[\frac{d(r\varphi)}{d\varphi}\right]^2} \cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \cdot d\varphi$$