ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

I. ΑΜΕΙΩΤΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Δύναμη επαναφοράς της μορφής: $F_{\varepsilon\pi} = -D \cdot x$

Διαφορική εξίσωση της κίνησης: $\Sigma F = ma \Leftrightarrow -Dx = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{D}{m}x = 0}$ (I.1)

Χαρακτηριστική εξίσωση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = +i\sqrt{\dfrac{D}{m}} \\ \text{και} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{\dfrac{D}{m}} \end{cases}$$

Η αναλυτική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$x = c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \qquad (I.2)$$

και

$$u = \frac{dx}{dt} = -c_1 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + c_2 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \qquad (I.3)$$

Οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης. Αν για t=0, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=x_1$ και $u=u_1$, τότε από την I.2 και I.3 έχουμε:

$$c_1 = x_1 \qquad \text{και} \qquad c_2 = u_1\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Θέτοντας όπου $\omega_o = \sqrt{\dfrac{D}{m}}$ έχουμε:

$$x = x_1 \cdot \cos(\omega_o t) + \frac{u_1}{\omega_o} \cdot \sin(\omega_o t) \quad (I.4) \qquad \text{και} \qquad u = -x_1 \cdot \omega_o \sin(\omega_o t) + u_1 \cdot \cos(\omega_o t) \quad (I.5)$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι: $E = K + U = \dfrac{1}{2}mu^2 + \dfrac{1}{2}Dx^2 \xrightarrow[(I.5)]{(I.4)}$

$$E = \frac{1}{2}m\left[x_1^2\omega_o^2\sin^2(\omega_o t) + u_1^2\cos^2(\omega_o t) - 2x_1u_1\omega_o\sin(\omega_o t)\cdot\cos(\omega_o t)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}m\omega_o^2\left[x_1^2\cos^2(\omega_o t) + \frac{u_1^2}{\omega^2}\cdot\sin^2(\omega_o t) - \frac{2x_1u_1}{\omega_o}\sin(\omega_o t)\cdot\cos(\omega_o t)\right] \Leftrightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\omega_o^2\left(x_1^2 + \frac{u_1^2}{\omega_o^2}\right)} \qquad (I.4)$$

που είναι μια ποσότητα ανεξάρτητη του χρόνου, εξαρτώμενη μόνο από τις αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης. Μπορούμε να θέσουμε: $x_1 = A \cdot \sin\varphi_1$, και $\frac{u_1}{\omega_o} = A \cdot \cos\varphi_1$ οπότε:

$$(I.4) \rightarrow x = A\sin\varphi_1 \cos(\omega_o t) + A\cos\varphi_1 \sin(\omega_o t) \Leftrightarrow \boxed{x = A\sin(\omega_o t + \varphi_1)} \qquad (I.5)$$

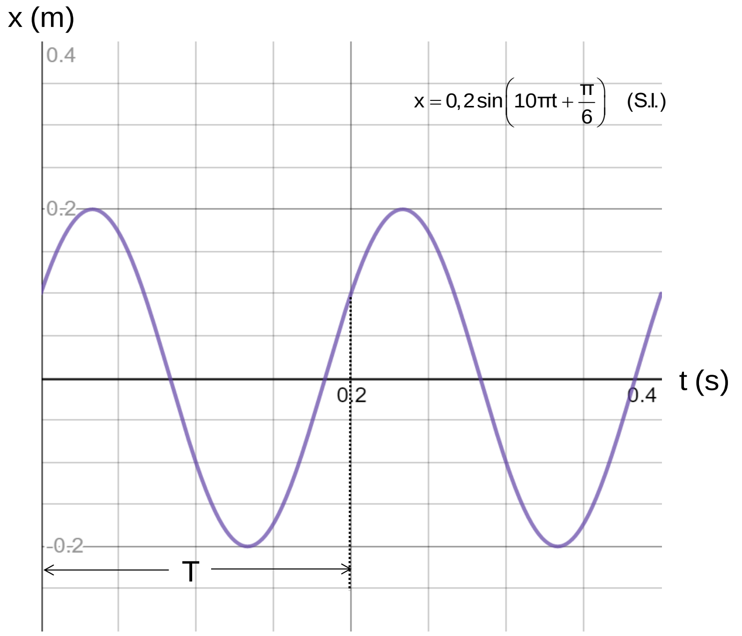
όπου:

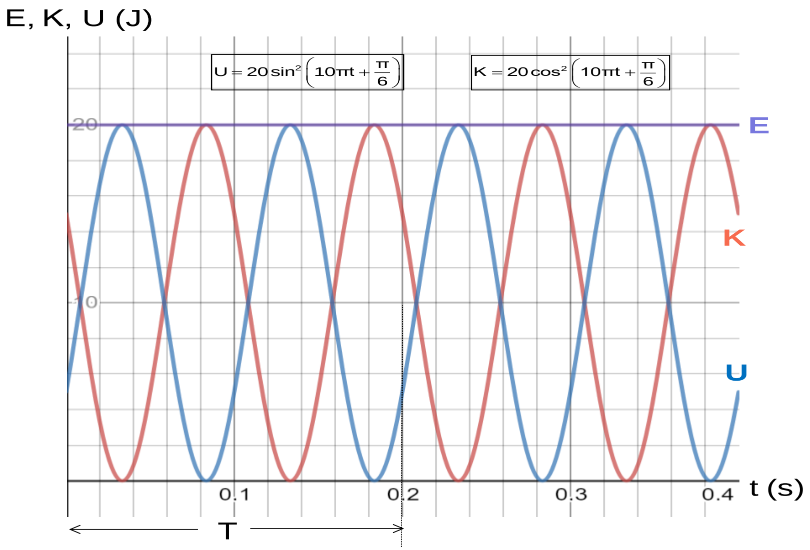
A : το πλάτος της ταλάντωσης

φ_1 : η αρχική φάση της ταλάντωσης με $\boxed{\tan\varphi_1 = \frac{x_1\omega_o}{u_1}}$,

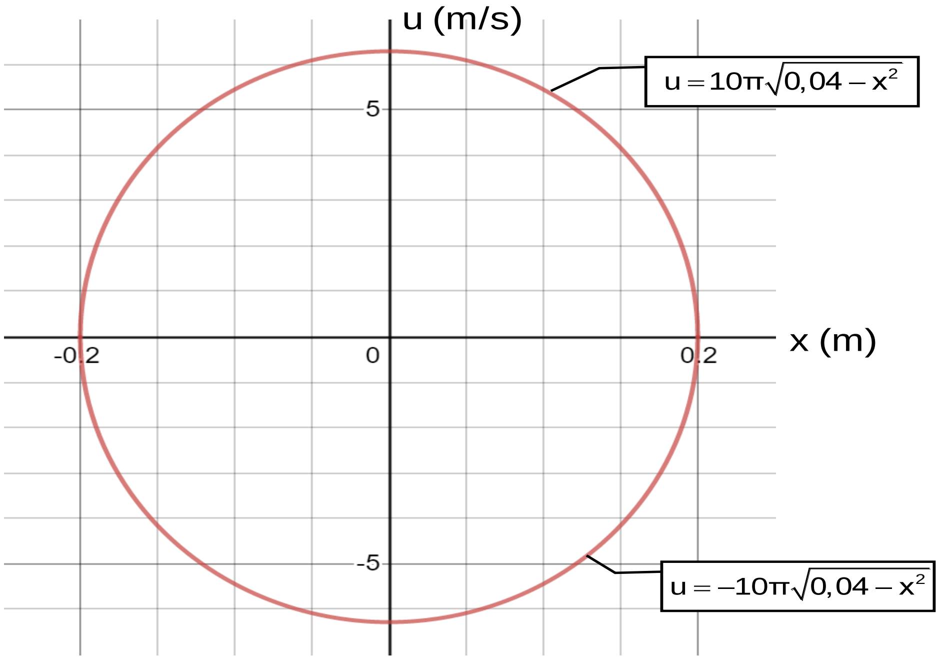
τα οποία εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες του φαινομένου.

Επίσης: $\boxed{u = \omega_o A\cos(\omega_o t + \varphi_1)}$ και $\boxed{a = \frac{du}{dt} = -\omega_o{}^2 A\sin(\omega_o t + \varphi_1)}$





$$E=\frac{1}{2}m\omega_o^{\,2}\left(x^2+\frac{u^2}{\omega_o^{\,2}}\right)=\frac{1}{2}DA^2 \Leftrightarrow \boxed{u=\pm\omega_o\sqrt{A^2-x^2}}$$



II. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Δύναμη απόσβεσης της μορφής: $F_{\alpha\pi} = -b \cdot u$

Διαφορική εξίσωση της κίνησης: $\Sigma F = ma \Leftrightarrow -Dx - bu = ma \Leftrightarrow -Dx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = 0} \qquad \text{(II.1)}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\cdot\lambda + \frac{D}{m} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\dfrac{b}{m} + \sqrt{\dfrac{b^2}{m^2} - 4\dfrac{D}{m}}}{2} = -\dfrac{b}{2m} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4m^2} - \dfrac{D}{m}} \\ \text{και} \\ \lambda_2 = \dfrac{-\dfrac{b}{m} - \sqrt{\dfrac{b^2}{m^2} - 4\dfrac{D}{m}}}{2} = -\dfrac{b}{2m} - \sqrt{\dfrac{b^2}{4m^2} - \dfrac{D}{m}} \end{cases}$$

1η περίπτωση: $\frac{b^2}{4m^2} > \frac{D}{m}$ μεγάλη απόσβεση, τότε η αναλυτική λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\boxed{x = c_3 e^{\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}\right)t} + c_4 e^{\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}\right)t}} \qquad \text{(II.2)}$$

Η κίνηση είναι απεριοδική.

2η περίπτωση: $\frac{b^2}{4m^2} = \frac{D}{m}$ **κρίσιμη** απόσβεση, τότε η αναλυτική λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι:

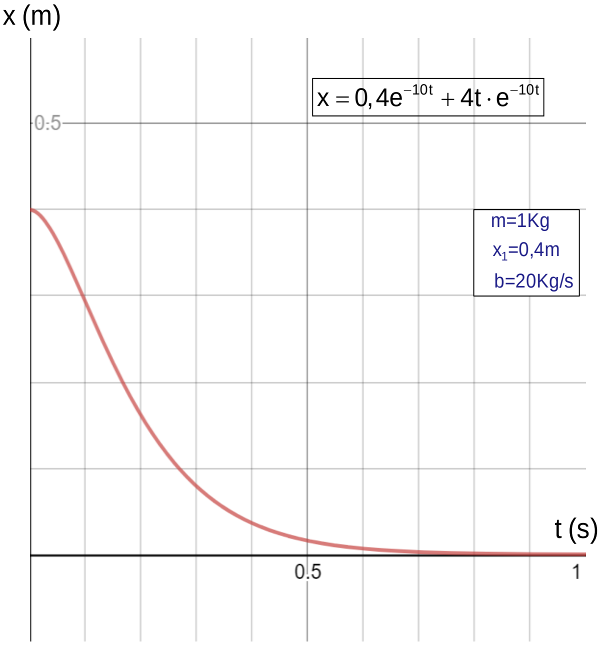
$$x = c_3 e^{-\frac{b}{2m}t} + c_4 t \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \qquad \text{(II.3)}$$

Η κίνηση είναι απεριοδική.
Οι σταθερές c_3, c_4 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης. Αν για t=0, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=x_1$ και u=0, τότε από την II.3 έχουμε:

$c_3 = x_1$ και $u = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow$

$$u = c_3\left(-\frac{b}{2m}\right)e^{-\frac{b}{2m}t} + c_4 t\left(-\frac{b}{2m}\right)e^{-\frac{b}{2m}t} + c_4 e^{-\frac{b}{2m}t} \xrightarrow[u=0]{t=0}$$

$$0 = x_1\left(-\frac{b}{2m}\right) + c_4 \Leftrightarrow c_4 = \frac{bx_1}{2m}$$



$$\boxed{(II.3) \longrightarrow x = x_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + \frac{bx_1}{2m} t \cdot e^{-\frac{b}{2m}t}} \qquad (II.4)$$

3η περίπτωση: $\dfrac{b^2}{4m^2} < \dfrac{D}{m}$ μικρή απόσβεση, τότε: $\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{b}{2m} + i\sqrt{\dfrac{D}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}} \\ \text{και} \\ \lambda_2 = -\dfrac{b}{2m} - i\sqrt{\dfrac{D}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}} \end{cases}$

και η αναλυτική λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$x = c_3 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \cdot t\right) + c_4 e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \cdot t\right) \qquad (II.5)$$

Η κίνηση είναι περιοδική. Θέτουμε στην II.5 όπου: $\Lambda = \dfrac{b}{2m}$ και $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - \Lambda^2}$ (II.6)

$$x = c_3 e^{-\Lambda t}\cos(\omega t) + c_4 e^{-\Lambda t}\sin(\omega t) \qquad (II.7)$$

και

$$u = \frac{dx}{dt} = -c_3 e^{-\Lambda t}\left[\Lambda\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right] + c_4 e^{-\Lambda t}\left[-\Lambda\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t)\right] \qquad (II.8)$$

Οι σταθερές c_3, c_4 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης. Αν για t=0, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=x_1$ και u=0, τότε από την II.7 και II.8 έχουμε:

$$c_3 = x_1 \qquad \text{και} \qquad c_4 = \frac{\Lambda x_1}{\omega},$$

οπότε:

$$x = \frac{x_1}{\omega} e^{-\Lambda t}\left[\omega\cos(\omega t) + \Lambda\sin(\omega t)\right] \qquad (II.9)$$

και

$$u = -x_1 e^{-\Lambda t}\left[\Lambda\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\right] + \frac{\Lambda x_1}{\omega} e^{-\Lambda t}\left[-\Lambda\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t)\right] \qquad (II.10)$$

Στη II.6, αν θέσουμε $\omega_o^2 = \dfrac{D}{m}$, τότε: $\omega_o^2 = \omega^2 + \Lambda^2$

Με αποτέλεσμα να μπορούμε να γράψουμε: $\omega = \omega_o \sin\theta$ και $\Lambda = \omega_o \cos\theta$

Οπότε η II.9 γίνεται:

$$x = \frac{\omega_o x_1}{\omega} e^{-\Lambda t}\left[\sin\theta\cos(\omega t) + \cos\theta\sin(\omega t)\right] \Leftrightarrow \boxed{x = A_o e^{-\Lambda \cdot t}\sin(\omega t + \theta)} \text{ με } \boxed{\tan\theta = \frac{\omega}{\Lambda}} \qquad (II.11)$$

όπου: $\boxed{\dfrac{\omega_o x_1}{\omega} = A_o}$ και η (II.10)

$$u = -x_1\omega_o e^{-\Lambda t}\left\{\left[\cos\theta\cos(\omega t) + \sin\theta\sin(\omega t)\right] + \frac{\Lambda}{\omega}\left[\cos\theta\sin(\omega t) - \sin\theta\cos(\omega t)\right]\right\} \Leftrightarrow$$

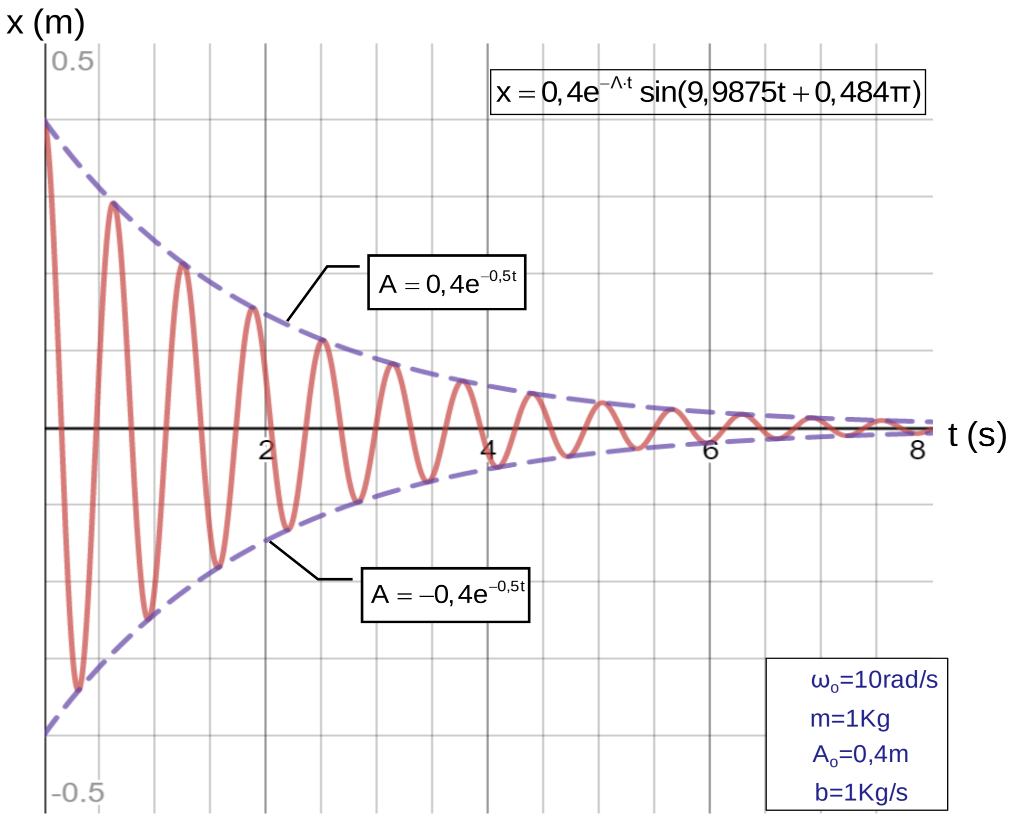
$$u = -\frac{x_1\omega_o}{\omega} e^{-\Lambda t}\left[\omega\cos(\omega t - \theta) + \Lambda\sin(\omega t - \theta)\right] \Leftrightarrow$$

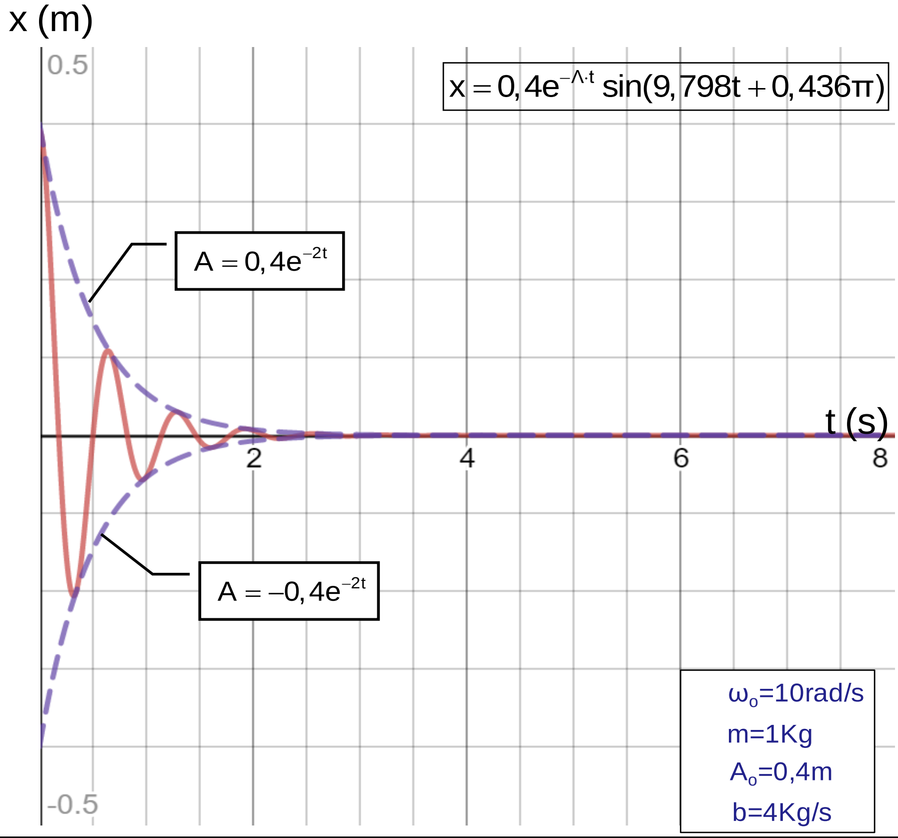
$$u=-\frac{x_1\omega_o^{\;2}}{\omega}e^{-\Lambda t}\left[\sin\theta\cos(\omega t-\theta)+\cos\theta\sin(\omega t-\theta)\right]\Leftrightarrow\boxed{u=-A_o\omega_o e^{-\Lambda t}\sin(\omega t)}\qquad(\text{II}.12)$$

και

$$a=\frac{du}{dt}=-A_o\omega_o e^{-\Lambda t}\left[-\Lambda\sin\omega t+\omega\cos\omega t\right]\Leftrightarrow$$

$$a=-A_o\omega_o^{\;2}e^{-\Lambda t}\left[-\cos\theta\sin\omega t+\sin\theta\omega\cos\omega t\right]\Leftrightarrow\boxed{a=-A_o\omega_o^{\;2}e^{-\Lambda t}\sin(\omega t-\theta)}\qquad(\text{II}.13)$$

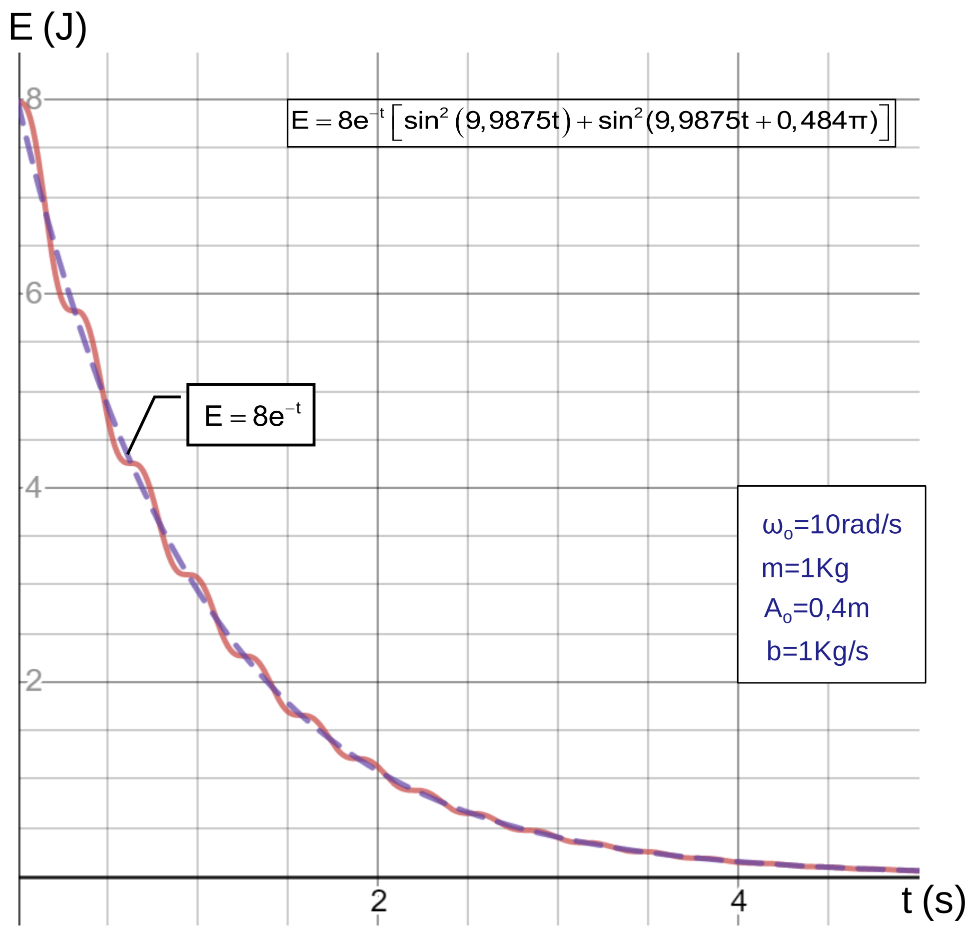




Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι: $E = K + U = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \xrightarrow[(II.8)]{(II.7)}$

$$E = \frac{1}{2}m\omega_o^2 A_o^2 e^{-2\Lambda t}\sin^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega_o^2 A_o^2 e^{-2\Lambda \cdot t}\sin^2(\omega t + \theta) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}DA_o^2 e^{-2\Lambda t}\left[\sin^2(\omega t) + \sin^2(\omega t + \theta)\right]} \qquad (II.14)$$



III. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Δύναμη διέγερσης της μορφής: $F_\delta = F_o \cos(\omega t)$

Διαφορική εξίσωση της κίνησης: $\Sigma F = ma \Leftrightarrow F_o \cdot \cos(\omega \cdot t) - Dx - bu = ma \Leftrightarrow$

$$F_o \cdot \cos(\omega \cdot t) - Dx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = \frac{F_o}{m}\cdot\cos(\omega\cdot t)} \qquad \text{(III.1)}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική μη ομογενής, οπότε η αναλυτική λύση της είναι της μορφής:

$$x = x_h + x_p$$

όπου $x_h = A_o e^{-\Lambda \cdot t}\sin(\omega t + \theta)$ η λύση της αντίστοιχης γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και $x_p = \frac{F_o}{m}\left[c_5\cos(\omega t) + c_6\sin(\omega t)\right]$ μια μερική λύση της εξίσωσης. Ο προσδιορισμός των σταθερών c_5 και c_6 γίνεται απαιτώντας η μερική λύση να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση.

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{F_o}{m}\left[-c_5\omega\sin(\omega t) + c_6\omega\cos(\omega t)\right] \quad \text{και} \quad \frac{dx_p^2}{dt^2} = -\frac{F_o}{m}\left[c_5\omega^2\cos(\omega t) + c_6\omega^2\sin(\omega t)\right]$$

Συνεπώς:

$$-\frac{F_o}{m}\left[c_5\omega^2\cos(\omega t) + c_6\omega^2\sin(\omega t)\right] + \frac{F_o b}{m^2}\left[-c_5\omega\sin(\omega t) + c_6\omega\cos(\omega t)\right] +$$

$$+\frac{DF_o}{m^2}\left[c_5\cos(\omega t) + c_6\sin(\omega t)\right] = \frac{F_o}{m}\cos\omega t \Leftrightarrow$$

$$\left(-c_5\omega^2 + c_6\frac{b}{m}\omega + c_5\frac{D}{m}\right)\cos\omega t + \left(-c_6\omega^2 - c_5\frac{b}{m}\omega + c_6\frac{D}{m}\right)\sin\omega t = \cos\omega t \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)c_5 + \frac{b}{m}\omega c_6 = 1 \\ \text{και} \\ -\frac{b}{m}\omega c_5 + \left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)c_6 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{D}{m}=\omega_o^2} \begin{cases} \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)\cdot\frac{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{\frac{b}{m}\omega}c_6 + \frac{b}{m}\omega c_6 = 1 \\ \text{και} \\ c_5 = \frac{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{\frac{b}{m}\omega}c_6 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} c_6 = \dfrac{\frac{b}{m}\omega}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2} \\ \text{και} \\ c_5 = \dfrac{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2} \end{cases}$$

Συνεπώς η αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης γράφεται:

$$x = A_o e^{-\Lambda \cdot t}\sin(\omega' t + \theta) + \frac{\frac{F_o}{m}\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}\cos\omega t + \frac{\frac{F_o b}{m^2}\omega}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}\sin\omega t \Leftrightarrow$$

$$x = A_o e^{-\Lambda \cdot t}\sin(\omega' t + \theta) +$$

$$+\frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} \cdot \left[\frac{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}}\cos\omega t + \frac{\frac{b}{m}\omega}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}}\sin\omega t\right]$$

Θέτοντας όπου: $\boxed{\frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} = A}$, $\frac{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} = \cos\varphi$ και

$$\frac{\frac{b}{m}\omega}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} = \sin\varphi$$

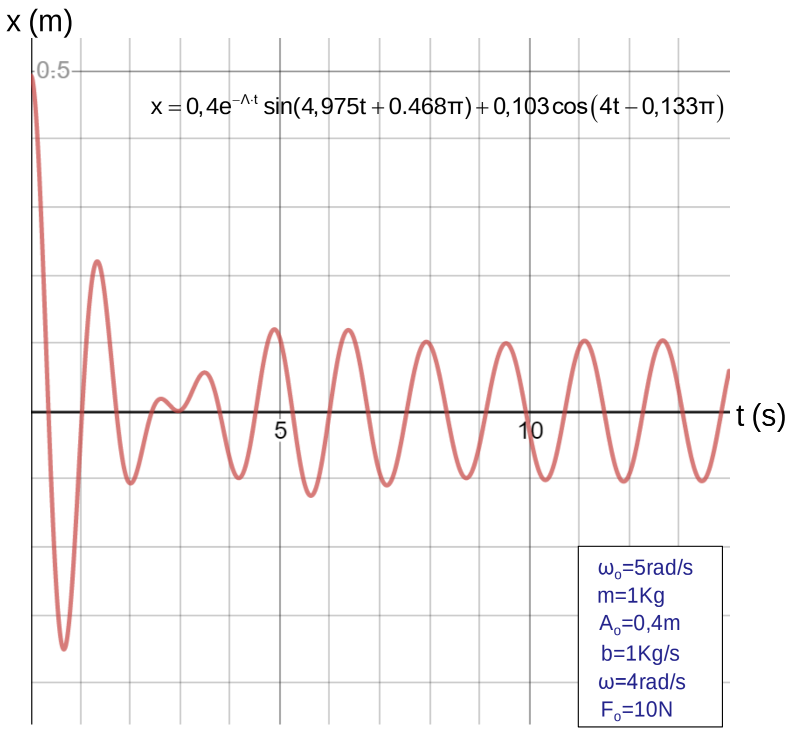
Έχουμε: $x = A_o e^{-\Lambda \cdot t}\sin(\omega' t + \theta) + A\left[\cos\varphi\cos(\omega t) + \sin\varphi\sin(\omega t)\right] \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = A_o e^{-\Lambda \cdot t}\sin(\omega' t + \theta) + A\cos(\omega t - \varphi)} \qquad \text{(III.2)}$$

Ο πρώτος όρος της γενικής λύσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο (με $\omega' = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης). Συνεπώς **στη μόνιμη κατάσταση** επικρατεί ο δεύτερος όρος με αποτέλεσμα το σύστημα να εκτελέσει αμείωτη αρμονική ταλάντωση **συχνότητας ω ίσης με της διεγείρουσας δύναμης**, συνεπώς:

$$\boxed{x = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi)}$$

με $\boxed{\tan\varphi = \frac{\frac{b}{m}\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}}$ (III.3)



Για να βρούμε για ποια συχνότητα ω μεγιστοποιείται το πλάτος Α της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, εξισώνουμε την παράγωγο του πλάτους Α ως προς τη συχνότητα ω, με το μηδέν, οπότε:

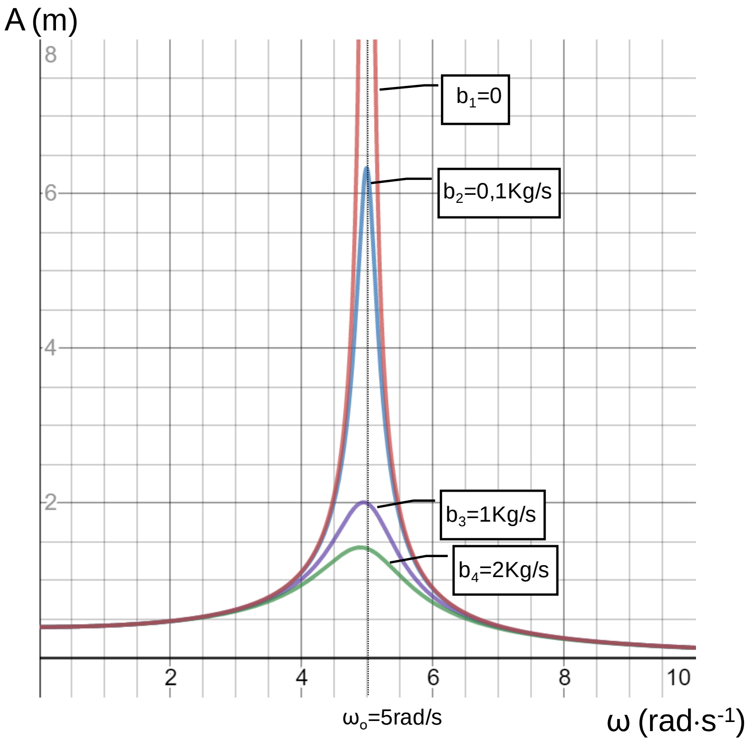
$$\frac{dA}{d\omega}=0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2}}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{F_o}{m}\cdot\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow$$

$$-\frac{F_o}{2m}\cdot\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{F_o}{2m}\cdot\frac{\left[2\left(\omega_o^2-\omega^2\right)\cdot(-2\omega)+\frac{2b^2}{m^2}\omega\right]}{\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0 \Leftrightarrow -\frac{F_o}{m}\cdot\left(-2\omega_o^2\cdot\omega+2\omega^3+\frac{b^2}{m^2}\omega\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\omega\left(-2\omega_o^2+2\omega^2+\frac{b^2}{m^2}\right)=0 \rightarrow \begin{cases}\omega=0\\ \text{ή}\\ \omega=\sqrt{\omega_o^2-\frac{b^2}{2m^2}}\end{cases}$$

Συνεπώς το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης γίνει ίση με $\omega=\sqrt{\omega_o^2-\frac{b^2}{2m^2}}$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός πλάτους**.



Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης είναι:

$$A_{max}=\frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{\left(\frac{b^2}{2m^2}\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\cdot\left(\omega_o^2-\frac{b^2}{2m^2}\right)}} \Leftrightarrow$$

$$A_{max}=\frac{F_o}{m\sqrt{\frac{b^4}{4m^4}+\frac{b^2}{m^2}\omega_o^2-\frac{b^4}{2m^4}}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{A_{max}=\frac{F_o}{\sqrt{b^2\omega_o^2-\frac{b^4}{4m^2}}}} \qquad \text{(III.4)}$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Όταν η σταθερά απόσβεσης b=0, τότε η συχνότητα συντονισμού πλάτους ω είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα ω_o και τότε το πλάτος της ταλάντωσης τείνει στο άπειρο.

Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης είναι:

$$u=\frac{dx}{dt}\Rightarrow u=\frac{d}{dt}\left[A\cdot\cos(\omega t-\varphi)\right]\Rightarrow u=-\omega A\cdot\sin(\omega t-\varphi)\Rightarrow$$

$$u=-\frac{\frac{F_o}{m}\cdot\omega}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2}}\cdot\sin(\omega t-\varphi)\xrightarrow{\omega_o^2=\frac{D}{m}}\boxed{u=-\frac{F_o}{\sqrt{\left(\frac{D}{\omega}-m\omega\right)^2+b^2}}\cdot\sin(\omega t-\varphi)}\quad(III.5)$$

όπου: $\boxed{\frac{F_o}{\sqrt{\left(\frac{D}{\omega}-m\omega\right)^2+b^2}}=u_{max}}$, μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, η οποία εξαρτάται από τη συχνότητα ω της δύναμης διέγερσης και μεγιστοποιείται όταν:

$$\frac{D}{\omega}-m\omega=0\Leftrightarrow\omega^2=\frac{D}{m}\Leftrightarrow\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}=\omega_o$$

δηλαδή όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός ενέργειας**.

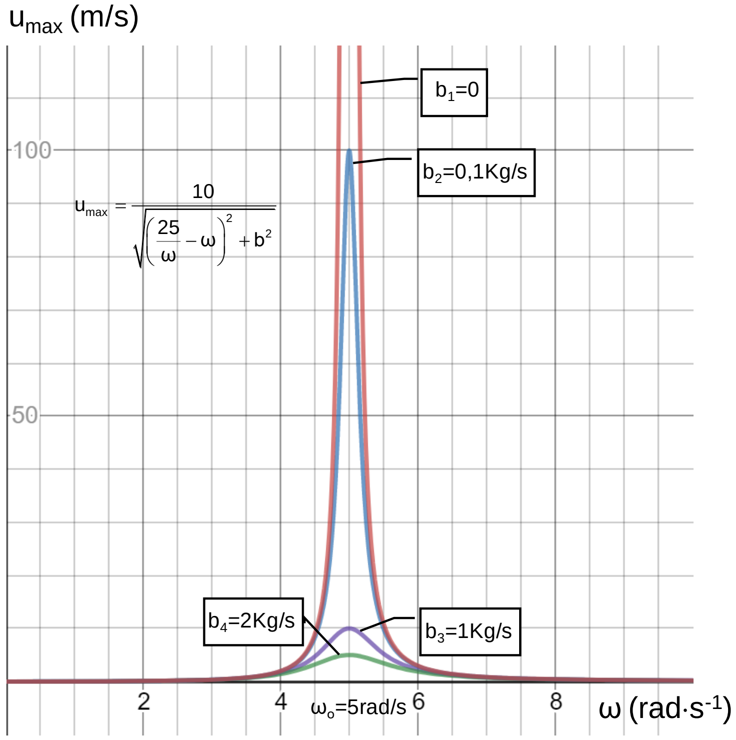
Όταν $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}=\omega_o$, τότε

$$\tan\varphi=\frac{\frac{b}{m}\omega}{\omega_o^2-\omega^2}\to\infty,\ \text{οπότε}\ \varphi=\frac{\pi}{2},$$

συνεπώς:

$$u=-\frac{F_o}{b}\cdot\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow u=\frac{F_o}{b}\cos(\omega t).$$

Η ταχύτητα τότε είναι συμφασική με τη δύναμη διέγερσης.



Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από τη δύναμη διέγερσης προς τον ταλαντωτή είναι:

$$\frac{dW}{dt}=F_\delta\cdot u=\frac{F_o^2}{b}\cdot\cos^2(\omega t)>0\ \textbf{και μέγιστος}\qquad(III.6)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση ($\omega\neq\omega_o$) ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από το διεγέρτη δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dW}{dt}=F_\delta\cdot u\Leftrightarrow\frac{dW}{dt}=-\frac{F_o^2}{\sqrt{\left(\frac{D}{\omega}-m\omega\right)^2+b^2}}\cos(\omega t)\sin(\omega t-\varphi)$$

και είναι άλλοτε θετικός ή αρνητικός.

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι: $E=K+U=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}Dx^2\xrightarrow[(III.4)]{(I.II2)}$

$$E=\frac{mF_o^{\ 2}}{2\left[\left(\frac{D}{\omega}-m\omega\right)^2+b^2\right]}\cdot\sin^2\left(\omega t-\varphi\right)+\frac{\omega_o^{\ 2}F_o^{\ 2}}{2m\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2\right]}\cdot\cos^2\left(\omega t-\varphi\right)$$

ή πιο απλά: $$\boxed{E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\left(\omega t-\varphi\right)+\frac{1}{2}m\omega_o^{\ 2}A^2\cos^2\left(\omega t-\varphi\right)} \qquad \text{(III.7)}$$

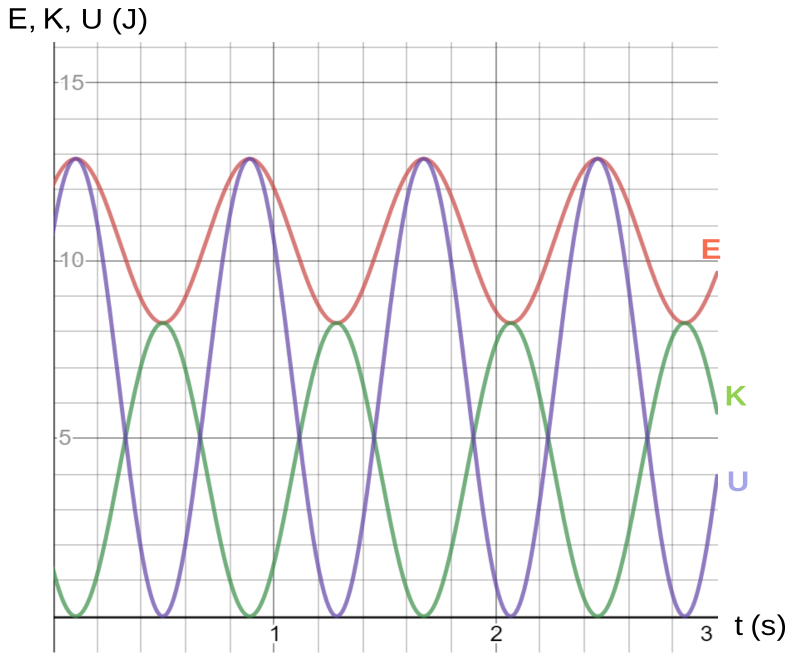
Όταν **$\omega<\omega_o$** η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας είναι μικρότερη από την αντίστοιχη μέγιστη της δυναμικής και η ολική ενέργεια ταλάντωσης **μεταβάλλεται χρονικά** (παρόλο που το πλάτος της ταλάντωσης μένει σταθερό) (διάγραμμα ΙΙΙ.3).
Αντίστοιχα, όταν **$\omega>\omega_o$** η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μέγιστη της δυναμικής και η ολική ενέργεια ταλάντωσης **μεταβάλλεται χρονικά** (διάγραμμα ΙΙΙ.4).
Κατά τον συντονισμό της ενέργειας, **$\omega=\omega_o$** από την σχέση (ΙΙΙ.7) έχουμε:

$$E=\frac{1}{2}m\omega_o^{\ 2}A^2\sin^2\left(\omega t-\varphi\right)+\frac{1}{2}m\omega_o^{\ 2}A^2\cos^2\left(\omega t-\varphi\right)\Leftrightarrow E=\frac{1}{2}m\omega_o^{\ 2}A^2 \quad \textbf{σταθερή}$$

Διάγραμμα ενεργειών για τιμές:
ω=4rad/s,
b=1Kg/s,
m=1Kg,
F_o=10N,
D=25N/m

$$K=8,25\sin^2\left(4t-0,133\pi\right)$$

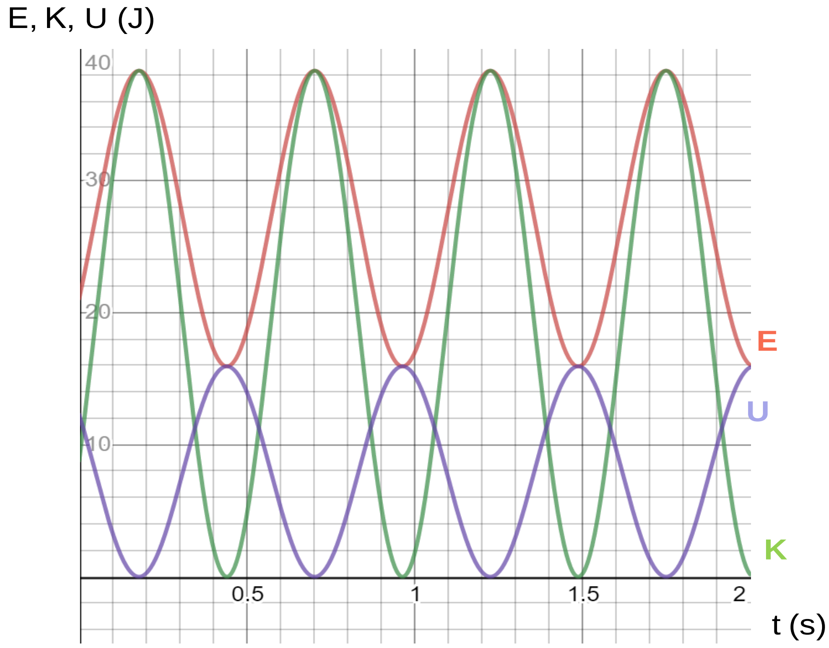
$$U=12,87\cos^2\left(4t-0,133\pi\right)$$

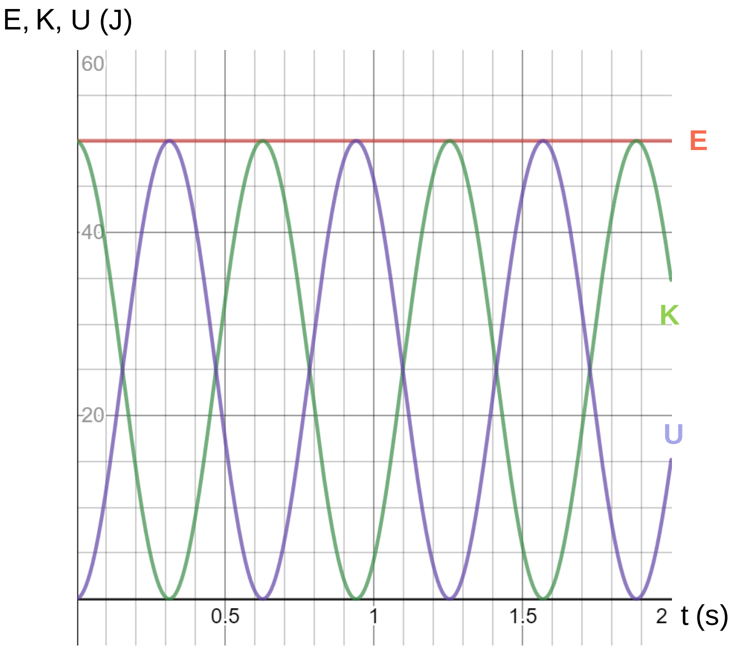


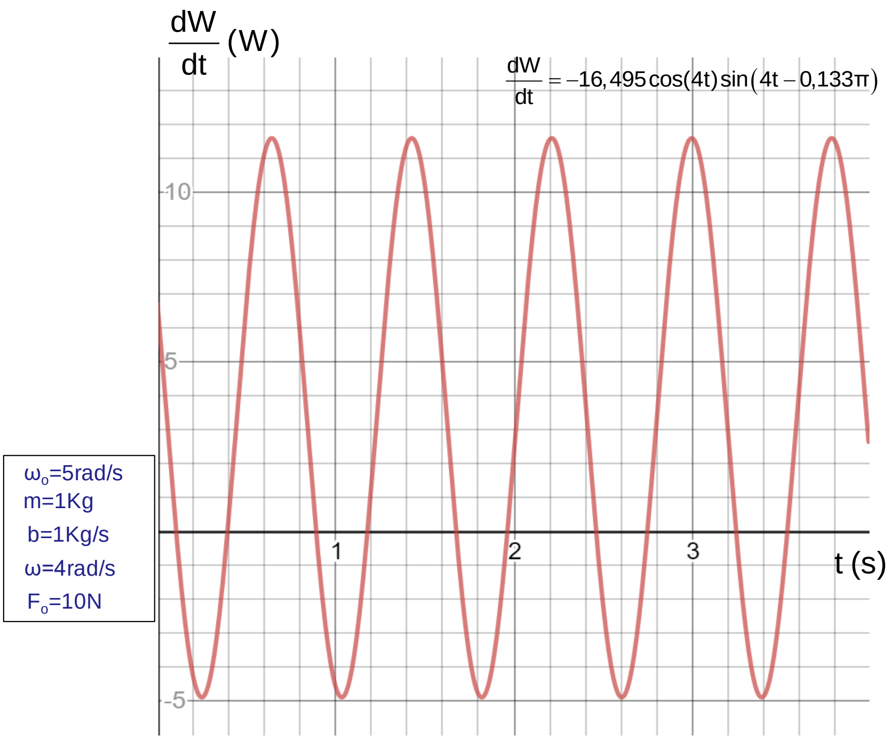
Διάγραμμα ενεργειών για τιμές:
ω=6rad/s,
b=1Kg/s,
m=1Kg,
F_o=10N,
D=25N/m

$$K=38,30\sin^2\left(4t+0,159\pi\right)$$

$$U=15,94\cos^2\left(6t-0,159\pi\right)$$




E, K, U (J)
60
40
20
0.5
1
1.5
2
t (s)
E
K
U


dW/dt (W)
dW/dt = −16,495 cos(4t) sin(4t − 0,133π)
10
5
-5
1
2
3
t (s)
ωo=5rad/s
m=1Kg
b=1Kg/s
ω=4rad/s
Fo=10N

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΙΔΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΚΑΙ ΙΔΙΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΠΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x = x_1 = A_1 ημ\left(ωt + φ_{o,1}\right) + A_2 ημ\left(ωt + φ_{o,2}\right) \quad (1)$$

όπου με χρήση της ταυτότητας: $ημ(α+β) = ημα \cdot συνβ + ημβ \cdot συνα$

$$(1) \to x = A_1(ημωt \cdot συνφ_{o,1} + συνωt \cdot ημφ_{o,1}) + A_2(ημωt \cdot συνφ_{o,2} + συνωt \cdot ημφ_{o,2}) \Leftrightarrow$$

$$x = ημωt \cdot (A_1 συνφ_{o,1} + A_2 συνφ_{o,2}) + συνωt \cdot (A_1 ημφ_{o,1} + A_2 ημφ_{o,2}) \quad (2)$$

Θέτουμε: $A_1 συνφ_{o,1} + A_2 συνφ_{o,2} = Aσυνθ$ και $A_1 ημφ_{o,1} + A_2 ημφ_{o,2} = Aημθ$ (3)

απαιτώντας:

$$A^2 συν^2θ + A^2 ημ^2θ = A^2 \Leftrightarrow \left(A_1 συνφ_{o,1} + A_2 συνφ_{o,2}\right)^2 + \left(A_1 ημφ_{o,1} + A_2 ημφ_{o,2}\right)^2 = A^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(A_1 συνφ_{o,1}\right)^2 + \left(A_2 συνφ_{o,2}\right)^2 + 2A_1A_2 συνφ_{o,1} συνφ_{o,2} + \left(A_1 ημφ_{o,1}\right)^2 + \left(A_2 ημφ_{o,2}\right)^2 + 2A_1A_2 ημφ_{o,1} ημφ_{o,2} = A^2 \Leftrightarrow$$

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(συνφ_{o,1} συνφ_{o,2} + ημφ_{o,1} ημφ_{o,2}) = A^2 \quad (4)$$

Και με χρήση της ταυτότητας: $συν(α-β) = συνα \cdot συνβ + ημα \cdot ημβ$

$$(4) \to A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συν(φ_{o,1} - φ_{o,2})} \quad \text{και} \quad εφθ = \frac{ημθ}{συνθ} = \frac{A_1 ημφ_{o,1} + A_2 ημφ_{o,2}}{A_1 συνφ_{o,1} + A_2 συνφ_{o,2}}$$

Ενώ η (2) λόγω (3) γίνεται: $x = Aημωt \cdot συνθ + Aσυνωt \cdot ημθ \Leftrightarrow x = Aημ(ωt + θ)$

με χρήση πάλι της τριγωνομετρικής ταυτότητας: $ημ(α+β) = ημα \cdot συνβ + ημβ \cdot συνα$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΙΔΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΠΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Σώμα συμμετέχει ταυτόχρονα σε δύο ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης με κοινή θέση ισορροπίας και εξισώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu\omega_1 t \qquad \text{και} \qquad x_2 = A\eta\mu\omega_2 t$$

Η συνισταμένη $x = x_1 + x_2$ κίνηση με χρήση της ταυτότητας $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

γράφεται:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

Η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$u = \frac{dx}{dt} = 2A\left[\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\eta\mu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$u = A\left[\omega_2\eta\mu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) - \omega_1\eta\mu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) +\right.$$

$$\left. +\omega_1\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) + \omega_2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$u = A\left\{\omega_2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) + \eta\mu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\right] +\right.$$

$$\left.\omega_1\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) - \eta\mu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\right]\right\} \Leftrightarrow$$

$$u = A\omega_2\sigma\upsilon\nu(\omega_2 t) + A\omega_1\sigma\upsilon\nu(\omega_1 t)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει ευκολότερα από την άμεση παραγώγιση των σχέσεων x_1 και x_2.

Βιβλιογραφία

- Θέματα Φυσικής παρανοήσεις & προτάσεις υπέρβασής τους, Θ.Κ. Μαχαίρας, τόμος Ι, Πήλιο 2009

- Διαφορικές εξισώσεις, R. Bronson, Schaum's outline series, ΕΣΠΙ 1978