ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Σε όλες τις κρούσεις όπου η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων του υπό μελέτη συστήματος είναι μηδέν (ή είναι αμελητέες σε σχέση με τις εσωτερικές δυνάμεις που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της κρούσης) ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.). Δεν ισχύει η Α.Δ.Ο. σε κρούσεις με στερεά που στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής και γενικά σε περιπτώσεις όπου οι εξωτερικές δυνάμεις (ή καλύτερα οι ωθήσεις τους) κατά την κρούση λαμβάνουν μεγάλες τιμές.

1. Κεντρική ελαστική κρούση

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα προβλήματα στα οποία:

- Τα σώματα κινούνται χωριστά πριν και μετά την κρούση
- Τα κέντρα μάζας των σωμάτων κινούνται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση
- Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων παραμένει σταθερή πριν και μετά την κρούση.

Στα προβλήματα αυτά με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.) και της Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας (Δ.Κ.Ε.) υπολογίζουμε τις τελικές ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

Για συντομία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του παρακάτω πίνακα ανάλογα με την περίπτωση ελαστικής κεντρικής κρούσης του προβλήματος, έτσι:

	Σώμα μάζας m_1	Σώμα μάζας m_2
Κίνηση και των δύο σωμάτων στην ίδια κατεύθυνση πριν από την κρούση	$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot u_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot u_2$	$u_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot u_2$
	Αν $m_1 = m_2$ τότε τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες, δηλαδή: $u_1' = u_2$ και $u_2' = u_1$	
Κίνηση του σώματος μάζας m_1, ενώ το σώμα μάζας m_2 αρχικά ήταν ακίνητο.	$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot u_1$	$u_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot u_1$
	Αν $m_1 = m_2$ τότε τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες, δηλαδή: $u_1' = 0$ και $u_2' = u_1$	
	Αν $m_1 >> m_2$ τότε $u_1' \approx u_1$ και $u_2' \approx 2u_1$	
	Αν $m_1 << m_2$ τότε $u_1' \approx -u_1$ και $u_2' \approx 0$	
Κρούση σώματος με ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας (τοίχος)	Η ταχύτητα του σώματος μετά την κρούση αντιστρέφεται, δηλαδή $u_1' = -u_1$. Επομένως το μέτρο της ταχύτητας παραμένει το ίδιο , αλλά η ορμή του σώματος μεταβάλλεται.	

Για την επίλυση των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Σχεδιάζουμε τα σώματα με τη φορά κίνησης τους πριν και μετά την κρούση.
2. Επιλέγουμε αυθαίρετα μια φορά ως θετική και βάση αυτής ορίζουμε ως θετικές ή αρνητικές τις ταχύτητες των σωμάτων. Αν μετά την κρούση η φορά κίνησης κάποιου σώματος είναι άγνωστη τη θεωρούμε αυθαίρετα θετική και ανάλογα με το αποτέλεσμα βρίσκουμε τη πραγματική φορά.
3. Εφαρμόζουμε τους τύπους που προαναφέραμε στον παραπάνω πίνακα δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στη φορά των ταχυτήτων. Δηλαδή αν οι u_1, u_2 έχουν ίδια φορά με την προκαθορισμένη από μας ως θετική φορά τότε στους τύπους βάζουμε $+u_1$, $+u_2$, ενώ είναι αντίθετες βάζουμε $-u_1$, $-u_2$.

2. Κεντρική πλαστική κρούση

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν προβλήματα στα οποία:

- Τα σώματα κινούνται μαζί μετά την κρούση
- Τα κέντρα μάζας των σωμάτων πριν την κρούση καθώς και του συσσωματώματος κινούνται στην ίδια ευθεία.

- Οι παραμορφώσεις είναι μόνιμες και μέρος της κινητικής ενέργειας γίνεται θερμότητα.

Για την επίλυση των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Σχεδιάζουμε τα σώματα με τη φορά κίνησης τους πριν και μετά την κρούση.
2. Επιλέγουμε αυθαίρετα μια φορά ως θετική και βάση αυτής ορίζουμε ως θετικές ή αρνητικές τις ταχύτητες των σωμάτων. Αν μετά την κρούση η φορά κίνησης κάποιου σώματος είναι άγνωστη τη θεωρούμε αυθαίρετα θετική και ανάλογα με το αποτέλεσμα βρίσκουμε τη πραγματική φορά.
3. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.)

<u>Προσοχή</u>: Στην πλαστική κρούση η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται, άρα δεν ισχύει η Δ.Κ.Ε. τη στιγμή της κρούσης, μιας και ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα.

- Η θερμότητα Q που παράγεται κατά την κρούση είναι: $\boxed{Q = K_{ΑΡΧ} - K_{ΤΕΛ}}$
- Το ποσοστό απώλειας της ενέργειας κατά την πλαστική κρούση είναι:

$$\boxed{α = \frac{Q}{K_{ΑΡΧ}} \cdot 100\%} \text{ ή } \boxed{α = \left(1 - \frac{K_{ΤΕΛ}}{K_{ΑΡΧ}}\right) \cdot 100\%}$$

3. Κεντρική ανελαστική κρούση

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν προβλήματα στα οποία:

- Τα σώματα κινούνται ξεχωριστά μετά την κρούση
- Τα κέντρα μάζας των σωμάτων πριν και μετά την κρούση κινούνται στην ίδια ευθεία.
- Οι παραμορφώσεις είναι μόνιμες και μέρος της κινητικής ενέργειας γίνεται θερμότητα.

Για την επίλυση των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Σχεδιάζουμε τα σώματα με τη φορά κίνησης τους πριν και μετά την κρούση.
2. Επιλέγουμε αυθαίρετα μια φορά ως θετική και βάση αυτής ορίζουμε ως θετικές ή αρνητικές τις ταχύτητες των σωμάτων. Αν μετά την κρούση η φορά κίνησης κάποιου σώματος είναι άγνωστη τη θεωρούμε αυθαίρετα θετική και ανάλογα με το αποτέλεσμα βρίσκουμε τη πραγματική φορά.
3. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.)

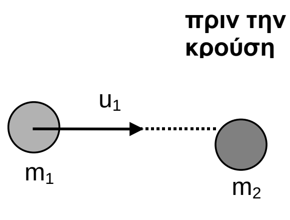
<u>Προσοχή</u>: Στην πλαστική κρούση η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται, άρα δεν ισχύει η Δ.Κ.Ε. τη στιγμή της κρούσης, μιας και ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα.

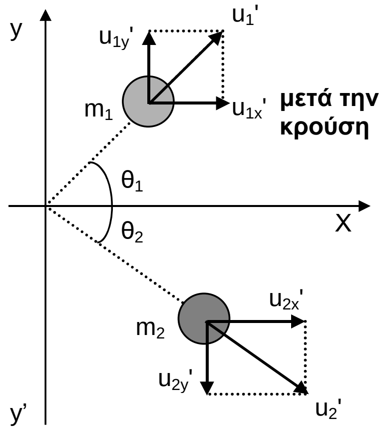
- Η θερμότητα Q που παράγεται κατά την κρούση είναι $\boxed{Q = K_{ΑΡΧ} - K_{ΤΕΛ}}$
- Το ποσοστό απώλειας της ενέργειας κατά την πλαστική κρούση είναι:

$$\boxed{α = \frac{Q}{K_{ΑΡΧ}} \cdot 100\%} \text{ ή } \boxed{α = \left(1 - \frac{K_{ΤΕΛ}}{K_{ΑΡΧ}}\right) \cdot 100\%}$$

4. ΜΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

1ος τρόπος: Στην περίπτωση μη κεντρικής ελαστικής κρούσης δύο σφαιρών μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, με την μάζα m_2 να είναι ακίνητη, τότε οι δύο σφαίρες μετά την κρούση κινούνται σε τυχαίες διευθύνσεις που σχηματίζουν τυχαίες γωνίες $θ_1$ και $θ_2$ με τον οριζόντιο άξονα x'x, όπως φαίνεται στο σχήμα.





Στην περίπτωση αυτή κάνουμε τα εξής:

α. Αναλύουμε στους ταχύτητες u_1' και u_2' μετά την κρούση στους δύο άξονες.

Σφαίρα m_1: $u_{1x}' = u_1'συνθ_1$ σφαίρα m_2: $u_{2x}' = u_2'συνθ_2$

$u_{1y}' = u_1'ημθ_1$ $u_{2y}' = u_2'ημθ_2$

β. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. σε κάθε άξονα ξεχωριστά:

Άξονας x’x : $P^{πριν}_{ΟΛ,x} = P^{μετά}_{ΟΛ,x} \Rightarrow P_{1x} + P_{2,x} = P_{1x}' + P_{2,x}' \Rightarrow m_1u_1 + 0 = m_1u_1'συνθ_1 + m_2u_2'συνθ_2$ (1)

Άξονας y’y : $P^{πριν}_{ΟΛ,y} = P^{μετά}_{ΟΛ,y} \Rightarrow P_{1y} + P_{2,y} = P_{1y}' + P_{2,y}' \Rightarrow 0 + 0 = m_1u_1'ημθ_1 - m_2u_2'ημθ_2$ (2)

2^{ος} τρόπος: Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο.: $\vec{P}^{πριν}_{ΟΛ} = \vec{P}^{μετά}_{ΟΛ} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \rightarrow$

$$P_1 = \sqrt{P_1'^2 + P_2'^2 + 2 \cdot P_1' \cdot P_2' \cdot συν(θ_1 + θ_2)} \Rightarrow m_1u_1 = \sqrt{m_1^2u_1'^2 + m_2^2u_2'^2 + 2 \cdot m_1u_1' \cdot m_2u_2' \cdot συν(θ_1 + θ_2)} \quad (3)$$

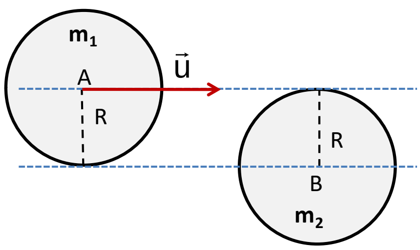
όπου η τελική ορμή πρέπει να έχει τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα x’x.

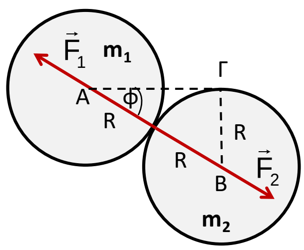
Και στους δύο τρόπους ισχύει η διατήρηση της ολικής κινητικής ενέργειας (Δ.Κ.Ε.) για το σύστημα:

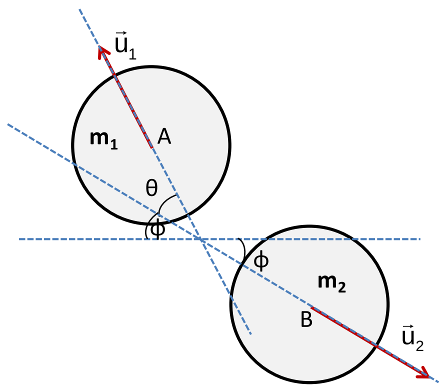
$$K^{πριν}_{ΟΛ} = K^{μετά}_{ΟΛ} \Rightarrow K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{1}{2}m_1u_1 + 0 = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 \quad (4)$$

Με δεδομένες τις μάζες m_1, m_2 και την ταχύτητα u, από τις σχέσεις (1), (2), και (4) ή (3) και (4) προκύπτουν συστήματα εξισώσεων με αγνώστους u_1', u_2', $θ_1$, $θ_2$. Η λύση των συστημάτων είναι εφικτή αν από τα δεδομένα της άσκησης προσδιορίζονται κάποιοι από τους τέσσερις αγνώστους.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που μας δίνονται οι διαστάσεις των σφαιρών είναι δυνατόν να εξαχθεί μία ακόμη σχέση από τις δυνάμεις επαφής που αναπτύσσονται κατά την κρούση. Για παράδειγμα αν οι δύο σφαίρες είναι όμοιες σε μέγεθος και ακτίνας R με τη σφαίρα m_2 ακίνητη και η κρούση πραγματοποιείται όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση κίνησης της σφαίρας m_2 μετά την κρούση ως εξής:







$$ημφ = \frac{R}{2R} \Leftrightarrow φ = 30^o$$

5. ΜΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

1^{ος} τρόπος: Στην περίπτωση μη κεντρικής πλαστικής κρούσης δύο σφαιρών μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα, με τις δύο σφαίρες να κινούνται αρχικά σε κάθετες διευθύνσεις, τότε το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται σε τυχαία διεύθυνση που σχηματίζει τυχαία γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα x’x, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στην περίπτωση αυτή κάνουμε τα εξής:

α. Αναλύουμε την ταχύτητα V του συσσωματώματος μετά την κρούση στους δύο άξονες.

$V_x = Vσυνθ$ και $V_y = Vημθ$

β. Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. σε κάθε άξονα ξεχωριστά:

Άξονας x'x : $P_{\alpha,x}^{\pi\rho\iota\nu} = P_{\alpha,x}^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow P_{1,x} + P_{2,x} = P_x' \Leftrightarrow m_1 u_1 + 0 = (m_1 + m_2)\cdot V_x \Rightarrow V_x = \dfrac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$ (1)

Άξονας y'y : $P_{\alpha,y}^{\pi\rho\iota\nu} = P_{\alpha,y}^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow P_{1,y} + P_{2,y} = P_y' \Leftrightarrow 0 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)\cdot V_y \Rightarrow V_y = \dfrac{m_2 u_2}{m_1 + m_2}$ (2)

γ. Συνεπώς: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{V_y}{V_x}$

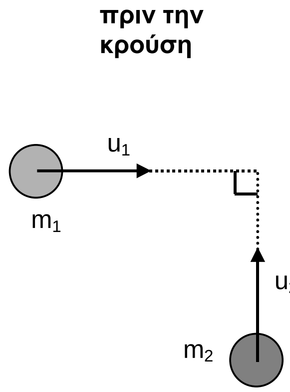
2ος τρόπος: Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο.:

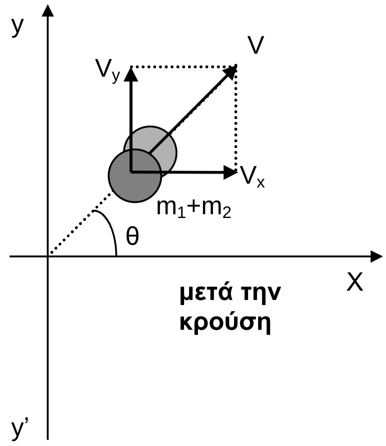
$\vec{P}_{O\Lambda}^{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{O\Lambda}^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}' \to$

$\sqrt{P_1^{\,2} + P_2^{\,2}} = P' \Rightarrow$

$\sqrt{m_1^2 u_1^{\,2} + m_2^2 u_2^{\,2}} = (m_1 + m_2)V$

όπου η τελική ορμή έχει τη διεύθυνση που προσδιορίζεται από την γωνία θ, ως εξής: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{m_2 u_2}{m_1 u_1}$





6. ΠΛΑΓΙΑ ΚΡΟΥΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

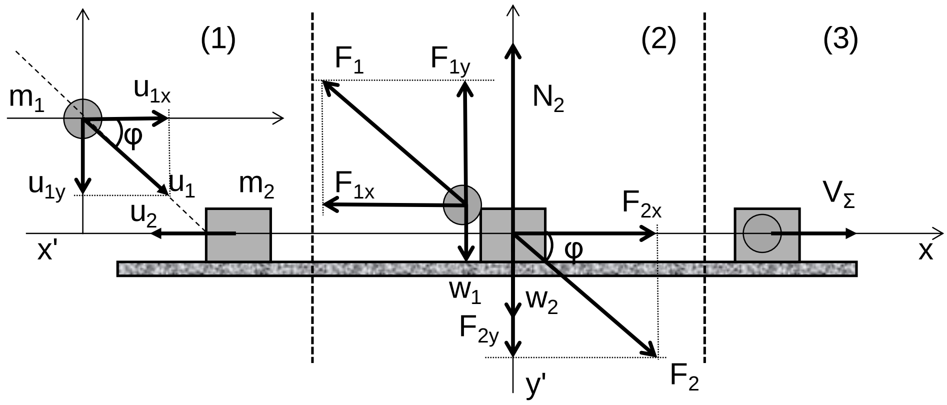
Στην περίπτωση που δύο σώματα συγκρούονται πλάγια και πλαστικά και μετά την κρούση το συσσωμμάτωμα που προκύπτει μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μήκος μιας διεύθυνσης (π.χ. οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο), όπως στα σχήματα (1), (4) και (5) τότε:

α. Αναλύουμε την ταχύτητα του σώματος που δεν είναι στη διεύθυνση της τελικής κίνησης σε άξονες, όπου ο άξονας x'x είναι ο άξονας της τελικής κίνησης του συσσωματώματος και ο άξονας y'y ο κάθετος στον προηγούμενο.

β. Η αρχή διατήρησης της ορμής εφαρμόζεται μόνο στον άξονα x'x διότι μόνο σε αυτόν έχουμε $\Sigma F_{\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\omega}\nu,x}=0$.

Άξονας x'x : $\vec{P}_{o\lambda,x}^{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{o\lambda,x}^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \to m_1 u_{1,x} - m_2 u_2 = (m_1 + m_2)\times V_\Sigma \Rightarrow V_\Sigma = \dfrac{m_1 u_1 \sigma\upsilon\nu\varphi - m_2 u_2}{m_1 + m_2}$ (1)

γ. Στον άξονα y'y είναι προφανές ότι δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής διότι το μέτρο της κάθετης αντίδρασης N_2 τη στιγμή της κρούσης γίνεται πολύ μεγάλο και δεν επιτρέπει την κίνηση του σώματος m_2 στον άξονα y'y. Στην πραγματικότητα σε μια τέτοια κρούση το συσσωμάτωμα αναπηδά πάνω στο επίπεδο παρόλα αυτά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παραμένει ακίνητο.



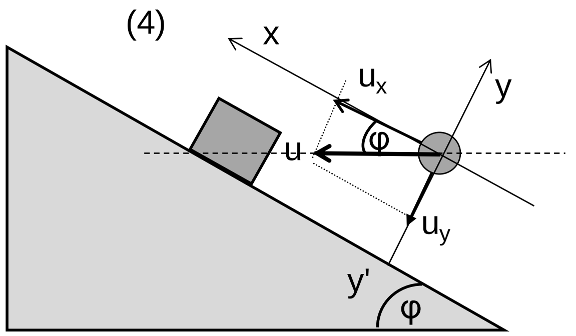
Άξονας y’y: σώμα m_2 $\Sigma F_{y,2}=0 \rightarrow N_2 - w_2 - F_{2,y}=0 \Leftrightarrow N_2 = m_2 g + F_2 \eta\mu\varphi$ (2)

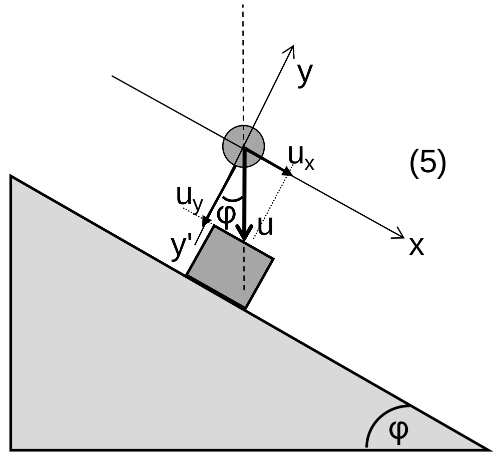
σώμα m_1 $\Sigma \vec{F}_{1y} = \dfrac{\Delta \vec{p}_{1y}}{\Delta t} \rightarrow \vec{F}_{1y} + \vec{w}_1 = \dfrac{\Delta \vec{p}_{1y}}{\Delta t} \Leftrightarrow F_1 \eta\mu\varphi = \dfrac{m_1 u_1 \eta\mu\varphi}{\Delta t} + m_1 g$ (3)

Όμως: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ δράση-αντίδραση, άρα (2) λόγω (3):

$$N_2 = m_2 g + \frac{m_1 u_1 \eta\mu\varphi}{\Delta t} + m_1 g \Leftrightarrow N_2 = \left(m_2 + m_1\right) g + \frac{m_1 u_1 \eta\mu\varphi}{\Delta t}$$

Με όμοιο τρόπο αντιμετωπίζονται και οι περιπτώσεις (4) και (5) όπως και οι αντίστοιχες διασπάσεις.





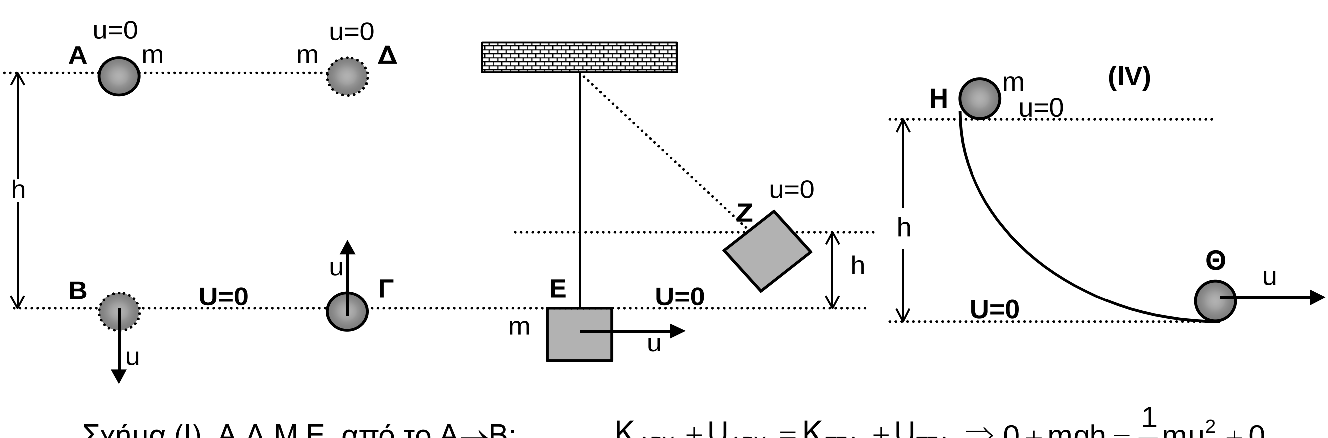
7. Πριν και μετά από μια κρούση

Σε πολλά προβλήματα το φαινόμενο της κρούσης συνδυάζεται και με άλλα φαινόμενα της Φυσικής. Στις περιπτώσεις αυτές μελετάμε τα φαινόμενα **πριν ή μετά** την κρούση εφαρμόζοντας τους κατάλληλους νόμους της Φυσικής, οπότε προκύπτουν επιπλέον εξισώσεις. Από αυτές τις εξισώσεις και από τις εξισώσεις από την κρούση (Α.Δ.Ο.), υπολογίζουμε τα ζητούμενα του προβλήματος.

Α. Κατακόρυφη κίνηση ή καθ’ ύψος κίνηση σώματος

Όταν ένα από τα σώματα, πριν ή μετά την κρούση, κινείται κατακόρυφα και η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος του σώματος (το οποίο είναι συντηρητική δύναμη), τότε εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε.

(I) **(II)** **(III)**



Σχήμα (Ι), Α.Δ.Μ.Ε. από το Α→Β: $K_{APX} + U_{APX} = K_{TE\Lambda} + U_{TE\Lambda} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mu^2 + 0$

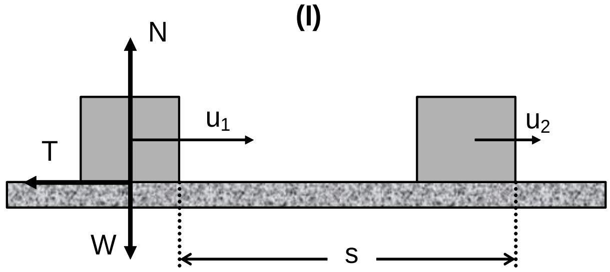
Σχήμα (ΙΙ), Α.Δ.Μ.Ε. από το Γ→Δ: $K_{APX} + U_{APX} = K_{TE\Lambda} + U_{TE\Lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 + 0 = 0 + mgh$

Σχήμα (III), Α.Δ.Μ.Ε. από το Ε→Ζ: $K_{ΑΡΧ}+U_{ΑΡΧ}=K_{ΤΕΛ}+U_{ΤΕΛ}\Rightarrow \frac{1}{2}mu^2+0=0+mgh$

Σχήμα (IV), Α.Δ.Μ.Ε. από το Η→Θ: $K_{ΑΡΧ}+U_{ΑΡΧ}=K_{ΤΕΛ}+U_{ΤΕΛ}\Rightarrow 0+mgh=\frac{1}{2}mu^2+0$

Β. Κίνηση σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο με ή χωρίς τριβή

Όταν ένα από τα σώματα, πριν ή μετά την κρούση, κινείται σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο με τριβή ή σε κεκλιμένο χωρίς τριβή τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε.



Σε κάθε περίπτωση:

α. Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

β. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονες.

γ. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. λαμβάνοντας υπόψη μας ότι οι κάθετες δυνάμεις στη διεύθυνση κίνησης δε παράγουν έργο:

Σχήμα (I): $K_{ΤΕΛ}-K_{ΑΡΧ}=W_{ΟΛ}\Rightarrow \frac{1}{2}mu_2^2-\frac{1}{2}mu_1^2=W_T\Rightarrow$

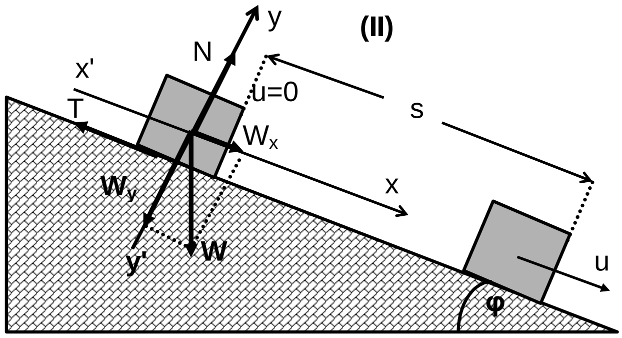
$$\frac{1}{2}mu_2^2-\frac{1}{2}mu_1^2=-Ts\xrightarrow{T=\mu N,\,N=W=mg}\frac{1}{2}mu_2^2-\frac{1}{2}mu_1^2=-\mu mgs$$

Σχήμα (II): $K_{ΤΕΛ}-K_{ΑΡΧ}=W_{ΟΛ}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}mu^2-0=W_T+W_{W_x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mu^2=-Ts+W_xs\xrightarrow{T=\mu N,\,N=W_y=mgσυνθ}$$

$$\frac{1}{2}mu^2=-\mu mgσυνφ\cdot s+mgημφ\cdot s$$



Μέσου του έργου της δύναμης της τριβής ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας του σώματος μετατρέπεται σε θερμότητα. Συνεπώς ισχύει:

$$Q=|W_T|=|-\mu Ns|$$

Παρατήρηση: Επίσης σε κάθε περίπτωση μπορούμε εναλλακτικά να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις σε κάθε σώμα, να αναλύσουμε σε άξονες x’x και y’y και να εφαρμόσουμε τους νόμους του Newton κάθε άξονα ξεχωριστά, οπότε:

- Αν $ΣF=0\rightarrow\begin{cases}\text{ισορροπία}\\ \text{ή}\\ \text{ευθύγραμμη ομαλή κίνηση},\quad \Delta x=ut\end{cases}$
- Αν ΣF=ma σταθερή, τότε η κίνηση είναι ομαλά μεταβαλλόμενη και ισχύει:

$$\vec{u}=\vec{u}_o+\vec{a}t \qquad \text{και} \qquad \Delta\vec{x}=\vec{u}_ot+\frac{\vec{a}t^2}{2}$$

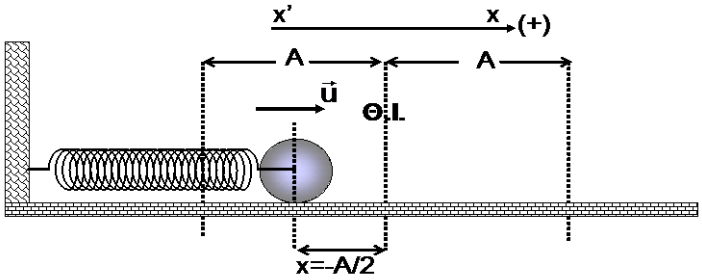
- Αν η κίνηση είναι κυκλική, τότε κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου, θα ισχύει:

$$ΣF=F_K\Leftrightarrow ΣF=\frac{mu^2}{R}$$ όπου R η ακτίνα της τροχιάς και F_K η κεντρομόλος δύναμη

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

8. Υπολογισμός αρχικής φάσης φ_0

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή t=0, το σώμα βρίσκεται στη θέση x=–A/2 και u>0, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η γενική εξίσωση της απομάκρυνσης x από την Θ.Ι. σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ (1)

- Θέτουμε στην (1) τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος:

$$(1)\xrightarrow{t=0,\ x=-\frac{A}{2}} -\frac{A}{2} = A\eta\mu\varphi_o \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_o = -\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_o = 2k\pi + \pi + \dfrac{\pi}{6}, & (\alpha) \\ \acute{\eta} & k \in \mathbb{Z} \\ \varphi_o = 2k\pi + \pi - \left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right), & (\beta) \end{cases} \quad \text{για k=0,} \quad \begin{cases} \varphi_o = \dfrac{7\pi}{6}\,rad \\ \acute{\eta} \\ \varphi_o = -\dfrac{\pi}{6}\,rad \end{cases}$$

Αν θέλουμε $0 \le \varphi_o < 2\pi\,rad$, τότε θέτουμε στη (β) λύση k=1 οπότε:

$$\varphi_o = 2\pi + \pi - \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{11\pi}{6}\,rad$$

- Θέτουμε και τις δύο λύσεις στην εξίσωση της ταχύτητας για t=0:

$$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \xrightarrow{t=0} \begin{cases} u = u_{max}\sigma\upsilon\nu\dfrac{7\pi}{6} < 0 & \text{απορρίπτεται} \\ \kappa' \\ u = u_{max}\sigma\upsilon\nu\dfrac{11\pi}{6} > 0 & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της ταλάντωσης είναι: $x = A\eta\mu\left(\omega t + \dfrac{11\pi}{6}\right)$

Αν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος ήταν για t=0 $u = \dfrac{u_{max}}{2}$ και x<0, τότε θέτουμε την τιμή στην εξίσωση της ταχύτητας:

$$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \xrightarrow{t=0,\ u=\frac{u_{max}}{2}} \frac{u_{max}}{2} = u_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_o \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_o = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_o = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_o = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}, & (\alpha) \\ \acute{\eta} & k \in \mathbb{Z} \\ \varphi_o = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3}, & (\beta) \end{cases} \quad \text{για k=0,} \quad \begin{cases} \varphi_o = \dfrac{\pi}{3}\,rad \\ \acute{\eta} \\ \varphi_o = -\dfrac{\pi}{3}\,rad \end{cases}$$

Αν θέλουμε $0 \le \varphi_o < 2\pi\,rad$, τότε θέτουμε στη (β) λύση k=1 οπότε: $\varphi_o = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}\,rad$

- Θέτουμε και τις δύο λύσεις στην εξίσωση της απομάκρυνσης για t=0:

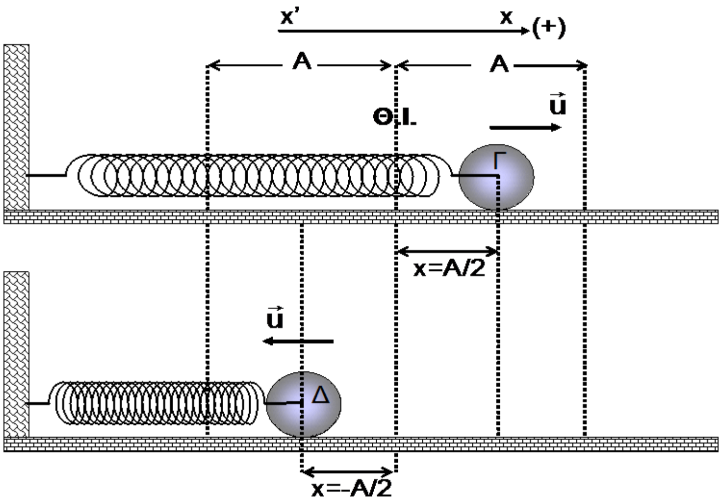
$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \xrightarrow{t=0} \begin{cases} x = A\eta\mu\dfrac{\pi}{3} > 0 \quad \text{απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ x = A\eta\mu\dfrac{5\pi}{3} < 0 \quad \text{δεκτή} \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση της ταλάντωσης είναι: $x = A\eta\mu\left(\omega t + \dfrac{5\pi}{3}\right)$

9. Υπολογισμός του χρόνου κίνησης μεταξύ δύο τυχαίων θέσεων της ταλάντωσης

Θεωρούμε σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. και την χρονική στιγμή t=0, διέρχεται από την θέση ισορροπίας με u>0. Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση:

$$x = A\eta\mu\omega t, \qquad \text{με } \varphi_o=0 \qquad (1)$$



Για να υπολογίσουμε το χρονικό διάστημα Δt ώστε να κινηθεί το σώμα από τη θέση Γ ($u_Γ$>0) μέχρι τη θέση Δ ($u_Δ$<0), κάνουμε τα εξής:

- Υπολογίζουμε τον χρόνο t_1 που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο Γ από την Θ.Ι. με u>0.

$$(1) \xrightarrow{x=\frac{A}{2}} \frac{A}{2} = A\eta\mu\omega t_1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega t_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega t_1 = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega t_1 = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \quad (\alpha) \\ \text{ή} \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \omega t_1 = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \quad (\beta) \end{cases}$$ όπου δεχόμαστε την (α) λύση διότι u>0

Θέτουμε στην (α) λύση k=0 και $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ και έχουμε: $t_1 = \dfrac{\pi}{6\omega} \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{T}{12}$

- Υπολογίζουμε τον χρόνο t_2 που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο Δ από την Θ.Ι. με u<0.

$$(1) \xrightarrow{x=-\frac{A}{2}} -\frac{A}{2} = A\eta\mu\omega t_2 \Leftrightarrow \eta\mu\omega t_2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega t_2 = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega t_2 = 2k\pi + \pi + \dfrac{\pi}{6} \quad (\alpha) \\ \text{ή} \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \omega t_2 = 2k\pi + \pi - \left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) \quad (\beta) \end{cases}$$ όπου δεχόμαστε την (α) λύση διότι u<0

Θέτουμε στην (α) λύση k=0 και $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ και έχουμε: $t_2 = \dfrac{7\pi}{6\omega} \Leftrightarrow t_2 = \dfrac{7T}{12}$

Τελικά ο χρόνος κίνησης από το Γ στο Δ είναι: $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{7T}{12} - \frac{T}{12} = \frac{T}{2}$

Προσοχή! Στην περίπτωση που το σώμα κινείται μεταξύ χαρακτηριστικών θέσεων της ταλάντωσης δηλαδή μεταξύ της Θ.Ι. και μιας ακραίας θέσης (ή αντίστροφα) τότε ο χρόνος κίνησης είναι ίσος με $\Delta t = \frac{T}{4}$.

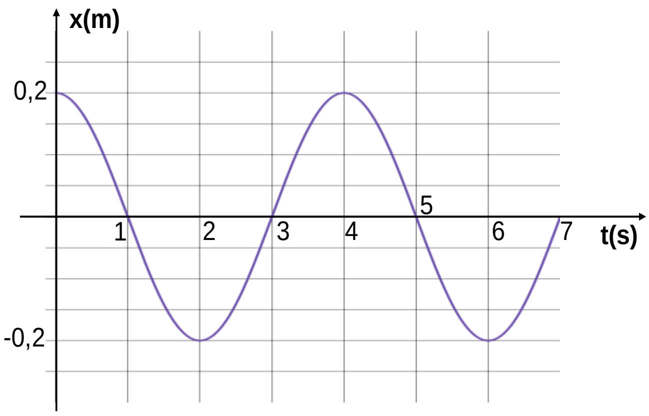
10. Μελέτη γραφικών παραστάσεων

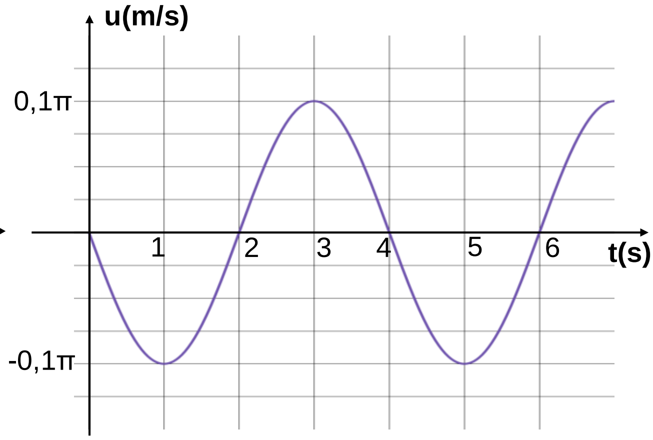
Από την μελέτη της γραφικής παράστασης **x=f(t)** του σχήματος για ένα σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Το πλάτος της ταλάντωσης είναι Α=0,2m.
- Η περίοδος της ταλάντωσης είναι Τ=4s.
- Η ταλάντωση έχει αρχική φάση διότι για t=0 το σώμα δεν βρίσκεται στη Θ.Ι. αλλά στη θέση x=+A, οπότε:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \xrightarrow[x=+A]{t=0} A = A\eta\mu\varphi_o \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_o = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi_o = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0} \varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

- Το σώμα διέρχεται από την Θ.Ι. (x=0) τις χρονικές στιγμές 1s, 3s κ.τ.λ. όπου έχει και την μέγιστη ταχύτητά του, όπως και την μέγιστη κινητική του ενέργεια.
- Το σώμα διέρχεται από τις ακραίες θέσεις (x=±A) τις χρονικές στιγμές 0s, 2s, 4s κ.τ.λ. όπου έχει και την μέγιστη δυναμική του ενέργεια.
- Το σώμα έχει μέγιστη (κατά μέτρο) επιτάχυνση, άρα δέχεται και τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις, δηλαδή τις χρονικές στιγμές 0s, 2s, 4s κ.τ.λ.





Από την μελέτη της γραφικής παράστασης **u=f(t)** του σχήματος για ένα σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Η μέγιστη ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος είναι u_{max}=0,1π m/s.
- Η περίοδος της ταλάντωσης είναι Τ=4s.
- Η ταλάντωση έχει αρχική φάση διότι για t=0 το σώμα δεν βρίσκεται στη Θ.Ι. διότι u=0, οπότε:

$$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \xrightarrow[u=0]{t=0} 0 = u_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_o \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_o = 0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_o = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \acute{\eta} \qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi_o = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{για k=0,} \quad \begin{cases} \varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad} \\ \acute{\eta} \\ \varphi_o = -\frac{\pi}{2}\text{rad} \end{cases}$$

Αν θέλουμε η $0 \le \varphi_o < 2\pi\,\text{rad}$, τότε θέτουμε στη (β) λύση k=1 οπότε: $\varphi_o = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$

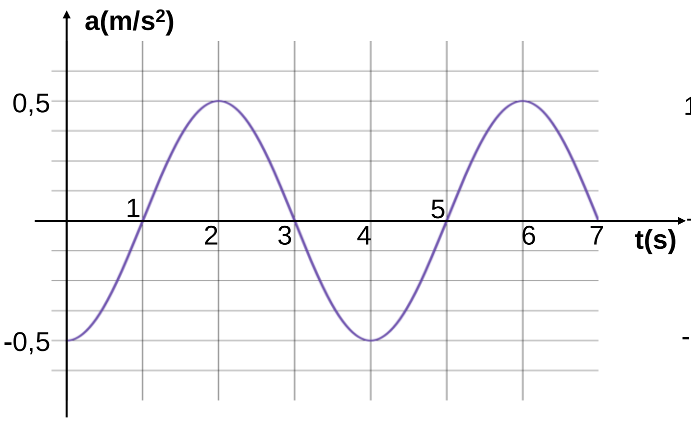
Επειδή το σώμα μετά την t=0 έχει u<0 αυτό σημαίνει ότι το σώμα ήταν στη θετική ακραία θέση άρα x>0 και δεκτή είναι η $\varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad}$

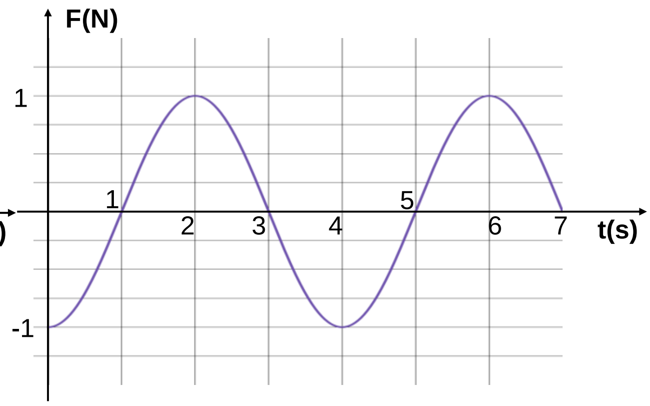
Από την μελέτη της γραφικής παράστασης **a=f(t)** του σχήματος για ένα σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Το σώμα διέρχεται από την Θ.Ι. (x=0) τις χρονικές στιγμές 1s, 3s κ.τ.λ. όπου έχει και την μέγιστη ταχύτητά του, όπως και την μέγιστη κινητική του ενέργεια.
- Το σώμα έχει μέγιστη (κατά μέτρο) επιτάχυνση, άρα δέχεται και τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις (x=±Α), δηλαδή τις χρονικές στιγμές 0s, 2s, 4s κ.τ.λ. Στις θέσεις αυτές έχει και την μέγιστη δυναμική ενέργεια.
- Η μέγιστη επιτάχυνση του ταλαντούμενου σώματος είναι a_{max}=0,5m/s.
- Η περίοδος της ταλάντωσης είναι Τ=4s.
- Η ταλάντωση έχει αρχική φάση διότι για t=0 το σώμα έχει τη μέγιστη αρνητική επιτάχυνση, και επειδή ισχύει a=-ω^{2}x, άρα βρίσκεται στη θέση x=+A, οπότε:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \xrightarrow{t=0,\, x=+A} A = A\eta\mu\varphi_o \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_o = 1 \Leftrightarrow ....\varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

- Το σώμα έχει μέγιστη (κατά μέτρο) επιτάχυνση, άρα δέχεται και τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις (x=±Α), δηλαδή τις χρονικές στιγμές 0s, 2s, 4s κ.τ.λ. Στις θέσεις αυτές έχει και την μέγιστη δυναμική ενέργεια.
- Το σώμα διέρχεται από την Θ.Ι. (x=0) τις χρονικές στιγμές 1s, 3s κ.τ.λ. όπου έχει και την μέγιστη ταχύτητά του, όπως και την μέγιστη κινητική του ενέργεια.





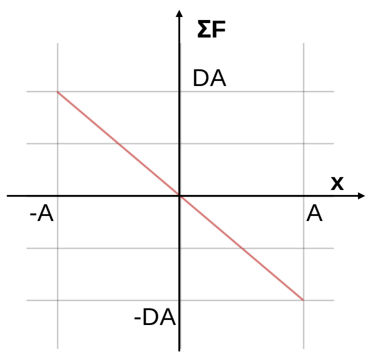
Από την μελέτη της γραφικής παράστασης **ΣF=f(t)** του σχήματος για ένα σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

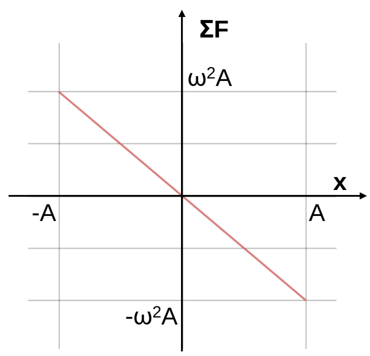
- Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς στο ταλαντούμενο σώμα είναι F_{max}=0,5N.
- Η περίοδος της ταλάντωσης είναι Τ=4s.
- Η ταλάντωση έχει αρχική φάση διότι για t=0 το σώμα δέχεται τη μέγιστη αρνητική δύναμη επαναφοράς, και επειδή ισχύει F=-mω^{2}x, άρα βρίσκεται στη θέση x=+A, οπότε:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \xrightarrow{t=0,\, x=+A} A = A\eta\mu\varphi_o \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_o = 1 \Leftrightarrow ....\varphi_o = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

- Το σώμα δέχεται και τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς, άρα έχει μέγιστη (κατά μέτρο) επιτάχυνση, όταν βρίσκεται στις ακραίες θέσεις (x=±Α), δηλαδή τις χρονικές στιγμές 0s, 2s, 4s κ.τ.λ. Στις θέσεις αυτές έχει και την μέγιστη δυναμική ενέργεια.
- Το σώμα διέρχεται από την Θ.Ι. (x=0) τις χρονικές στιγμές 1s, 3s κ.τ.λ. όπου έχει και την μέγιστη ταχύτητά του, όπως και την μέγιστη κινητική του ενέργεια.

Οι γραφικές παραστάσεις ΣF=f(x) και a=f(x) είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα.
Η κλίση στην παράσταση της ΣF=f(x)=-Dx είναι ίση με τη σταθερά επαναφοράς -D, ενώ στην παράσταση a=f(x)=-ω^{2}x είναι ίση με το -ω^2.





11. Σχέση απομάκρυνσης (x) – ταχύτητας (u) σε μια Α.Α.Τ.

1ος τρόπος: Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας, μια τυχαία χρονική στιγμή, σε ένα σώμα που εκτελεί αμείωτη ταλάντωση, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} E = K + U \\ \\ E = U_{max} = K_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow U_{max} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow$$

$$u^2 = \frac{D}{m}(A^2 - x^2) \Rightarrow u = \pm\sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}} u = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

2ος τρόπος

$$\left.\begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \\ \\ u = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = A^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \\ \\ u^2 = \omega^2 A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = A^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \\ \dfrac{u^2}{\omega^2} = A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}$$

$$x^2 + \frac{u^2}{\omega^2} = A^2\left[\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o)\right] \Rightarrow x^2 + \frac{u^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{u = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}}$$

Διαφορά φάσης μεταξύ απομάκρυνσης (x) – ταχύτητας (u)

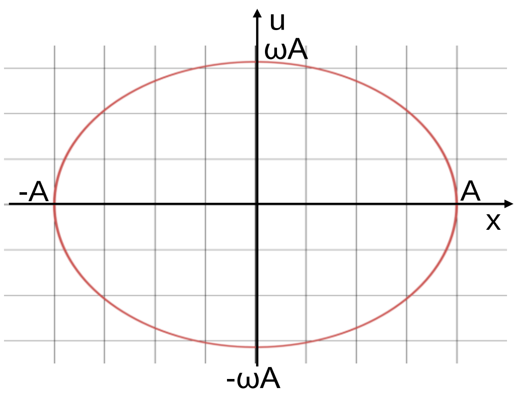
Από τη σχέση $u = u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)$ γράφεται $u = u_{max}\eta\mu\left[(\omega t + \varphi_o) + \frac{\pi}{2}\right]$**,** η οποία συγκρινόμενη με την $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$, συμπεραίνουμε ότι η **φάση της ταχύτητας προηγείται της φάσης της απομάκρυνσης κατά π/2.**

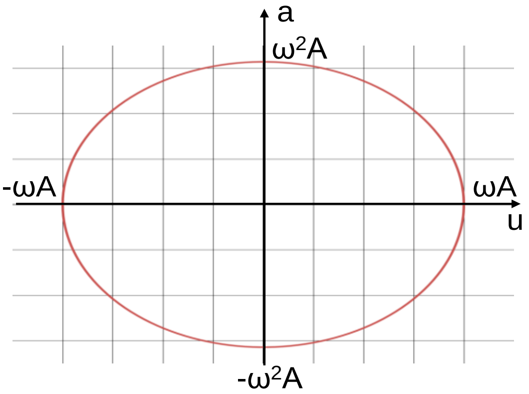
12. Σχέση επιτάχυνσης (α) – ταχύτητας (u) σε μια Α.Α.Τ.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) \\ \\ u = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha^2 = \omega^4 A^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \\ \\ u^2 = \omega^2 A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha^2}{\omega^4} = A^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) \\ \dfrac{u^2}{\omega^2} = A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}}$$

$$\frac{\alpha^2}{\omega^4} + \frac{u^2}{\omega^2} = A^2\left[\eta\mu^2(\omega t + \varphi_o) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_o)\right] \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\omega^2} + u^2 = \omega^2 A^2 \xrightarrow{\omega A = u_{max}}$$

$$\boxed{\mathbf{\alpha = \pm\omega\sqrt{u_{max}^2 - u^2}}}$$

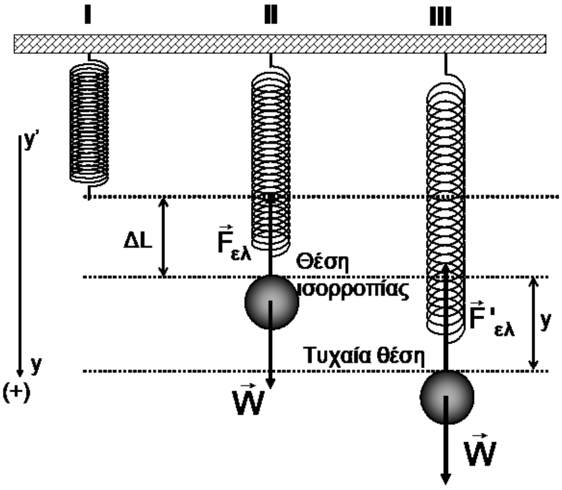




Οι γραφικές παραστάσεις της u σε συνάρτηση με το x και της a σε συνάρτηση με την u είναι **ελλείψεις** όπως φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.

Διαφορά φάσης μεταξύ επιτάχυνσης (α) – ταχύτητας (u)

Από τη σχέση $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ γράφεται $\alpha = \alpha_{max}\eta\mu[(\omega t + \varphi_o) + \pi]$**,** η οποία συγκρινόμενη με την $u = u_{max}\eta\mu\left[(\omega t + \varphi_o) + \dfrac{\pi}{2}\right]$, συμπεραίνουμε ότι η **φάση της επιτάχυνσης προηγείται της φάσης της ταχύτητας κατά π/2.**



13. Απόδειξη ότι ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ.

Α. Κατακόρυφο ελατήριο

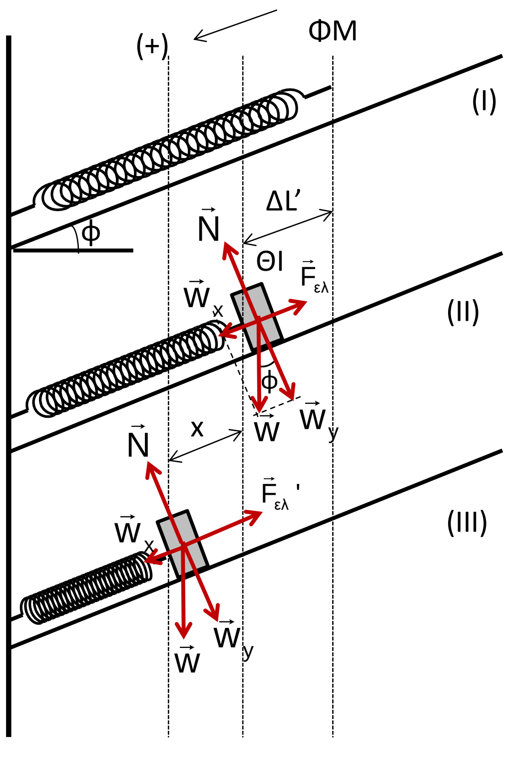
- Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, σχήμα Ι.
- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο-σώμα στη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.), σχήμα ΙΙ.
Επειδή το σύστημα ισορροπεί, θα ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w - F_{ελ} = 0 \Leftrightarrow w = F_{ελ} \Leftrightarrow$$
$$mg = K \cdot \Delta L \quad (1)$$

- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο-σώμα όταν το σώμα έχει εκτραπεί κατά y από τη θέση ισορροπίας του, σχήμα ΙΙΙ, θεωρώντας ως θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση της εκτροπής. Στη νέα θέση θα ισχύει:

$$\Sigma F = W - F'_{ελ} = mg - K(\Delta L + y) \Rightarrow \Sigma F = mg - K\Delta L - Ky \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -Ky$$

Δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι της μορφής ΣF=-Dy, άρα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.



Β. Ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο

- Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, σχήμα Ι.
- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο-σώμα στη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.), σχήμα ΙΙ.
Επειδή το σύστημα ισορροπεί, θα ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow w\eta\mu\varphi - F_{ελ} = 0 \Leftrightarrow w\eta\mu\varphi = F_{ελ} \Leftrightarrow$$
$$mg\eta\mu\varphi = K \cdot \Delta L \qquad (1)$$

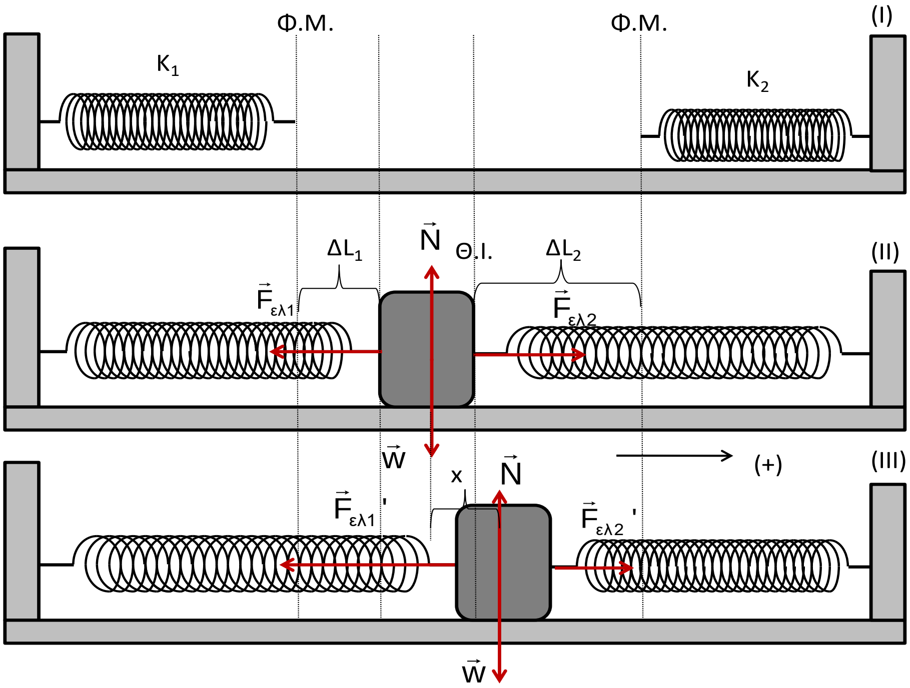
- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο-σώμα όταν το σώμα έχει εκτραπεί κατά x από τη θέση ισορροπίας του, σχήμα ΙΙΙ, θεωρώντας ως θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση της εκτροπής. Στη νέα θέση θα ισχύει:

$$\Sigma F_x = w\eta\mu\varphi - F'_{ελ} = mg\eta\mu\varphi - K(\Delta L + x) \Rightarrow$$
$$\Sigma F_x = mg\eta\mu\varphi - K\Delta L - Kx \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -Kx$$

Δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι της μορφής ΣF=-Dy, άρα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$.

Γ. Δύο ελατήρια σε οριζόντιο επίπεδο

- Σχεδιάζουμε τα ελατήρια στο φυσικό τους μήκος, σχήμα Ι.
- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήρια-σώμα στη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.), σχήμα ΙΙ. Επειδή το σύστημα ισορροπεί, θα ισχύει:



$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda(2)} - F_{\varepsilon\lambda(1)} = 0 \Leftrightarrow F_{\varepsilon\lambda(2)} = F_{\varepsilon\lambda(1)} \Leftrightarrow K_1\Delta L_1 = K_2\Delta L_2 \qquad (1)$$

- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήρια-σώμα όταν το σώμα έχει εκτραπεί κατά x από τη θέση ισορροπίας του, σχήμα ΙΙΙ, θεωρώντας ως θετική κατεύθυνση την κατεύθυνση της εκτροπής. Στη νέα θέση θα ισχύει:

$$\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda(2)} - F'_{\varepsilon\lambda(1)} = K_2(\Delta L_2 - x) - K_1(\Delta L_1 + x) \Leftrightarrow$$

$$\Sigma F_x = K_2\Delta L_2 - K_2x - K_1\Delta L_1 - K_1x \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -K_2x - K_1x \Leftrightarrow \Sigma F_x = -(K_2 + K_1)x$$

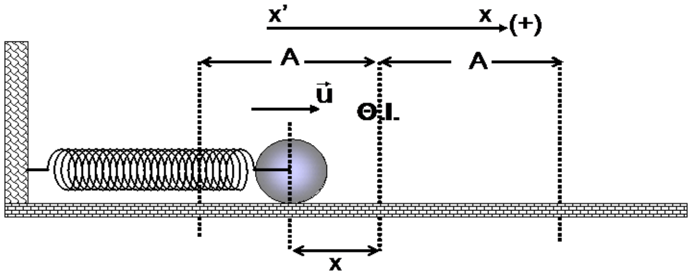
Δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι της μορφής ΣF=-Dx, με $D=K_1+K_2$, άρα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K_1 + K_2}}$.

14. Υπολογισμός του πλάτους ταλάντωσης

Το πλάτος μιας ταλάντωσης είναι η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και είναι ίσο με την απόσταση μεταξύ της θέσης ισορροπίας και μιας εκ των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης, **εκεί που η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν**. Το πλάτος της ταλάντωσης καθορίζεται από την ενέργεια της ταλάντωσης δηλαδή την ενέργεια που έχει προσφερθεί για να τεθεί σε ταλάντωση το σώμα. Το πλάτος μιας ταλάντωσης μπορεί να υπολογιστεί με τους εξής τρόπους:

1ος τρόπος: Αν ένα σώμα εκτραπεί κατά x από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο, στη θέση που αφέθηκε u=0 άρα x=A. Συνεπώς:

$$E = U_{max} = \frac{1}{2}DA^2 = W_F$$



Όπου W_F το έργο της εξωτερικής δύναμης με την οποία εξετράπη το σώμα από τη Θ.Ι.

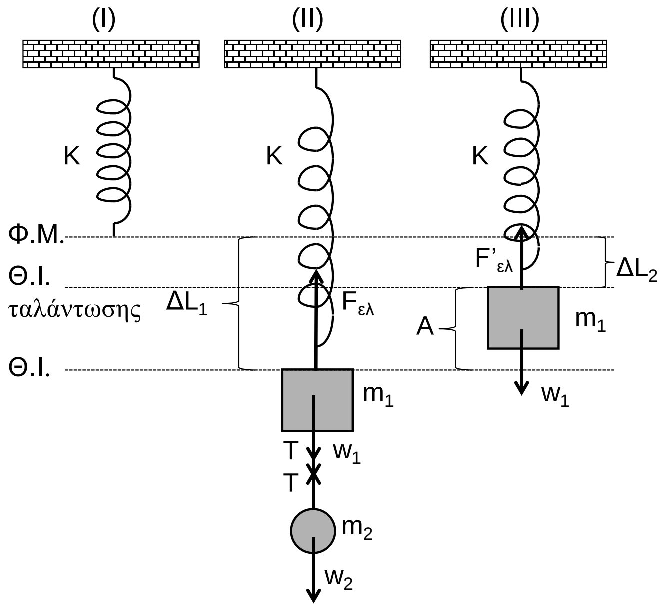
2ος τρόπος: Αν το σώμα εκτραπεί κατά x και ταυτόχρονα του δοθεί και μια ταχύτητα u, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, τότε το πλάτος της ταλάντωσης υπολογίζεται με τη βοήθεια της Α.Δ.Μ.Ε. για την ταλάντωση:

$$\left.\begin{array}{l} E = K + U \\ \kappa' \\ E = U_{max} = K_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow U_{max} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}D(-x)^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{mu^2 + Dx^2}{K}}$$

Με τη βοήθεια της Α.Δ.Μ.Ε. για την ταλάντωση μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος u όταν ξέρουμε την απομάκρυνση του x από τη θέση ισορροπίας (και το αντίστροφο), καθώς και την γωνιακή συχνότητα ω όταν γνωρίζουμε την απομάκρυνση x και την ταχύτητα u (θέτουμε όπου $D=m\omega^2$).

Γενικά όταν ένα σώμα τεθεί σε ταλάντωση με την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης F, τότε το έργο της δύναμης F (για όσο χρόνο ή διάστημα ασκείται) είναι ίσο με την ενέργεια που προσφέρεται στην ταλάντωση.

3ος τρόπος: Το πλάτος μιας ταλάντωσης μπορεί να υπολογιστεί από το σχήμα. Για παράδειγμα το σώμα μάζας m_1 που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, αρχικά ηρεμεί δεμένο στην άκρη ελατηρίου σταθεράς K. Το σώμα αυτό είναι επίσης δεμένο μέσω νήματος με σώμα μάζας m_2. Αν το νήμα κοπεί το σώμα μάζας m_1 εκτελεί Α.Α.Τ. . Για να βρούμε το πλάτος της κάνουμε τα εξής:



- Φτιάχνουμε το ελατήριο στο φυσικό μήκος (σχήμα Ι).
- Φτιάχνουμε το σύστημα των δύο σωμάτων στη θέση ισορροπίας του Θ.Ι. (σχήμα ΙΙ).
  Για κάθε σώμα ισχύει:
  Σώμα m_1:

$$\Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow w_1 + T = F_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow m_1 g + T = K\Delta L_1 \quad (1)$$

Σώμα m_2: $\Sigma F_2 = 0 \Leftrightarrow w_2 = T$

Συνεπώς: $(1) \rightarrow m_1 g + m_2 g = K\Delta L_1 \Leftrightarrow \Delta L_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{K}$

- Όταν κοπεί το νήμα το σώμα m_1 θα εκτελέσει ταλάντωση με νέα θέση ισορροπίας την οποία σχεδιάζουμε (σχήμα ΙΙΙ), ενώ η προηγούμενη θέση ισορροπίας του είναι ακραία θέση της ταλάντωσής του μιας και u=0 στη θέση αυτή.

Θ.Ι. ταλάντωσης: $\Sigma F_1 = 0 \Leftrightarrow w_1 = F'_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow m_1 g = K\Delta L_2 \Leftrightarrow \Delta L_2 = \dfrac{m_1 g}{K}$

Από το σχήμα είναι προφανές ότι ισχύει: $A = \Delta L_1 - \Delta L_2 \Leftrightarrow A = \dfrac{m_2 g}{K}$

4ος τρόπος: Το πλάτος μιας ταλάντωσης μπορεί να υπολογιστεί από τις εξισώσεις κίνησης αν γνωρίζουμε κάποια χρονική στιγμή t τη θέση x ή την ταχύτητα u ή την επιτάχυνση a του σώματος. Για παράδειγμα η εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. είναι:

$$x = A\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})\ (S.I.) \qquad (1)$$

Αν γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή t=π/20s βρίσκεται στη θέση $0,1\sqrt{3}$ m τότε:

$$(1) \xrightarrow[x=0,1\sqrt{3}m]{t=\pi/20s} 0,1\sqrt{3} = A\eta\mu(10\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow 0,1\sqrt{3} = A\eta\mu(\frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow$$

$$0,1\sqrt{3} = A\eta\mu(\pi - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow 0,1\sqrt{3} = A\eta\mu(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow 0,1\sqrt{3} = A\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow A = 0,2m$$

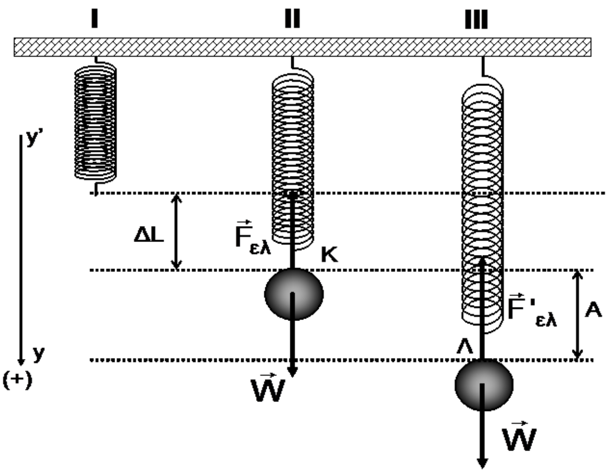
15. Υπολογισμός του έργου δύναμης

Γενικά το έργο μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ (κατά μέτρο και κατεύθυνση), η οποία μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά $\Delta\vec{x}$, ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{W = F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

όπου φ η σταθερή γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της δύναμης με αυτό της μετατόπισης.
Το έργο εκφράζει τη μεταφορά ενέργειας από ένα σώμα σε ένα άλλο ή τη μετατροπή ενέργειας από μια μορφή σε άλλη.

Αν το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται με την απόσταση x, όπως **η δύναμη ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda}$=Kx** (με το x να υπολογίζεται από το **φυσικό μήκος του ελατηρίου**) ή η **δύναμη επαναφοράς ΣF=Dx (x υπολογίζεται από τη Θ.Ι.)** τότε ο υπολογισμός του έργου τους είναι πιο πολύπλοκος.
Για παράδειγμα σε σύστημα κατακόρυφου ελατηρίου με σώμα μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. κατά την διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με πλάτος Α. Θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της $F_{\varepsilon\lambda}$ ή της ΣF από τη θέση ισορροπίας του συστήματος (x=0) μέχρι τη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης (x=+A).



- Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, σχήμα (Ι).
- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο-σώμα στη θέση ισορροπίας του, σχήμα (ΙΙ).
Επειδή το σύστημα ισορροπεί, θα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow W - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$W = F_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow mg = K\Delta L \Leftrightarrow \Delta L = \frac{mg}{K} \qquad (1)$$

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε την αρχική επιμήκυνση ΔL του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος.

1ος τρόπος

- Επειδή η $F_{\varepsilon\lambda}$ και η ΣF=Dx είναι **συντηρητικές δυνάμεις**, το έργο τους μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Έργο $F_{\varepsilon\lambda}$: $W_F = -\Delta U_{E\Lambda} \Leftrightarrow W_F = U_{E\Lambda,APX} - U_{E\Lambda,TE\Lambda} \Leftrightarrow W_F = \frac{1}{2}K\Delta L^2 - \frac{1}{2}K(\Delta L + A)^2 \Leftrightarrow$

$$W_F = \frac{1}{2}K\Delta L^2 - \frac{1}{2}K\Delta L^2 - \frac{1}{2}KA^2 - K\Delta LA \xrightarrow{K\Delta L = mg}$$

$$W_F = -\frac{1}{2}K\cdot A^2 - m\cdot g\cdot A$$

Έργο ΣF: $W_{\Sigma F} = -\Delta U \Leftrightarrow W_{\Sigma F} = U_{APX} - U_{TE\Lambda} \Leftrightarrow W_{\Sigma F} = 0 - \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K} W_{\Sigma F} = -\frac{1}{2}KA^2$

Όπου $U_{E\Lambda} = \frac{1}{2}Kx^2$ η δυναμική ενέργεια ελατηρίου **με x την απόσταση από το φυσικό του μήκος του ελατηρίου**.

2ος τρόπος

- Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων Κ, Λ (ΙΙ)-(ΙΙΙ):

Έργο $F_{ελ}$: $\Delta K = W_{ολ} \Leftrightarrow K_\Lambda - K_K = W_W + W_{F_{ελ}}$ (1)

όπου: $K_\Lambda = 0$ (2) ακραία θέση, $K_K = K_{max} = U_{max} = \frac{1}{2}KA^2$ (3) θέση ισορροπίας

και $W_W = W\cdot A\cdot συν0^o = +m\cdot g\cdot A$ (4) το έργο του βάρους

Συνεπώς: $(1) \xrightarrow{(2),(3),(4)} 0 - \frac{1}{2}K\cdot A^2 = m\cdot g\cdot A + W_F \Rightarrow W_F = -\frac{1}{2}K\cdot A^2 - m\cdot g\cdot A$

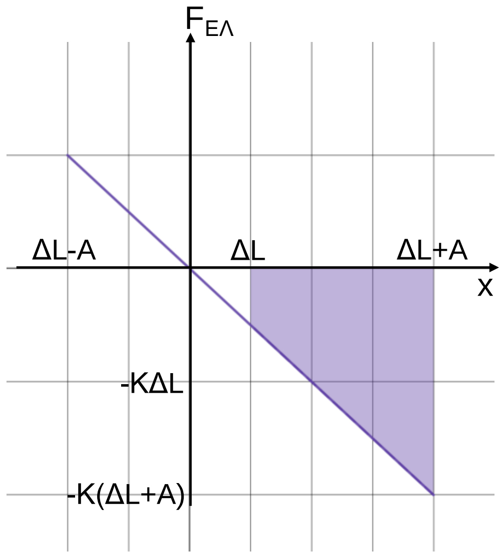
Έργο ΣF: $\Delta K = W_{ολ} \Leftrightarrow K_\Lambda - K_K = W_{\Sigma F} \xrightarrow[(3)]{(2)} W_{\Sigma F} = -\frac{1}{2}KA^2$

3ος τρόπος

- Επειδή η δύναμη ελατηρίου είναι της μορφής $F_{E\Lambda}=-Kx$ (νόμος Hooke) δηλαδή είναι μεταβλητού μέτρου, το έργο της μπορεί να υπολογιστεί από το διάγραμμα της δύναμης $F_{E\Lambda}$ σε συνάρτηση με την μετατόπιση x **από το φυσικό του μήκος και όχι από τη Θ.Ι.**:
Το ζητούμενο έργο είναι ίσο με το εμβαδόν του τραπεζίου (σκιασμένο σχήμα) και είναι αρνητικό (κάτω από τον άξονα x’x).

$$W_F = E = \frac{B+\beta}{2}υ \Rightarrow W_F = \frac{-K\cdot(\Delta L + A) - K\cdot\Delta L}{2}A \Rightarrow$$

$$W_F = -\frac{1}{2}K\cdot A^2 - m\cdot g\cdot A$$



Προσοχή! Όταν μας ζητηθεί η δύναμη του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο (π.χ. σε κατακόρυφο σύστημα), τότε ξεκινάμε από το δεδομένο ότι εφόσον το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. θα ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = -D\cdot\vec{x} \Leftrightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{w} = -D\cdot\vec{x} \Leftrightarrow \vec{F}_{ελ} = -\vec{w} - D\cdot\vec{x} \quad \text{όπου} \quad x = Aημ(ωt + φ_o)$$

16. Υπολογισμός της θέσης αποχωρισμού σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους και εκτελούν Α.Α.Τ.

Όταν ένα σώμα Α βρίσκεται σε επαφή με άλλο σώμα Β που εκτελεί Α.Α.Τ και ζητείται να υπολογιστεί κάποιο μέγεθος της ταλάντωσης έτσι ώστε να μη χάνεται ή να χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων κάνουμε τα εξής:

- Σχεδιάζουμε το σύστημα σε μία τυχαία θέση.

- Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα Α και Β στην θέση αυτή.
- Γράφουμε για το σώμα Α (ή για το σώμα Β) την ικανή και αναγκαία συνθήκη της Α.Α.Τ.

$$\Sigma F = -D_A \cdot x \Rightarrow \Sigma F = -m_A \cdot \omega^2 \cdot x$$

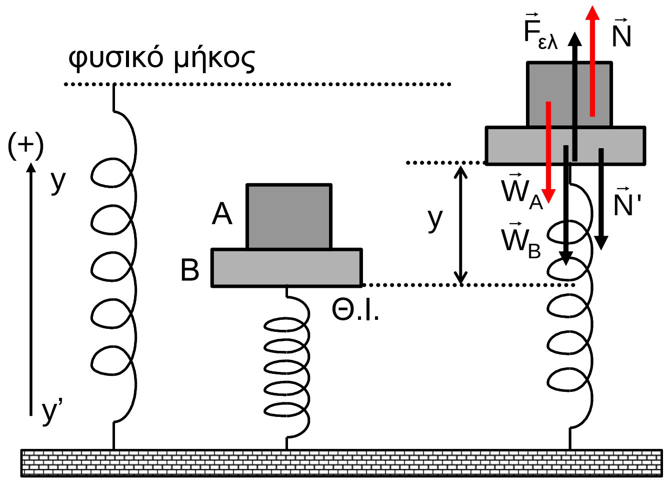
Προσοχή! Το D_A είναι η σταθερά επαναφοράς του σώματος Α και υπολογίζεται από τη σχέση: $D_A = m_A \cdot \omega^2$, όπου ω η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος. Το ω το βρίσκουμε από τη σχέση: $D_{ολ} = m_{ολ} \cdot \omega^2$, όπου $D_{ολ}$ η σταθερά όλου του συστήματος, π.χ. για σύστημα ελατηρίου μαζών είναι $D_{ολ} = K$

Αν η ταλάντωση γίνεται σε κατακόρυφη διεύθυνση τότε στο σώμα Α ασκούνται δύο δυνάμεις: Το βάρος του W_A και η αντίδραση Ν από το σώμα Β. Αν η τυχαία θέση βρίσκεται προς την μεριά των θετικών απομακρύνσεων (προς τα πάνω), τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\Sigma F = -D_A \cdot y \Leftrightarrow N - m_A \cdot g = -m_A\omega^2 \cdot y \Leftrightarrow \quad N = m_A\left(g - \omega^2 \cdot y\right) \qquad (1)$$

Η σχέση (1) μας δίνει την ελάχιστη τιμή της Ν όταν y=A, και τη μέγιστη τιμή όταν y=-A .
Όταν το πρόβλημα ζητάει **να μην χάνεται η επαφή** μεταξύ των σωμάτων τότε παίρνουμε την συνθήκη (**οριακά Ν=0**):

$$N > 0 \Leftrightarrow m_A\left(g - \omega^2 \cdot y\right) > 0$$



Από την τελευταία σχέση υπολογίζουμε την οριακή τιμή κάποιου από τα μεγέθη ω, Τ, f, Α, παίρνοντας ως οριακή περίπτωση την ισότητα $g=\omega^2 A$.
Όταν το πρόβλημα ζητάει **σε ποια θέση χάνεται η επαφή (ή να εξετάσουμε αν χάνεται η επαφή)** μεταξύ των σωμάτων τότε παίρνουμε την οριακή συνθήκη:

$$N = 0 \Leftrightarrow m_A\left(g - \omega^2 \cdot y\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{g}{\omega^2}$$

Αν η τιμή του y είναι μεγαλύτερη του πλάτους ταλάντωσης Α, τότε το σώμα δεν χάνει την επαφή του σε καμία θέση της ταλάντωσης, ενώ αν είναι μικρότερη του πλάτους Α τότε το σώμα χάνει την επαφή του στη θέση με $y = \frac{g}{\omega^2}$.

17. Ενέργειες στην Α.Α.Τ. σε συνάρτηση με το χρόνο

Η δυναμική και κινητική ενέργεια του συστήματος κάθε χρονική στιγμή μπορεί να εκφραστούν συναρτήσει της ολικής ενέργειας με την βοήθεια των σχέσεων:

Α) Δυναμική ενέργεια (φ_o=0): $U = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2\omega t \Rightarrow \mathbf{U = E\eta\mu^2\omega t}$

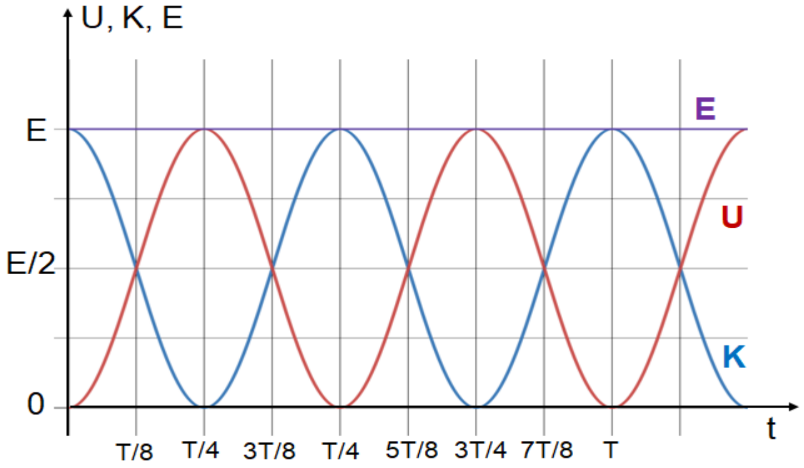
Από τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\omega t = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2}$, επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται: $U = \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu 2\omega t$

Β) Κινητική ενέργεια: $K=\frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}mu^2_{max}συν^2ωt \Rightarrow \mathbf{K=Εσυν^2ωt}$

Από τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι $συν^2ωt=\frac{1+συν2ωt}{2}$, επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται: $K=\frac{E}{2}+\frac{E}{2}συν2ωt$

Γ) Ολική ενέργεια: E= K + U = σταθερή θα είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα των χρόνων.

Από τις παραπάνω τριγωνομετρικές συναρτήσεις προκύπτει ότι τόσο η δυναμική, όσο και η κινητική ενέργεια είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με κυκλική συχνότητα 2ω δηλαδή με περίοδο Τ/2.



18. Ενέργειες στην Α.Α.Τ. σε συνάρτηση με την απομάκρυνση

Α) Δυναμική ενέργεια: $U=\frac{1}{2}Dx^2$

με $-A \le x \le +A$

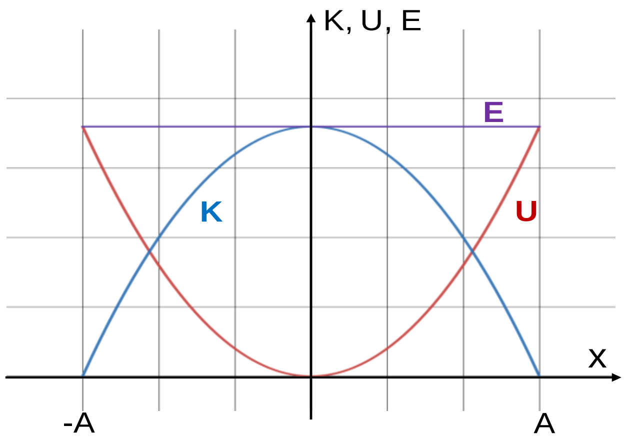
Είναι της μορφής $y=cx^2$ η γραφική παράσταση της οποίας είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα πάνω.

Β) Κινητική ενέργεια:

$K=E-U=E-\frac{1}{2}Dx^2$

με $-A \le x \le +A$

Είναι της μορφής $y=b-cx^2$ η γραφική παράσταση της οποίας είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα κάτω και μέγιστο το σημείο (0, b).



Γ) Ολική ενέργεια: E= K + U = σταθερή θα είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα των x'x.

Στο παραπάνω σχήμα παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις της δυναμικής, της κινητικής και της ολικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας.

19. Ενέργειες στην Α.Α.Τ. σε συνάρτηση με την ταχύτητα

Α) Δυναμική ενέργεια: $U = E - K = E - \frac{1}{2}mu^2$ με $-\omega A \le u \le +\omega A$

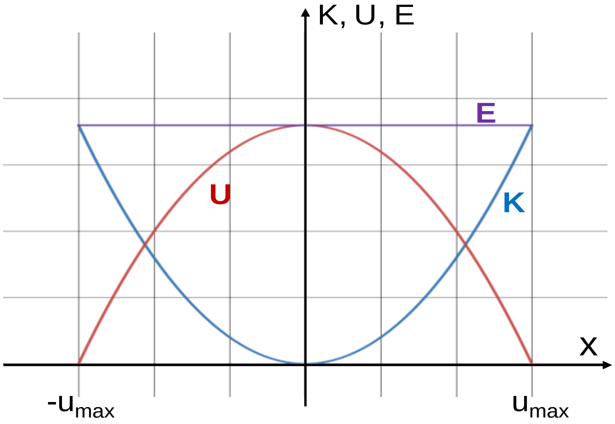
Είναι της μορφής $y=b-cx^2$ η γραφική παράσταση της οποίας είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα κάτω και έχει μέγιστο στο σημείο (0, b).

Β) Κινητική ενέργεια: $K = \frac{1}{2}mu^2$

με $-\omega A \le x \le +\omega A$

Είναι της μορφής $y=cx^2$ η γραφική παράσταση της οποίας είναι παραβολή που στρέφει τα κοίλα πάνω.

Γ) Ολική ενέργεια: E= K + U = σταθερή θα είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα της u.



Στο παραπάνω σχήμα παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις της δυναμικής, της κινητικής και της ολικής ενέργειας σε συνάρτηση με την ταχύτητα του σώματος.

20. Ρυθμοί μεταβολής

Α. Ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης: $\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \vec{u} = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)$

Β. Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας: $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \vec{a} = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_o)$

Γ. Ρυθμός μεταβολής της ορμής: $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} = -D\vec{x} \Leftrightarrow \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -m\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_o)$

Α. Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\Sigma F}}{\Delta t} = \frac{\Sigma\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{u} = -D\cdot\vec{x}\cdot\vec{u}$$

Β. Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης $\frac{\Delta U}{\Delta t}$.

$$\text{Επειδή U+K=σταθερό} \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta K}{\Delta t} = D\cdot\vec{x}\cdot\vec{u}$$

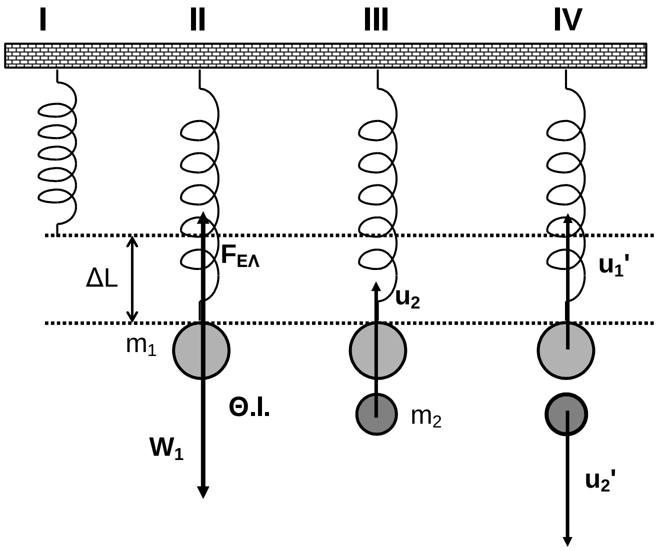
21. ΕΛΑΣΤΙΚΗ-ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Όταν ένα σώμα μάζας m_1, που είναι αναρτημένο από κατακόρυφο ελατήριο, συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με σώμα μάζας m_2, σώμα μάζας m_1 μετά την κρούση θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με πλάτος το οποίο υπολογίζεται ως εξής:

1. Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος (I).
2. Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο-σώμα m_1 στη θέση ισορροπίας (II). Υπολογίζουμε την αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου ΔL.

Στη Θ.Ι. ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow w_1 - F_{ΕΛ} = 0 \Rightarrow m_1 g = K\Delta L \Rightarrow \Delta L = \dfrac{m_1 g}{K}$

3. Σχεδιάζουμε τα σώματα m_1 και m_2 πριν και μετά την ελαστική κρούση (III)-(IV). Υπολογίζουμε την ταχύτητα των δύο σωμάτων μετά την κρούση, εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ισχύουν σε μια ελαστική κρούση με το ένα σώμα αρχικά ακίνητο:



$$u_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$$

και

$$u_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2$$

4. Το πλάτος A της ταλάντωσης του σώματος m_1 θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης. Το σημείο κρούσης είναι Θ.Ι. του συστήματος ελατήριο-σώμα m_1 και η ταχύτητα u_1’ που υπολογίσαμε θα είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης. Συνεπώς:

$$E = U_{max} = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1'^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m_1}{K}u_1'^2}$$

Παρατηρήσεις: A) Αν η κρούση είναι ανελαστική (μη πλαστική) εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής και θα πρέπει να μας δίνεται ένα ακόμα δεδομένο για την μια εκ των δύο ταχυτήτων μετά την κρούση.

B) Αν η κρούση πραγματοποιηθεί σε μια τυχαία θέση x της ταλάντωσης και κινούνται και τα δύο σώματα τότε:

i) Αν η κρούση είναι ελαστική χρησιμοποιούμε τους τύπους: $u_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot u_1 + \dfrac{2\cdot m_2}{m_1 + m_2}\cdot u_2$

και $u_2' = \dfrac{2\cdot m_1}{m_1 + m_2}\cdot u_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\cdot u_2$

ii) αν η κρούση είναι ανελαστική εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για την ταλάντωση για να βρούμε το νέο πλάτος A της ταλάντωσης:

$$\left.\begin{array}{l} E = U + K \\ E = U_{max} = K_{max} \end{array}\right\} \to U_{max} = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m_1 u_1'^2$$

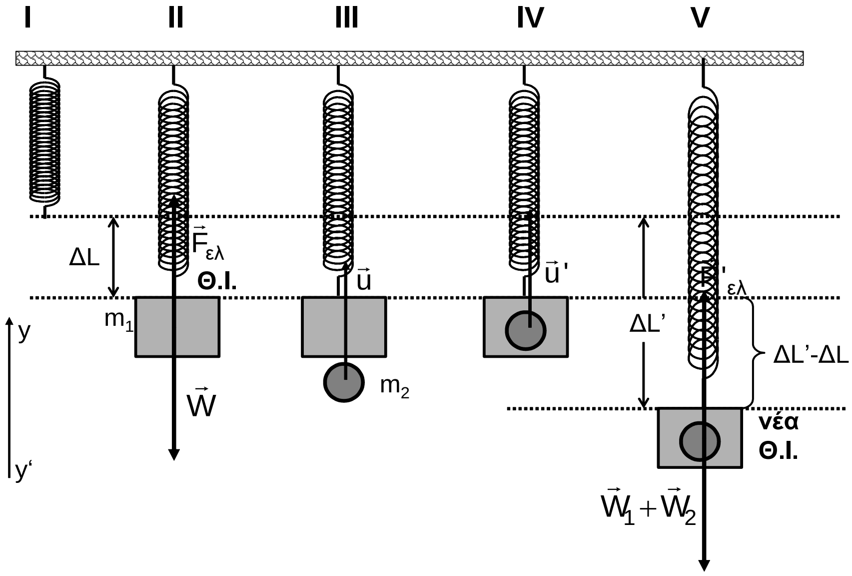
Στις περιπτώσεις αυτές δεν αλλάζει η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης όπως και η συχνότητα-περίοδος.

22. ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Όταν έχουμε πρόβλημα ταλαντώσεων με κρούση τότε ελέγχουμε τα εξής:

Α. Αν αλλάζει η θέση ισορροπίας του συστήματος.
Η θέση ισορροπίας του συστήματος αλλάζει σε κατακόρυφο ή πλάγιο ελατήριο όταν συμβαίνει μεταβολή της μάζας του ταλαντούμενου συστήματος π.χ. πλαστική κρούση, διάσπαση.
Όταν το ελατήριο είναι οριζόντιο όποια κρούση-διάσπαση και να πραγματοποιηθεί δεν αλλάζει η θέση ισορροπίας.
Σε οποιαδήποτε άλλη κρούση εκτός της πλαστικής δεν αλλάζει η θέση ισορροπίας.

Β. Αν αλλάζει η περίοδος της ταλάντωσης.
Η περίοδος της ταλάντωσης αλλάζει όταν έχουμε μεταβολή της μάζας του ταλαντούμενου συστήματος π.χ. πλαστική κρούση, διάσπαση.
Όταν ένα σώμα μάζας m_1, που είναι αναρτημένο από κατακόρυφο ελατήριο, συγκρουστεί μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας m_2, το συσσωμάτωμα που θα προκύψει θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με πλάτος το οποίο υπολογίζεται ως εξής:



- Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος (Ι).
- Σχεδιάζουμε το σύστημα ελατήριο-σώμα m_1 στη θέση ισορροπίας (ΙΙ). Υπολογίζουμε την αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου ΔL.

Στη Θ.Ι. ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow W_1 - F_{ελ} = 0 \Leftrightarrow m_1 g = K\cdot\Delta L \Rightarrow \Delta L = \dfrac{m_1 g}{K}$

- Σχεδιάζουμε τα σώματα m_1 και m_2 πριν και μετά την πλαστική κρούση (ΙΙΙ)-(ΙV). Υπολογίζουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.):

$$\vec{P}^{αρχ}_{ολ} = \vec{P}^{τελ}_{ολ} \Leftrightarrow m_2 u = (m_1+m_2)u' \Rightarrow u' = \frac{m_2}{m_1+m_2}u$$

- Σχεδιάζουμε το νέο σύστημα ελατήριο-συσσωμάτωμα m_1+m_2 στη νέα Θ.Ι. (V). Το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. γύρω από τη νέα Θ.Ι. του. Υπολογίζουμε την νέα επιμήκυνση του ελατηρίου λόγω του συσσωματώματος.

Στη νέα Θ.Ι. ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow W_1 + W_2 - F'_{ελ} = 0 \Rightarrow (m_1+m_2)g = K\cdot\Delta L' \Rightarrow \Delta L' = \dfrac{(m_1+m_2)g}{K}$

- Το πλάτος Α της ταλάντωσης του συσσωματώματος θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης. Το σημείο κρούσης είναι τυχαία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος και απέχει από την νέα Θ.Ι. απόσταση x=ΔL’-ΔL, ενώ το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα u’. Συνεπώς:

$$\left.\begin{array}{l} E = U + K \\ E = U_{max} = K_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow U_{max} = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}K(\Delta L' - \Delta L)^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u'^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{(\Delta L' - \Delta L)^2 + \frac{m_1 + m_2}{K}u'^2}$$

Στις περιπτώσεις αυτές εκτός από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αλλάζει και η συχνότητα-περίοδος.

<u>**Παρατήρηση:**</u> Τα ίδια βήματα ακολουθούμε και στην περίπτωση που έχουμε διάσπαση του αρχικού σώματος σε δύο άλλα.

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ – ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

23. Υπολογισμός της χρονικής στιγμής που το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης έχει γίνει ίσο με κάποιο κλάσμα του αρχικού

Θέλουμε να υπολογίσουμε την χρονική στιγμή t όπου το πλάτος της ταλάντωσης έχει γίνει ίσο με το 1/8 του αρχικού πλάτους A_o.

$$A = A_o e^{-\Lambda t} \xrightarrow{A = \frac{A_o}{8}} \frac{A_o}{8} = A_o e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow \ell n\frac{1}{8} = \ell n e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow$$

$$\ell n1 - \ell n8 = -\Lambda t \cdot \ell n e \Leftrightarrow -\ell n2^3 = -\Lambda t \Leftrightarrow 3\ell n2 = \Lambda t \Leftrightarrow t = 3\frac{\ell n2}{\Lambda} \Leftrightarrow t = 3T_{1/2}$$

Όπου $T_{1/2}$ ο χρόνος για να γίνει το πλάτος της ταλάντωσης ίσο με το μισό του αρχικού (χρόνος ημίσειας ζωής).

24. Υπολογισμός του πλάτους ταλάντωσης μια δεδομένη χρονική στιγμή (t=NT).

Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλάτος σε μια φθίνουσα ταλάντωση μια χρονική στιγμή π.χ. t_1=8s με $\Lambda = \frac{\ell n2}{4}s^{-1}$:

$$A = A_o e^{-\Lambda t} \xrightarrow{t = t_1} A = A_o e^{-\frac{\ell n2}{4}8} \Leftrightarrow A = A_o e^{-2\ell n2} \Leftrightarrow$$

$$A = A_o e^{\ell n2^{-2}} \xrightarrow{e^{\ell n a} = a} A = A_o 2^{-2} \Leftrightarrow A = \frac{A_o}{4}$$

25. Υπολογισμός του έργου της δύναμης απόσβεσης όταν το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης έχει γίνει ίσο με κάποιο κλάσμα του αρχικού

Θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης απόσβεσης όταν το πλάτος της ταλάντωσης έχει γίνει ίσο με το 1/4 του αρχικού πλάτους A_o.

- Υπολογίζουμε την αρχική ενέργεια της ταλάντωσης E_o: $E_o = U_{o,max} = \frac{1}{2}DA_o^2$
- Υπολογίζουμε την ενέργεια της ταλάντωσης E, όταν το πλάτος της έχει γίνει $A = A_o/4$:

$$E = U_{max} = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D\left(\frac{A_o}{4}\right)^2$$

- Το σύστημα έχει χάσει ενέργεια ΔΕ, **υπό τη μορφή θερμότητας Q**, λόγω της δύναμης απόσβεσης, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$Q=|\Delta E| = |E - E_o| = \left|\frac{1}{2}D\frac{A_o^2}{16} - \frac{1}{2}DA_o^2\right| \Leftrightarrow Q = \frac{15 \cdot DA_o^2}{32}$$

- Το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι πάντα αρνητικό και ίσο με:

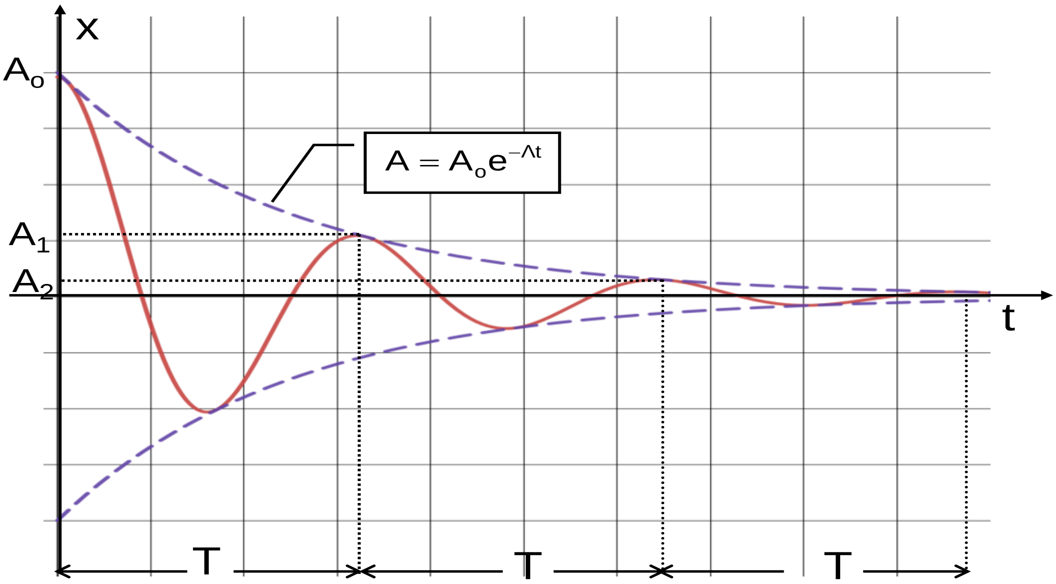
$$W_{F(\alpha\pi o\sigma\beta\varepsilon\sigma\eta\varsigma)} = \Delta E = -\frac{15 \cdot DA_o^2}{32} < 0$$

26. Ρυθμός ελάττωσης της ενέργειας ταλάντωσης ή ισχύς της δύναμης απόσβεσης: $\frac{\Delta E}{\Delta t} = P_{F_{\alpha\pi}} = \vec{F}_{\alpha\pi} \cdot \vec{u} = -b \cdot u^2$

27. Συνισταμένη δύναμη στη φθίνουσα ταλάντωση

Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{\alpha\pi} + \vec{F}_{\varepsilon\pi} = m\vec{a} \Leftrightarrow -b\vec{u} - D\vec{x} = m\vec{a}$

Η απομάκρυνση x σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση:



$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta) \xrightarrow{A=A_oe^{-\Lambda t}} x = A_oe^{-\Lambda t}\eta\mu(\omega t + \theta)$$

28. Συνισταμένη δύναμη στην εξαναγκασμένη ταλάντωση

Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{\alpha\pi} + \vec{F}_{\varepsilon\pi} + \vec{F}_{\delta\iota\varepsilon\gamma} = m\vec{a} \Leftrightarrow$

$$\vec{F}_{\delta\iota\varepsilon\gamma} - b\vec{u} - D\vec{x} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{\delta\iota\varepsilon\gamma} - b\vec{u} - m\omega_o^2\vec{x} = m(-\omega^2\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{F}_{\delta\iota\varepsilon\gamma} - b\vec{u} = m(\omega_o^2 - \omega^2)\vec{x}$$

όπου ω_o η ιδιοσυχνότητα του συστήματος και ω η συχνότητα του διεγέρτη. Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση το πλάτος της ταλάντωσης είναι σταθερό και πραγματοποιείται με τη συχνότητα ω του διεγέρτη. Συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης έχουν τη μορφή:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta), \quad u = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \theta), \quad a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \theta)$$

Λύση Τριγωνομετρικών εξισώσεων – Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu x = \alpha \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\varphi \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \varphi \\ \kappa\alpha\iota \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \pi - \varphi \end{cases}$

2. $\sigma\upsilon\nu x = \beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \kappa\alpha\iota \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases}$

ημ(-φ) = -ημφ

ημ(π-φ) = ημφ

ημ(π+φ) = -ημφ

ημ(π/2-φ) = συνφ

ημ(α±β) = ημασυνβ±ημβσυνα

συν(-φ) = συνφ

συν(π-φ) = -συνφ

συν(π+φ) = -συνφ

συν(π/2-φ) = ημφ

συν(α±β) = συνασυνβ∓ημαημβ