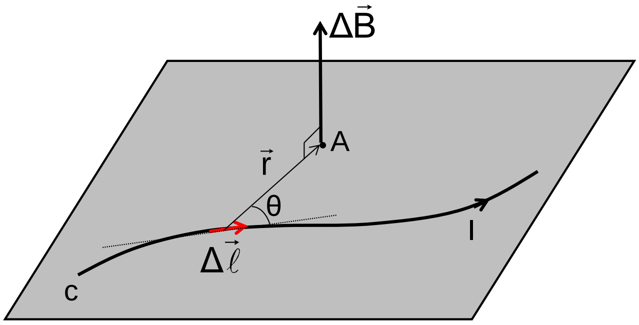
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ BIOT – SAVART

Γύρω από ένα ρευματοφόρο αγωγό δημιουργείται μαγνητικό πεδίο. Η ένταση $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου, και γενικότερα, η μορφή του σε ένα σημείο του χώρου γύρω από ηλεκτροφόρο αγωγό γενικά εξαρτάται:

- Από την ένταση I του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό.
- Από την απόσταση (θέση) του σημείου από τον αγωγό.
- Από τη “γεωμετρία” (σχήμα) του αγωγού.



Η ένταση $\Delta\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργεί ένα στοιχειώδες τμήμα $\Delta\vec{\ell}$ ενός ρευματοφόρου αγωγού c (οποιουδήποτε σχήματος), σε κάποιο σημείο του χώρου Α, μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο των **Biot-Savart** . Η ένταση που προκύπτει από τον νόμο αυτό έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Το μέτρο ΔΒ δίνεται από την σχέση: $$\boxed{\Delta B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\cdot\Delta\ell}{r^2}\eta\mu\theta} \qquad (1)$$

όπου:

μ_o :η μαγνητική διαπερατότητα του κενού με τιμή $\mu_o = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Tm}{A}$

I :η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό

r :η απόσταση του σημείου Α από το στοιχειώδες τμήμα $\Delta\ell$

$\Delta\ell$:το μήκος του στοιχειώδους τμήματος του αγωγού

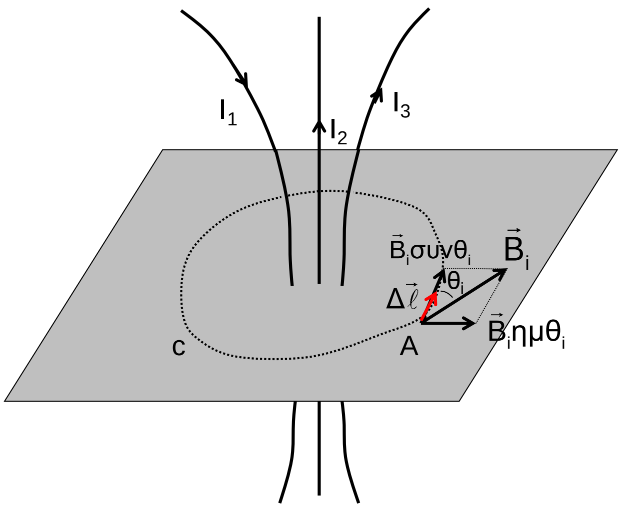
θ : η γωνία μεταξύ των διευθύνσεων που ορίζουν τα $\Delta\ell$ και r

- Η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\Delta\ell$ και r.
- Η φορά προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, δηλαδή τοποθετούμε την παλάμη στο επίπεδο που ορίζουν τα ΔΙ και r με τον αντίχειρα τεντωμένο να δείχνει τη φορά της έντασης του ρεύματος και τα δάκτυλα (μαζεμένα) τη φορά του $\Delta\vec{B}$ στο σημείο που θέλουμε.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Α, που δημιουργεί όλος ο αγωγός θα βρεθεί από το άθροισμα των εντάσεων ΔΒ που δημιουργούν στο σημείο Α όλα τα επιμέρους στοιχειώδη τμήματα $\Delta\ell$ που αποτελείται ο αγωγός. Δηλαδή: $$\boxed{\vec{B} = \sum_{\substack{\gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha \\ \tau\alpha\ \Delta\ell}} \Delta\vec{B}} \qquad (2)$$

2. ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ AMPERE

Κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης που περιβάλλει έναν ή περισσότερους ρευματοφόρους αγωγούς (οποιουδήποτε σχήματος), το άθροισμα των εφαπτομενικών συνιστωσών B_i της έντασης του μαγνητικού πεδίου επί τα αντίστοιχα στοιχειώδη τμήματα $\Delta\ell_i$ στα οποία διαιρείται η καμπύλη, είναι ανάλογο με το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που περιβάλλει η καμπύλη.



$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} B_i\Delta\ell_i\sigma\upsilon\nu\theta_i = \mu_o I_{\varepsilon\sigma}} \qquad (3)$$

όπου:

θ_i : η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του διανύσματος $\vec{B}$ της έντασης του μαγνητικού πεδίου και του στοιχειώδους μήκους $\Delta\ell$
μ_o : η μαγνητική διαπερατότητα του κενού
$I_{\varepsilon\sigma}$: το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που περικλείει η καμπύλη

Ο νόμος του Ampere αποτελεί έναν πολύ βασικό νόμο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου γιατί συνδέει την ένταση του μαγνητικού πεδίου (αποτέλεσμα) με την ένταση του ρεύματος που το προκαλεί (αίτιο).

- Ο νόμος του Ampere χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της έντασης μαγνητικών πεδίων τα οποία δημιουργούνται από ρευματοφόρους αγωγούς. Αυτό βέβαια προϋποθέτει το σχήμα των αγωγών να είναι τέτοιο ώστε με κατάλληλη εκλογή της κλειστής καμπύλης να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο.
- Με τον νόμο του Ampere, γνωρίζοντας το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου, μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση του ρεύματος που δημιουργεί το πεδίο.

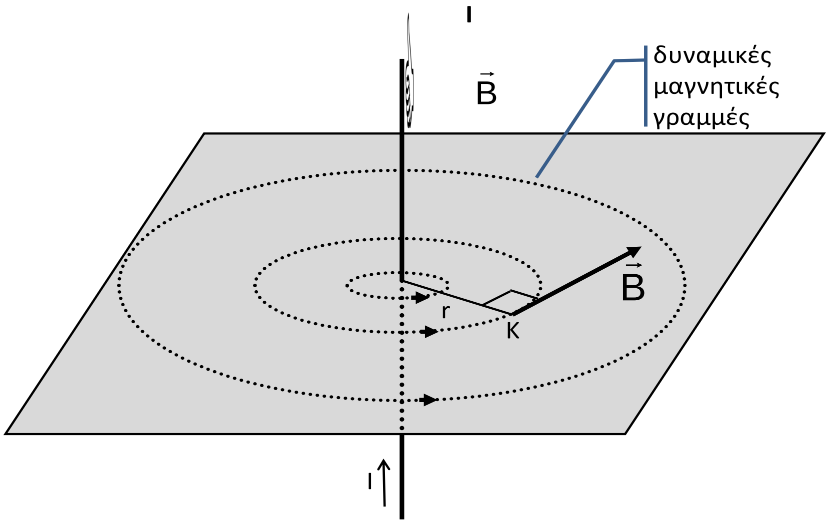
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το ρεύμα $I_{\varepsilon\sigma}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που υπάρχουν εντός της κλειστής καμπύλης (τα ρεύματα εκτός της καμπύλης δεν λαμβάνονται υπ’ όψη). Ως θετικά λαμβάνουμε τα ρεύματα των οποίων η φορά είναι ίδια με την φορά που προχωρά μια δεξιόστροφη βίδα, όταν στρέφεται κατά την φορά διαγραφής της κλειστής διαδρομής (π.χ. $I_{\varepsilon\sigma}=-I_1+I_2-I_3$).

3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΟΥ AMPERE ΚΑΙ BIOT – SAVART

Α. Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού πολύ μεγάλου (απείρου) μήκους

Στην περίπτωση του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι, η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται σε κάποιο σημείο Κ του χώρου (σε απόσταση r από τον αγωγό) μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με τον νόμο του Ampere. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, εκλέγουμε ως κλειστή καμπύλη έναν κύκλο ακτίνας r όπου το επίπεδό του είναι κάθετο στον αγωγό και το κέντρο του είναι ο αγωγός. Χωρίζοντας τον κύκλο σε στοιχειώδη τμήματα $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$, … το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι εφαπτόμενο σε κάθε τμήμα (θ=0°) και το μέτρο σταθερό Β. Από τον νόμο του Ampere έχουμε:



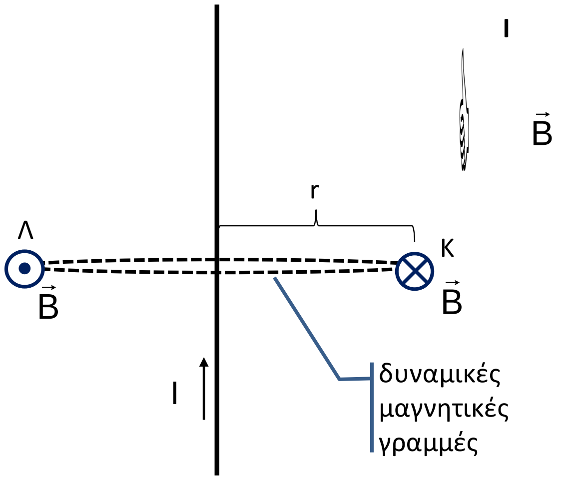
$$\sum_{i=1}^{N} B_i \cdot \Delta\ell = \mu_o I \xrightarrow{B=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}} B\sum_{i=1}^{N}\Delta\ell = \mu_o I \Leftrightarrow B\cdot 2\pi r = \mu_o I \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}}}$$

Η ένταση $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο Α έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

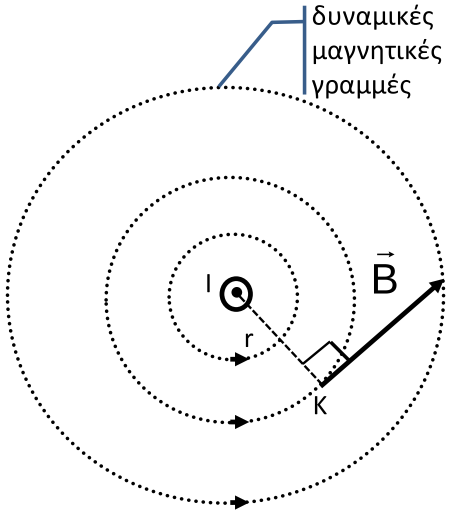
- Σημείο εφαρμογής το σημείο Κ.
- Διεύθυνση τη διεύθυνση της ευθείας που εφάπτεται της δυναμικής γραμμής που διέρχεται από το σημείο Κ.
- Φορά τη φορά της δυναμικής γραμμής που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

- Μέτρο ανάλογο της έντασης που διαρρέει τον αγωγό και αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης του σημείου από τον αγωγό:

$$\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}}$$



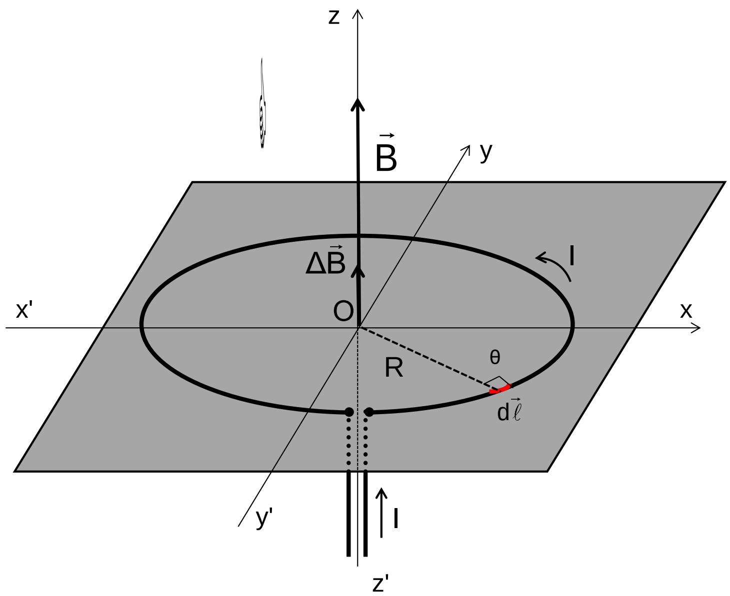
αγωγός στο επίπεδο της σελίδας
ένταση Μ.Π. κάθετη στο επίπεδο της σελίδας

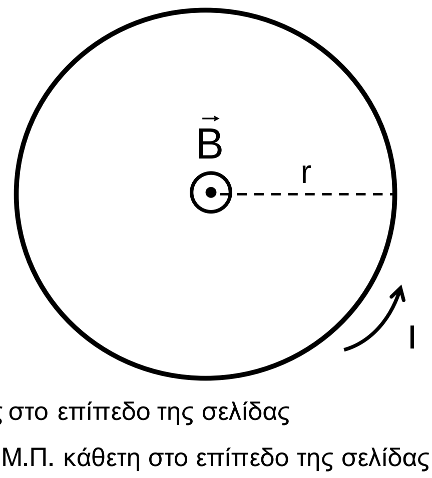


αγωγός κάθετος στο επίπεδο της σελίδας
ένταση Μ.Π. στο επίπεδο της σελίδας

όπου:
r : η απόσταση του σημείου Α από τον αγωγό
I : η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό
Η φορά των μαγνητικών δυναμικών γραμμών βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπου ο αντίχειρας δείχνει την φορά του ρεύματος και τα υπόλοιπα δάκτυλα διπλωμένα την φορά των δυναμικών γραμμών.

Β. Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού στο κέντρο του





αγωγός στο επίπεδο της σελίδας
ένταση Μ.Π. κάθετη στο επίπεδο της σελίδας

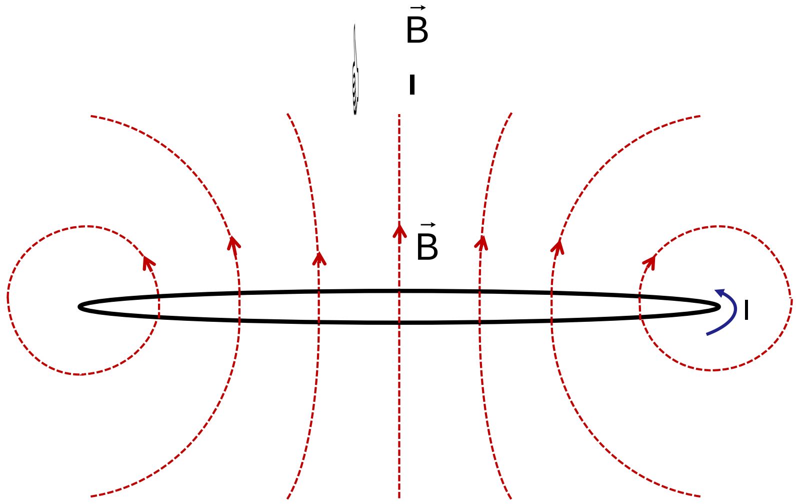
Θεωρούμε έναν κυκλικό αγωγό ακτίνας r που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο κέντρο του δακτυλίου μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο των Biot-Savart.

$$\Delta B = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\Delta\ell \eta\mu\theta}{r^2}$$

Η γωνία θ=90° (για όλα τα $\Delta\ell$) και όλες οι στοιχειώδεις εντάσεις ΔΒ έχουν την κατεύθυνση του άξονα z'z. Συνεπώς από την σχέση (2) έχουμε:

$$\vec{B} = \sum_{\substack{\text{για όλα} \\ \text{τα } \Delta\ell}} \Delta\vec{B} \Leftrightarrow B = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}\sum_{\substack{\text{κυκλική} \\ \text{περιφέρεια}}} \Delta\ell \Leftrightarrow B = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_o I}{2R}}$$

Αν σχηματίσουμε το μαγνητικό φάσμα του πεδίου, θα διαπιστώσουμε ότι αυτό θυμίζει το πεδίο ενός μικρού ευθύγραμμου μαγνήτη, ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο του κυκλικού αγωγού με τον άξονά του κάθετο στο επίπεδο του αγωγού. Οι δυναμικές γραμμές είναι κλειστές καμπύλες που το επίπεδό τους είναι κάθετο στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού. Η δυναμική γραμμή που διέρχεται από το κέντρο, είναι ευθεία που συμπίπτει με τον άξονα του αγωγού.



αγωγός κάθετος στο επίπεδο της σελίδας

ένταση Μ.Π. στο επίπεδο της σελίδας

<u>Παρατήρηση:</u> Αν έχουμε Ν κυκλικούς αγωγούς της ίδιας ακτίνας και του ίδιου κέντρου Ο τότε ισχύει:

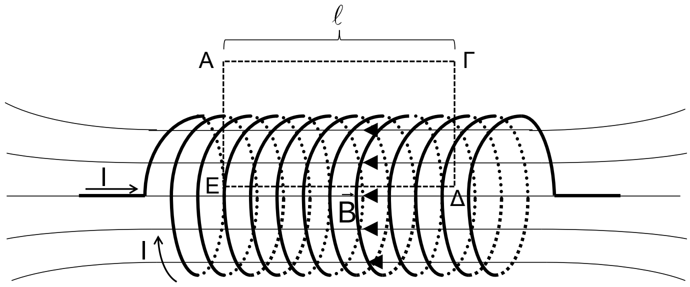
$$B = N\frac{\mu_o I}{2R}$$

Γ. Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς (πηνίου) πολύ μεγάλου (απείρου) μήκους στο εσωτερικό του

Σωληνοειδές ή πηνίο λέμε ένα σύστημα από παράλληλους ομοαξονικούς κυκλικούς αγωγούς που έχουν την ίδια ακτίνα και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Αυτή η διάταξη επιτυγχάνεται όταν τυλίξουμε ένα ευθύγραμμο αγωγό γύρω από ένα κύλινδρο.

Στην περίπτωση σωληνοειδούς, πολύ μεγάλου μήκους με n σπείρες ανά μονάδα μήκους, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι, η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο του Ampere.

Από την συμμετρία του προβλήματος (το πεδίο είναι ομογενές στο εσωτερικό και Β=0 στον εξωτερικό χώρο) εκλέγουμε κλειστή καμπύλη σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΓΔΕΑ με πλευρά (ΑΓ)=(ΔΕ)=ℓ.



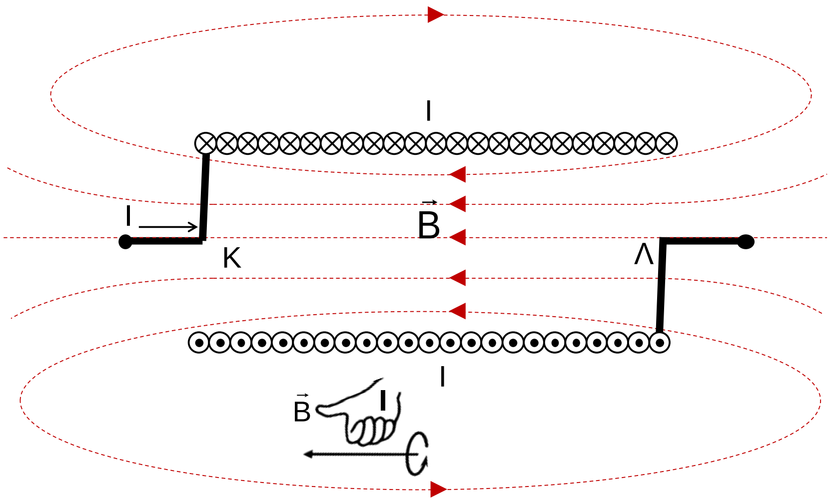
Στο μήκος αυτό το σωληνοειδές έχει $N = n\ell$ σπείρες. Από τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\sum_{\text{ΑΓΔΕ}} B\Delta\ell\sigma\upsilon\nu\theta = \mu_o I_{\varepsilon\sigma} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{\text{ΑΓ}} B\Delta\ell\sigma\upsilon\nu\theta}_{0} + \underbrace{\sum_{\text{ΓΔ}} B\Delta\ell\sigma\upsilon\nu\theta}_{0} + \sum_{\text{ΔΕ}} B\Delta\ell\sigma\upsilon\nu\theta + \underbrace{\sum_{\text{ΕΑ}} B\Delta\ell\sigma\upsilon\nu\theta}_{0} = \mu_o I_{\varepsilon\sigma} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\Delta E} B\Delta\ell\,\sigma\upsilon\nu\theta = \mu_o I_{\varepsilon\sigma} \xrightarrow[I_{\varepsilon\sigma}=NI]{\theta=0} B\sum_{\Delta E}\Delta\ell = \mu_o NI \Leftrightarrow B\ell = \mu_o NI \Leftrightarrow$$

$$B = \mu_o \frac{N}{\ell} I \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{B = \mu_o nI}}$$

όπου:
N : ο αριθμός των σπειρών,
ℓ : το μήκος του σωληνοειδούς
$\frac{N}{\ell} = n$: ο αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους
I : η ένταση του ρεύματος.



Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς και κοντά στον άξονά του είναι **ομογενές**. Η φορά των δυναμικών γραμμών καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, τα δάκτυλα διπλώνονται κατά την φορά του ρεύματος στα ''τοιχώματα'' του πηνίου και ο τεντωμένος αντίχειρας μας δείχνει την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Στο εξωτερικό του πηνίου οι δυναμικές γραμμές έχουν τη μορφή ενός ραβδόμορφου μαγνήτη.

Η ένταση του πεδίου στα άκρα Κ, Λ του πηνίου είναι: $\boxed{B_A = \frac{B}{2} = \frac{\mu_o nI}{2}}$

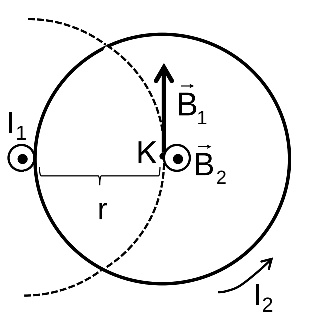
4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 2 Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

Ο υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργείται από ρευματοφόρους αγωγούς σε κάποιο σημείο του χώρου, προκύπτει, με βάση την αρχή της επαλληλίας, από το **διανυσματικό άθροισμα** των εντάσεων $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, … που δημιουργεί ο κάθε ρευματοφόρος αγωγός αντίστοιχα, στο σημείο του χώρου.
Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ότι μας ζητείται να υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργούν ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 και ένας κυκλικός αγωγός, ακτίνας r, που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_2 στο κέντρο Κ του κυκλικού αγωγού. Ο ευθύγραμμος αγωγός είναι κάθετος στο επίπεδο του κυκλικού και εφάπτεται του κυκλικού σε κάποιο σημείο του (σχήματα α, β)

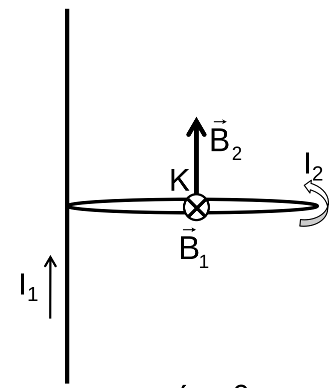
1ο βήμα: Σχεδιάζουμε τα διανύσματα των εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ που δημιουργούν οι δύο αγωγοί στο σημείο Κ.

2ο βήμα: Υπολογίζουμε τα μέτρα των εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ από τις σχέσεις:

$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r}$ και $B_2 = \frac{\mu_o I_2}{2r}$



σχήμα α



σχήμα β

3ο βήμα: Υπολογίζουμε τη συνολική ένταση $\vec{B}_K$ του πεδίου που δημιουργούν οι δύο αγωγοί, στο σημείο Κ, από το διανυσματικό άθροισμα των εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$. Επειδή στην προκειμένη περίπτωση τα δύο διανύσματα των εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους το μέτρο της συνολικής έντασης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$B_K = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Leftrightarrow B_K = \sqrt{\left(\frac{\mu_o I_1}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{\mu_o I_2}{2r}\right)^2} \Leftrightarrow B_K = \frac{\mu_o}{2r}\sqrt{\frac{I_1^2}{\pi^2} + I_2^2}$$

Η διεύθυνση της συνολικής έντασης καθορίζεται από την γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{B}_K$ με τη $\vec{B}_1$: $\quad \varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{B_2}{B_1}$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Εάν τα διανύσματα των δύο εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα, τότε το μέτρο της συνολικής έντασης στο σημείο Κ προκύπτει από το άθροισμα των μέτρων των δύο εντάσεων:

  $$B_K = B_1 + B_2$$

  Η κατεύθυνση της συνολικής έντασης είναι ίδια με αυτήν των εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$.
- Εάν τα διανύσματα των δύο εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ είναι συγγραμμικά και αντίρροπα, τότε το μέτρο της συνολικής έντασης στο σημείο Κ προκύπτει από τη διαφορά των μέτρων των δύο εντάσεων:

  $$B_K = B_1 - B_2$$

  Η κατεύθυνση της συνολικής έντασης είναι ίδια με αυτήν της μεγαλύτερης έντασης.
- Εάν τα διανύσματα των δύο εντάσεων $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ σχηματίζουν μεταξύ τους τυχαία γωνία θ, τότε το μέτρο της συνολικής έντασης προκύπτει από τη γενική σχέση:

  $$B_K = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2 \cdot B_1 \cdot B_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

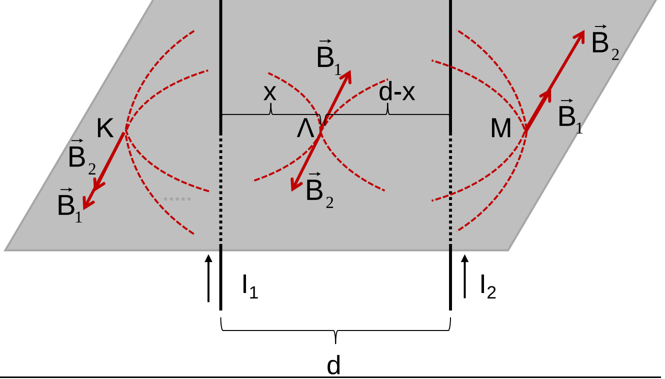
  Η διεύθυνση της συνολικής έντασης B_K καθορίζεται από την γωνία φ, η οποία είναι:

  $$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{B_2 \cdot \eta\mu\theta}{B_1 + B_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

Αν έχουμε παραπάνω από δύο ρευματοφόρους αγωγούς, τότε σχεδιάζουμε τα επιμέρους διανύσματα των εντάσεων, εκλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων x'x και y΄y και αναλύουμε τα διανύσματα στους άξονες. Το τελικό διάνυσμα προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών που θα προκύψουν σε κάθε άξονα.

5. ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 2 ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΦΟΡΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ ΠΟΛΥ ΜΕΓΑΛΟΥ (ΑΠΕΙΡΟΥ) ΜΗΚΟΥΣ

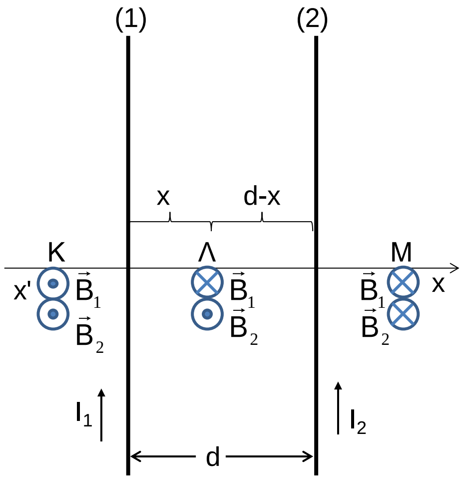
Θεωρούμε δύο ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς πολύ μεγάλου μήκους που διαρρέονται από ρεύματα έντασης I_1, I_2 (ομόρροπα ή αντίρροπα) οι οποίοι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Αν μας ζητηθεί να βρούμε ένα σημείο όπου η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν, εκτός από το άπειρο, τότε κάνουμε τα εξής βήματα.



1ο βήμα: Σχεδιάζουμε ευθεία (ε) που βρίσκεται στο επίπεδο των αγωγών και είναι κάθετη σε αυτούς καθώς και τα διανύσματα της έντασης $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$, που δημιουργούν οι αγωγοί (1) και (2) αντίστοιχα, σε τρία σημεία της ευθείας (ε), ένα αριστερά του αγωγού (1) (σημείο Κ), ένα ανάμεσα αγωγούς (σημείο Λ) και ένα δεξιά του αγωγού (2) (σημείο Μ).

2ο βήμα: Η ένταση του πεδίου των δύο αγωγών μηδενίζεται στην περιοχή όπου τα δύο διανύσματα έχουν αντίθετες φορές. Στην περίπτωση που τα ρεύματα είναι ομόρροπα στο σημείο Λ ανάμεσα στους δύο αγωγούς.

3ο βήμα: Επειδή η θέση του σημείου Λ, όπου η ένταση μηδενίζεται, είναι άγνωστη θέτουμε την απόσταση του Λ από αγωγό (1) ίση με x. Το σημείο Λ θα βρίσκεται πιο κοντά στον αγωγό που διαρρέεται από την μικρότερη ένταση ρεύματος π.χ. αν $I_2=2I_1$ τότε το Λ θα είναι πιο κοντά στον αγωγό (1). Στη θέση Λ θα ισχύει:

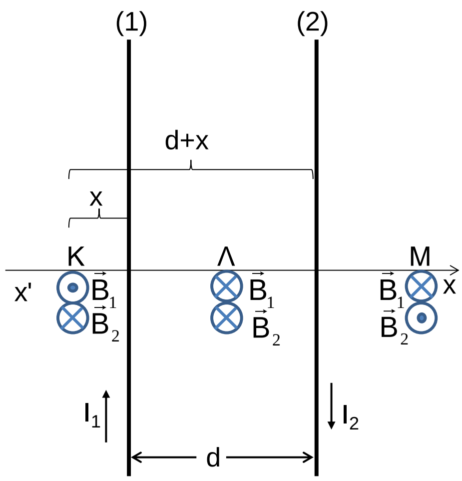


$$\vec{B}_\Lambda = 0 \to B_1 - B_2 = 0 \Leftrightarrow B_1 = B_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu_o I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi(d-x)} \Leftrightarrow \frac{I_1}{x} = \frac{2\cdot I_1}{d-x} \Leftrightarrow$$

$$2x = d - x \Leftrightarrow x = \frac{d}{3}$$

Στην περίπτωση όπου οι δύο αγωγοί διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα τότε τα διανύσματα των επιμέρους εντάσεων είναι αντίρροπα αριστερά του αγωγού (1) και δεξιά του αγωγού (2). Η ένταση όμως μηδενίζεται προς την περιοχή του αγωγού με την μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος, άρα στο σημείο Κ διότι μόνο στην περιοχή αυτή ο αγωγός με την μικρότερη ένταση μπορεί, λόγω της μικρής απόστασης, να «εξουδετερώσει» την ένταση του μαγνητικού πεδίου του αγωγού (2) (μεγάλη ένταση ρεύματος μεγάλη απόσταση).

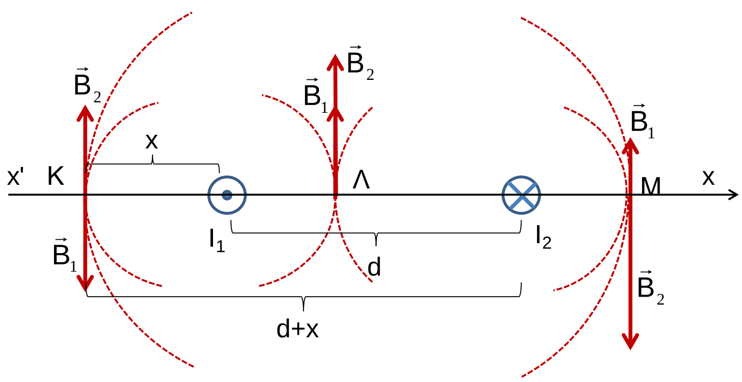


$$\vec{B}_\Lambda = 0 \to B_1 - B_2 = 0 \Leftrightarrow B_1 = B_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu_o I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi(d+x)} \Leftrightarrow \frac{I_1}{x} = \frac{2\cdot I_1}{d+x} \Leftrightarrow$$

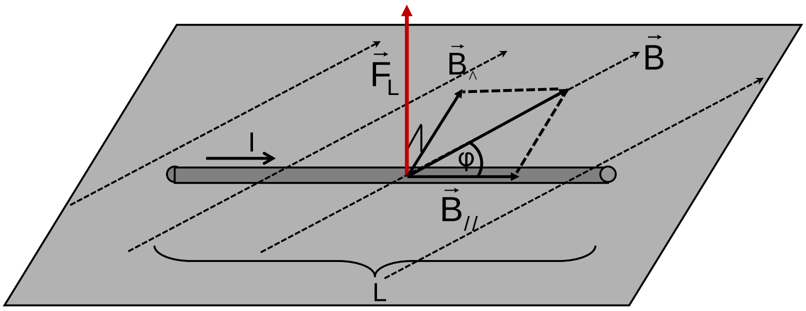
$$2x = d + x \Leftrightarrow x = d$$

<u>Παρατήρηση:</u> Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου η ένταση του συστήματος των δύο ρευματοφόρων παράλληλων αγωγών μηδενίζεται είναι μια ευθεία που διέρχεται από το εκάστοτε σημείο Λ ή Κ μηδενισμού και είναι παράλληλη προς τους αγωγούς.



6. ΔΥΝΑΜΗ LAPLACE

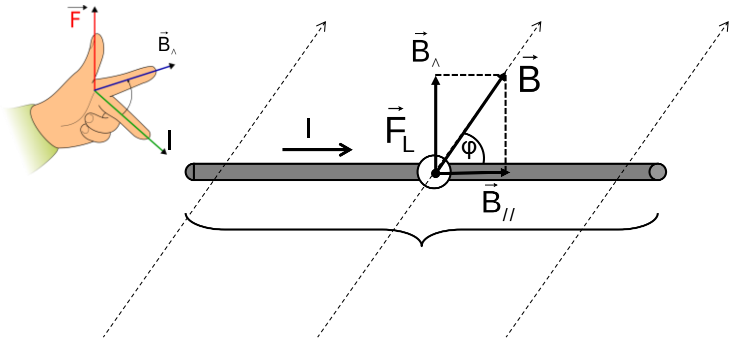
Όταν ευθύγραμμος ρευμα-τοφόρος αγωγός μήκους ℓ, που διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι, βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, έντασης Β, θα ασκηθεί δύναμη από το πεδίο στον αγωγό. Η δύναμη αυτή ονομάζεται δύναμη **Laplace** και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:



- Σημείο εφαρμογής το μέσο του αγωγού.
- Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τον αγωγό και την ένταση του πεδίου (επίπεδο της σελίδας).
- Φορά που καθορίζεται από τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, όπου ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του ρεύματος, ο δείκτης την κατεύθυνση της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου που είναι κάθετη στον αγωγό και ο μέσος την κατεύθυνση της δύναμης Laplace.
- Μέτρο που δίνεται από την σχέση: $\boxed{F_L = B \times I \times \ell \times ημφ}$

  Όπου φ είναι η γωνία που σχηματίζει ο αγωγός με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Στην περίπτωση που ο αγωγός είναι κάθετος με τις δυναμικές γραμμές, δηλαδή φ=90^0, τότε ισχύει:

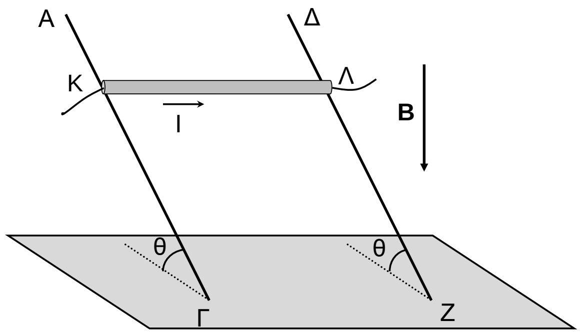


$$F_L = IB\ell$$

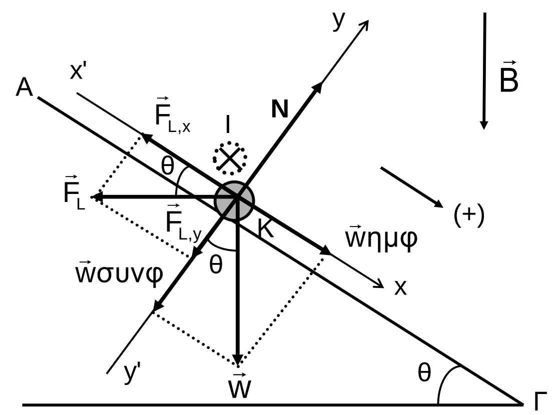
και η δύναμη Laplace λαμβάνει την μέγιστη τιμή.

Όταν ο αγωγός είναι παράλληλος με τις δυναμικές γραμμές δηλαδή φ=0^o, τότε: $\mathbf{F_L = 0}$

Α. Δύναμη Laplace και νόμοι του Newton



Θεωρούμε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μήκους L και μάζας m, που διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης Β. Ο αγωγός μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε ευθύγραμμες παράλληλες ράγες που σχηματίζουν γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Σε κάθε περίπτωση σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό και αναλύουμε τις δυνάμεις, αν αυτό είναι απαραίτητο σε άξονες x'x και y'y, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στον αγωγό μπορεί να συμβαίνουν τα εξής:



α) Ο αγωγός να ισορροπεί ή να ανέρχεται ή κατέρχεται με σταθερή ταχύτητα u. Σε κάθε περίπτωση και για κάθε άξονα ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Newton:

άξονας y'y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N - wσυνθ - F_{L,y} = 0 \Leftrightarrow$

$$N - wσυνθ - BILημθ = 0$$

άξονας x'x: $\sum F_x = 0 \rightarrow wημθ - F_{L,x} = 0 \Leftrightarrow$

$$wημθ = BILσυνθ$$

β) Ο αγωγός να ανέρχεται ή κατέρχεται με σταθερή επιτάχυνση a.
άξονας y’y: 1[ος] νόμος Newton $\sum F_y = 0 \rightarrow N - w \cdot συνθ - F_{L,y} = 0 \Leftrightarrow N - w \cdot συνθ - BILημθ = 0$

Έστω ότι κατέρχεται, τότε θεωρούμε θετική φορά αυτήν προς τα κάτω.
άξονας x’x: 2[ος] νόμος Newton $\sum F_x = ma \rightarrow w \cdot ημθ - F_{L,X} = ma \Leftrightarrow wημφ - BILσυνφ = ma$

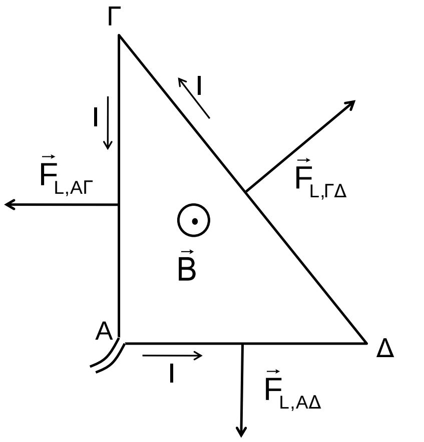
Στην περίπτωση που ανέρχεται, θεωρούμε θετική φορά αυτήν προς τα πάνω.
άξονας x’x: 2[ος] νόμος Newton $\sum F_x = ma \rightarrow F_{L,X} - wημθ = ma \Leftrightarrow BILσυνθ - wημθ = ma$

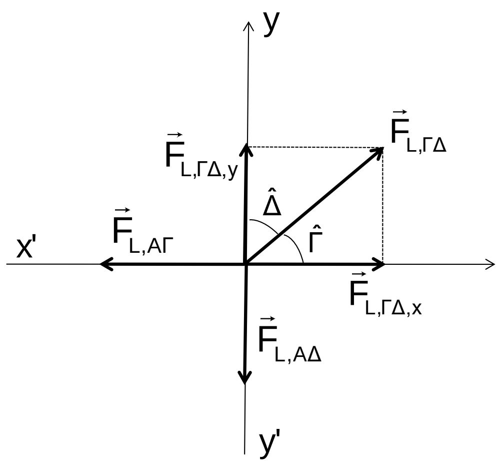
Επίσης επειδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη θα ισχύουν και οι εξισώσεις κίνησης:

$$u = u_o \pm |a| t \quad \text{και} \quad \Delta x = u_o t \pm \frac{|a| t^2}{2}$$

Β. Δύναμη Laplace σε ρευματοφόρο αγωγό που δεν είναι ευθύγραμμος

Στην περίπτωση που έχουμε ρευματοφόρο αγωγό ο οποίος δεν είναι ευθύγραμμος και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B για να υπολογίσουμε τη δύναμη Laplace που του ασκείται κάνουμε τα εξής.





- Διαμερίζουμε τον αγωγό σε ευθύγραμμα τμήματα π.χ. αν ο αγωγός είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ, όπως αυτό του σχήματος, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα είναι όσα και οι πλευρές του.
- Σχεδιάζουμε τη δύναμη Laplace σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα.
- Τοποθετούμε τις δυνάμεις Laplace σε άξονες x’x και y’y και τις αναλύουμε στους άξονες:

$$F_{L,ΓΔ,x} = F_{L,ΓΔ} συν\hat{Γ} \quad \text{και} \quad F_{L,ΓΔ,y} = F_{L,ΓΔ} συν\hat{Δ}$$

- Υπολογίζουμε τη συνισταμένη σε κάθε άξονα:

Άξονας x’x: $\sum F_x = F_{L,ΓΔ,x} - F_{L,ΑΓ} = BI\underbrace{(ΓΔ)συν\hat{Γ}}_{(ΑΓ)} - BI(ΑΓ) = 0$

Άξονας y’y: $\sum F_y = F_{L,ΓΔ,y} - F_{L,ΑΔ} = BI\underbrace{(ΓΔ)συν\hat{Δ}}_{(ΑΔ)} - BI(ΑΔ) = 0$

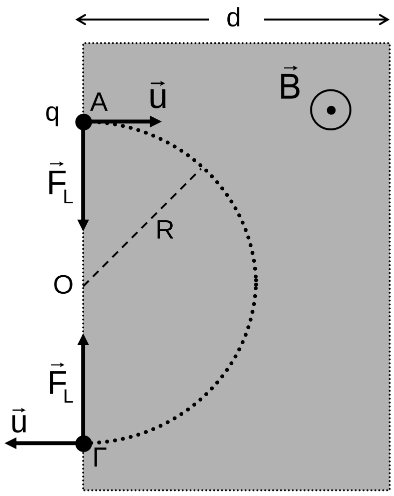
Στην περίπτωση που οι συνισταμένες στους άξονες είναι διάφορες του μηδενός θα ισχύει:

$$\sum F = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} \quad \text{και} \quad εφφ = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

7. ΚΙΝΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ ΕΝΤΟΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

A. Κίνηση με ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές (φ=90°)

Για τον προσδιορισμό της τροχιάς ενός φορτισμένου σωματιδίου που εισέρχεται με ταχύτητα u σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάνουμε τα εξής:



- **Υπολογίζουμε την ακτίνα της τροχιάς** με βάση ότι η δύναμη Laplace που θα ασκηθεί στο σωματίδιο από το πεδίο θα παίξει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, δηλαδή $F_L=F_K$, δηλαδή:

$$\boxed{R=\frac{m\cdot u}{B\cdot|q|}}$$

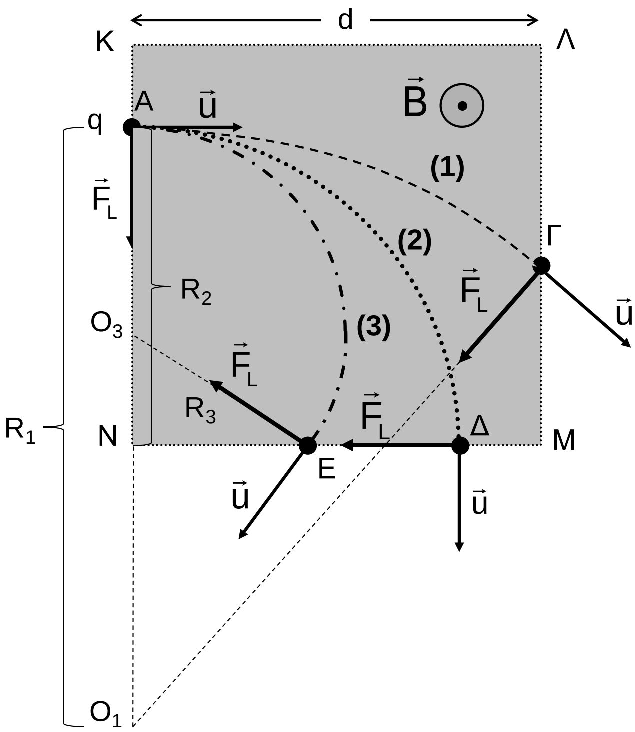
- **Προσδιορίζουμε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς**. Αυτό προσδιορίζεται από την τομή των φορέων της δύναμης Laplace σε δύο διαφορετικές θέσεις του σωματιδίου, συνήθως στην είσοδο και στην έξοδο του σωματιδίου.

i) Αν η ταχύτητα είναι κάθετη στο όριο του πεδίου εύρους d με R<d και <u>άλλη διάσταση του πεδίου είναι πολύ μεγάλη</u> τότε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς βρίσκεται πάνω στο όριο και το σωματίδιο διαγράφει ημικύκλιο. Τότε η ταχύτητα εξόδου έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα εισόδου.
Επίσης το μήκος της τροχιάς s του φορτίου q μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με το μισό της περιμέτρου του κύκλου, συνεπώς:

$$\boxed{s=\theta\cdot R}\xrightarrow{\theta=\pi}s=\pi\cdot R$$

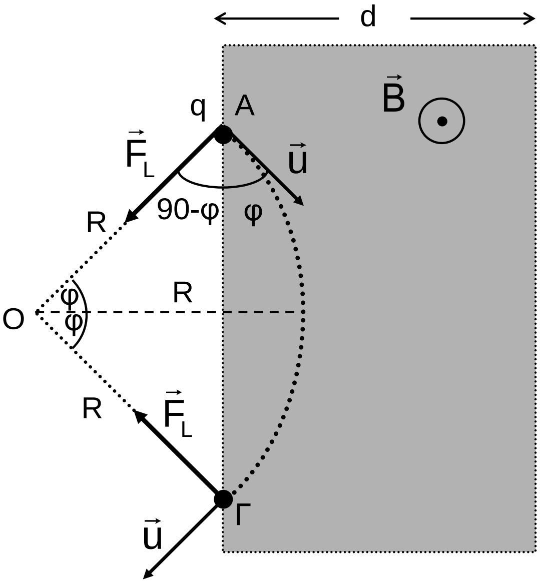
Ο χρόνος παραμονής του φορτίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι ίσος με:

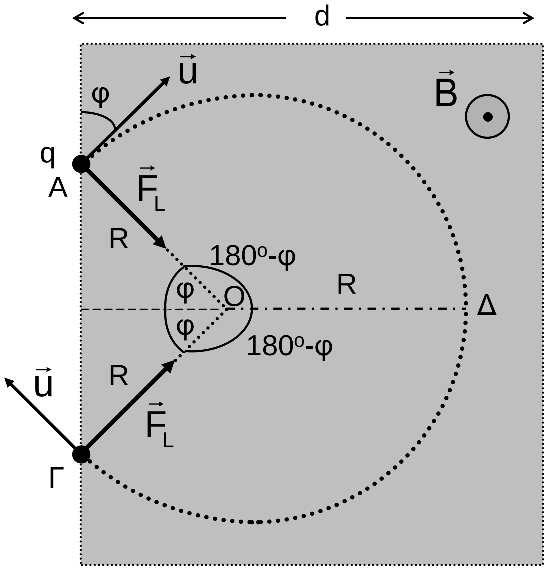
$$\boxed{u=\frac{s}{t}\Rightarrow t=\frac{s}{u}}\xrightarrow{s=\pi R}t=\frac{\pi R}{u}$$



Αν η άλλη διάσταση του μαγνητικού πεδίου είναι συγκρίσιμη της ακτίνας R τότε το φορτίο μπορεί να εξέλθει από το πεδίο από τις πλευρές ΛΜ ή ΜΝ. Αυτό εξαρτάται τη σχέση της ακτίνας R με το εύρος d του πεδίου και της άλλης διάστασης.
Στην περίπτωση της τροχιάς (1), όπου το φορτίο εξέρχεται από το σημείο Γ στην πλευρά ΛΜ η ακτίνα R_1>d και το κέντρο της τροχιάς είναι το O_1 (βρίσκεται στο σημείο τομής των φορέων της $\vec{F}_L$ στα σημεία Α και Γ).
Αν η ακτίνα R<d μπορεί επίσης να εκτελέσει τις τροχιές (2) και (3), ανάλογα με την άλλη διάσταση του πεδίου με κέντρα τα Ν και O_3 αντίστοιχα και ακτίνες τις (ΝΔ) και R_3.
Σε κάθε περίπτωση οι ακτίνες μπορούν να υπολογιστούν και από τη γεωμετρία του προβλήματος όπως θα δούμε σε παράδειγμα.

ii) Αν η ταχύτητα του σωματιδίου σχηματίζει γωνία φ με το όριο του πεδίου



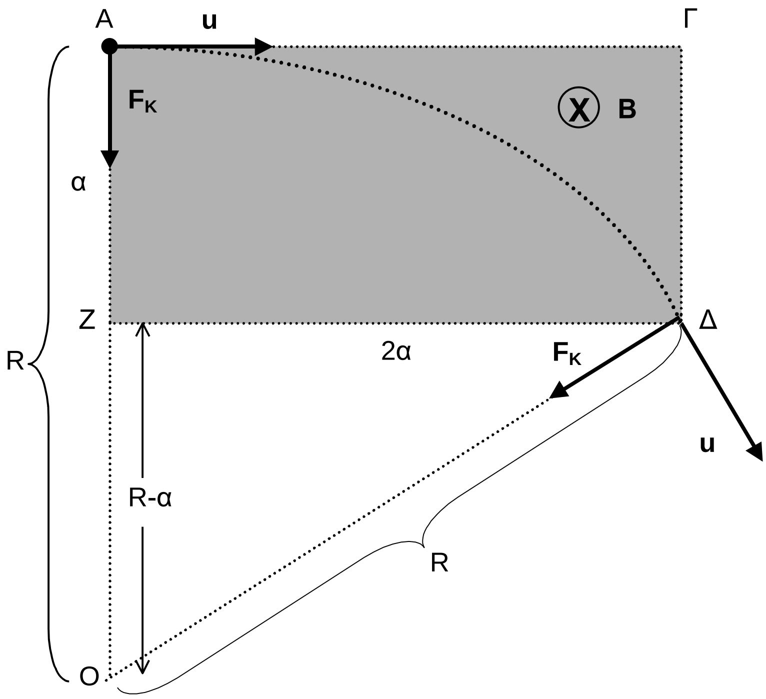


α) και η δύναμη Laplace έχει φορά προς τον χώρο που περιβάλλει το πεδίο τότε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς βρίσκεται έξω από το πεδίο και το τόξο που διαγράφει το σωματίδιο είναι μικρότερο από ημικύκλιο.	β) αν όμως η δύναμη Laplace έχει φορά προς το εσωτερικό του πεδίου τότε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι στο εσωτερικό του πεδίου και το τόξο είναι μεγαλύτερο από ημικύκλιο.

Σε κάθε περίπτωση το μήκος του τόξου που διαγράφει το σωματίδιο υπολογίζεται από τον τύπο $\boxed{s = R \cdot \hat{O}}$ όπου $\hat{O}$ είναι η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο και μετριέται πάντα σε rad. Στην περίπτωση α) η επίκεντρη γωνία είναι 2φ, ενώ στην περίπτωση β) 360^o-2φ.

Ο χρόνος παραμονής του φορτίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι ίσος με: $u = \frac{s}{t} \Rightarrow \boxed{t = \frac{s}{u}}$

Παράδειγμα 1: Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, από το σημείο Α, με ταχύτητα u κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Να βρεθεί η τιμή της ένταση του πεδίου ώστε το ηλεκτρόνιο να εξέλθει από το πεδίο από το σημείο Δ. Δίνονται : u, m_e, q_e, α.



Ισχύει: $F_L = F_K \Leftrightarrow Buq_e = \frac{m_e u^2}{R} \Leftrightarrow$

$$R = \frac{m_e \cdot u}{B \cdot q_e} \qquad (1)$$

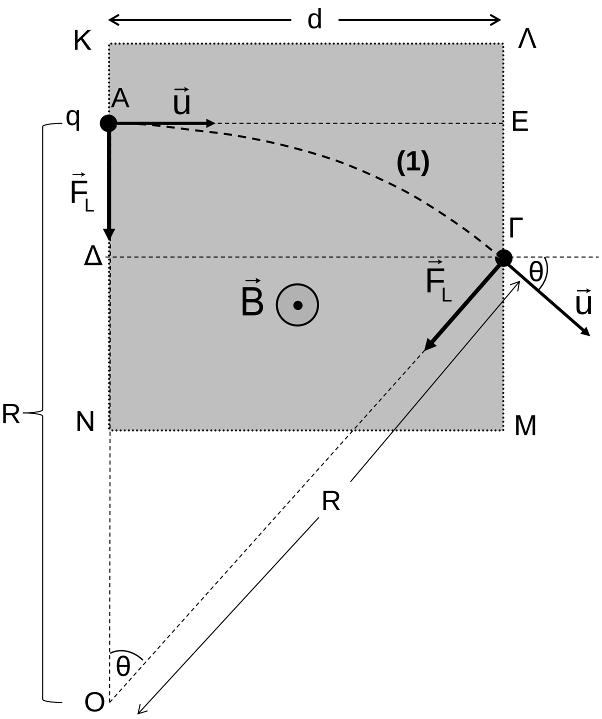
Από το σημείο τομής των διευθύνσεων των δυνάμεων F_L στα σημεία εισόδου και εξόδου από το πεδίο βρίσκουμε ότι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι το Ο. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΖ έχουμε:

$$R^2=(R-\alpha)^2+(2\alpha)^2 \Leftrightarrow R^2=R^2+\alpha^2-2R\alpha+4\alpha^2 \Leftrightarrow 2R\alpha=5\alpha^2 \Leftrightarrow R=\frac{5}{2}\alpha \qquad (2)$$

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (1) γίνεται:

$$\frac{m_e u}{B|q_e|}=\frac{5}{2}\alpha \Leftrightarrow 2m_e u=5B|q_e|\alpha \Leftrightarrow B=\frac{2m_e u}{5\alpha|q_e|}$$

Παράδειγμα 2: Ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα (όπου R>d), από το σημείο Α, με ταχύτητα u κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Το φορτίο εξέρχεται από το σημείο Γ με γωνία θ η οποία ονομάζεται **γωνία εκτροπής** (είναι η γωνία που σχηματίζει ο φορέας της ταχύτητας κατά την έξοδο από το πεδίο με την αρχική διεύθυνση της ταχύτητας).



Αν μας δίνεται η γωνία εκτροπής θ(rad) τότε:

- Μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα γεωμετρικά από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΓ ως εξής:

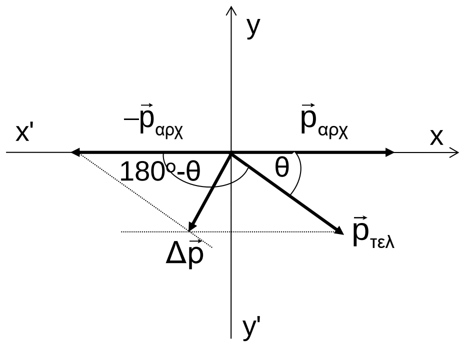
$$\eta\mu\theta=\frac{(\Delta\Gamma)}{(O\Gamma)} \Leftrightarrow \eta\mu\theta=\frac{d}{R} \Leftrightarrow R=\frac{d}{\eta\mu\theta}$$

  Η γωνία $\hat{O}=\hat{\theta}$ επειδή έχουν τις πλευρές τους κάθετες.

- Η απόσταση (ΓΕ) ονομάζεται κατακόρυφη εκτροπή και υπολογίζεται ως εξής:

$$(E\Gamma)=(A\Delta)=R-(O\Delta) \Leftrightarrow (E\Gamma)=R-R\sigma\upsilon\nu\theta$$

- Μεταβολή της ορμής του φορτίου:



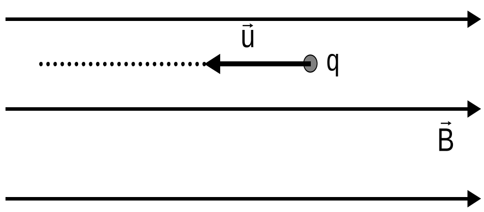
$$\Delta\vec{p}=\vec{p}_{\tau\epsilon\lambda}-\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\vec{p}_{\tau\epsilon\lambda}+\left(-\vec{p}_{\alpha\rho\chi}\right)\rightarrow$$

$$\Delta p=\sqrt{\left(p_{\alpha\rho\chi}\right)^2+\left(p_{\tau\epsilon\lambda}\right)^2+2p_{\alpha\rho\chi}p_{\tau\epsilon\lambda}\sigma\upsilon\nu(180^o-\theta)}\xrightarrow[\sigma\upsilon\nu(180^o-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta]{|p_{\tau\epsilon\lambda}|=|p_{\alpha\rho\chi}|}$$

$$\Delta p=\sqrt{2p^2-2p^2\sigma\upsilon\nu\theta}=p\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

Β. Κίνηση όπου το διάνυσμα της ταχύτητας είναι παράλληλο στις δυναμικές γραμμές (φ=0 ή 180°)

Όταν ένα φορτίο κινείται παράλληλα στις δυναμικές γραμμές τότε φ=0° ή φ=180°, συνεπώς από την σχέση (1) έχουμε ότι F_L=0. Δηλαδή το μαγνητικό πεδίο δεν ασκεί δύναμη πάνω στο φορτίο. Η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου, εντός του μαγνητικού πεδίου, θα είναι **ευθύγραμμη ομαλή**.



Οπότε για την κίνηση του φορτίου ισχύει:

$$\mathbf{x=ut}, \qquad \vec{u}\ \mathbf{=σταθερή}$$

Γ. Κίνηση όπου το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία 0<φ<90° με τις δυναμικές γραμμές

Στην περίπτωση που το φορτισμένο σωματίδιο κινείται με ταχύτητα, όπου σχηματίζει τυχαία γωνία φ ως προς τις δυναμικές γραμμές, αναλύουμε την ταχύτητα σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη προς την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου $\vec{u}_{//} = \vec{u}\sigma\upsilon\nu\varphi$ και μια κάθετη $\vec{u}_{\perp} = \vec{u}\eta\mu\varphi$.

Η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου είναι μια σύνθετη κίνηση η οποία, σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων (αρχή επαλληλίας), μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα δύο απλούστερων κινήσεων:

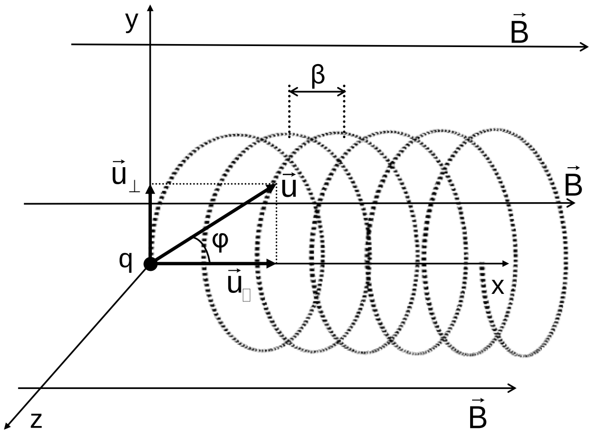
- **άξονας x'x - διεύθυνση $//\vec{B}$:** ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά την διεύθυνση της $\vec{u}_{//}$ (το φορτισμένο σωματίδιο δεν δέχεται μαγνητική δύναμη από το πεδίο F=0)

$$x = u_x t \Leftrightarrow x = \upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot t \qquad (1)$$

- **επίπεδο yz**: το φορτισμένο σωματίδιο δέχεται δύναμη Lorentz κάθετη στη συνιστώσα της ταχύτητας $\vec{u}_{\perp}$ με διεύθυνση αυτή του άξονα z'z και μέτρο $F = B|q|u_{\perp} = B|q|\upsilon\eta\mu\varphi$

  Θα εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση, με ακτίνα: $R = \frac{mu_{\perp}}{B|q|} = R = \frac{m\upsilon\eta\mu\varphi}{B|q|}$ και

  περίοδο $T = \frac{2\pi m}{B|q|}$.



Η συνολική κίνηση που θα εκτελέσει τελικά το φορτισμένο σωματίδιο θα είναι η υπέρθεση των δύο αυτών κινήσεων, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι **ελικοειδής**.
Η απόσταση **β** που θα διανύσει το σωματίδιο κατά την διεύθυνση της $\vec{u}_{//}$ σε χρόνο μιας περιόδου Τ, ονομάζεται **βήμα της έλικας** και είναι:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= u_{//}T = \upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot T \\ T &= \frac{2\pi m}{B|q|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\beta = \upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{2\pi m}{B|q|}}}$$

Όταν μας ζητούν τον αριθμό των περιστροφών Ν που έχει εκτελέσει το φορτίο όταν έχει διανύσει απόσταση s κατά τη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών, τότε εφόσον σε κάθε περιστροφή διανύσει απόσταση ίση με το βήμα της έλικας β, κατά μήκος τον δυναμικών γραμμών, ο αριθμός των περιστροφών Ν είναι:

$$N = \frac{s}{\beta} \Rightarrow N = \frac{s \cdot B \cdot |q|}{\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot 2\pi m}$$

Επίσης το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να βρούμε αν υπολογίσουμε το χρόνο για να καλύψει την απόσταση s από τη σχέση:

$$t = \frac{s}{u_{//}} = \frac{s}{\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

και στη συνέχεια: $N = \frac{t}{T}$

8. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΝΟΜΟΣ FARADAY

Οποτεδήποτε έχουμε μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από μια επιφάνεια, η οποία οριοθετείται από μια αγώγιμη διαδρομή, θα έχουμε εμφάνιση ΗΕΔ από επαγωγή.

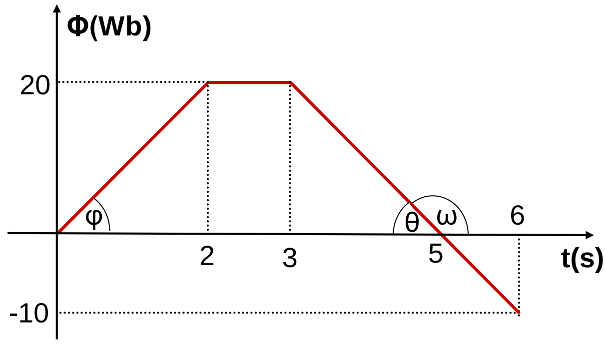
Νόμος Faraday: $E_{επ} = -N\dfrac{ΔΦ}{Δt}$

Η μαγνητική ροή η οποία διέρχεται μέσα από μια επίπεδη επιφάνεια που βρίσκεται μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο Φ=Β·Α·συνα μπορεί να μεταβληθεί αν:
α) μεταβληθεί το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου,
β) μεταβληθεί το της επιφάνειας Α,
γ) αλλάξει ο προσανατολισμός της επιφάνειας μέσα στο μαγνητικό πεδίο ή η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.
Για τον υπολογισμό της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε ένα κύκλωμα η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται ως εξής:

$$E_{επ} = N\left|\frac{ΔΦ}{Δt}\right|$$

αν γράψουμε: $\left|\dfrac{ΔΦ}{Δt}\right| = \left|\dfrac{Φ_{τελ} - Φ_{αρχ}}{Δt}\right| \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{ΔΦ}{Δt}\right| = \left|\frac{B_{τελ}A_{τελ}συνα_{τελ} - B_{αρχ}A_{αρχ}συνα_{αρχ}}{Δt}\right|$$



τότε υπολογίζουμε την **μέση τιμή** της ΗΕΔ από επαγωγή.
Στην περίπτωση όπου μας δίνεται κάποιο διάγραμμα μεταβολής της μαγνητικής ροής Φ, που διέρχεται από ένα συρμάτινο πλαίσιο έστω αντίστασης R=10Ω, σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως στο διπλανό σχήμα, και μας ζητούνται τα διαγράμματα της $E_{επ}$ και του επαγωγικού ρεύματος $I_{επ}$ σε συνάρτηση με το χρόνο τότε κάνουμε χρήση της σχέσης $E_{επ} = -N\dfrac{ΔΦ}{Δt}$ για κάθε χρονικό διάστημα.

0-2s: $E_{επ} = -N\dfrac{ΔΦ}{Δt} = -\dfrac{Φ_{τελ} - Φ_{αρχ}}{Δt} \Leftrightarrow E_{επ} = -\dfrac{20Wb - 0}{2s} = -10V$

Η $E_{επ}$ είναι σταθερή διότι ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι ίσος με την **κλίση εφφ** της γραφικής παράστασης που είναι σταθερή.

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R} \Leftrightarrow I_{επ} = \frac{-10V}{10Ω} = -1A$$

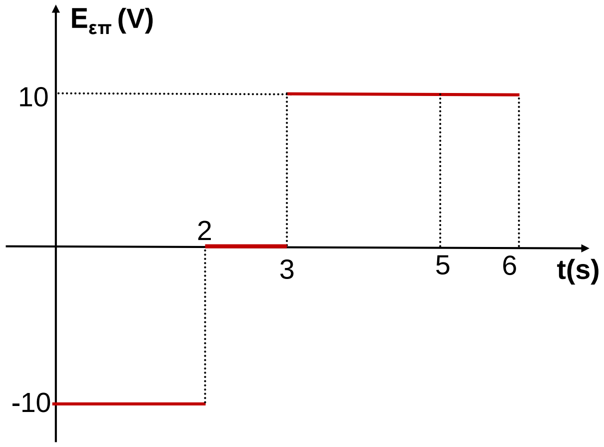
2-3s: Η μαγνητική ροή είναι σταθερή οπότε η $E_{επ}$=0 όπως και το $I_{επ}$=0.

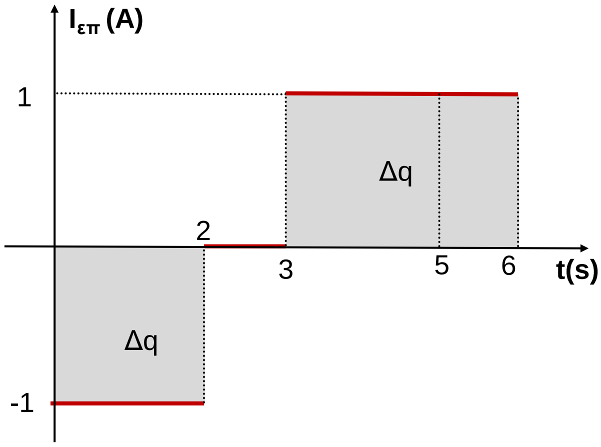
3-5s: $E_{επ} = -\dfrac{Φ_{τελ} - Φ_{αρχ}}{Δt} \Leftrightarrow E_{επ} = -\dfrac{0 - 20Wb}{2s} = 10V$

Η $E_{επ}$ είναι σταθερή διότι ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι ίσος με την κλίση εφω της γραφικής παράστασης που είναι σταθερή (εφω=-εφθ).

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R} \Leftrightarrow I_{επ} = \frac{10V}{10Ω} = 1A$$

5-6s: $E_{επ} = -\frac{Φ_{τελ} - Φ_{αρχ}}{Δt} \Leftrightarrow E_{επ} = -\frac{0-(-10Wb)}{1s} = 10V$





Η $E_{επ}$ είναι σταθερή διότι ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι ίσος με την κλίση εφω της γραφικής παράστασης που είναι σταθερή.

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R} \Leftrightarrow I_{επ} = \frac{10V}{10Ω} = 1A$$

Από το εμβαδόν του χώρου μεταξύ της γραφικής παράστασης $I_{επ}$=f(t) και του άξονα των χρόνων υπολογίζουμε το επαγωγικό φορτίο που μετακινήθηκε στο πλαίσιο κατά τη διάρκεια της μεταβολής της μαγνητικής ροής.

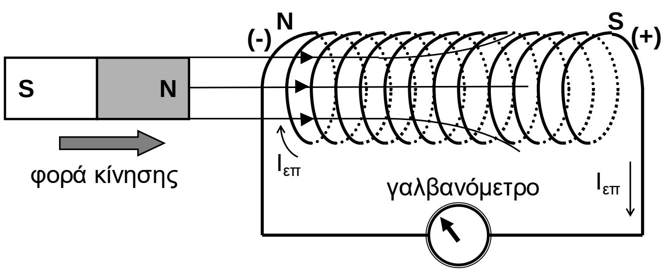
0-2s: $Δq_1$=2s·(-1A)=-2C 3-6s: $Δq_2$=3s·1A=3C

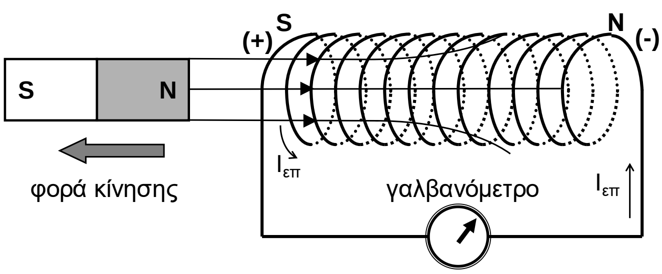
9. ΠΟΛΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΗΕΔ ΑΠΟ ΕΠΑΓΩΓΗ – ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ LENZ

Η πολικότητα της ΗΕΔ από επαγωγή προκύπτει από τον κανόνα του Lenz στην περίπτωση που το κύκλωμα είναι κλειστό και έχουμε εμφάνιση επαγωγικού ρεύματος. Στην περίπτωση που το κύκλωμα είναι ανοικτό ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία προσδιορίζοντας τη φορά του επαγωγικού ρεύματος που θα διέρρεε το κύκλωμα αν ήταν κλειστό.

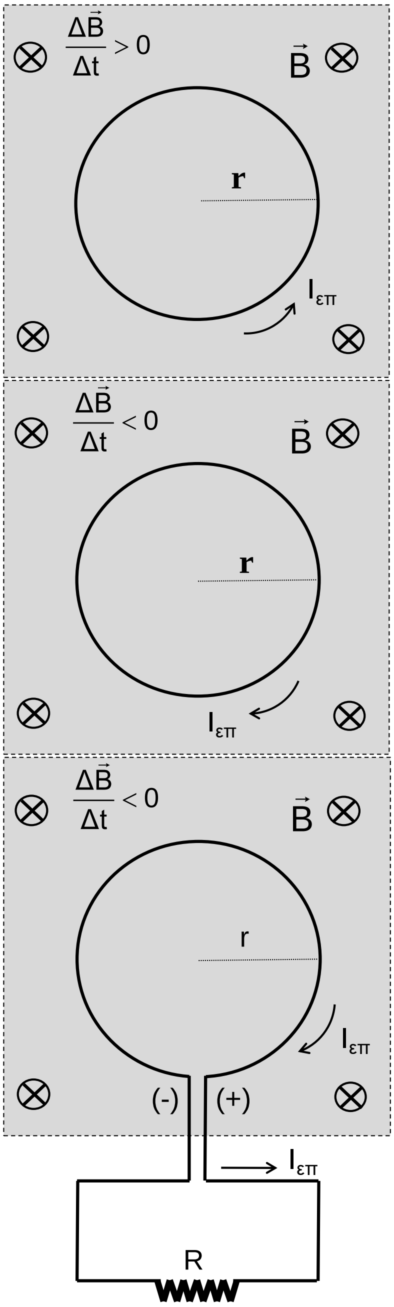
Α. Σωληνοειδές με μαγνήτη

Όταν ο μαγνήτης πλησιάζει το σωληνοειδές (ή το σωληνοειδές το μαγνήτη) έχουμε μεταβολή της μαγνητικής ροής στις σπείρες του σωληνοειδούς, επομένως και εμφάνιση ΗΕΔ από επαγωγή. Το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά ώστε απέναντι από τον βόρειο πόλο (N) του μαγνήτη θα εμφανιστεί βόρειος πόλος (N) στο σωληνοειδές για να υπάρχει αντίσταση στην κίνηση. Αυτό συμβαίνει διότι όταν ένα σωληνοειδές διαρρέεται από ρεύμα δημιουργείται μαγνητικό πεδίο παρόμοιο με αυτό ενός ραβδόμορφου μαγνήτη. Με τον κανόνα του δεξιού χεριού προσδιορίζουμε τη φορά του επαγωγικού ρεύματος (ο αντίχειρας δείχνει το βόρειο πόλο του σωληνοειδούς και τα δάκτυλα τη φορά του ρεύματος στις σπείρες του σωληνοειδούς. Επομένως η πολικότητα





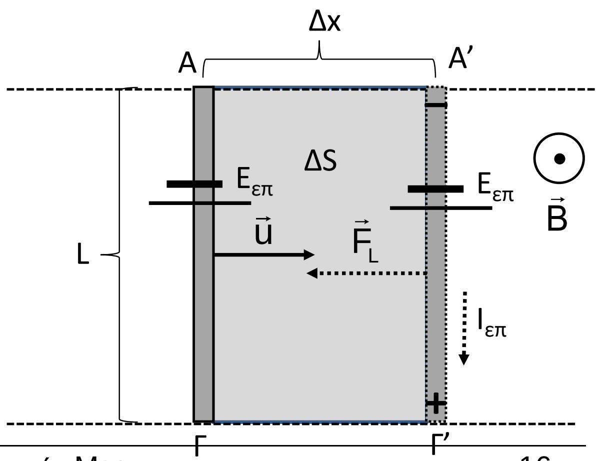
της ΗΕΔ είναι αυτή του σχήματος μιας και το ρεύμα στο εξωτερικό κύκλωμα έχει φορά από το (+) στο (-).
Όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται από το σωληνοειδές (ή το σωληνοειδές από το μαγνήτη) το επαγωγικό ρεύμα για να αντισταθεί στο αίτιο έχει τέτοια φορά ώστε απέναντι από τον βόρειο πόλο (N) του μαγνήτη θα εμφανιστεί νότιος πόλος (S) στο σωληνοειδές.



Β. Αγώγιμος δακτύλιος σε μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο
Θεωρούμε κυκλικό αγώγιμο δακτύλιο εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου κάθετο στο επίπεδό του όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα.
Στην περίπτωση που η ένταση του μαγνητικού πεδίου αυξάνεται με το χρόνο $\frac{\Delta B}{\Delta t}>0$ η μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα από την επιφάνεια του δακτυλίου θα δημιουργήσει ΗΕΔ από επαγωγή και στη συνέχεια επαγωγικό ρεύμα του οποίου η φορά αντιτίθεται στην αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου προς τα μέσα της σελίδας. Επομένως το επαγωγικό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο με φορά προς τα έξω. Με τον κανόνα του δεξιού χεριού προσδιορίζεται η φορά του επαγωγικού ρεύματος (δάκτυλα) όταν ο αντίχειρας δείχνει την ένταση του μαγνητικού πεδίου του δακτυλίου.
Στην περίπτωση που η ένταση του μαγνητικού πεδίου ελαττώνεται με το χρόνο $\frac{\Delta B}{\Delta t}<0$ η μεταβολή της μαγνητικής ροής μέσα από την επιφάνεια του δακτυλίου θα δημιουργήσει ΗΕΔ από επαγωγή και στη συνέχεια επαγωγικό ρεύμα του οποίου η φορά αντιτίθεται στην ελάττωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου προς τα μέσα της σελίδας. Επομένως το επαγωγικό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο με φορά προς τα μέσα.
Η πολικότητα της επαγωγικής τάσης στα άκρα ενός αγώγιμου δακτυλίου προϋποθέτει ο δακτύλιος να είναι συνδεδεμένος με κάποιο εξωτερικό κύκλωμα που περιέχει π.χ. έναν αντιστάτη όπως στο διπλανό σχήμα. Στην περίπτωση αυτή ο δακτύλιος αποτελεί την ΗΕΔ επομένως η πολικότητα θα είναι τέτοια ώστε **η φορά του επαγωγικού ρεύματος στο εξωτερικό κύκλωμα** να είναι από τον θετικό πόλο (+) στον αρνητικό (-).

10. ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΟΣ ΑΓΩΓΟΣ ΕΝΤΟΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Όταν ένας ευθύγραμμος μεταλλικός αγωγός ΑΓ, κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με τον αγωγό και την ταχύτητα κάθετα στην ένταση του πεδίου Β, τότε στα άκρα του αγωγού αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή η οποία μπορεί να υπολογιστεί με 2 τρόπους:



1ος τρόπος: Λόγω της μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από την επιφάνεια ΔS (ΑΓΓ'Α') που σαρώνει ο αγωγός κατά την κίνησή του και έχει μέτρο:

$$E_{επ}=N\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \qquad (1)$$

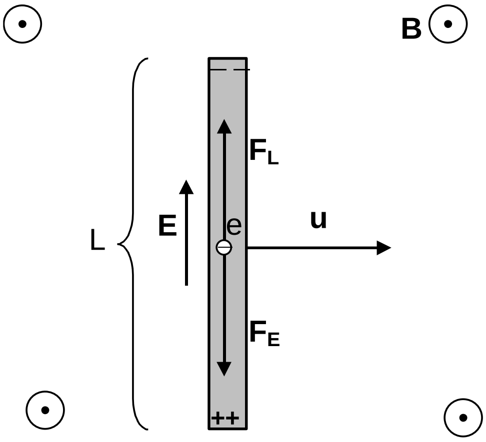
όπου N=1. Συνεπώς αν ο αγωγός ΑΓ βρεθεί στη θέση Α’Γ΄ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \xrightarrow{\Phi = B \times S} E_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta(B \times S)}{\Delta t} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{B \times \Delta S}{\Delta t}$$

Η επιφάνεια ΔS του πλαισίου που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι ΔS=L·Δx, συνεπώς:

$$E_{\varepsilon\pi} = B \times L \times \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{\Delta x}{\Delta t} = u} \boxed{E_{\varepsilon\pi} = B \times u \times L} \qquad (2)$$

Η πολικότητα της ΗΕΔ βρίσκεται από τον κανόνα του Lenz σύμφωνα με τον οποίο η φορά του επαγωγικού ρεύματος (αν υπάρχει κλειστό κύκλωμα) αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε δηλαδή στην κίνηση του αγωγού. Για να συμβεί αυτό στον αγωγό ΑΓ, λόγω του επαγωγικού ρεύματος, θα εμφανιστεί δύναμη Laplace αντίρροπη της ταχύτητας. Άρα με βάση τον κανόνα των 3 δακτύλων η φορά του ρεύματος θα είναι από το Α’ στο Γ’ άρα η πολικότητα θα είναι αυτή του σχήματος (εντός της πηγής η φορά του ρεύματος είναι από το - στο +).



2ος τρόπος: Ο αγωγός αποτελείται από άτομα και τα άτομα από θετικά φορτισμένους πυρήνες και αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια. Όμως όταν ένα ηλεκτρικό φορτίο q κινείται κάθετα μέσα σε μαγνητικό πεδίο ασκείται πάνω του δύναμη **F_L Lorentz** με μέτρο:

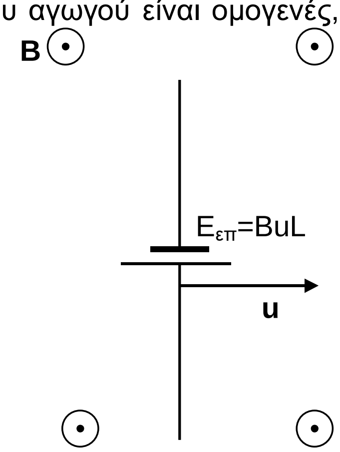
$$F_L = Bqu \qquad (3)$$

όπου:
B : το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής
u : η ταχύτητα του φορτίου
q : το φορτίο

Με τον κανόνα των τριών δακτύλων βρίσκουμε ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια e του αγωγού (που είναι και τα μόνα φορτία που μπορούν να μετακινηθούν) ωθούνται λόγω δύναμης Lorentz προς το πάνω μέρος του αγωγού, ενώ ταυτόχρονα στο κάτω μέρος του σχηματίζεται περίσσεια θετικού φορτίου.
Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία ηλεκτροστατικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού έντασης **E**. Το ηλεκτροστατικό πεδίο ασκεί σε κάθε ελεύθερο ηλεκτρόνιο ηλεκτροστατική δύναμη F_E με μέτρο:

$$F_E = \mathbf{E} \cdot e \qquad (4)$$

Όμως η δημιουργία ηλεκτροστατικού πεδίου συνεπάγεται και εμφάνιση διαφοράς δυναμικού (από επαγωγή) $V=E_{\varepsilon\pi}$ η οποία, επειδή το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι ομογενές, σχετίζεται με την ένταση του πεδίου με την σχέση:



$$\mathbf{E} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{L} \qquad (5)$$

Άρα η (4) λόγω (5) γίνεται:

$$F_E = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{L} e \qquad (6)$$

όπου
$E_{\varepsilon\pi}$: η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού
L : το μήκος του αγωγού.

Είναι προφανές ότι η δύναμη Lorentz, που ωθεί τα ηλεκτρόνια στο πάνω μέρος του αγωγού, αντιτίθεται στην ηλεκτρική δύναμη F_E η οποία εμποδίζει την κίνηση αυτή και η οποία μεγαλώνει όσο αυξάνονται τα ηλεκτρόνια στο πάνω άκρο του αγωγού. Σε σύντομο χρονικό διάστημα οι δύο δυνάμεις θα εξισωθούν και θα αποκατασταθεί η ισορροπία στο εσωτερικό του αγωγού. Συνεπώς από (3) και (6):

$$F_L = F_E \Rightarrow Beu = \frac{E_{επ}}{L} e \Rightarrow E_{επ} = BuL$$

Άρα ο αγωγός συμπεριφέρεται ως ΗΕΔ με $E = BuL$, και αρνητικό πόλο στο πάνω μέρος του. Γενικά η πολικότητα του αγωγού βρίσκεται εφαρμόζοντας τον κανόνα των τριών δακτύλων, όπου ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{u}$ του αγωγού, ο δείκτης την κατεύθυνση της έντασης $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου και ο μέσος την κατεύθυνση που θα "κινηθούν" τα θετικά φορτία του αγωγού, άρα και το θετικό πόλο της πηγής.

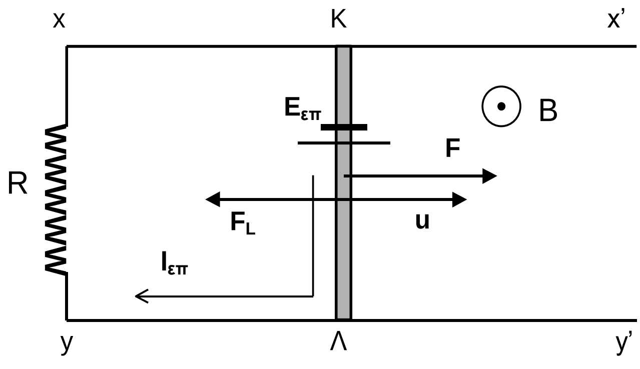
<u>Παρατήρηση:</u> i) Οι σχέσεις $E_{επ}$=BuL και $E_{επ} = \frac{ΔΦ}{Δt}$ είναι ταυτόσημες σχέσεις και η πρώτη αποτελεί ειδική περίπτωση του νόμου της επαγωγής που εκφράζεται με την δεύτερη σχέση.
ii) Αν η ταχύτητα του αγωγού σχηματίζει γωνία φ με τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές τότε η σχέση (2) γράφεται:

$$E_{επ} = BuLημφ$$

1^η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ – Η κίνηση πραγματοποιείται υπό την επίδραση δύναμης σταθερού μέτρου
Η μελέτη της κίνησης ενός ευθύγραμμου αγωγού ΚΛ μήκους L, ο οποίος ξεκινά να κινείται υπό την επίδραση σταθερής εξωτερικής δύναμης F, εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B, με τα άκρα του να είναι συνδεδεμένα με αγώγιμο κύκλωμα (διπλανό σχήμα), γίνεται ακολουθώντας τα εξής βήματα:

<u>1^ο βήμα:</u> Βρίσκουμε την κατεύθυνση της κίνησης του αγωγού (αν αυτή δεν καθορίζεται από την εκφώνηση της άσκησης). Για το λόγο αυτό βρίσκουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό (τριβή, βάρος, κάποια άλλη εξωτερική δύναμη) και υπολογίζοντας τη συνισταμένη των δυνάμεων αποφασίζουμε ποια θα είναι η κατεύθυνση (στη συγκεκριμένη περίπτωση προς τα δεξιά).
<u>2^ο βήμα:</u> Όταν ο ευθύγραμμος αγωγός ξεκινά την κίνησή του μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο, τότε στα άκρα του αγωγού αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή με μέτρο (χρειάζεται απόδειξη):

$$E_{επ} = BuL \qquad (1)$$



όπου $\vec{u}$ η στιγμιαία ταχύτητα του αγωγού η οποία είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Η κίνηση του αγωγού είναι **μεταβαλλόμενη όχι ομαλά**.
Στην πραγματικότητα ο αγωγός συμπεριφέρεται ως πηγή συνεχούς τάσης, με ΗΕΔ Ε=$E_{επ}$ και πολικότητα που καθορίζεται από τον κανόνα του Lenz ή και τον κανόνα των τριών δακτύλων (ο αντίχειρας μας δείχνει την ταχύτητα του αγωγού u, ο δείκτης την ένταση του μαγνητικού πεδίου B και ο μέσος μας δείχνει την κατεύθυνση των θετικών φορτίων στο ένα άκρο του αγωγού, άρα και τον θετικό του πόλο).

<u>3^ο βήμα:</u> Λόγω της ύπαρξης της ΗΕΔ από επαγωγή στο κύκλωμα, τότε ο αγώγιμος βρόγχος ΚΛyxK θα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα $I_{επ}$, το οποίο υπολογίζεται από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα:

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \xrightarrow{(2)} I_{επ} = \frac{BuL}{R_{ολ}} \qquad (2)$$

Η φορά του επαγωγικού ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Αν ο αγωγός ΚΛ έχει εσωτερική αντίσταση r, τότε αυτή θεωρείται ως εσωτερική αντίσταση της $E_{επ}$, και η σχέση (2) γίνεται:

$$I_{επ} = \frac{BuL}{R+r}$$

<u>4ο βήμα:</u> Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα, και βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου, θα ασκηθεί πάνω του δύναμη **Laplace F_L** με μέτρο:

$$F_L = BI_{επ}L \xrightarrow{(3)} F_L = B\frac{BuL}{R_{ολ}}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2uL^2}{R_{ολ}} \qquad (3)$$

Η κατεύθυνση της F_L καθορίζεται από τον κανόνα των τριών δακτύλων (ο αντίχειρας μας δείχνει την φορά του επαγωγικού ρεύματος στον αγωγό, ο δείκτης την φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου και ο μέσος την δύναμη Laplace) όπως φαίνεται στο σχήμα.
Όπως παρατηρούμε η δύναμη F_L αντιτίθεται στην κίνηση του αγωγού, πράγμα το οποίο οφείλεται στον κανόνα του Lenz. **Δηλαδή η φορά του επαγωγικού ρεύματος είναι τέτοια ώστε να αντιτίθεται, μέσω της δημιουργείας της δύναμης Laplace, στο αίτιο που το προκαλεί, δηλαδή στην εξωτερική δύναμη F**.

- **Πως υπολογίζουμε τη μέγιστη (οριακή) ταχύτητα που αποκτά ο αγωγός**

  Επειδή η κίνησή του αγωγού είναι επιταχυνόμενη (όχι ομαλά) το επαγωγικό ρεύμα $I_{επ} = \frac{BuL}{R_{ολ}}$ αυξάνεται συνεχώς. Όμως και το μέτρο της δύναμης Laplace $F_L = \frac{B^2uL^2}{R_{ol}}$ θα αυξάνεται συνεχώς, με αποτέλεσμα κάποια στιγμή να έχουμε:

$$F = F_L \Rightarrow F = BI_{επ}L \Rightarrow F = \frac{B^2uL^2}{R_{ολ}} \qquad (4)$$

  Όταν συμβεί αυτό, **επειδή ΣF=0, ο αγωγός, από εκείνη τη στιγμή και μετά, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα σταθερού μέτρου $u=u_{ορ}$ η οποία ονομάζεται οριακή ταχύτητα**. Άρα η (4) γίνεται:

$$F = \frac{B^2u_{ορ}L^2}{R_{ολ}} \Rightarrow u_{ορ} = \frac{F\cdot R_{ολ}}{B^2\cdot L^2} \qquad (5)$$

  Η οριακή ταχύτητα που αποκτά ο αγωγός είναι η μέγιστη όταν ο αγωγός επιταχύνεται μέχρι να την αποκτήσει (όπως στην περίπτωση αυτή) ή η ελάχιστη αν ο αγωγός επιβραδύνεται.

- **Πως υπολογίζεται η τάση V στα άκρα ΚΛ του κινούμενου αγωγού μια δεδομένη στιγμή**

  Η τάση $V_{ΚΛ}$ στα άκρα του αγωγού είναι ίση με την πολική τάση της ΗΕΔ από επαγωγή, συνεπώς ισχύει:

$$V_{ΚΛ} = V_{π} = E_{επ} - I_{επ}\cdot R_{ΚΛ} \xrightarrow{(1),(2)} V_{ΚΛ} = V_{π} = BuL - \frac{BuL}{R_{ολ}}\cdot R_{ΚΛ}$$

  Αν η μόνη αντίσταση στο εξωτερικό κύκλωμα είναι η R, τότε ισχύει επίσης:

$$V_{ΚΛ} = V_R = I_{επ}\cdot R \xrightarrow{(2)} V_{ΚΛ} = \frac{BuL}{R_{ολ}}R$$

όπου u η ταχύτητα του αγωγού τη δεδομένη στιγμή.

- **Πως υπολογίζεται η θερμότητα που απελευθερώνεται πάνω στις αντιστάσεις όλου του κυκλώματος όταν ο αγωγός κινείται με την οριακή του ταχύτητα**

Η εμφάνιση της ΗΕΔ από επαγωγή $E_{επ} = BuL$ στα άκρα του αγωγού ΚΛ συνεπάγεται και εμφάνιση επαγωγικού ρεύματος $I_{επ} = \frac{BuL}{R_{ολ}}$ στο κύκλωμα. Αυτό σημαίνει ότι στο κύκλωμα εμφανίζεται ηλεκτρική ενέργεια η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα (μέσω φαινομένου Joule) πάνω στις αντιστάσεις R του κυκλώματος. Όταν ο αγωγός αποκτήσει οριακή ταχύτητα (άρα και η ένταση του ρεύματος αποκτήσει σταθερή τιμή), σε κάθε χρονικό διάστημα Δt (από την στιγμή που την απέκτησε την οριακή ταχύτητα) η θερμότητα αυτή υπολογίζεται από το νόμο του Joule:

$$Q = I_{επ}^2 R_{ολ} t \Rightarrow Q = \frac{B^2 u_{ορ}^2 L^2}{R_{ολ}} \cdot \Delta t \qquad (6)$$

Προφανώς η θερμότητα που απελευθερώνεται στις αντιστάσεις του κυκλώματος, αν δεν έχουμε την εμφάνιση άλλων μορφών ενέργειας, είναι ίση με την ενέργεια που προσφέρεται μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης F. Συνεπώς ισχύει:

$$W_F = F \cdot \Delta x = Q \Rightarrow W_F = \frac{B^2 u_{ορ}^2 L^2}{R_{ολ}} \cdot \Delta t \qquad (7)$$

Άρα **το έργο της εξωτερικής δύναμης F, όταν ο αγωγός κινείται με σταθερή ταχύτητα, είναι ίσο με το έργο της δύναμης Laplace F_L, το οποίο σε κάθε περίπτωση είναι ίσο με την θερμότητα που αναπτύσσεται πάνω στις αντιστάσεις του κυκλώματος**.

προσφερόμενη ενέργεια W_F $\xrightarrow{\text{μέσω } W_{F(L)}}$ **ηλεκτρική ενέργεια** $\longrightarrow$ **θερμότητα**

Συνεπώς σχηματικά ισχύει:

- **Πως υπολογίζεται το έργο της δύναμης Laplace (ή η θερμότητα που απελευθερώνεται πάνω στις αντιστάσεις όλου του κυκλώματος) μέχρι ο αγωγός να αποκτήσει την οριακή του ταχύτητα**

Κατά την διάρκεια της κίνησης του αγωγού και πριν αυτός αποκτήσει οριακή (σταθερή) ταχύτητα, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

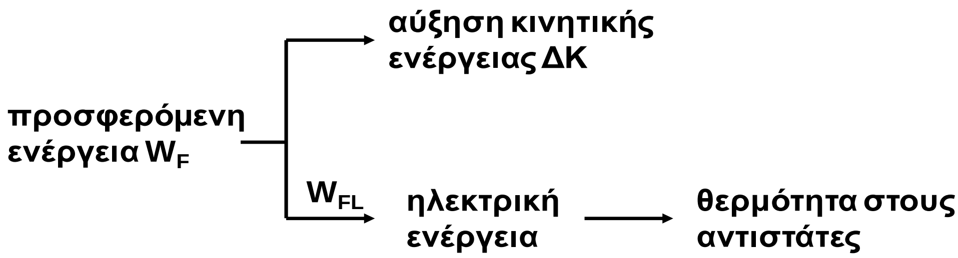
$$\Delta K = W_{\Sigma F} \Rightarrow \Delta K = W_{F_L} + W_F \Rightarrow W_{F_L} = K_{τελ} - K_{αρχ} - W_F \Rightarrow$$

$$W_{F_L} = \frac{1}{2} m u_{ορ}^2 - \frac{1}{2} m u_{αρχ}^2 - F \cdot \Delta x \qquad (8)$$

όπου W_{F_L} (το έργο της δύναμης Laplace) είναι αρνητικό διότι αντιτίθεται στην κίνηση και είναι ίσο με την θερμότητα που αναπτύσσεται πάνω στις αντιστάσεις του κυκλώματος, δηλαδή $|W_{F_L}| = Q$.

Άρα **όταν ο αγωγός είναι στη φάση της επιτάχυνσης, το έργο της εξωτερικής δύναμης εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται στο σύστημα η οποία με τη σειρά της, ένα μέρος της αυξάνει την κινητική ενέργεια ΔΚ του αγωγού, ενώ το υπόλοιπο εμφανίζεται ως θερμότητα Q, μέσω του έργου τις δύναμης Laplace, πάνω στις αντιστάσεις**.

Συνεπώς σχηματικά ισχύει:



- **Πως υπολογίζουμε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού**

Από Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$\Delta K = W_F + W_{F_L} \Rightarrow \Delta K = W_F - \left|W_{F_L}\right| \xrightarrow{\left|W_{F_L}\right| = Q} \Delta K = W_F - Q \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} - \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (9)$$

όπου:

$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \times u \times \text{συνφ}$: ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού (φ η γωνία μεταξύ ΣF και u,

$\frac{\Delta W_F}{\Delta t} = P_F = F \times u \times \text{συνφ}$: ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο κύκλωμα μέσω της εξωτερικής δύναμης F (η ισχύς της εξωτερικής δύναμης F),

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = P_{\text{θερμική}} = I_{\text{επ}}^2 R_{\text{ολ}}$: ο ρυθμός με τον οποίο απελευθερώνεται θερμική ενέργεια πάνω στις αντιστάσεις του κυκλώματος (θερμική ισχύς).

Παρατηρήσεις:

- Ο ρυθμός με τον οποίο απελευθερώνεται θερμότητα στις αντιστάσεις είναι πρακτικά ίσος με το απόλυτο του ρυθμού με τον οποίο η δύναμη Laplace αφαιρεί ενέργεια από το κύκλωμα οπότε μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \left|\frac{\Delta W_{F_L}}{\Delta t}\right| = \left|P_{F_L}\right| = F_L \cdot u \cdot \text{συνφ} \qquad (10)$$

- Όταν έχουμε καθ’ ύψος κίνηση του αγωγού ή δύναμη τριβής, τότε το Θ.Μ.Κ.Ε. γίνεται:

$$\Delta K = W_F + W_{F_L} + W_w + W_T \qquad (11)$$

όπου:

$W_w = mg \times \Delta x \times \text{συνφ}$: το έργο του βάρους (φ η γωνία μεταξύ w και Δx),

$W_T = -T \times \Delta x$: το έργο της δύναμης της τριβής για το οποίο ισχύει ότι είναι ίσο κατ’ απόλυτη τιμή με τη θερμότητα λόγω τριβής $\left|W_T\right| = Q_T$

- Από τη σχέση (10), έχουμε: $$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} + \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{\Delta W_w}{\Delta t} + \frac{\Delta W_T}{\Delta t} \qquad (12)$$

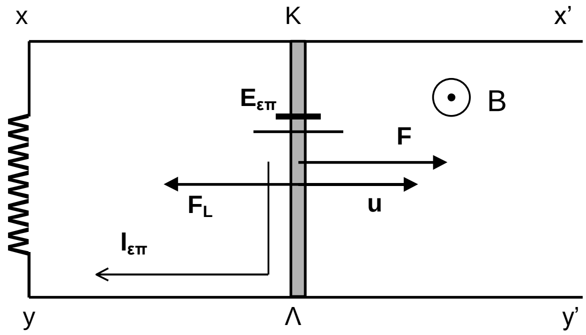
όπου:

$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta W_w}{\Delta t} = -mg \times u \times \text{συνφ}$: ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας (ισχύς βάρους),

$\left|\frac{\Delta W_T}{\Delta t}\right| = \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = T \cdot u$: ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το κύκλωμα λόγω της τριβής (ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω τριβής).

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ – Η κίνηση πραγματοποιείται υπό την επίδραση δύναμης μεταβλητού μέτρου με σταθερή επιτάχυνση

Όταν ο αγωγός κινείται υπό την επίδραση δύναμης F μεταβλητού μέτρου με σταθερή επιτάχυνση a, τότε η εξέλιξη της κίνησης είναι παρόμοια με αυτή που μελετήσαμε στην 1η περίπτωση, δηλαδή:



<u>1ο βήμα:</u> Έχουμε εμφάνιση ΗΕΔ από επαγωγή:

$$E_{\varepsilon\pi} = BuL \qquad (1)$$

<u>2ο βήμα:</u> Έχουμε εμφάνιση επαγωγικού ρεύματος $I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} \xrightarrow{(1)} I_{\varepsilon\pi} = \frac{BuL}{R_{o\lambda}}$ (2)

<u>3ο βήμα:</u> Έχουμε εμφάνιση δύναμης Laplace με μέτρο: $F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \xrightarrow{(2)} F_L = \frac{B^2uL^2}{R_{o\lambda}}$ (3)

Επειδή ο αγωγός κινείται με σταθερή επιτάχυνση **δεν πρόκειται να αποκτήσει ποτέ μέγιστη (οριακή) ταχύτητα**. Η κίνηση του αγωγού είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη-επιταχυνόμενη με αποτέλεσμα η ταχύτητά του u και η μετατόπισή του x να δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$u = u_o \pm |a|t \quad (4) \qquad \text{και} \qquad \Delta x = u_o t \pm \frac{1}{2}|a|t^2 \quad (5)$$

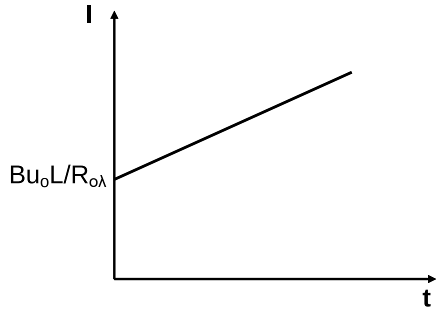
Αν ο αγωγός ξεκινά από την ηρεμία τότε $u_o=0$, ενώ αν η κίνησή του είναι επιβραδυνόμενη τότε στις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιούμε το πρόσημο -.

- **Πως κάνουμε τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος I σε συνάρτηση με το χρόνο t, I = f(t)**

  Θέτουμε στην σχέση (2) τη σχέση (4) και έχουμε:

$$(2) \xrightarrow{(4)} I = \frac{B\cdot(u_o + at)\cdot L}{R_{o\lambda}} \Rightarrow I = \frac{B\cdot u_o \cdot L}{R_{o\lambda}} + \frac{B\cdot a\cdot L}{R_{o\lambda}}t$$

  Η παραπάνω σχέση είναι της ευθεία της μορφής y=β+αx, με $\beta = \frac{B\cdot u_o \cdot L}{R_{o\lambda}}$ και $\alpha = \frac{B\cdot a\cdot L}{R_{o\lambda}}$.

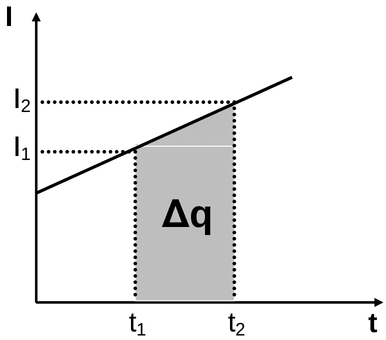


- **Πως υπολογίζουμε το φορτίο Δq που διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο του κυκλώματος μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1, t_2**

  Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = I\cdot \Delta t$$

  Επειδή όμως η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε ο υπολογισμός του φορτίου Δq γίνεται από τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Συγκεκριμένα το φορτίο Δq, που διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο του κυκλώματος μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1, t_2, είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του χώρου (τραπέζιο) που ορίζεται από τη γραφική παράσταση, τον άξονα των t και τις κάθετες στις χρονικές στιγμές t_1, t_2, όπως φαίνεται στο σχήμα.

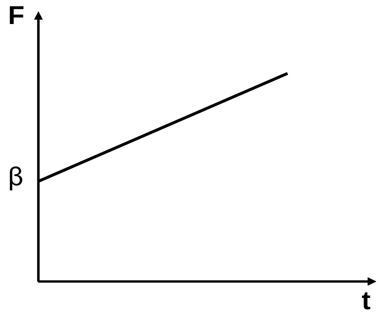


$$\Delta q = E_{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\iota o\upsilon} = \frac{B+\beta}{2}\upsilon \Rightarrow \Delta q = \frac{I_2 + I_1}{2}\cdot(t_2 - t_1)$$

όπου I_1 και I_2 οι εντάσεις των ρευμάτων στο κύκλωμα τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα.

- **Πως κάνουμε τη γραφική παράσταση της εξωτερικής δύναμης F σε συνάρτηση με το χρόνο t, F = f(t)**

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής του Νεύτωνα έχουμε:



$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L = ma \Rightarrow F = F_L + ma \xrightarrow{(3)}$$

$$F = \frac{B^2 u L^2}{R_{o\lambda}} + ma \xrightarrow{(4)} F = \frac{B^2\cdot(u_o + at)\cdot L^2}{R_{o\lambda}} + ma \Rightarrow$$

$$F = \left(\frac{B^2\cdot u_o \cdot L^2}{R_{o\lambda}} + ma\right) + \frac{B^2\cdot a\cdot L^2}{R_{o\lambda}}t$$

Η παραπάνω σχέση είναι της ευθεία της μορφής y=β+αx, με $\beta = \frac{B^2\cdot u_o\cdot L^2}{R_{o\lambda}} + ma$ και $\alpha = \frac{B^2\cdot a\cdot L^2}{R_{o\lambda}}$.

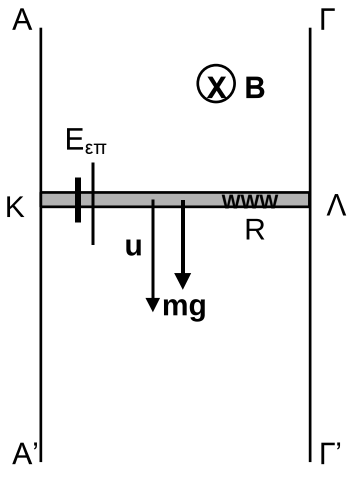
ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Αν ένας ευθύγραμμος αγωγός αφεθεί να κινηθεί σε κατακόρυφα μεταλλικά σύρματα, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της διάταξης, τότε, εκτός των άλλων δυνάμεων που ενδέχεται να ασκούνται πάνω του, ασκείται και το βάρος του mg. Στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

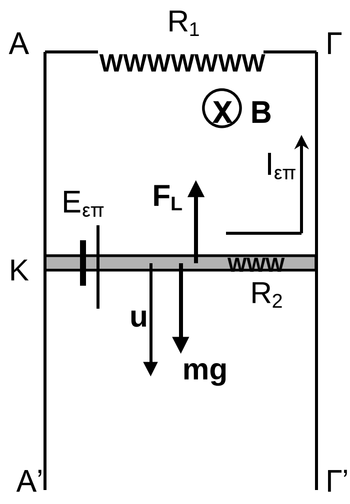
I. Αν δεν υπάρχει κλειστό κύκλωμα τότε η κίνηση του αγωγού γίνεται μόνο υπό την επίδραση του βάρους του, δηλαδή η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση με σταθερή επιτάχυνση a=g=10m/s^2 (σχήμα I). Συνεπώς:

Ταχύτητα αγωγού: $u = g\cdot t$ **Μετατόπιση αγωγού:** $x = \frac{1}{2}g\cdot t^2$

II. Αν υπάρχει κλειστό κύκλωμα τότε η κίνηση του αγωγού δεν είναι ελεύθερη πτώση διότι εκτός του βάρους του mg αναπτύσσεται, λόγω επαγωγικού ρεύματος, και η δύναμη Laplace, η οποία αντιτίθεται στην κίνηση. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη, όχι ομαλά, και η μελέτη γίνεται σύμφωνα με την 1^η περίπτωση. (σχήμα II).



σχήμα I

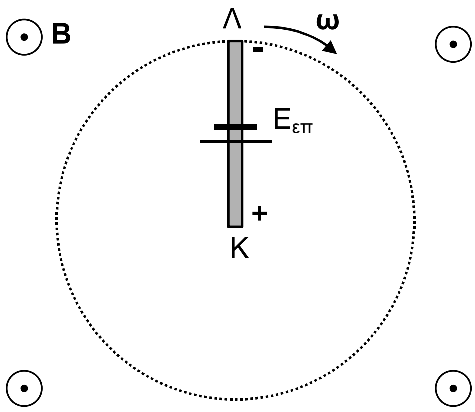


σχήμα II

- Αν ο αγωγός εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση τότε κάποια στιγμή θα σταματήσει, συνεπώς u=0. Αυτό σημαίνει ότι εκείνη τη στιγμή η ΗΕΔ από επαγωγή στα άκρα του θα γίνει $E_{επ}=BuL=0$. Αν μετά το μηδενισμό της ταχύτητας ο αγωγός αλλάξει φορά κίνησης τότε πρέπει να ξανακάνουμε το σχήμα και να εφαρμόσουμε τα βήματα από την αρχή (ανάλογα με την περίπτωση που έχουμε).

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΑΓΩΓΟΥ

Οι περιπτώσεις που συνήθως μελετάμε αναφέρονται σε αγωγό, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής του αγωγού και παράλληλο προς τις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Σε όλες τις περιπτώσεις η μεταβολή της μαγνητικής ροής (ΔΦ) σε χρόνο Δt είναι ίση με τη ροή που περνάει από την επίπεδη επιφάνεια ΔΑ που διαγράφει σε χρόνο Δt ο αγωγός. Η πολικότητα της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται μεταξύ του άξονα περιστροφής και ενός άκρου του αγωγού, προσδιορίζεται όπως και στη μεταφορική κίνηση. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις



1. **Ευθύγραμμος αγωγός που ο άξονας περνάει από το ένα άκρο του**

   Θεωρούμε ευθύγραμμο αγωγό μήκους L, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο του K, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, έτσι ώστε το επίπεδο περιστροφής του να είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

   Τότε η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού θα είναι: $E_{επ} = \dfrac{B \cdot ω \cdot L^2}{2}$

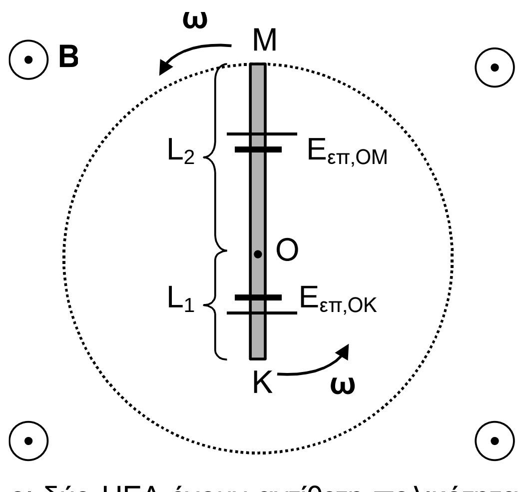
   Αν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας μεταβάλλεται, τότε η σχέση $E_{επ} = \dfrac{B \cdot ω \cdot L^2}{2}$ μας δίνει τη στιγμιαία ΗΕΔ από επαγωγή.

2. **Ευθύγραμμος αγωγός που ο άξονας περνάει από τυχαίο σημείο του.**

   Σε αυτή τη περίπτωση ο αγωγός χωρίζεται σε δύο τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα, σε καθένα από τα οποία αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή, δηλαδή:

   Στο τμήμα ΟΚ αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή της οποίας το μέτρο είναι:

$$E_{επ,OK} = \frac{B \cdot ω \cdot L_1^2}{2}$$



   και πολικότητας αυτής που φαίνεται στο σχήμα (υπενθυμίζουμε ότι η πολικότητα της ΗΕΔ βρίσκεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στη μεταφορική κίνηση).

   Ομοίως στο τμήμα ΟΜ αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή της οποίας το μέτρο είναι:

$$E_{επ,OM} = \frac{B \cdot ω \cdot L_2^2}{2}$$

   και πολικότητας αυτής που φαίνεται στο σχήμα.

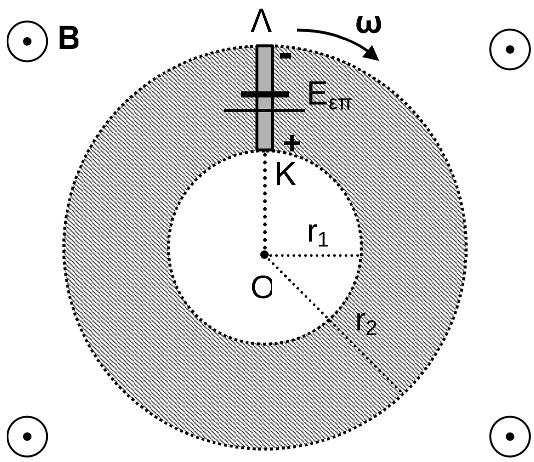
   Η ΗΕΔ Ε που εμφανίζεται στα άκρα Κ και Μ, επειδή οι δύο ΗΕΔ έχουν αντίθετη πολικότητα (και $E_{επ,OM}>E_{επ,OK}$) είναι:

$$V_{KM} = E_{\varepsilon\pi,OM} - E_{\varepsilon\pi,OK} = \frac{B\cdot\omega\cdot L_2^2}{2} - \frac{B\cdot\omega\cdot L_2^2}{2} \Rightarrow V_{KM} = \frac{B\cdot\omega\cdot\left(L_2^2 - L_1^2\right)}{2}$$

Παρατηρούμε ότι αν ο άξονας περνάει από το μέσο του αγωγού, δηλαδή $E_{\varepsilon\pi,OK}$=$E_{\varepsilon\pi,OM}$, τότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει V_{KM}=0.

3. Ευθύγραμμος αγωγός που ο άξονας βρίσκεται στη προέκταση του.

Όταν ένας ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ περιστρέφεται με σταθερού μέτρου γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από άξονα Ο που βρίσκεται στην προέκταση του αγωγού, μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης Β, η οποία είναι κάθετη στον αγωγό και παράλληλη στον άξονα περιστροφής, στα άκρα του αγωγού επάγεται ΗΕΔ σύμφωνα με την σχέση:



$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\Phi=B\cdot A} E_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta(B\cdot A)}{\Delta t} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{B\cdot\Delta A}{\Delta t}$$

Ο αγωγός σε χρόνο Δt=T θα έχει διαγράψει την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια με εμβαδόν $\Delta A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$. Συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{B\cdot\Delta A}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=T,\ \Delta A=\pi(r_2^2-r_1^2)} E_{\varepsilon\pi} = \frac{B\cdot\pi(r_2^2 - r_1^2)}{T} \quad (1)$$

Επιπλέον από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας έχουμε: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

άρα η σχέση (1) παίρνει την μορφή: $E_{\varepsilon\pi} = \dfrac{B\cdot\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \dfrac{B\cdot\omega\cdot(r_2^2 - r_1^2)}{2}$

Περιστροφική κίνηση αγωγού ο οποίος είναι τμήμα κλειστού κυκλώματος

Στις ασκήσεις που ο περιστρεφόμενος αγωγός αποτελεί τμήμα κλειστού κυκλώματος το οποίο είτε περιέχει εξωτερική ηλεκτρική πηγή είτε όχι, τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση της άσκησης είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά που ακολουθούμε και στην ευθύγραμμη κίνηση. Δηλαδή:

1ο βήμα: Προσδιορίζουμε τη φορά της κίνησης του αγωγού, αν δεν δηλώνεται από την εκφώνηση.

2ο βήμα: Αφού έχουμε προσδιορίσει τη φορά της κίνησης βρίσκουμε την πολικότητα και το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται λόγω περιστροφής όπως προαναφέραμε στις προηγούμενες περιπτώσεις (ανάλογα με το σημείο πάνω στον αγωγό που βρίσκεται ο άξονας περιστροφής).

3ο βήμα: Υπολογίζουμε την ένταση Ι του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα από το νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα.

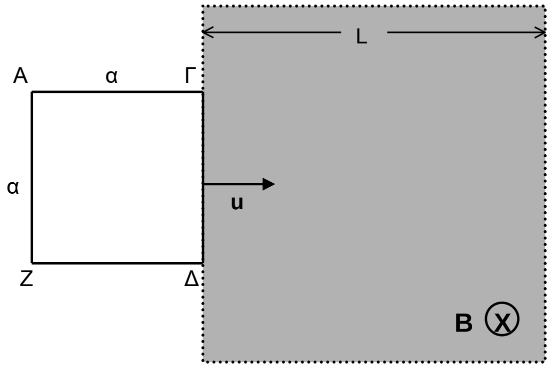
4ο βήμα: Αφού προσδιορίσουμε τη φορά του ρεύματος, με τον κανόνα των τριών δακτύλων προσδιορίζουμε την κατεύθυνση της δύναμης Laplace και υπολογίζουμε το μέτρο της από τη σχέση $F_L = B\cdot I\cdot L$.

5ο βήμα: Ανάλογα το είδος της κίνησης του αγωγού κάνουμε τα εξής:

- Αν ο αγωγός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα τότε όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη ($E_{επ}$, $I_{επ}$, F_L) είναι σταθερά.
- Αν ο αγωγός περιστρέφεται ελεύθερα υπό την επίδραση κάποιας σταθερής δύναμης τότε όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη ($E_{επ}$, $I_{επ}$, F_L) είναι συναρτήσεις της γωνιακής ταχύτητας ω. Το πιο χαρακτηριστικό ερώτημα στην περίπτωση αυτή είναι ο υπολογισμός της **οριακής γωνιακής ταχύτητας**, η οποία προσδιορίζεται από τη συνθήκη $\Sigma\vec{\tau}=0$ (ή ΣF=0 όταν οι δυνάμεις έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής), δηλαδή η συνισταμένη ροπή που δέχεται ο αγωγός είναι μηδέν.

4η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΚΙΝΗΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Συρμάτινο τετράγωνο πλαίσιο έχει πλευρά α και διέρχεται με σταθερή ταχύτητα u από περιοχή που υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο B κάθετο στο επίπεδο και την ταχύτητα του πλαισίου. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο B το πλάτος της περιοχής από την οποία διέρχεται το πλαίσιο είναι L και η ωμική αντίσταση του πλαισίου είναι R. Θεωρούμε αρχή του χρόνου t=0 τη στιγμή κατά την οποία η δεξιά πλευρά του πλαισίου βρίσκεται ακριβώς στην αριστερά πλευρά του πεδίου.



Α. Για το χρονικό διάστημα που διαρκεί η διέλευση του πλαισίου από το πεδίο, να βρείτε τις εξισώσεις που περιγράφουν σε συνάρτηση με το χρόνο:
α) τη μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο.
β) την ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.
γ) την ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο.
δ) το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στο πλαίσιο.
ε) το ρυθμό μετατροπής ενέργειας σε θερμική λόγω φαινομένου Joule.

Β. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις Φ=f(t), $I_{επ}$=f(t), F_L=f(t), $P_θ$=f(t) σε βαθμολογημένους άξονες.

Για τη μελέτη εισόδου-εξόδου ενός πλαισίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο ακολουθούμε τα εξής βήματα:

<u>1ο βήμα:</u> Χωρίζουμε την κίνηση του πλαισίου σε τρία χρονικά διαστήματα-φάσεις:

Φάση 1η: Όταν το πλαίσιο βρίσκεται στη φάση εισόδου του, δηλαδή όταν το πλαίσιο εισέρχεται μερικώς στο χώρο του μαγνητικού πεδίου

Φάση 2η: Το πλαίσιο κινείται ολόκληρο μέσα στο μαγνητικό πεδίο,

Φάση 3η: Το πλαίσιο βρίσκεται στη φάση εξόδου του από το μαγνητικό πεδίο, δηλαδή το πλαίσιο εξέρχεται μερικώς από το πεδίο.

<u>2ο βήμα:</u> Για κάθε τμήμα της κίνησης καθορίζουμε τη πολικότητα της επαγωγικής τάσης σε κάθε πλευρά ξεχωριστά σύμφωνα με το κανόνα του δεξιού χεριού που έχει αναφερθεί προηγούμενα. Η ολική επαγωγική τάση υπολογίζεται από το αλγεβρικό άθροισμα των επαγωγικών τάσεων που αναπτύσσεται σε κάθε πλευρά του πλαισίου, αν χρησιμοποιήσουμε για κάθε μία απ' αυτές τον τύπο **E=BuL**. Το πρόσημο της επαγωγικής τάσης καθορίζεται από ένα συμβατικό κανόνα, σύμφωνα με τον οποίο αν η πολικότητα της επαγωγικής τάσης είναι τέτοια που να δίνει ρεύμα (συμβατική φορά) όπως οι δείκτες του ρολογιού, τότε το πρόσημο της επαγωγικής τάσης είναι (+), ενώ είναι (-) στην αντίθετη περίπτωση.

Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού είναι από τον τύπο $E_{επ}=-\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, αν μελετήσουμε τη μεταβολή της μαγνητικής ροής για μετακίνηση του πλαισίου κατά dx μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

3ο βήμα: Υπολογίζουμε τη φορά και την τιμή της έντασης του επαγωγικού ρεύματος και στη συνέχεια την τιμή και τη φορά της δύναμης Laplace που ασκείται στο πλαίσιο. Η δύναμη Laplace που ασκείται σ' όλο το πλαίσιο θα είναι το αποτέλεσμα της διανυσματικής πρόσθεσης των επιμέρους δυνάμεων Laplace που ασκούνται σε κάθε πλευρά του πλαισίου. Σύμφωνα με το κανόνα του Lenz η φορά της δύναμης είναι αντίθετη της κίνησης (ταχύτητας) του πλαισίου εφόσον δεν υπάρχει εξωτερική πηγή. Αν η κίνηση του πλαισίου είναι ευθύγραμμη ομαλή τότε πρέπει να ασκείται στο πλαίσιο εξωτερική δύναμη της οποίας το μέτρο θα πρέπει να είναι $\mathbf{F_{εξ}=F_L}$.

Παρατηρήσεις:

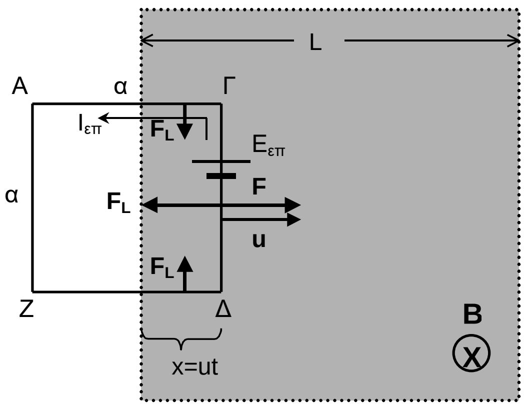
- Στα διαγράμματα της τάσης από επαγωγή στο πλαίσιο ($E_{επ}$) και του ρεύματος που το διαρρέει (I) πρέπει να βάζουμε τα πρόσημα, τα οποία είναι ενδεικτικά της πολικότητας και της φορά αντίστοιχα των παραπάνω μεγεθών. Για το πρόσημο της δύναμης Laplace που ασκείται στο πλαίσιο αν αυτή αντιστέκεται στη κίνηση η αλγεβρική τιμή της είναι αρνητική.
- Αν υπολογίσουμε την επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, τότε εννοούμε την στιγμιαία επαγωγική τάση. Αν όμως υπολογίσουμε την επαγωγική τάση που αναπτύσσεται σε κάποιο χρονικό διάστημα Δt, τότε εννοούμε τη μέση επαγωγική τάση. Οι δύο αυτές τάσεις ταυτίζονται όταν ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής ή ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής επαγωγής είναι σταθερός. Αυτό σημαίνει ότι το πλαίσιο είναι **τετράγωνο ή ορθογώνιο** και κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αντίθετα όταν το πλαίσιο είναι τρίγωνο ή ρόμβος η μέση και η στιγμιαία επαγωγική τάση δεν ταυτίζονται.

Αν x η απόσταση της πλευράς ΓΔ από το αριστερό άκρο εισόδου στο πεδίο, έχουμε:

Φάση 1η: Είσοδος στο πεδίο $0 \le x \le α \Rightarrow 0 \le ut \le α \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{α}{u}$

α) Μαγνητική ροή $Φ = B \cdot A \xrightarrow{A=αx}$

$$Φ = B \cdot αx \xrightarrow{x=ut} Φ = Buα \cdot t \qquad (1)$$



Είναι της μορφής y=αx, γραμμική συνάρτηση του χρόνου και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) ΗΕΔ από επαγωγή
Από τον νόμο της επαγωγής του Faraday έχουμε:

$$E_{επ} = -\frac{ΔΦ}{Δt} \xrightarrow{(1)} E_{επ} = -\frac{Δ(Buαt)}{Δt} \Leftrightarrow$$

$$E_{επ} = -Buα = \text{σταθερή} \qquad (2)$$

Η πολικότητα της ΗΕΔ είναι: (+) στο Γ και (-) στο Δ.

γ) Ένταση επαγωγικού ρεύματος
Από το νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε: $I_{επ} = \dfrac{E_{επ}}{R} \xrightarrow{(2)} I_{επ} = -\dfrac{Buα}{R} = \text{σταθερή} \qquad (3)$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η φορά του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού και έχει μέτρο 1 A.

δ) Δύναμη Laplace
Η δύναμη Laplace που ασκείται στο πλαίσιο είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων Laplace που ασκούνται στις πλευρές του. Όμως $F_{L(AZ)}=0$ γιατί βρίσκεται σ' αυτή τη φάση εκτός πεδίου και επομένως B=0.
Ακόμα $F_{L(AΓ)} = F_{L(ZΔ)}$ αλλά είναι αντίθετες, άρα αλληλοαναιρούνται.

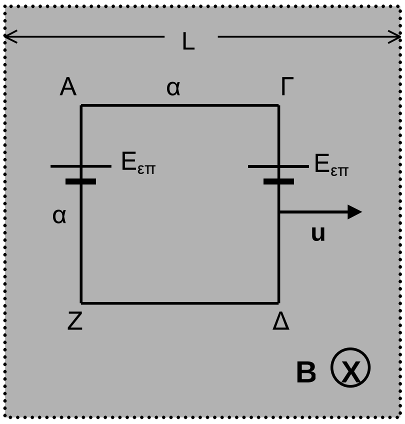
Επομένως: $F_{L,ολ} = F_{L(ΓΔ)} = B \cdot I_{επ} \cdot α \xrightarrow{(3)} F_L = \dfrac{B^2 \cdot u \cdot α^2}{R}$ =σταθερή (4)

και αντίθετη στη κίνηση (Lenz)

ε) Ρυθμός μετατροπής ενέργειας σε θερμική λόγω φαινομένου Joule.

$$\frac{ΔQ}{Δt} = P_θ = I_{επ}^2 \cdot R \xrightarrow{(3)} P_θ = \frac{B^2 \cdot u^2 \cdot α^2}{R} \text{ =σταθερός} \quad (5)$$

Φάση 2η: Παραμονή στο πεδίο $α \le x \le L \Rightarrow α \le ut \le L \Rightarrow \dfrac{α}{u} \le t \le \dfrac{L}{u}$



α) Μαγνητική ροή

$$Φ = B \cdot A \xrightarrow{A=α \cdot α} Φ = B \cdot α^2 \text{ =σταθερή} \quad (6)$$

β) ΗΕΔ από επαγωγή $E_{επ} = -\dfrac{ΔΦ}{Δt} = 0$ (7)

γ) Ένταση επαγωγικού ρεύματος

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R} \xrightarrow{E_{επ}=0} I_{επ} = 0 \quad (8)$$

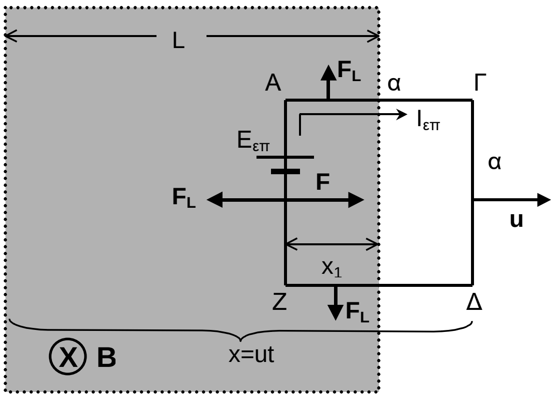
δ) Δύναμη Laplace: $F_L = BI_{επ}L \xrightarrow{I_{επ}=0} F_L = 0$ (9)

ε) Ρυθμός μετατροπής ενέργειας σε θερμική λόγω φαινομένου Joule.

$$\frac{ΔQ}{Δt} = P_θ = I_{επ}^2 R \xrightarrow{I_{επ}=0} \frac{ΔQ}{Δt} = 0 \quad (10)$$

Αν x η απόσταση της πλευράς ΓΔ από το αριστερό άκρο εισόδου στο πεδίο, έχουμε:

Φάση 3η: Έξοδος από το πεδίο $L \le x \le L+α \Rightarrow L \le ut \le L+α \Rightarrow \dfrac{L}{u} \le t \le \dfrac{L+α}{u}$



α) Μαγνητική ροή

$$Φ = B \cdot A \xrightarrow{A=αx_1} Φ = B \cdot αx_1 \xrightarrow{x_1=α-(x-L)}$$

$$Φ = Bα \cdot [α - (x - L)] \Rightarrow Φ = Bα \cdot (L + α - x) \Rightarrow$$

$$Φ = BαL + Bα^2 - Bαx \xrightarrow{x=ut}$$

$$Φ = (BαL + Bα^2) - Bαu \cdot t \quad (11)$$

Είναι της μορφής y=β+αx, γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

β) ΗΕΔ από επαγωγή: $E_{επ} = -\dfrac{ΔΦ}{Δt} \xrightarrow{(11)} E_{επ} = Buα$ =σταθερή (12)

γ) Ένταση επαγωγικού ρεύματος $I_{επ} = \dfrac{E_{επ}}{R} \xrightarrow{(12)} I_{επ} = \dfrac{Buα}{R}$ (13)

Το θετικό πρόσημο σημαίνει ότι η φορά του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο σ' αυτή τη φάση είναι ίδια με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού και έχει μέτρο 1 A.

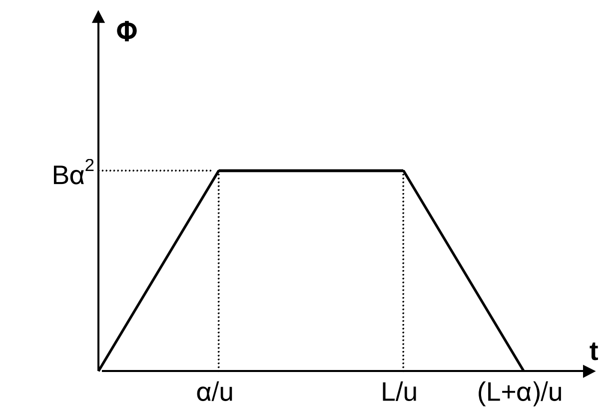
δ) Δύναμη Laplace
Η δύναμη Laplace που ασκείται στο πλαίσιο είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων Laplace που ασκούνται στις πλευρές του. Όμως $F_{L(ΓΔ)}=0$ γιατί βρίσκεται σ' αυτή τη φάση εκτός πεδίου και επομένως B=0.
Ακόμα $F_{L(AΓ)} = F_L(ZΔ)$ αλλά είναι αντίθετες, άρα αλληλοαναιρούνται.

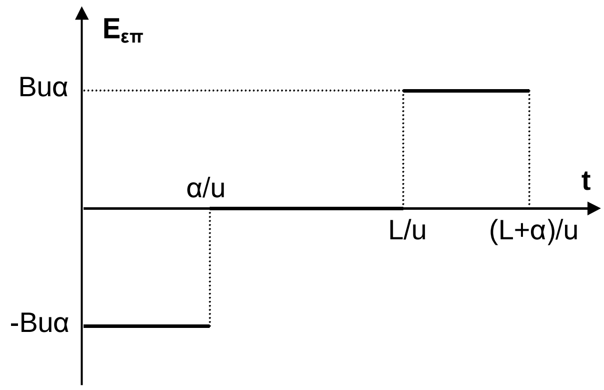
Επομένως: $$F_{L,ολ} = F_{L(AZ)} = B\cdot I_{επ}\cdot α \xrightarrow{(13)} F_L = \frac{B^2\cdot u\cdot α^2}{R} \text{ =σταθερή} \qquad (14)$$
και αντίθετη στη κίνηση (Lenz)

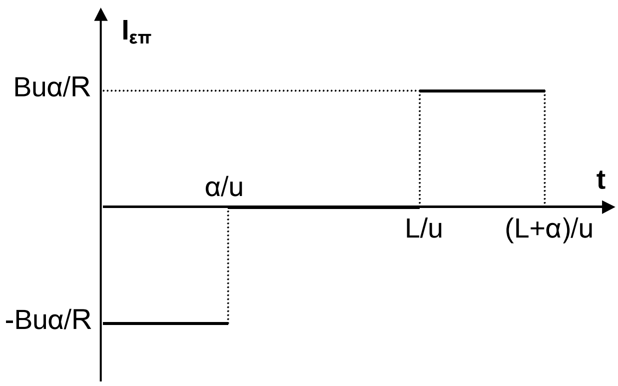
ε) Ρυθμός μετατροπής ενέργειας σε θερμική λόγω φαινομένου Joule.

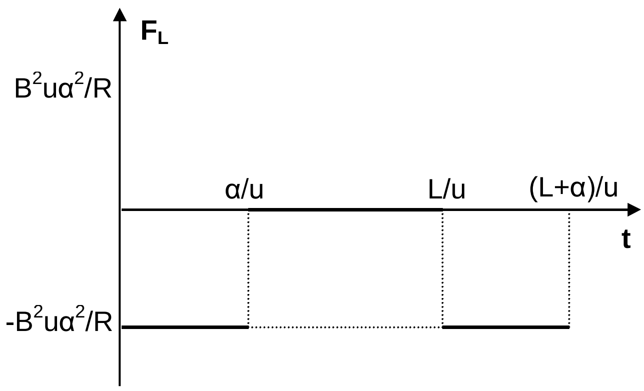
$$\frac{ΔQ}{Δt} = P_θ = I_{επ}^2\cdot R \xrightarrow{(13)} P_θ = \frac{B^2\cdot u^2\cdot α^2}{R} \text{ =σταθερός} \qquad (15)$$

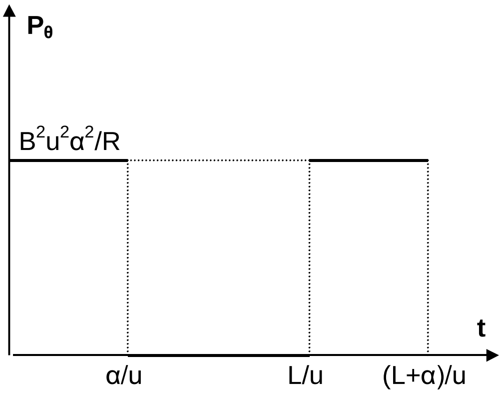
B. Οι γραφικές παραστάσεις είναι οι ακόλουθες:











11. ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

Α. Πως υπολογίζουμε τα χαρακτηριστικά μεγέθη (πλάτος, περίοδο, ενεργές τιμές) μιας εναλλασσόμενης τάσης ή εναλλασσομένου ρεύματος, όταν μας δίνεται η εξίσωση της τάσης ή του ρεύματος.

Όταν μας δίνεται η εξίσωση μιας εναλλασσόμενης τάσης (ή της έντασης ενός εναλλασσόμενου ρεύματος) σε συνάρτηση με το χρόνο τότε συγκρίνουμε την εξίσωση που μας δίνεται με την αντίστοιχη θεωρητική $v = V \cdot ημωt$ (ή $i = I \cdot ημωt$) οπότε προκύπτουν τα χαρακτηριστικά μεγέθη.

Παράδειγμα: Η στιγμιαία τιμή της εναλλασσόμενης τάσης του δικτύου της Δ.Ε.Η. δίνεται από τη σχέση $v = 220\sqrt{2}ημ314t$ (S.I). Να υπολογίσετε το πλάτος της τάσης, την ενεργό της τιμή, την κυκλική συχνότητα και την περίοδο της τάσης.

Από σύγκριση προκύπτει:

$$\begin{matrix} v = V \cdot ημωt \\ \\ V = 220\sqrt{2} \cdot ημ314t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} V = 220\sqrt{2}V \\ \text{και} \\ ω = 314\, rad/s \end{cases}$$

Οπότε:

$$V_{εν} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{εν} = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{2}}V \Rightarrow V_{εν} = 220V$$

$$ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow T = \frac{2π}{ω} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot 3{,}14}{314}s \Rightarrow T = 0{,}02s$$

Σε χρόνο ίσο με T=0,02s ολοκληρώνεται μια πλήρης μεταβολή της τάσης ή της έντασης του ρεύματος επομένως η πολικότητα της τάσης άρα και η φορά του ρεύματος αντιστρέφονται 2 φορές, κάθε T/2.

Β. Πως υπολογίζουμε τις χρονικές στιγμές που η τάση ή η ένταση του εναλλασσομένου ρεύματος παίρνει κάποια τιμή.

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε την τιμή της τάσης (ή της έντασης) που μας δίνεται στην αντίστοιχη εξίσωση της τάσης $v = V \cdot ημωt$ (ή της έντασης $i = I \cdot ημωt$) και λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση ως προς το χρόνο. Από τη λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης βρίσκουμε όλες τις δυνατές χρονικές στιγμές για τις οποίες η τάση (ή η ένταση) παίρνει τη δεδομένη τιμή και από τις λύσεις αυτές επιλέγουμε εκείνες που ικανοποιούν τα δεδομένα του προβλήματος.

Παράδειγμα: Δίνεται η εξίσωση της έντασης ενός εναλλασσόμενου ρεύματος $i = 2 \cdot ημ100πt$
.
Να βρεθεί η χρονική στιγμή στην οποία η ένταση του ρεύματος είναι ίση με i=-1A για τρίτη φορά.
Θέτουμε την τιμή i=-1A στην εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος $i = 2 \cdot ημ100πt$, οπότε:

$$-1 = 2 \cdot ημ100πt \Rightarrow ημ100πt = -\frac{1}{2} \Rightarrow ημ100πt = ημ\left(π + \frac{π}{6}\right) \Rightarrow ημ100πt = ημ\frac{7π}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 100πt = 2kπ + \frac{7π}{6} \\ \text{και} \\ 100πt = 2kπ + π - \frac{7π}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100πt = 2kπ + \frac{7π}{6} \\ \text{και} \\ 100πt = 2kπ - \frac{π}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{k}{50} + \frac{7}{600} \quad (1) \\ \text{και} \\ t = \frac{k}{50} - \frac{1}{600} \quad (2) \end{cases}$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν όλες τις χρονικές στιγμές για τις οποίες i=-1A με τιμές για το k=0,1,2,. . . .
Για να βρούμε την τρίτη φορά βάζουμε τιμές στο k και θα επιλέξουμε την τρίτη μικρότερη τιμή για το t. Πράγματι:

Η σχέση (1) δίνει: για k=0, $t_1 = \frac{7}{600}s$

για k=1, $t_2 = \frac{1}{50} + \frac{7}{600}s \Rightarrow t_2 = \frac{19}{600}s$

Η σχέση (2) δίνει: για k=0, $t_1 = -\frac{1}{600}s$ απορρίπτεται

για k=1, $t_3 = \frac{1}{50} - \frac{1}{600}s \Rightarrow t_2 = \frac{11}{600}s$ για k=2, $t_4 = \frac{2}{50} - \frac{1}{600}s \Rightarrow t_2 = \frac{23}{600}s$

Άρα η τρίτη φορά είναι η χρονική στιγμή: $t = t_2 = \frac{19}{600}s$.

Γ. Μέση και στιγμιαία ισχύς

Η μέση ισχύς εκφράζει τον ρυθμό που παράγεται θερμότητα σ' ένα κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος σε μία περίοδο. Δηλαδή ισχύει: $\bar{P} = \frac{W}{T}$

Αν ο χρόνος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο περιόδου (t=kT) τότε όλη η ενέργεια που προσφέρει η πηγή μετατρέπεται σε θερμότητα στις ωμικές αντιστάσεις του κυκλώματος. Δηλαδή τότε ισχύει:

$$W = Q = I_{εν}^2 \cdot R \cdot t$$

και η μέση ισχύς μπορεί αντίστοιχα να υπολογιστεί από τις σχέσεις:

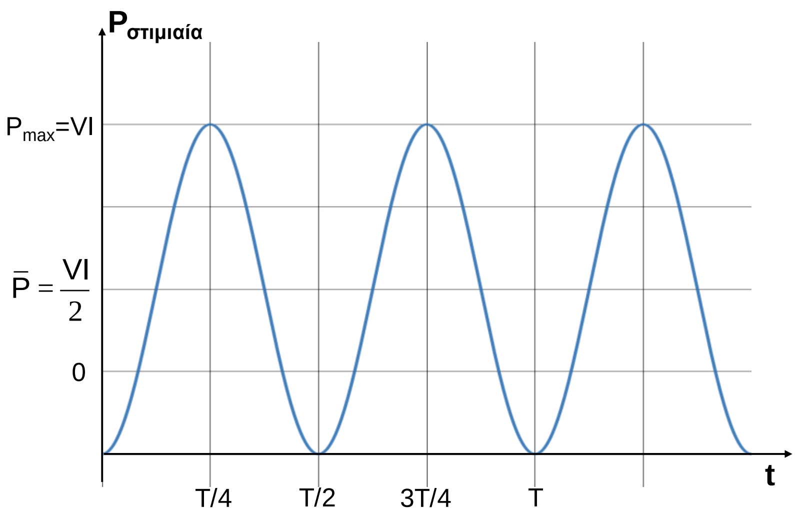
$$\bar{P} = I_{εν}^2 \cdot R$$

ή

$$\bar{P} = I_{εν} \cdot V_{εν}$$

ή

$$\bar{P} = \frac{V_{εν}^2}{R}$$



Η στιγμιαία ισχύς είναι ο ρυθμός με τον οποίο παρέχεται ηλεκτρική ενέργεια ή καταναλώνεται ηλεκτρική ενέργεια σε έναν αντιστάτη και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P_{στ} = i \times v \Rightarrow P_{στ} = I \times V ημ^2ωt \xrightarrow{ημ^2ωt = \frac{1-συν2ωt}{2}}$$

$$P_{στ} = I \times V \frac{1-συν2ωt}{2} \xrightarrow{\frac{IV}{2} = I_{εν}V_{εν} = \bar{P}} P_{στ} = \bar{P}(1-συν2ωt)$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>
Το αμπερόμετρο και το βολτόμετρο που χρησιμοποιούνται σε κύκλωμα εναλλασσομένου είναι θερμικά και μετρούν πάντοτε ενεργές τιμές των εναλλασσομένων μεγεθών.

Δ. Υπολογισμός της ενεργού τιμής εναλλασσόμενης τάσης ή έντασης

Από τον ορισμό της ενεργού τιμής εναλλασσόμενης τάσης σε χρόνο μιας περιόδου έχουμε:

$$Q_{\text{εναλλασσόμενης}} = Q_{\text{συνεχούς}} \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{T}\frac{v^2}{R}\Delta t = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R}\Delta t \xrightarrow{\Delta t = T} \sum_{t=0}^{T}\frac{V^2\eta\mu^2\omega t}{R}\Delta t = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R}T \xrightarrow{\eta\mu^2\omega t = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2}}$$

$$\frac{V^2}{R}\sum_{t=0}^{T}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2}\Delta t = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R}T \Leftrightarrow V^2\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{1}{2}\Delta t - \sum_{t=0}^{T}\frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2}\Delta t\right) = V_{\varepsilon\nu}^2 T$$

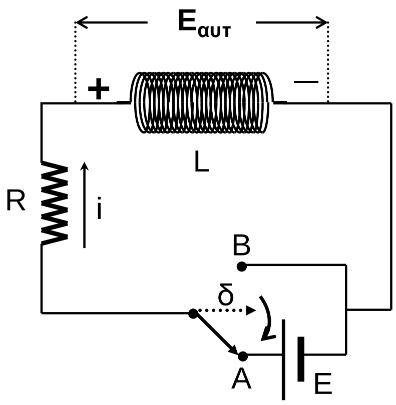
Το $\sum_{t=0}^{T}\frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2}\Delta t = 0$, λόγω της συμμετρίας της γραφικής παράστασης ως προς το χρόνο t,

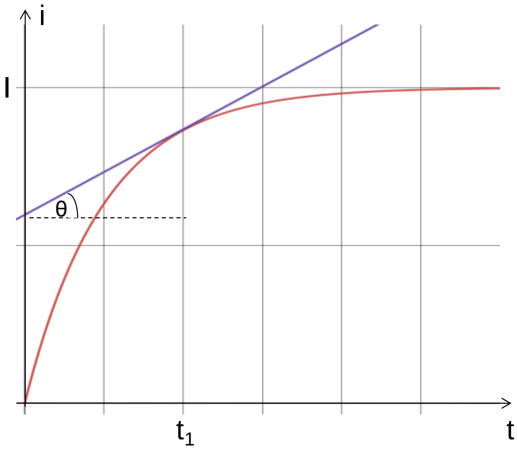
επομένως: $$V^2\sum_{t=0}^{T}\frac{1}{2}\Delta t = V_{\varepsilon\nu}^2 T \Leftrightarrow V^2\frac{1}{2}T = V_{\varepsilon\nu}^2 T \Leftrightarrow V_{\varepsilon\nu} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

12. ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ

Α. Ο μεταγωγός δ τη χρονική στιγμή t=0 μεταβαίνει στη θέση Α

Το ρεύμα που προέρχεται από την ΗΕΔ Ε θα προκαλέσει μεταβολή στη μαγνητική ροή στο εσωτερικό του πηνίου, επομένως και εμφάνιση ΗΕΔ από αυτεπαγωγή $E_{\alpha\upsilon\tau} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$. Η $E_{\alpha\upsilon\tau}$ θα παράξει ένα επαγωγικό ρεύμα, που με βάση τον κανόνα του Lenz θα αντιτίθεται στο ρεύμα της ΗΕΔ, επομένως η πολικότητα της $E_{\alpha\upsilon\tau}$ θα είναι αυτή του σχήματος και το συνολικό ρεύμα στο κύκλωμα θα παρουσιάσει μια εκθετική αύξηση μέχρι να σταθεροποιηθεί στην τελική του τιμή Ι.





Όταν αυτό συμβεί, τότε $E_{\alpha\upsilon\tau}$=0 και $I = \frac{E}{R_{o\lambda}}$. Από το διάγραμμα είναι εμφανές ότι η κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση i=f(t) κάποια χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος τη στιγμή αυτή, δηλαδή:

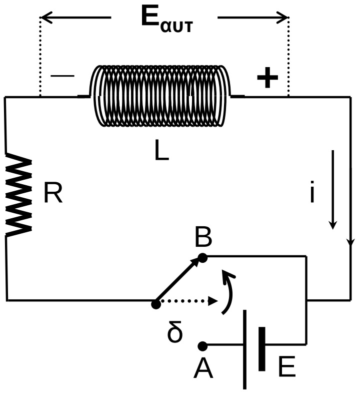
$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{E_{\alpha\upsilon\tau}}{L}$$

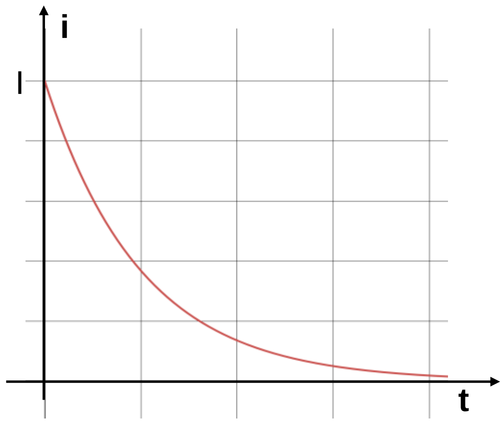
Από το διάγραμμα γίνεται φανερό ότι η $|E_{\alpha\upsilon\tau}|$=E→max τη χρονική στιγμή t=0, όπου i=0 (μέγιστη κλίση της εφαπτομένης) και $E_{\alpha\upsilon\tau}$=0→min όταν σταθεροποιηθεί η ένταση του ρεύματος.

Στο πηνίο η αύξηση του ρεύματος προκαλεί αύξηση στην ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου και κατ΄επέκταση αύξηση στην ενέργεια του μαγνητικού πεδίου U_B.

Β. Ο μεταγωγός δ τη χρονική στιγμή t=0 μεταβαίνει από τη θέση Α στη θέση Β

Το ρεύμα που διέρρεε το κύκλωμα δεν θα μηδενιστεί ακαριαία διότι η μεταβολή του ρεύματος θα προκαλέσει μεταβολή στη μαγνητική ροή στο εσωτερικό του πηνίου, επομένως και εμφάνιση ΗΕΔ από αυτεπαγωγή $E_{αυτ} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$. Η $E_{αυτ}$ θα παράξει ένα επαγωγικό ρεύμα, που με βάση τον κανόνα του Lenz θα αντιτίθεται στο μηδενισμό του ρεύματος παράγοντας ρεύμα ίδιας φοράς με πριν. Επομένως η πολικότητα της $E_{αυτ}$ θα είναι αυτή του σχήματος και το συνολικό ρεύμα στο κύκλωμα θα παρουσιάσει μια εκθετική μείωση μέχρι να μηδενιστεί.





Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο μετατρέπεται σε ηλεκτρική στο κύκλωμα και κατόπιν σε θερμότητα στους αντιστάτες, δηλαδή:

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = Q$$

Γ. Πως υπολογίζουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής L

- Από τον νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής έχουμε:

$$E_{αυτ} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Leftrightarrow E_{αυτ} = -N\frac{\Delta(BAσυν0)}{\Delta t} \xrightarrow{B=\mu_o ni}$$

$$E_{αυτ} = -NA\frac{\Delta(\mu_o ni)}{\Delta t} \xrightarrow{n=N/\ell} E_{αυτ} = -\frac{\mu_o N^2 A}{\ell}\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Αν επιπλέον εντός του πηνίου εισάγουμε υλικό με μαγνητική διαπερατότητα μ ο συντελεστής αυτεπαγωγής L υπολογίζεται από τη σχέση: $L = \mu\mu_o\frac{N^2A}{\ell}$

- Αν δίνεται η μεταβολή της ροής ΔΦ μέσα από κάθε σπείρα και η μεταβολή της έντασης Δi του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο, τότε ο συντελεστής υπολογίζεται από το συνδυασμό του νόμου της επαγωγής και της αυτεπαγωγής, δηλαδή:

$$-N\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\cdot\frac{\Delta i}{\Delta t} \Rightarrow L = N\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta i}$$

Δ. Πως υπολογίζουμε το μέσο ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1, t_2

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\Delta i}{\Delta t}=\frac{i_{\tau\varepsilon\lambda}-i_{\alpha\rho\chi}}{t_{\tau\varepsilon\lambda}-t_{\alpha\rho\chi}}$$

Αν θέσουμε το μέσο ρυθμό μεταβολής στο νόμο της αυτεπαγωγής, τότε υπολογίζουμε τη μέση ΗΕΔ από αυτεπαγωγή:

$$\overline{E}_{\alpha\upsilon\tau}=-L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Ε. Πως υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος κάποια χρονική στιγμή t όταν γνωρίζουμε την τιμή της έντασης i του ρεύματος τη στιγμή αυτή

- Από το νόμο της αυτεπαγωγής, κάθε χρονική στιγμή t, έχουμε:

$$E_{\alpha\upsilon\tau}=-L\cdot\frac{\Delta i}{\Delta t}\Rightarrow\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|=\frac{E_{\alpha\upsilon\tau}}{L}$$

Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή $E_{\alpha\upsilon\tau}$ μπορεί να υπολογιστεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή ως εξής: λόγω της εμφάνισης ΗΕΔ από αυτεπαγωγή (διπλανό σχήμα) στο κύκλωμα υπάρχουν δύο ΗΕΔ αντίθετης πολικότητας, με αποτέλεσμα η ένταση του ρεύματος και στη συνέχεια η $E_{\alpha\upsilon\tau}$ να υπολογίζεται από τη σχέση:

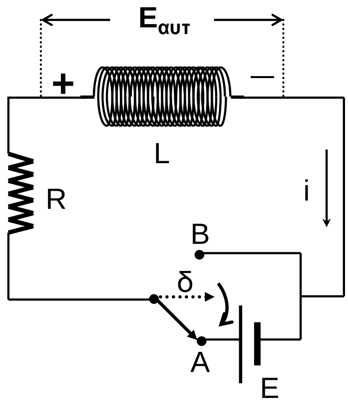
$$i=\frac{E-E_{\alpha\upsilon\tau}}{R_{o\lambda}}\Rightarrow i=\frac{E-E_{\alpha\upsilon\tau}}{R+r}\Rightarrow E-E_{\alpha\upsilon\tau}=i\cdot(R+r)\Rightarrow E_{\alpha\upsilon\tau}=E-i\cdot(R+r)$$

- Αν μας δίνεται η γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο τότε υπολογίζουμε την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή από την κλίση της γραφικής παράστασης.

ΣΤ. Πως υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας $\frac{\Delta U_L}{\Delta t}$ του μαγνητικού πεδίου του πηνίου κάποια χρονική στιγμή t όταν γνωρίζουμε την τιμή της έντασης i του ρεύματος τη στιγμή αυτή

Στο διπλανό κύκλωμα η πηγή παρέχει ενέργεια W_E στο κύκλωμα ένα μέρος της οποίας αποθηκεύεται στο πηνίο υπό μορφή ενέργειας μαγνητικού πεδίου U_L και το άλλο μέρος μετατρέπεται σε θερμότητα Q πάνω στις αντιστάσεις.

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε:



$$W_E=Q+U_L\Rightarrow\frac{\Delta W_E}{\Delta t}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}+\frac{\Delta U_L}{\Delta t}\Rightarrow\frac{\Delta U_L}{\Delta t}=\frac{\Delta W_E}{\Delta t}-\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

όπου:

$\frac{\Delta U_L}{\Delta t}$: ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο,

$\frac{\Delta W_E}{\Delta t}=P_E=E\cdot i$: ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια από την πηγή Ε (ισχύς πηγής),

$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=P_\Theta=i^2\cdot R_{o\lambda}$: ο ρυθμός με τον οποίο μετατρέπεται η ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα πάνω στις αντιστάσεις (θερμική ισχύς).

Συνεπώς η αρχική σχέση γίνεται: $$\frac{\Delta U_L}{\Delta t}=E\cdot i-i^2\cdot R_{o\lambda}\qquad(1)$$

Επίσης από την σχέση υπολογισμού της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα έχουμε:

$$i=\frac{E-E_{αυτ}}{R_{ολ}}\Rightarrow i=\frac{E-E_{αυτ}}{R+r}\Rightarrow E-E_{αυτ}=i\cdot(R+r)\Rightarrow E_{αυτ}=E-i\cdot(R+r)\Rightarrow$$

$$E_{αυτ}\cdot i=E\cdot i-i^2\cdot(R+r) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο μπορεί να υπολογιστεί και ως:

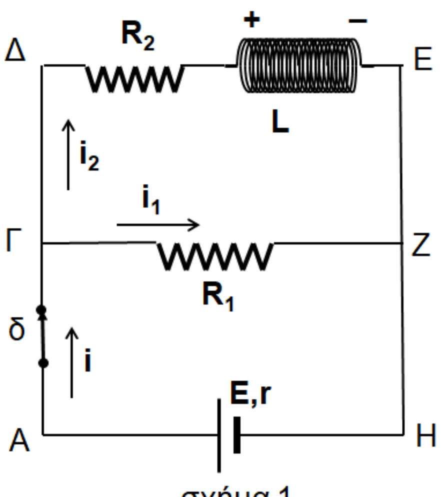
$$\frac{\Delta U_L}{\Delta t}=E_{αυτ}\cdot i \qquad (3)$$

Παρατήρηση: Αν το πηνίο έχει εσωτερική αντίσταση $R_π$, τότε ο ρυθμός με τον οποίο αποθηκεύεται ενέργεια στο πηνίο και ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο πηνίο (ή απορροφάται από το πηνίο) είναι διαφορετικοί. Αυτό συμβαίνει γιατί ένα μέρος της ενέργειας που απορροφά το πηνίο από το υπόλοιπο κύκλωμα μετατρέπεται σε θερμότητα πάνω στην εσωτερική του αντίσταση και το άλλο μέρος μετατρέπεται ενέργεια μαγνητικού πεδίου. Έτσι:

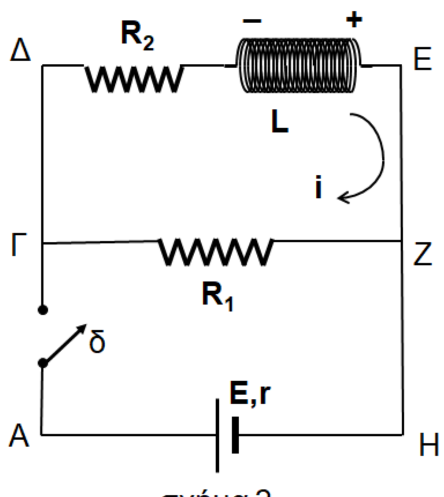
Ρυθμός με τον οποίου αποθηκεύεται ενέργεια ως ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο	$\frac{\Delta U_L}{\Delta t}=E\cdot i-i^2\cdot R_{ολ}$ ή $\frac{\Delta U_L}{\Delta t}=E_{αυτ}\cdot i$
Ρυθμός μετατροπής ενέργειας σε θερμότητα πάνω στην εσωτερική αντίσταση του πηνίου	$P_{R_π}=i^2\cdot R_π$
Ρυθμός με τον οποίο απορροφά ενέργεια το πηνίο	$\frac{\Delta W_{πηνίου}}{\Delta t}=\frac{\Delta U_L}{\Delta t}+i^2\cdot R_π$

Ζ. Στο κύκλωμα του σχήματος 1, τη στιγμή που κλείνουμε τον διακόπτη δ, λόγω της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που θα αναπτυχθεί στο πηνίο και η οποία αντιτίθεται στην αύξηση του ρεύματος, η ένταση του ρεύματος στον κλάδο ΑΔΕΓ είναι $i_2=0$ (όσο δηλαδή πρίν το κλείσιμο του διακόπτη). Επομένως από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff για τον βρόγχο ΑΓΖΗΑ έχουμε:

$$E-ir-i_1R_1=0\xrightarrow{i=i_1}i=\frac{E}{R_1+r}$$



σχήμα 1



σχήμα 2

Όσο η $E_{αυτ}\neq 0$, οι αντιστάτες R_1 και R_2 δεν είναι συνδεδεμένοι ούτε παράλληλα ούτε σε σειρά. Όταν η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα σταθεροποιηθεί τότε $E_{αυτ}=0$, οπότε οι αντιστάτες

R_1 και R_2 θα είναι συνδεδεμένοι παράλληλα αφού θα έχουν την ίδια τάση στα άκρα τους και ίση με την πολική τάση της πηγής. Η τελική ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα θα είναι τότε:

$$I = \frac{E}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + r}$$

Οι εντάσεις των ρευμάτων στους 2 κλάδους του κυκλώματος είναι:

$$I_1 = \frac{V_{\pi o \lambda \iota \kappa \acute{\eta}}}{R_1} = \frac{E - Ir}{R_1} \qquad \text{και} \qquad I_2 = \frac{V_{\pi o \lambda \iota \kappa \acute{\eta}}}{R_2} = \frac{E - Ir}{R_2}$$

Όταν ο διακόπτης ανοίξει, σχήμα 2, ο κλάδος ΖΗΑΓ δεν θα διαρρέεται από ρεύμα, ενώ ο βρόγχος ΓΔΕΖΓ, λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου, θα διαρρέεται για λίγο χρόνο από ρεύμα έντασης i μέχρι να μηδενιστεί. Την χρονική στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης ο βρόγχος ΓΔΕΖΓ διαρρέεται από ρεύμα έντασης $\mathbf{i=I_2}$ δηλαδή είναι ίση με την ένταση του ρεύματος που διέρρεε το πηνίο πριν ανοίξει ο διακόπτης. Οι δύο αντιστάτες R_1 και R_2, κάθε χρονική στιγμή, διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα άρα είναι σε σειρά. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου θα μετατραπεί σε ηλεκτρική ενέργεια και κατόπιν σε θερμότητα στους 2 αντιστάτες, όπου ισχύει:

$$Q = U_L = \frac{1}{2} L I_2^2 = Q_1 + Q_2$$

Επίσης για τις θερμότητες Q_1 και Q_2 ισχύει:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sum_k i_k^2 R_1 \Delta t_k}{\sum_k i_k^2 R_2 \Delta t_k} = \frac{R_1 \sum_k i_k^2 \Delta t_k}{R_2 \sum_k i_k^2 \Delta t_k} \Leftrightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$