ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΡΕΧΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ

1. Κατασκευή της εξίσωσης τρέχοντος αρμονικού κύματος

- Η περίοδος του κύματος T είναι ίση με την περίοδο της ταλάντωσης της πηγής του κύματος. Για παράδειγμα αν η πηγή του κύματος σε χρόνο Δt κινείται από την θέση μέγιστης απομάκρυνσης μέχρι τη θέση ισορροπίας της (ή το αντίστροφο), τότε $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4 \cdot \Delta t$.

- Η συχνότητα του αρμονικού κύματος είναι ίση με την συχνότητα της ταλάντωσης της πηγής του κύματος.
Όταν σε ένα σημείο του ελαστικού μέσου επαναλαμβάνεται μια διαταραχή N φορές σε χρόνο t, ανά ίσα χρονικά διαστήματα, τότε η συχνότητα του παραγόμενου κύματος είναι $f = \frac{N}{t}$ και η περίοδος T θα ισούται με το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διαταραχών.
Έτσι αν σε ένα σημείο της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού πέφτουν N=100 σφαιρίδια σε χρόνο t=200s (ανά 2s το καθένα), τότε:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{100\text{σφαιρίδια}}{200\text{s}} \Rightarrow f = 0{,}5\text{Hz} \quad \text{και} \quad T=2\text{s}$$

- Η ταχύτητα ενός αρμονικού κύματος υπολογίζεται από την σχέση: $u = \lambda f$
Επίσης μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, όπου Δx η απόσταση που διατρέχει το κύμα σε χρόνο Δt.
Όταν το κύμα μεταβαίνει από ένα μέσο σε ένα άλλο, τότε η συχνότητά του παραμένει σταθερή, ενώ η ταχύτητα διάδοσης u και το μήκος κύματος λ μεταβάλλονται.
Όταν το κύμα δεν αλλάζει μέσο διάδοσης, η ταχύτητα διάδοσης παραμένει σταθερή οπότε αν αλλάξει η συχνότητα f της πηγής αλλάζει το μήκος κύματος λ.

- Αν τη χρονική στιγμή t=0, η πηγή του κύματος (την οποία και θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων x=0) να βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της δηλαδή y=0 και να κινείται κατά την θετική φορά (u>0), τότε η εξίσωση της ταλάντωσής της είναι:

$$y = A\eta\mu\omega t$$

οπότε το αρμονικό κύμα που παράγεται, αν διαδίδεται προς τα δεξιά της πηγής (θετική φορά), θα έχει εξίσωση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Επίσης οι εξισώσεις της ταχύτητας ταλάντωσης u και της επιτάχυνσης a των μορίων του ελαστικού μέσου θα είναι αντίστοιχα:

$$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \text{με } u_{max}=\omega A \qquad \text{και} \qquad a = -a_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \text{με } a_{max}=\omega^2 A$$

2. Κατασκευή της εξίσωσης τρέχοντος αρμονικού κύματος με αρχική φάση

- Αν τη χρονική στιγμή t=0, η πηγή του κύματος (την οποία και θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων x=0) δεν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της δηλαδή $y \neq 0$, τότε η εξίσωση της ταλάντωσής της έχει αρχική φάση φ_o: $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$
Η αρχική φάση υπολογίζεται κατά τα γνωστά.

Σε ένα σημείο του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται σε απόσταση x δεξιά της πηγής, το κύμα θα φτάσει μετά από χρόνο $t_1 = \frac{x}{u}$ και θα εκτελέσει ταλάντωση για χρόνο t'=t-t_1. Συνεπώς:

$$y = A\eta\mu(\omega t' + \varphi_o) \Leftrightarrow y = A\eta\mu\left[(\omega t - \omega t_1) + \varphi_o\right] \Leftrightarrow y = A\eta\mu\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_o\right]$$

$$y = A\eta\mu\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_o\right] \Leftrightarrow y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{uT}\right) + \varphi_o\right] \xrightarrow{u=\lambda f=\frac{\lambda}{T}}$$

$$y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_o\right] \qquad (1)$$

Επίσης αρχική φάση φ_o έχει η εξίσωση του κύματος όταν για t=0, ένα σημείο του ελαστικού μέσου ($x=x_1 \neq 0$) ξεκινά να ταλαντώνεται. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η εξίσωση του κύματος δίνεται από την σχέση (1), και μηδενίζοντας τη φάση (αν u>0) την χρονική στιγμή t=0, για $x=x_1$ υπολογίζουμε την αρχική φάση φ_o Στην περίπτωση που η πηγή του κύματος έχει ξεκινήσει με u<0 τότε στην εξίσωση της φάσης του κύματος προσθέτουμε το π.

3. Φάση τρέχοντος αρμονικού κύματος

Η φάση ενός αρμονικού κύματος δίνεται από την σχέση: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (1)

Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι:

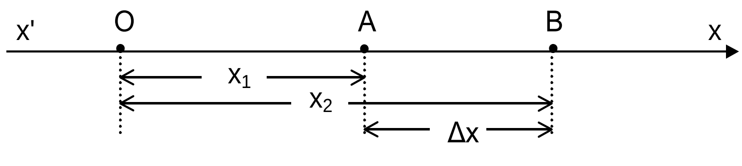
- για μια δεδομένη χρονική στιγμή $t=t_1$, η φάση ελαττώνεται όσο η απόσταση x, ενός τυχαίου σωματιδίου από την πηγή του κύματος, αυξάνεται. Δηλαδή κατά την φορά διάδοσης του κύματος η φάση ελαττώνεται.
- για ένα δεδομένο σημείο του ελαστικού μέσου $x=x_1$, η φάση αυξάνεται όσο περνά ο χρόνος t.
- Αν για ορισμένες τιμές (t_1, x_1):
  α) **η φάση είναι αρνητική (φ<0), αυτό σημαίνει ότι στην απόσταση x_1, τη χρονική στιγμή t_1, το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμη, οπότε εκεί το σωματίδιο δεν έχει αρχίσει την ταλάντωσή του.**
  β) **Η φάση είναι θετική (φ>0), τότε το κύμα έχει ήδη φτάσει**.
  γ) **η φάση είναι μηδέν (φ=0), τότε το κύμα μόλις έφτασε**.
- Αν έχουμε αρχική φάση φ_o, τότε η φάση του κύματος θα είναι: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_o$ και οι πληροφορίες Α), Β), Γ) θα ισχύουν για τις περιπτώσεις που θα βρίσκαμε $\varphi<\varphi_o$, $\varphi>\varphi_o$, $\varphi=\varphi_o$, αντίστοιχα.
- Αν δύο σημεία Κ και Λ του ελαστικού μέσου έχουν φάσεις φ_K και φ_Λ, μια χρονική στιγμή t_1, με $\varphi_K>\varphi_\Lambda$, τότε:

$$\varphi_K > \varphi_\Lambda \Rightarrow 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) > 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow \frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda} > \frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda} \Rightarrow$$

$$-\frac{x_K}{\lambda} > -\frac{x_\Lambda}{\lambda} \Rightarrow \frac{x_K}{\lambda} < \frac{x_\Lambda}{\lambda} \Rightarrow x_K < x_\Lambda$$

Δηλαδή το σημείο Κ είναι πιο κοντά στην πηγή του κύματος.

- Έστω δύο σημεία Α και Β που απέχουν αποστάσεις x_1 και x_2 (με $x_2>x_1$) από την πηγή Ο του κύματος, όπως στο σχήμα. Οι φάσεις των ταλαντώσεων των σημείων Α και Β είναι:



$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \qquad \text{και} \qquad \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

Επειδή $x_2 > x_1$ τότε και $\varphi_2 < \varphi_1$. Η διαφορά φάσης Δφ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_1}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x_2}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε τα εξής:

Α) Αν $\Delta x = k\lambda$ τότε από (14) $\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{k\lambda}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2k\pi$ $\quad k=0,1,2,3,\ldots$ και έτσι για τα σημεία Α, Β θα ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \\ y_1 &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu\varphi_1 \\ y_2 &= A\eta\mu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\Delta\varphi = 2k\pi} \left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu(\varphi_2 + 2k\pi) \\ y_2 &= A\eta\mu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu\varphi_2 \\ y_1 &= A\eta\mu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{y_1 = y_2}$$

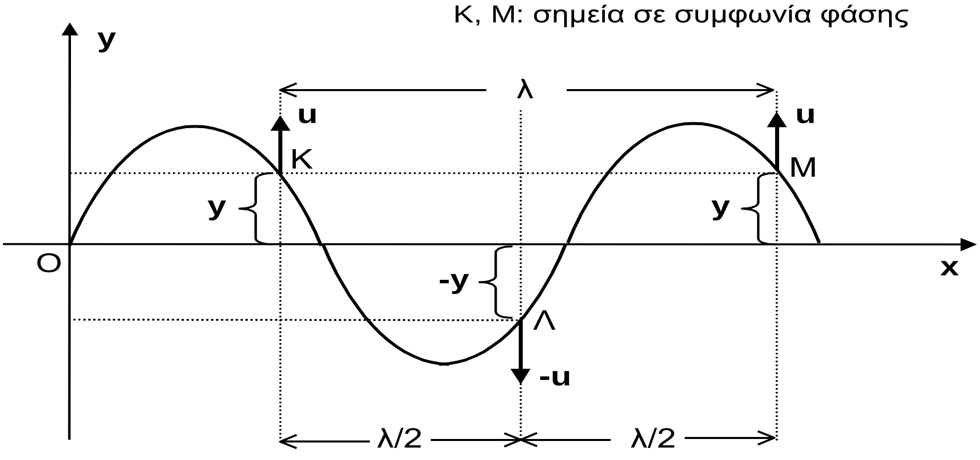
Άρα, όταν η διαφορά των αποστάσεων δύο σημείων, από την πηγή του κύματος, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του λ, τότε αυτά τα σημεία έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) ταλάντωσης, και θεωρούνται ότι βρίσκονται σε **συμφωνία φάσης**.

Β) Αν $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ τότε έχουμε $\Delta\varphi = 2\pi\frac{(2k+1)\frac{\lambda}{2}}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\pi$ τότε:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu\varphi_1 \\ y_2 &= A\eta\mu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\Delta\varphi = 2(k+1)\pi} \left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu\left[\varphi_2 + (2k+1)\pi\right] \\ y_2 &= A\eta\mu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 &= -A\eta\mu\varphi_2 \\ y_1 &= A\eta\mu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{y_1 = -y_2}$$

Άρα όταν η διαφορά των αποστάσεων δύο σημείων, από την πηγή του κύματος, είναι περιττό πολλαπλάσιο του λ/2, τότε τα σημεία αυτά έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα και θεωρούνται ότι βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης**.

Κ, Μ: σημεία σε συμφωνία φάσης



Κ, Λ: σημεία σε αντίθεση φάσης
Λ, Μ: σημεία σε αντίθεση φάσης

- Έστω σωματίδιο που απέχει απόσταση x από την πηγή του κύματος. Η φάση της ταλάντωσης, σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, είναι:

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \text{και} \qquad \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Αν $t_2 > t_1$ τότε και $\varphi_2 > \varphi_1$. Η διαφορά φάσης Δφ είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{t_2}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{t_1}{T} + 2\pi\frac{x}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{t_2 - t_1}{T} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}}$$

4. Πληροφορίες από την εξίσωση τρέχοντος αρμονικού κύματος

- Όταν μας δίνεται μια εξίσωση κύματος τότε την συγκρίνουμε με την θεωρητική εξίσωση και βρίσκουμε τα εξής δεδομένα
Παράδειγμα: έστω η εξίσωση κύματος $y = 0{,}1\eta\mu\pi(10t - 2x)$ (S.I.)

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}1\eta\mu\pi(10t - 2x) \\ \\ y = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0{,}1\eta\mu2\pi(5t - x) \\ \\ y = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0{,}1m \\ 5t = \frac{t}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{5}s \\ x = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1m \end{array}$$

- Όταν μας ζητείται η απομάκρυνση y_K ενός σημείου Κ του μέσου, που απέχει απόσταση x_K από την πηγή, μια χρονική στιγμή $t=t_1$, τότε θα βρίσκουμε πρώτα την χρονική στιγμή $t_K = \frac{x_K}{u}$ που έφτασε το κύμα στο Κ, ή αλλιώς την χρονική στιγμή t_K που το σημείο Α αρχίζει να ταλαντώνεται.
Α) Αν $t_1 \le t_K$ τότε $y_K=0$
Β) Αν $t_1 > t_K$ τότε θέτουμε τις τιμές x_K, t_1 στην $y = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ και υπολογίζουμε το y_K:

$$y_K = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

- Όταν μας ζητούν μια χρονική στιγμή t, για την οποία ένα σωματίδιο Κ έχει ορισμένη απομάκρυνση $y_K=y_{K1}$, τότε παίρνουμε την εξίσωση $y = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, θέτουμε τις τιμές x_K, y_{K1} και προχωρούμε λύνοντας τριγωνομετρική εξίσωση με άγνωστο το t.
Από όλες τις δυνατές λύσεις που προκύπτουν θα δεχτούμε αυτές που ικανοποιούν την συνθήκη: $t > t_K = \frac{x_K}{u}$

- Όταν μας ζητούν ένα σημείο x, για το οποίο η απομάκρυνση (ή η ταχύτητα ή η επιτάχυνση κ.τ.λ.) του είναι $y=y_1$ μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t=t_1$, τότε παίρνουμε την εξίσωση $y = A\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, θέτουμε τις τιμές t_1, y_1 και προχωρούμε λύνοντας τριγωνομετρική εξίσωση με άγνωστο το x.
Από όλες τις δυνατές λύσεις που προκύπτουν θα δεχτούμε αυτές που ικανοποιούν την συνθήκη: $x < x_1 = ut_1$

- Η απόσταση d μεταξύ δύο διαδοχικών «ορέων» ή «κοιλάδων» («πυκνωμάτων» ή «αραιωμάτων») είναι: $d = \lambda$

- Η απόσταση d μεταξύ ενός «όρους» και της επόμενης «κοιλάδας» (ενός «πυκνωμάτων» και του επόμενου «αραιώματος») είναι: $d=\lambda/2$

5. Στιγμιότυπο τρέχοντος αρμονικού κύματος

Θεωρούμε πηγή αρμονικού κύματος Ο η οποία εκτελεί εγκάρσια Α.Α.Τ. εντός ελαστικού μέσου το οποίο εκτείνεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονα x'x με εξίσωση $y = 0{,}1\eta\mu 10\pi t$. Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα υ=5m/s. Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές α) t_1=0,5s και β) t_2=0,55s ακολουθούμε τα εξής βήματα.

- Κατασκευάζουμε την εξίσωση του κύματος με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10\pi} = 0{,}2s, \qquad \upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \upsilon T \Rightarrow \lambda = 5\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{5}s \Rightarrow \lambda = 1m$$

Συνεπώς: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{x}{1}\right) \Rightarrow y = 0{,}1\eta\mu(10\pi t - 2\pi x)$ (SI) (1)

- Θέτουμε τις τιμές t_1=0,5s και t_2=0,55s στην εξίσωση (1) του τρέχοντος κύματος:

$$(1) \xrightarrow{t=0,5s} y_1 = 0{,}1\eta\mu(10\pi\cdot 0{,}5 - 2\pi x) \Rightarrow y_1 = 0{,}1\eta\mu(5\pi - 2\pi x) \qquad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{t=0,55s} y_1 = 0{,}1\eta\mu(10\pi\cdot 0{,}55 - 2\pi x) \Rightarrow y_1 = 0{,}1\eta\mu(5{,}5\pi - 2\pi x) \qquad (3)$$

- Υπολογίζουμε τις αποστάσεις x_1, x_2 που έχει φτάσει το κύμα, τις δύο χρονικές στιγμές, μηδενίζοντας την φάση του κύματος και συγκρίνουμε τις αποστάσεις αυτές με το μήκος του κύματος.

Στιγμή t_1=0,5s: $\varphi_1 = 0 \Rightarrow 5\pi - 2\pi x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}m = 2{,}5m = 2{,}5\lambda$

Στιγμή t_2=0,55s: $\varphi_2 = 0 \Rightarrow 6{,}5\pi - 2\pi x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{5{,}5}{2}m = 2{,}75m = 2{,}75\lambda$

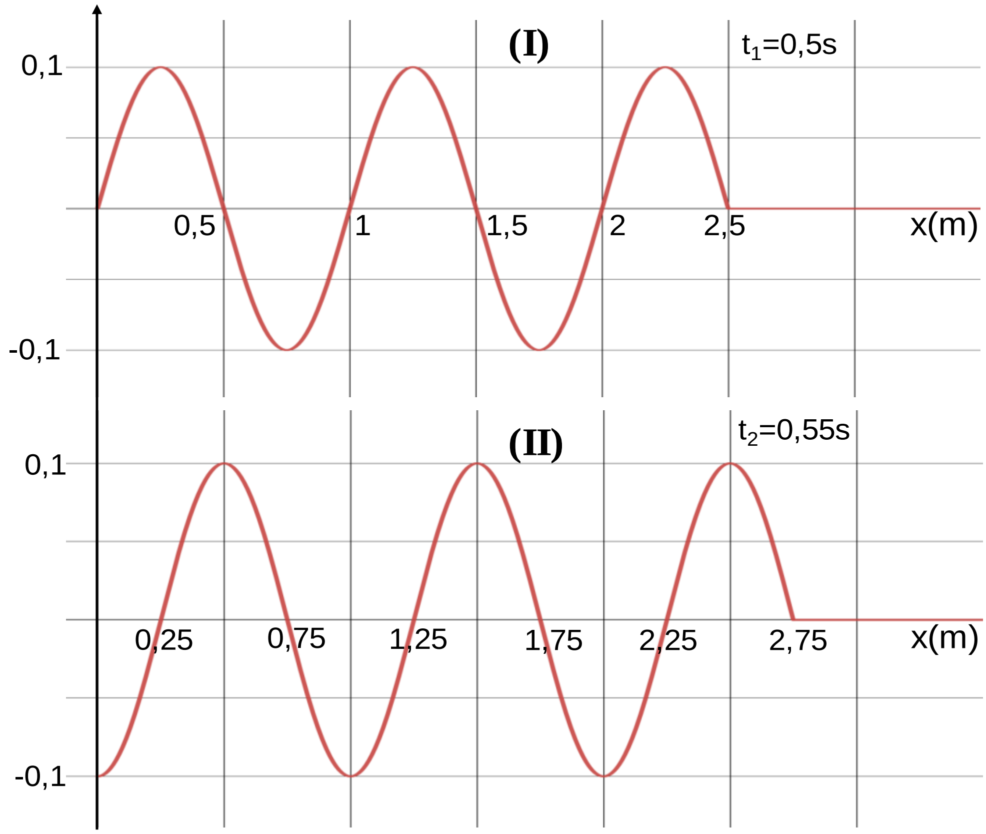
- Θέτουμε στις εξισώσεις (2) και (3) όπου x=0 για να βρούμε την απομάκρυνση y_1, y_2 του σημείου του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, τις χρονικές στιγμές t_1=0,5s και t_2=0,55s.

$$(2) \xrightarrow{x=0} y_1 = 0{,}1\eta\mu(5\pi - 2\pi\cdot 0) \Rightarrow y_1 = 0{,}1\eta\mu 5\pi = 0$$

$$(3) \xrightarrow{x=0} y_2 = 0{,}1\eta\mu(6{,}5\pi - 2\pi\cdot 0) \Rightarrow y_2 = 0{,}1\eta\mu 5{,}5\pi \Rightarrow y_2 = 0{,}1\eta\mu\left(6\pi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y_2 = -0{,}1m$$

Τη χρονική στιγμή t_1=0,5s το σημείο του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, είναι στη θέση ισορροπίας. Τότε το στιγμιότυπο του κύματος είναι μια ημιτονική συνάρτηση του χρόνου και επειδή ο πρώτος όρος στο περιεχόμενο του ημιτόνου, σχέση (2), είναι περιττός αριθμός π η γραφική παράσταση είναι $\eta\mu(\pi - 2\pi x) = \eta\mu 2\pi x$ (αν ήταν άρτιος αριθμός θα ήταν $\eta\mu(-2\pi x) = -\eta\mu 2\pi x$) σχήμα(I).

Τη χρονική στιγμή t_1=0,55s το σημείο του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, είναι στην αρνητική ακραία θέση. Η χρονική στιγμή 0,55s είναι 0,05s=T/4 μετά την στιγμή 0,5s, οπότε το κύμα θα έχει προχωρήσει κατά λ/4=0,25m. Τότε το στιγμιότυπο του κύματος είναι μια συνημιτονική συνάρτηση του χρόνου.



6. Γραφική παράσταση της ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου συναρτήσει του χρόνου

Θεωρούμε πηγή αρμονικού κύματος Ο η οποία εκτελεί εγκάρσια Α.Α.Τ. εντός ελαστικού μέσου το οποίο εκτείνεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονα x'x με εξίσωση $y = 0{,}1ημ10πt$. Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα υ=5m/s. Για να σχεδιάσουμε την απομάκρυνση y ενός σημείου του ελαστικού μέσου, που βρίσκεται στη θέση x_1=1,5m, σε συνάρτηση με το χρόνο, ακολουθούμε τα εξής βήματα.

- Κατασκευάζουμε την εξίσωση του κύματος με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

$$ω = \frac{2π}{T} = 10π \Rightarrow T = \frac{2π}{10π} = \frac{1}{5}s, \qquad υ = \frac{λ}{T} \Rightarrow λ = υT \Rightarrow λ = 5\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{5}s \Rightarrow λ = 1m$$

Συνεπώς: $$y = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) \Rightarrow y = 0{,}1ημ2π\left(5t - \frac{x}{1}\right) \Rightarrow y = 0{,}1ημ(10πt - 2πx) \ \ (SI) \qquad (1)$$

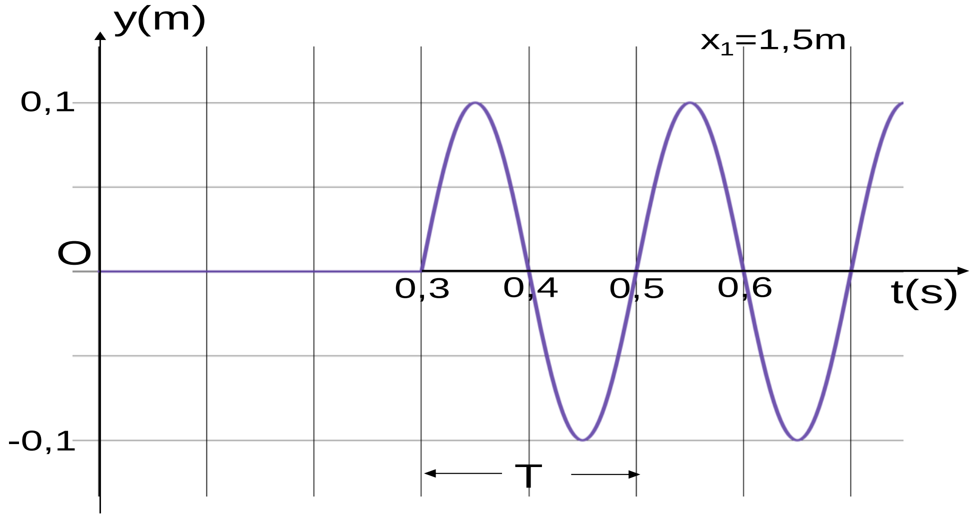
- Θέτουμε την τιμή x_1=1,5m στην εξίσωση (1) του τρέχοντος κύματος:

$$(1) \xrightarrow{x=1{,}5m} y_1 = 0{,}1ημ(10πt - 2π\cdot 1{,}5) \Rightarrow y_1 = 0{,}1ημ(10πt - 3π) \qquad (2)$$

- Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1, που έχει φτάσει το κύμα στη θέση x_1=1,5m, μηδενίζοντας την φάση του κύματος και συγκρίνουμε το χρόνο t_1 με τη περίοδο του κύματος.

$$φ_1 = 0 \Rightarrow 10πt_1 - 3π = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{10}s = 0{,}3s = 1{,}5T$$

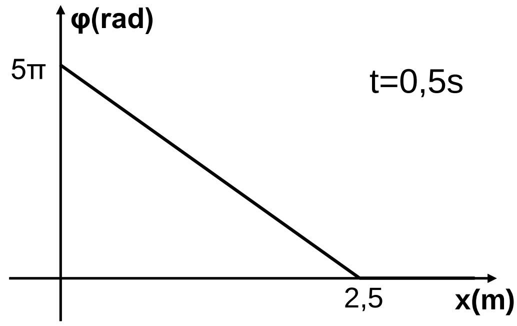
Το σημείο στη θέση x_1=1,5m θα ξεκινήσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_1=0,3s και η γραφική παράσταση της απομάκρυνσής του y σε συνάρτηση με το χρόνο είναι μια ημιτονική συνάρτηση η οποία ξεκινά από τη χρονική στιγμή t_1=0,3s που το κύμα φτάνει στη θέση x_1.



7. Γραφικές παραστάσεις της φάσης φ τρέχοντος αρμονικού κύματος

A. Σε συνάρτηση με την απόσταση x για δεδομένη χρονική στιγμή

Θεωρούμε αρμονικού κύμα που διαδίδεται εντός ελαστικού μέσου το οποίο εκτείνεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονα x’x με εξίσωση $y = 0{,}1\eta\mu(10\pi t - 2\pi x)$ (SI). Για να σχεδιάσουμε τη φάση φ του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση x τη χρονική στιγμή t_1=0,5s ακολουθούμε τα εξής βήματα.



♦ Θέτουμε την τιμή t_1=0,5s στη φάση του κύματος:

$$\varphi = 10\pi \cdot 0{,}5 - 2\pi x \Rightarrow \varphi = 5\pi - 2\pi x$$

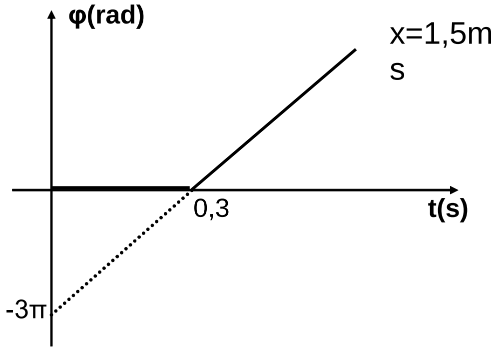
Η παραπάνω εξίσωση είναι 1ου βαθμού ως προς x άρα είναι μια ευθεία της μορφής y=αx+β με α=-2π και β=5π. Για να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση αρκούν δύο σημεία.

x=0, φ=5π
x=2,5m φ=0

Το σημείο x=2,5m είναι το σημείο που έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t=0,5s.

B. Σε συνάρτηση με το χρόνο t για δεδομένο σημείο του ελαστικού μέσου

Θεωρούμε αρμονικού κύμα που διαδίδεται εντός ελαστικού μέσου το οποίο εκτείνεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονα x’x με εξίσωση $y = 0{,}1\eta\mu(10\pi t - 2\pi x)$ (SI). Για να σχεδιάσουμε τη φάση φ του κύματος σε συνάρτηση με το χρόνο t για ένα σημείο που βρίσκεται στη θέση x_1=1,5m ακολουθούμε τα εξής βήματα.



♦ Θέτουμε την τιμή x_1=1,5m στη φάση του κύματος:

$$\varphi = 10\pi t - 2\pi \cdot 1{,}5 \Rightarrow \varphi = 10\pi t - 3\pi$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι 1ου βαθμού ως προς t άρα είναι μια ευθεία της μορφής y=αx+β με α=10π και β=-3π. Για να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση αρκούν δύο σημεία.

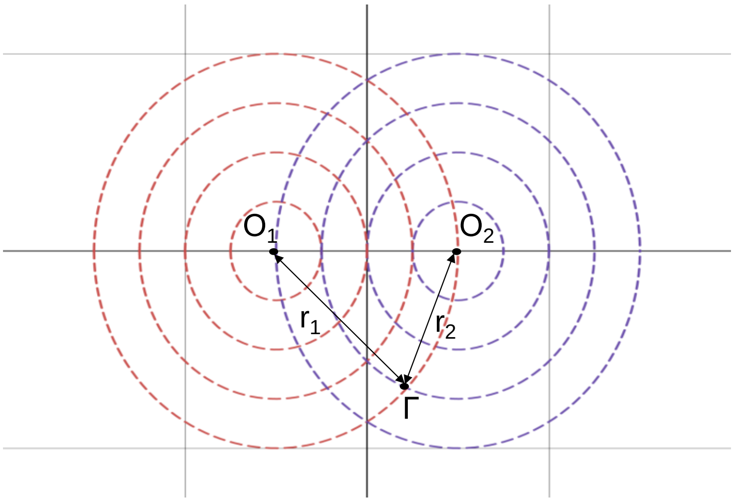
t=0, φ=-3π
t=0,3s φ=0

Η χρονική στιγμή t=0,3s είναι ο χρόνος που φτάνει το κύμα στη θέση x=1,5m.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

8. Εξισώσεις κίνησης σημείου του ελαστικού μέσου

Θεωρούμε δύο σύγχρονες και σύμφωνες πηγές O_1 και O_2 οι οποίες την χρονική στιγμή t=0 παράγουν αντίστοιχα δύο αρμονικά κύματα στο ελαστικό μέσο με πλάτος Α, περίοδο Τ, μήκος κύματος λ, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα υ. Στο σημείο Γ θα έχουμε συμβολή των δύο κυμάτων.



Επειδή η πηγή O_2 είναι πιο κοντά στο Γ από την O_1, το κύμα από την πηγή O_2 θα φτάσει πρώτο σε χρόνο $t_2 = \frac{r_2}{υ}$, ενώ το κύμα από την πηγή O_1 θα φτάσει μετά σε χρόνο $t_1 = \frac{r_1}{υ}$.

Η κίνηση του σημείου Γ μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

- Για $0 \le t < t_2$: Τη χρονική αυτή περίοδο στο σημείο Γ δεν έχει φτάσει κανένα από τα δύο κύματα, συνεπώς το σημείο Γ είναι ακίνητο, $y_Γ=0$.

- Για $t_2 \le t < t_1$: Τη χρονική αυτή περίοδο στο σημείο Γ έχει φτάσει μόνο το κύμα από την πηγή O_2, συνεπώς το σημείο Γ θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με εξίσωση:

$$y_Γ = Αημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{λ}\right)$$

- Για $t_1 \le t$: Τη χρονική αυτή περίοδο στο σημείο Γ έχουν φτάσει τα κύματα και από τις δύο πηγές, συνεπώς το σημείο Γ θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με εξίσωση:

$$y_Γ = 2Ασυν\left(2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right) \cdot ημ\left[2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right)\right]$$

όπου $2Α\left|συν\left(2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right)\right| = |Α'|$ το πλάτος της ταλάντωσης

και

$φ = 2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right)$ η φάση της ταλάντωσης αν $2Ασυν\left(2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right) > 0$

$φ = 2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right) + π$ η φάση της ταλάντωσης αν $2Ασυν\left(2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right) < 0$

Οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του σημείου Γ είναι:

$u_Γ = u_{Γ,max}συν2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2 + r_1}{2λ}\right)$, όπου $u_{Γ,max} = ωΑ'$

$a_Γ = -a_{Γ,max}ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2 + r_1}{2λ}\right)$, όπου $a_{Γ,max} = ω^2Α'$

- Αν μας ζητούν μια χρονική στιγμή t, όπου η απομάκρυνση του σημείου Γ είναι $y_Γ=y_{Γ1}$, τότε θέτουμε στην εξίσωση (1), εφόσον έχει ξεκινήσει η συμβολή, τις τιμές r_1, r_2 και $y_{Γ1}$ και προχωρούμε λύνοντας τριγωνομετρική εξίσωση με άγνωστο το t. Από όλες τις δυνατές λύσεις που προκύπτουν θα δεχτούμε αυτές που ικανοποιούν την συνθήκη: **$t>t_1$**

9. Πλάτος ταλάντωσης σημείου του ελαστικού μέσου

- Αν $|r_1 - r_2| = N \cdot λ$, με N=0, 1, 2, … θετικός ακέραιος,

  τότε στο σημείο Γ έχουμε ενίσχυση των δυο κυμάτων (τα δύο κύματα είναι σε συμφωνία φάσης), οπότε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Γ είναι μέγιστο:

$$|A'| = 2A$$

- Αν $|r_1 - r_2| = (2N+1)\dfrac{λ}{2}$, με N=0, 1, 2, … θετικός ακέραιος,

  τότε στο σημείο Γ έχουμε απόσβεση των δυο κυμάτων (τα δύο κύματα είναι σε αντίθεση φάσης), οπότε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Γ είναι μηδέν (το σημείο Γ είναι ακίνητο):

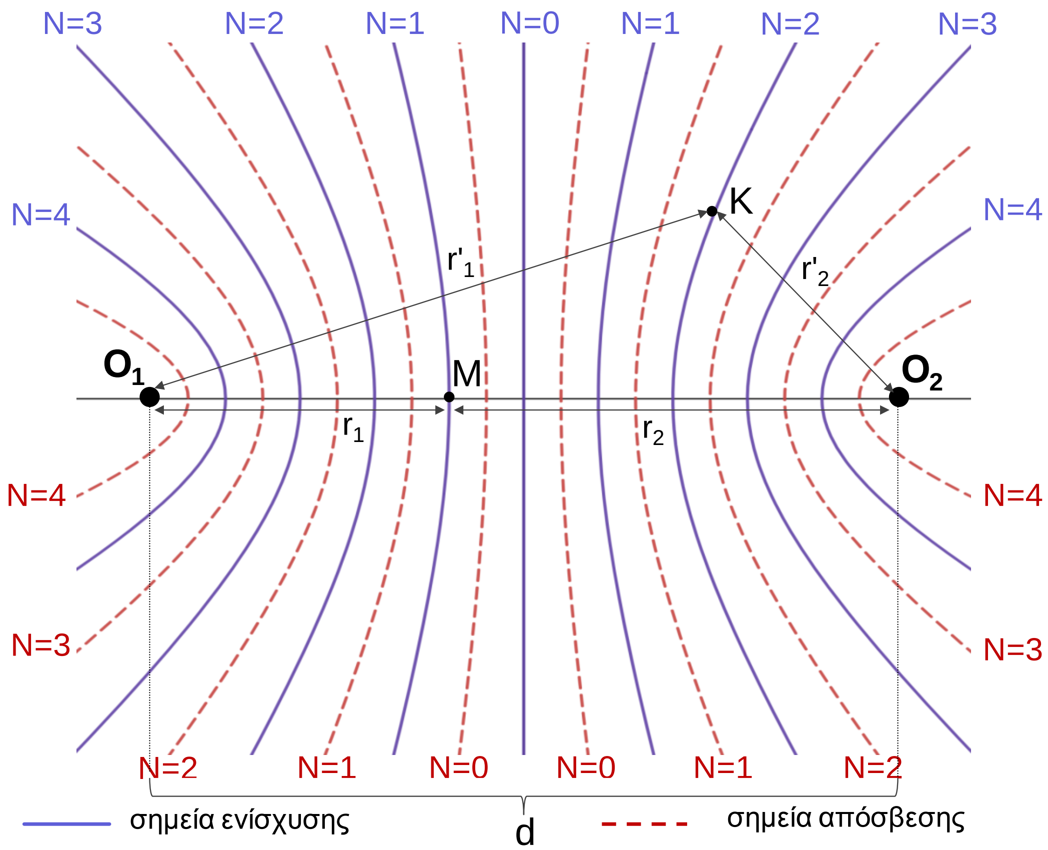
$$|A'| = 0$$

- Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το σημείο Γ εκτελεί ταλάντωση με πλάτος:

$$0 < 2A\left|συν\left(2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right)\right| < 2A$$

10. Υπολογισμός του αριθμού και της θέσης των σημείων ενίσχυσης (ή απόσβεσης) πάνω στην ευθεία που ενώνει της πηγές των κυμάτων

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου παρατηρείται ενισχυτική ή ακυρωτική συμβολή είναι **υπερβολές** (εκτός από τα σημεία που ισαπέχουν από τις δύο πηγές στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή και ο γεωμετρικός τόπος είναι η **μεσοκάθετος** του τμήματος O_1O_2.



❖Εύρεση των σημείων όπου έχουμε ενισχυτική συμβολή:

Θεωρούμε σημείο Μ του ευθύγραμμου τμήματος O_1O_2 όπου οι πηγές απέχουν απόσταση d.

- $|r_1 - r_2| = N \cdot \lambda \Leftrightarrow r_1 - r_2 = \pm N \cdot \lambda$ (1)
- Από το σχήμα προκύπτει: $r_1 + r_2 = d \Leftrightarrow r_2 = d - r_1$ (2)
- Από (1) και (2) προκύπτει: $r_1 = \dfrac{d \pm N \cdot \lambda}{2}$ (3)
- Και επειδή θα πρέπει: $0 < r_1 < d \xrightarrow{(3)} 0 < \dfrac{d \pm N \cdot \lambda}{2} < d$ (4)

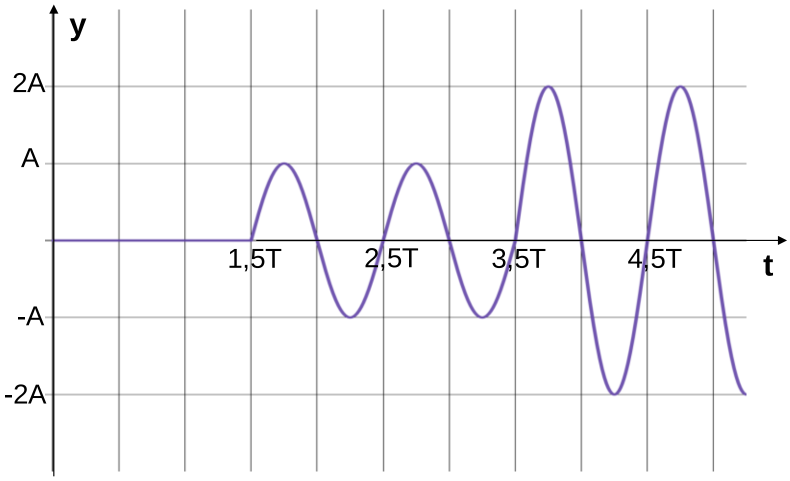
Από τη λύση της διπλής ανίσωσης υπολογίζουμε των αριθμό των ακεραίων Ν, άρα και των σημείων ενίσχυσης.

Θέτοντας τους αριθμούς Ν που υπολογίστηκαν από την (4) στη σχέση (3) βρίσκουμε και τις θέσεις των σημείων ενίσχυσης (ή απόσβεσης).

Από τη σχέση (4) είναι εμφανές ότι η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων ενίσχυσης (ή απόσβεσης) είναι ίση με λ/2.

Ας θεωρήσουμε το σημείο Κ το οποίο βρίσκεται στην υπερβολή ενίσχυσης με Ν=2. Αυτό σημαίνει ότι:

$r_1' - r_2' = 2\lambda$



Αν π.χ. η απόσταση $r_2' = 1{,}5\lambda$, τότε η απομάκρυνση y του Κ σε συνάρτηση με το χρόνο θα δίνεται από τις σχέσεις:

Για $0 \le t < \dfrac{r_2'}{u} = \dfrac{1{,}5\lambda}{u} = 1{,}5T$: Τη χρονική αυτή περίοδο στο σημείο Κ δεν έχει φτάσει κανένα από τα δύο κύματα, συνεπώς: $y_K = 0$.

Για $1{,}5T \le t < \dfrac{r_1'}{u} = \dfrac{1{,}5\lambda + 2\lambda}{u} = 3{,}5T$:Τη χρονική αυτή περίοδο στο σημείο Κ έχει φτάσει μόνο το κύμα από την πηγή O_2, συνεπώς το σημείο Κ θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με εξίσωση:

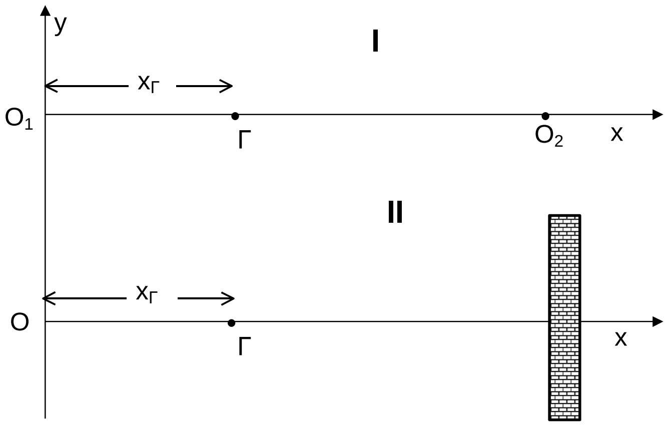
$$y_K = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2'}{\lambda}\right) = y_K = A\eta\mu(\omega t - 3\pi)$$

♦ Για $3{,}5T \le t$: Τη χρονική αυτή περίοδο στο σημείο Κ έχουν φτάσει τα κύματα και από τις δύο πηγές, συνεπώς το σημείο Κ θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με εξίσωση:

$$y_\Gamma = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)\right] = 2A\eta\mu(\omega t - 5\pi)$$

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

11. Εξισώσεις κίνησης σημείου του ελαστικού μέσου



Θεωρούμε δύο σύγχρονες και σύμφωνες πηγές O_1 και O_2 οι οποίες παράγουν αντίστοιχα δύο αρμονικά κύματα σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο με πλάτος Α, περίοδο Τ, μήκος κύματος λ, τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα υ

και σε αντίθετες κατευθύνσεις (I). Στο σημείο Γ θα έχουμε συμβολή των δύο κυμάτων. Την ίδια εικόνα θα έχουμε αν υπάρχει μια πηγή Ο η οποία παράγει αρμονικό κύμα το οποίο σε κάποιο σημείο του ελαστικού μέσου ανακλάται προς τα πίσω (II).
Σαν αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x=0) θεωρούμε την πηγή O_1 στην οποία οι απομακρύνσεις που προκαλούνται και από τα δύο κύματα έχουν την ίδια εξίσωση:

$$y = A\eta\mu\omega t$$

ενώ σαν αρχή μέτρησης των χρόνων (t=0) θεωρούμε την στιγμή που το σημείο O_1 περνά από την θέση ισορροπίας του (x=0) κινούμενο κατά την θετική φορά (u>0).

- Οποιαδήποτε χρονική στιγμή το σημείο Γ, λόγω της συμβολής των δυο κυμάτων, θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με εξίσωση:

$$y_\Gamma = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x_\Gamma}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \qquad (1)$$

με $\left|2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x_\Gamma}{\lambda}\right)\right| = |A'|$ το πλάτος της ταλάντωσης.

Οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της ταλάντωσης του σημείου Γ είναι:

$$u_\Gamma = u_{\Gamma,max}\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \qquad \text{όπου} \qquad u_{\Gamma,max} = \omega A'$$

$$a_\Gamma = -a_{\Gamma,max}\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \qquad \text{όπου} \qquad a_{\Gamma,max} = \omega^2 A'$$

12. Πλάτος ταλάντωσης σημείου του ελαστικού μέσου

- Αν $x_\Gamma = k\frac{\lambda}{2}$, με k=0, 1, 2, … ακέραιος,
  τότε στο σημείο Γ έχουμε ενίσχυση των δυο κυμάτων (τα δύο κύματα είναι σε συμφωνία φάσης), οπότε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Γ είναι μέγιστο:

  $|A'| = 2A$ και το σημείο Γ ονομάζεται κοιλία του στάσιμου κύματος

- Αν $x_\Gamma = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$, με k=0, 1, 2, … ακέραιος,
  τότε στο σημείο Γ έχουμε απόσβεση των δυο κυμάτων (τα δύο κύματα είναι σε αντίθεση φάσης), οπότε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Γ είναι μηδέν (το σημείο Γ είναι ακίνητο):

  $|A'| = 0$ και το σημείο Γ ονομάζεται δεσμός του στάσιμου κύματος

- Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το σημείο Γ εκτελεί ταλάντωση με πλάτος:

$$0 < 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x_\Gamma}{\lambda}\right)\right| < 2A$$

- Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή δύο διαδοχικών κοιλιών είναι λ/2 και μεταξύ ενός δεσμού και της πλησιέστερης σε αυτόν κοιλίας λ/4.

- Αν σαν αρχή μέτρησης των αποστάσεων θεωρήσουμε ένα δεσμό του στάσιμου κύματος, τότε η σχέση: $x = k\frac{\lambda}{2}$ με k=1,2,3,…
  μας δίνει την απόσταση των δεσμών από την αρχή (x=0) και η σχέση:

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad \text{με} \quad k=1,2,3,\ldots$$

μας δίνει την απόσταση των κοιλιών από την αρχή (x=0).

- Η διαφορά φάσης δύο σημείων, του στάσιμου κύματος, που μεταξύ τους παρεμβάλλεται άρτιος αριθμός δεσμών είναι Δφ=0 και όταν παρεμβάλλεται περιττός αριθμός δεσμών είναι Δφ=π.
  Αν γνωρίζουμε τις θέσεις των σημείων τότε φτιάχνουμε τις εξισώσεις κίνησής τους και:
  αν: $2A\text{συν}\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) > 0$, τότε: $y = A'\text{ημ}\frac{2\pi t}{T}$
  αν: $2A\text{συν}\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) < 0$, τότε: $y = -|A'|\text{ημ}\frac{2\pi t}{T} \Leftrightarrow y = |A'|\text{ημ}\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right)$
  Δηλαδή όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος θα έχουν μεταξύ τους Δφ=0 ή Δφ=π.

- Όταν το στάσιμο κύμα προέρχεται από ανάκλαση αρμονικού κύματος, τότε:
  Α) Αν η ανάκλαση γίνεται σε ακλόνητο εμπόδιο, **το σημείο της ανάκλασης είναι δεσμός** του στάσιμου κύματος. Έτσι κατά την ανάκλαση έχουμε μεταβολή της φάσης του προσπίπτοντος κύματος κατά π.
  Β) Αν η ανάκλαση γίνεται σε εμπόδιο ελεύθερο να κινείται, **το σημείο της ανάκλασης είναι κοιλία του στάσιμου κύματος**. Έτσι κατά την ανάκλαση δεν έχουμε μεταβολή της φάσης του προσπίπτοντος κύματος.

13. Δεδομένα που εξάγονται από την εξίσωση στάσιμου κύματος.

Όταν μας δίνεται μια εξίσωση στάσιμου κύματος τότε την μετασχηματίζουμε στη μορφή $y = 2A\cdot\text{συν}2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\text{ημ}2\pi\frac{t}{T}$ οπότε από τη σύγκριση προκύπτουν το πλάτος Α, η περίοδος Τ και το μήκος κύματος λ των δύο επιμέρους κυμάτων που η συμβολή τους δημιουργεί το στάσιμο κύμα.
Με δεδομένα τα Τ, λ από την κυματική εξίσωση υ=λf υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση που περιγράφει ένα στάσιμο κύμα που διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο κατά τη του άξονα x'x είναι: $y = 0,2\cdot\text{συν}\pi\frac{x}{60}\cdot\text{ημ}16\pi t$ (S.I.).
Από την εξίσωση του κύματος εξάγουμε τα εξής δεδομένα:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0,2\cdot\text{συν}\pi\frac{x}{60}\cdot\text{ημ}16\pi t \\ \\ y = 2A\cdot\text{συν}2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\text{ημ}2\pi\frac{t}{T}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0,2\cdot\text{συν}2\pi\frac{x}{120}\cdot\text{ημ}2\pi\cdot 8t \\ \\ y = 2A\cdot\text{συν}2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\text{ημ}2\pi\frac{t}{T}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2A = 0,2 \Rightarrow A = 0,1m \\ \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{120} \Rightarrow \lambda = 120m \\ \frac{t}{T} = 8t \Rightarrow T = \frac{1}{8}s \end{array}$$

Συνεπώς: $T = \frac{1}{8}s = 0,125s$, $f = \frac{1}{T} = 8Hz$

Το μήκος κύματος είναι: $\lambda = 120m$

Από την κυματική εξίσωση έχουμε: $\upsilon = \lambda\cdot f \Rightarrow \upsilon = 120m\cdot 8Hz \Rightarrow \upsilon = 960\frac{m}{s}$

Το πλάτος των επιμέρους κυμάτων είναι: $A = 0,1m$

14. Στιγμιότυπο στάσιμου κύματος

Θεωρούμε στάσιμο κύμα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση $y = 2A\text{συν}2\pi\frac{x}{\lambda}\text{ημ}2\pi\frac{t}{T}$ (1) και διαδίδεται πάνω σε μια χορδή μήκους L=2λ. Το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές α) t_1=T/4, β) t_2=T/2, γ) t_3=3T/4, σχεδιάζεται ως εξής:

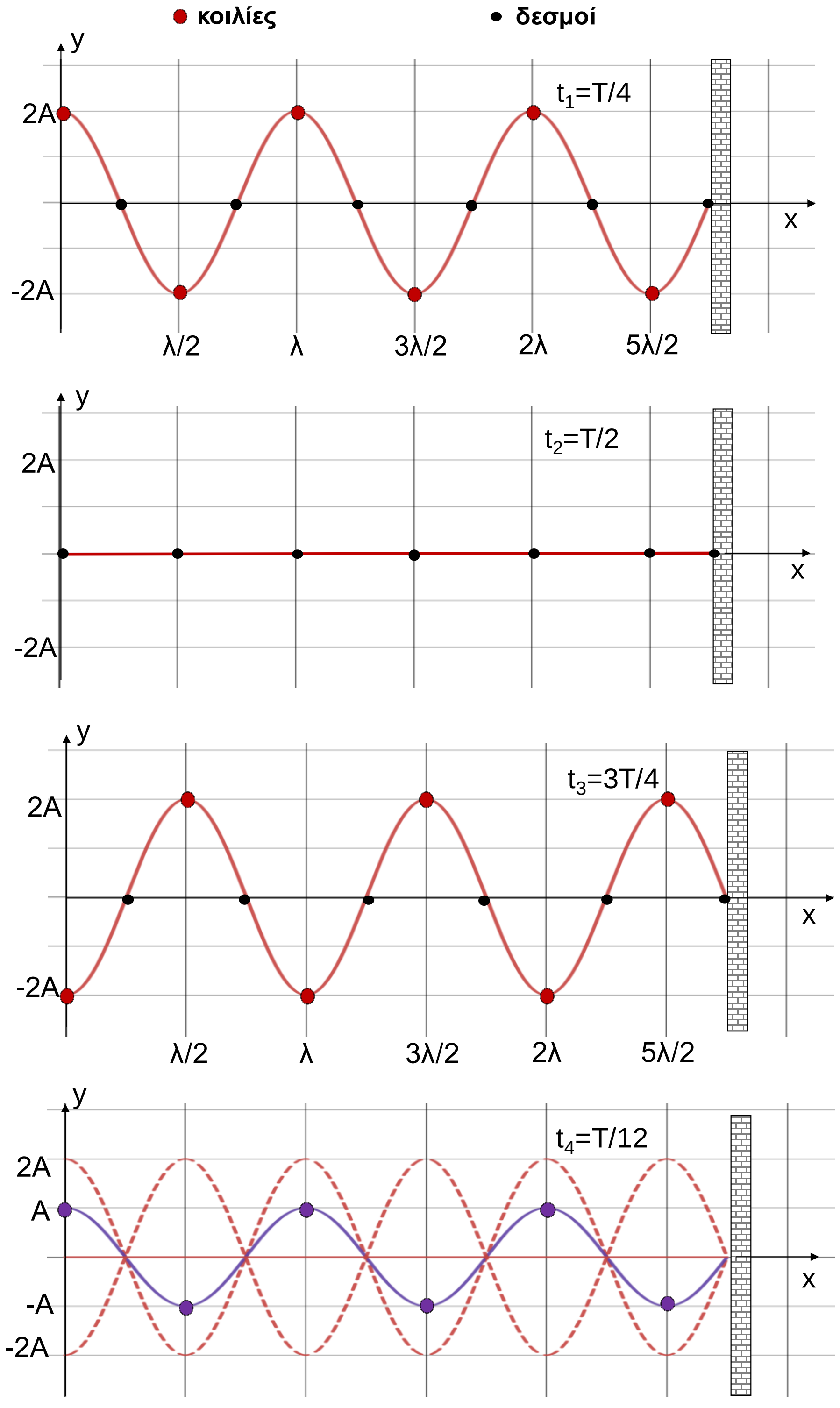
- Θέτουμε τις χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3 στην εξίσωση του στάσιμου κύματος, οπότε προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$(1)\xrightarrow{t=\frac{T}{4}} y_1 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow y_1 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

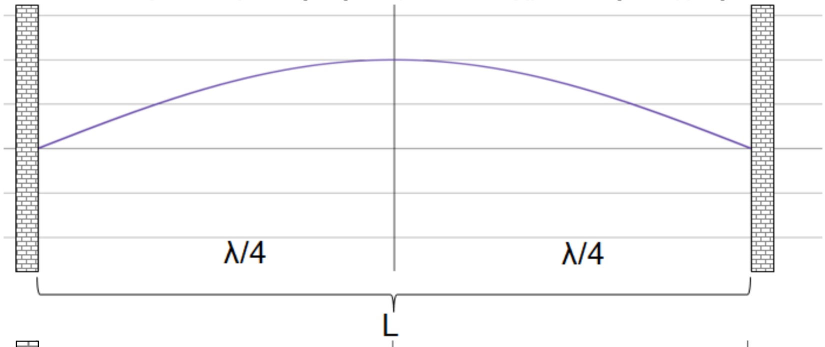
$$(1)\xrightarrow{t=\frac{T}{2}} y_2 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\pi \Rightarrow y_2 = 0$$

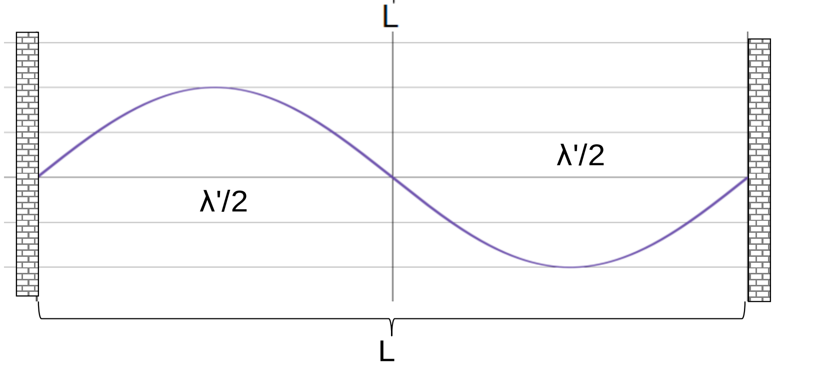
$$(1)\xrightarrow{t=\frac{3T}{4}} y_3 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow y_3 = -2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

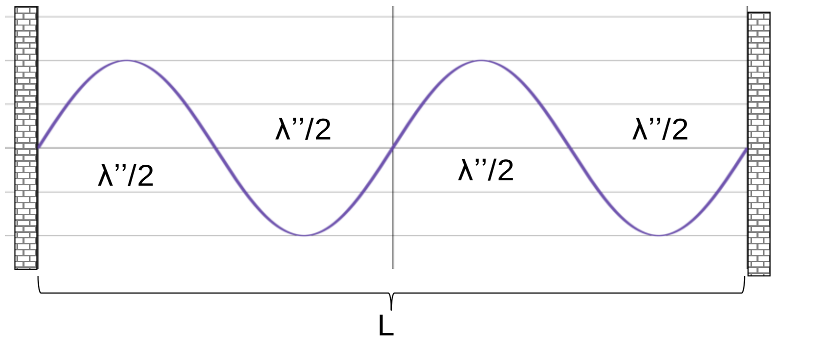
$$(1)\xrightarrow{t=\frac{T}{12}} y_4 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow y_3 = A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}$$



Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω εξισώσεων σε συνάρτηση με το x αποτελούν τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις παραπάνω χρονικές στιγμές.







Στην περίπτωση που η χορδή είναι στερεωμένη και στα δύο της άκρα, τα άκρα είναι δεσμοί και η εξίσωση του στάσιμου κύματος δεν μπορεί να περιγράψει τη μορφή του ελαστικού μέσου, αν ως αρχή των αξόνων θεωρήσουμε το ένα άκρο της χορδής. Στα παραπάνω σχήματα φαίνονται στιγμιότυπα του κύματος για διαφορετικές συχνότητες ταλάντωσης f, 2f, 4f.

15. Πως βρίσκουμε τον αριθμό των δεσμών ή των κοιλιών σε μια χορδή μήκους L, στην οποία έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα

Θεωρούμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος $y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\dfrac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\dfrac{t}{T}$ η οποία έχει τη μορφή αυτή μόνο στην περίπτωση που το σημείο με x=0 (αρχή μέτρησης των αποστάσεων) είναι κοιλία και τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (y=0) με u>0.

α) Αριθμός δεσμών:

Από τη θεωρία γνωρίζουμε οι θέσεις των δεσμών από την αρχή των αξόνων δίνονται από τη σχέση $x_\Delta = (2k+1)\cdot\dfrac{\lambda}{4}$.

Συνεπώς θα πρέπει το x_Δ να περιορίζεται στα όρια της χορδής δηλαδή μεταξύ του 0 και του L, οπότε λύνουμε την ανίσωση $0 \le x_\Delta \le L \Rightarrow 0 \le (2k+1)\cdot\dfrac{\lambda}{4} \le L$, ως προς k.

Άρα $0 \le 2k+1 \le \frac{4L}{\lambda} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{4L}{\lambda} - \frac{1}{2}$. Επειδή το k∈Z, επιλέγουμε τις ακέραιες τιμές που ανήκουν στο διάστημα που βρήκαμε.
Οπότε ο αριθμός των δεσμών είναι ο αριθμός των ακέραιων τιμών του k.

β) Αριθμός κοιλιών:
Από τη θεωρία γνωρίζουμε οι θέσεις των κοιλιών από την αρχή των αξόνων δίνονται από τη σχέση $x_K = k\frac{\lambda}{2}$.
Συνεπώς θα πρέπει το x_K να περιορίζεται στα όρια της χορδής δηλαδή μεταξύ του 0 και του L, οπότε λύνουμε την ανίσωση $0 \le x_K \le L \Rightarrow 0 \le k \cdot \frac{\lambda}{2} \le L$, ως προς k.

Άρα $0 \le k \le \frac{2L}{\lambda}$. Επειδή το k∈Z, επιλέγουμε τις ακέραιες τιμές που ανήκουν στο διάστημα που βρήκαμε. Οπότε ο αριθμός των κοιλιών είναι ο αριθμός των ακέραιων τιμών του k.