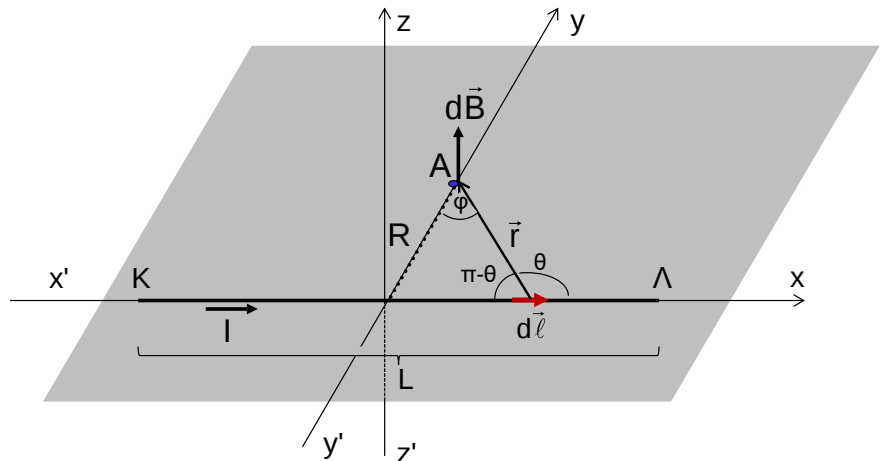


## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΝΟΜΩΝ ΤΟΥ AMPERE ΚΑΙ BIOT – SAVART

## I. Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού

Στην περίπτωση ευθύγραμμου ρευματοφόρου ΚΛ αγωγού μήκους  $L$ , που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$ , η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται σε κάποιο σημείο  $A$  του χώρου (σε απόσταση  $R$  από τον αγωγό) μπορεί να υπολογιστεί με τον νόμο των Biot-Savart. Ένα στοιχειώδες τμήμα  $d\vec{\ell}$  του αγωγού δημιουργεί στο σημείο  $A$  στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο έντασης  $d\vec{B}$ , με διεύθυνση και φορά αυτή που φαίνεται στο σχήμα, και μέτρο:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell r \sin\theta}{r^3} \xrightarrow{d\ell=dx} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin\theta}{r^2}$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι:

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \cos\varphi$$

και

$$\tan\varphi = \frac{x}{R} \Leftrightarrow x = R \tan\varphi \Leftrightarrow dx = \frac{R}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

Οπότε:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cos\varphi}{(R \cos\varphi)^2} d\varphi \xrightarrow{r \cos\varphi = R} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos\varphi}{R} d\varphi$$

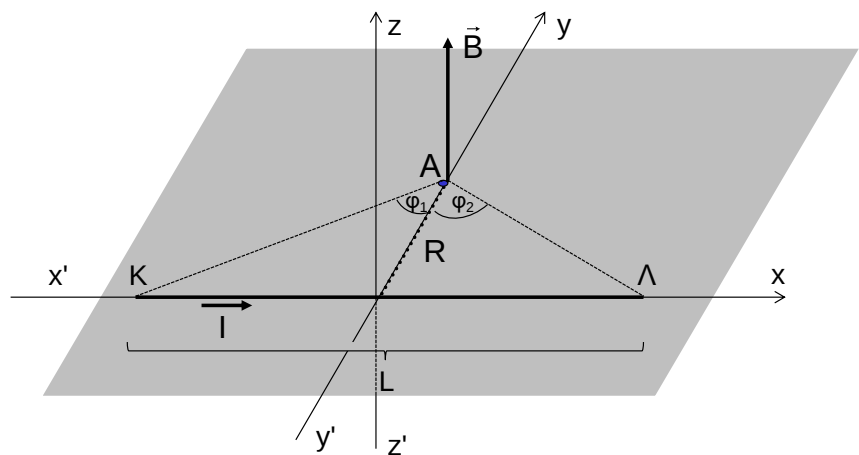
Ολοκληρώνοντας από  $\varphi_1$  ως  $\varphi_2$  έχουμε:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi d\varphi \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$

Αν ο αγωγός είναι απείρου μήκους ( $L \gg R$ ) τότε  $\varphi_1 = -\pi/2$  rad και  $\varphi_2 = \pi/2$  rad, οπότε η σχέση παίρνει την τελική μορφή:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} 2 \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι που έχουν το κοινό τους κέντρο πάνω στον αγωγό και το επίπεδό τους κάθετο στον αγωγό.

Η διεύθυνση του  $\vec{B}$  είναι εφαπτόμενη του κύκλου, που διέρχεται από το  $A$ , στο σημείο  $A$  (και σε κάθε σημείο της περιφέρειας), ενώ η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (ο αντίχειρας δείχνει την φορά του ρεύματος και τα δάκτυλα την φορά του  $\vec{B}$  και των δυναμικών γραμμών).

Στην περίπτωση του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$ , η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται σε κάποιο σημείο  $A$  του χώρου (σε απόσταση  $r$  από τον αγωγό) μπορεί εύκολα να υπολογιστεί και με τον νόμο του Ampere. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, εκλέγουμε ως κλειστή καμπύλη έναν κύκλο ακτίνας  $r$  όπου το επίπεδό του είναι κάθετο στον αγωγό και το κέντρο του είναι ο αγωγός. Χωρίζοντας τον κύκλο σε στοιχειώδη τμήματα  $\Delta \ell_1, \Delta \ell_2, \dots$  το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι εφαπτόμενο σε κάθε τμήμα ( $\theta=0^\circ$ ) και το μέτρο σταθερό  $B$ . Από τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_{\text{κύκλου}} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I \xrightarrow{B=\text{σταθερή}} B \oint_{\text{κύκλου}} d\vec{\ell} = \mu_0 I \Leftrightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \quad (12)$$

Η διεύθυνση του  $\vec{B}$  είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο  $A$  (και σε κάθε σημείο της περιφέρειας), ενώ η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (ο αντίχειρας δείχνει την φορά του ρεύματος και τα δάκτυλα την φορά του  $\vec{B}$  και των δυναμικών γραμμών). Οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι που έχουν το κοινό τους κέντρο πάνω στον αγωγό και το επίπεδό τους κάθετο στον αγωγό.

## II. Ένταση μαγνητικού πεδίου ρευματοφόρου δακτυλίου

Στην περίπτωση ρευματοφόρου δακτυλίου ακτίνας  $R$ , που διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$ , η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί σε ένα σημείο  $A$  που βρίσκεται σε ύψος  $h$  κατακόρυφα και πάνω από το κέντρο του δακτυλίου μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο των Biot-Savart.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \sin\theta}{r^2}$$

Η γωνία  $\theta=90^\circ$  (για όλα τα  $d\ell$ ) και όλες οι στοιχειώδεις εντάσεις  $dB$  έχουν διευθύνσεις που σχηματίζουν μια κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο  $A$ . Αναλύοντας τα διανύσματα  $dB$  στον κατακόρυφο άξονα  $z'z$  και στο επίπεδο  $xy$ , λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι συνιστώσες στο επίπεδο  $xy$  αλληλοαναιρούνται με αποτέλεσμα το συνολικό μαγνητικό πεδίο να έχει την κατεύθυνση του άξονα  $z'z$ . Συνεπώς από την σχέση (1) και (2) έχουμε:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos\omega \oint_{\text{κύκλος}} d\ell \xrightarrow{r^2=R^2+h^2} B = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2+h^2)} 2\pi R \cos\omega \xrightarrow{\cos\omega=\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}} B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+h^2)^{3/2}}}$$

Το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του δακτυλίου ( $h=0$ ) είναι:

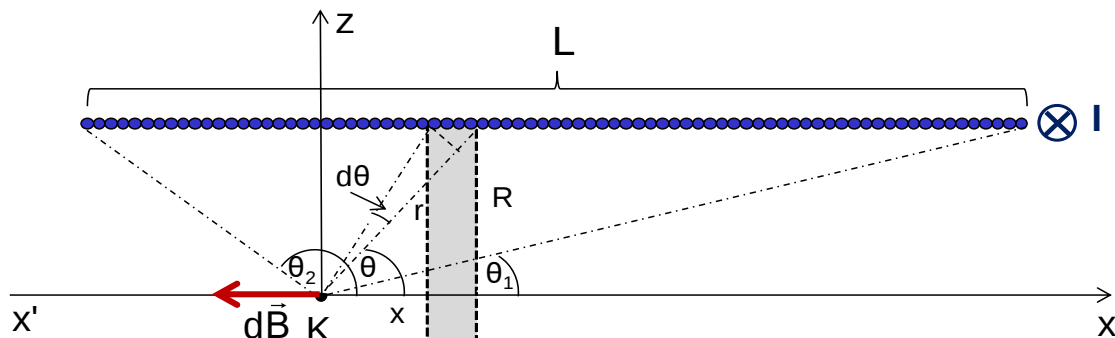
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Εάν ο δακτύλιος αποτελείται από  $N$  σπείρες η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$B = N \frac{\mu_0 I}{2R}$$

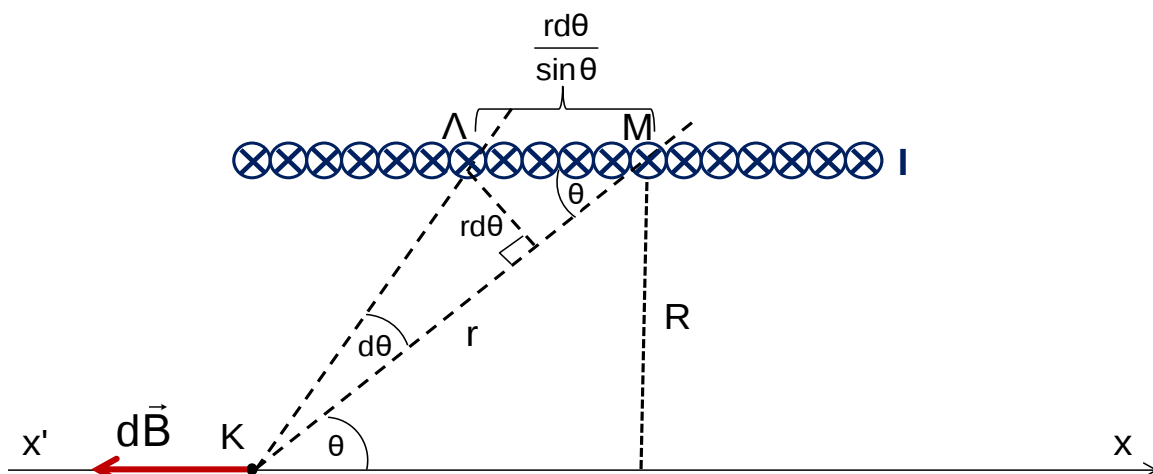
### III. Ένταση μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό σωληνοειδούς πολύ μεγάλου μήκους

Με τον νόμο του Biot - Savart



τομή σωληνοειδούς στο επίπεδο xz

σχήμα α



σχήμα β

Θεωρούμε σωληνοειδές με  $n$  σπείρες ανά μονάδα μήκους το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$ . Θα υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου σε σημείο  $K$  του άξονα συμμετρίας του σωληνοειδούς που εκτείνεται στον άξονα  $x'x$ . Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο  $K$  από «κάποιες» σπείρες του σωληνοειδούς που βρίσκονται εντός της στοιχειώδους γωνίας  $d\theta$ , θα θεωρήσουμε ότι οι σπείρες είναι τόσο πυκνά τοποθετημένες ώστε μπορούν να θεωρηθούν κυκλικές με ακτίνα  $R$ . Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που μας υπολογίζει την ένταση του μαγνητικού πεδίου κυκλικού αγωγού σε απόσταση  $x$  από το κέντρο του και κατά τη διεύθυνση που είναι κάθετη σε αυτό. Άρα:

$$dB = \frac{\mu_0 I' R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \xrightarrow{R^2 + x^2 = r^2} dB = \frac{\mu_0 I' R^2}{2r^3} \quad (13)$$

Το πρόβλημα έγκειται στο να βρούμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αριθμό των σπειρών που βρίσκονται στο ευθύγραμμο τμήμα (ΛΜ). Η συνολική ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις εν λόγω σπείρες θα είναι:

$$I' = I \cdot N \cdot \frac{(\Lambda M)}{L} \Leftrightarrow I' = I \cdot n \cdot (\Lambda M) \quad (14)$$

Επίσης το μήκος (ΛΜ) είναι ίσο με (βλέπε σχήμα β):  $(\Lambda M) = \frac{r \cdot d\theta}{\sin \theta} \quad (15)$

$$(12) \xrightarrow{(13)} dB = \frac{\mu_0 R^2 I n r d\theta}{2r^3 \sin \theta} \Leftrightarrow dB = \frac{\mu_0 R^2 I n d\theta}{2r^2 \sin \theta} \rightarrow B = \frac{\mu_0 R^2 I n}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{r^2 \sin \theta} \xrightarrow{r \sin \theta = R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2 n}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta d\theta}{R^2} \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)} \quad (16)$$

Προφανώς το μαγνητικό πεδίο στην περίπτωση αυτή δεν είναι ομογενές, αφού η έντασή του εξαρτάται από τη θέση του σημείου Κ. Όταν το σωληνοειδές είναι απείρου μήκους τότε  $\theta_1=0$  και  $\theta_2=\pi$  rad επομένως η σχέση (16) καταλήγει στη γνωστή:

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

Το πεδίο στην περίπτωση αυτή είναι ομογενές. Για ένα σημείο που βρίσκεται στα άκρα του σωληνοειδούς π.χ. αριστερό άκρο οι γωνίες  $\theta_1=0$  και  $\theta_2=\pi/2$  rad επομένως:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 n I}{2}}$$

### Με τον νόμο του Ampere

Στην περίπτωση σωληνοειδούς, πολύ μεγάλου μήκους με  $n$  σπείρες ανά μονάδα μήκους, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $I$ , η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο του Ampere.

Από την συμμετρία του προβλήματος (το πεδίο είναι ομογενές στο εσωτερικό και  $B=0$  στον εξωτερικό χώρο) εκλέγουμε κλειστή καμπύλη σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΓΔΕΑ με πλευρά (ΑΓ)=(ΔΕ)= $\ell$ .

Στο μήκος αυτό το σωληνοειδές έχει  $N=n\ell$  σπείρες.

Από τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_{\text{ΑΓΔΕΑ}} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{εσ}} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\int_{\text{ΑΓ}} \vec{B} d\vec{\ell}}_0 + \underbrace{\int_{\text{ΓΔ}} \vec{B} d\vec{\ell}}_0 + \int_{\text{ΔΕ}} \vec{B} d\vec{\ell} + \underbrace{\int_{\text{ΕΑ}} \vec{B} d\vec{\ell}}_0 = \mu_0 I_{\text{εσ}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{\text{ΔΕ}} B d\ell \cos \theta = \mu_0 I_{\text{εσ}} \xrightarrow{\theta=0, I_{\text{εσ}}=NI} B \int_{\text{ΔΕ}} d\ell = \mu_0 N I \Leftrightarrow B \ell = \mu_0 N I \Leftrightarrow$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \Leftrightarrow \boxed{B = \mu_0 n I}$$
