ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Η **στροφορμή** $\vec{L}$, υλικού σημείου, ως προς ένα σημείο Ο (που αποτελεί και το σημείο του συστήματος αναφοράς Oxyz), το οποίο κινείται έχοντας ορμή $\vec{p}$, ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος της θέσης του σωματιδίου $\vec{r}$ και της ορμής $\vec{p}$ του υλικού σημείου:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}\Leftrightarrow\vec{L}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix}\quad \text{σε καρτεσιανές συντεταγμένες}$$

με: $\vec{L}_x=\left(p_z y-p_y z\right)\hat{i}$, $\quad\vec{L}_y=\left(p_x z-p_z x\right)\hat{j}\quad$ και $\quad\vec{L}_z=\left(p_y x-p_x y\right)\hat{k}$

- το μέτρο της στροφορμής υπολογίζεται από τη σχέση: $L=pr\sin\theta$
  όπου θ η γωνία που σχηματίζει η το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ με την ορμή $\vec{p}$.
- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{p}$ και
- φορά που προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (ή τον κανόνα της δεξιόστροφου κοχλία), όπου τα δάκτυλα του δεξιού χεριού προσανατολίζονται στο διάνυσμα θέσης και στη συνέχεια στρέφουμε το χέρι μας προς το διάνυσμα της ορμής κατά τη μικρότερη δυνατή γωνία. Τότε ο αντίχειρας «δείχνει» τη στροφορμή.

Απόδειξη: $L=\sqrt{L_x^2+L_y^2+L_z^2}\Leftrightarrow L=\sqrt{\left(p_z y-p_y z\right)^2+\left(p_x z-p_z x\right)^2+\left(p_y x-p_x y\right)^2}\Leftrightarrow$

$$L=\sqrt{p_z^{\,2}\left(x^2+y^2\right)+p_y^{\,2}\left(x^2+z^2\right)+p_x^{\,2}\left(z^2+y^2\right)-2p_zp_yzy-2p_xp_zxz-2p_xp_yxy}\Leftrightarrow$$

$$L=\sqrt{p_z^{\,2}\left(r^2-z^2\right)+p_y^{\,2}\left(r^2-y^2\right)+p_x^{\,2}\left(r^2-x^2\right)-2p_zp_yzy-2p_xp_zxz-2p_xp_yxy}\Leftrightarrow$$

$$L=\sqrt{r^2\left(p_z^{\,2}+p_y^{\,2}+p_x^{\,2}\right)-p_z^{\,2}z^2-p_y^{\,2}y^2-p_x^{\,2}x^2-2p_zp_yzy-2p_xp_zxz-2p_xp_yxy}\Leftrightarrow$$

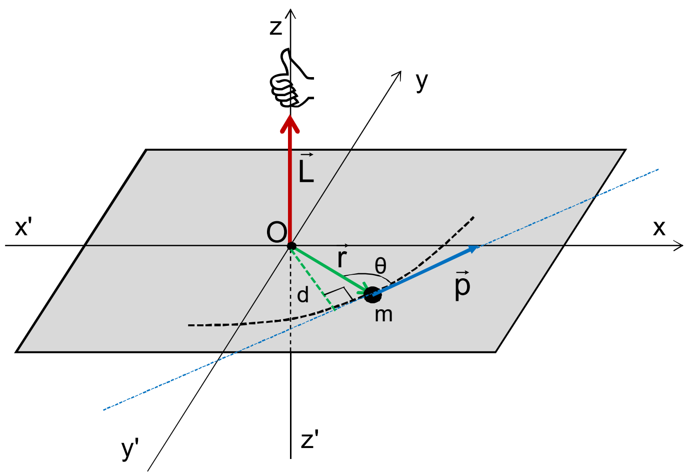
$$L=\sqrt{r^2p^2-\left(p_zz+p_yy+p_xx\right)^2}\xrightarrow{p_zz+p_yy+p_xx=\vec{r}\vec{p}}L=\sqrt{r^2p^2-r^2p^2\cos^2\theta}\Leftrightarrow$$

$$L=r\cdot p\sqrt{1-\cos^2\theta}\Leftrightarrow L=r\cdot p\cdot\sin\theta$$

1η περίπτωση
Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο x-y όπου βρίσκεται και η αρχή του συστήματος αναφοράς Oxyz.

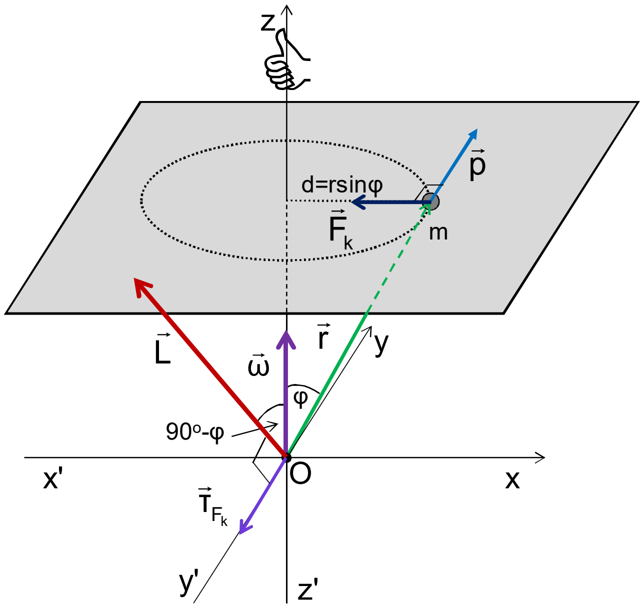
Η στροφορμή $\vec{L}$ του υλικού σημείου ως προς το σημείο Ο του συστήματος αναφοράς Oxyz, έχει την κατεύθυνση του άξονα z'z και είναι κάθετη στο επίπεδο x-y. Το μέτρο της είναι:

$$L=pr\sin\theta=mud$$



όπου d=rsinθ η απόσταση του φορέα της ορμής από το σημείο Ο.
Παρατηρούμε ότι το υλικό σημείο έχει στροφορμή ως προς το Ο ανεξάρτητα από το είδος της κίνησής του (κυκλική, ευθύγραμμη κτλ).
Αν η κίνηση του υλικού σημείου είναι κυκλική με κέντρο το Ο και ακτίνα r τότε η στροφορμή είναι ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$, η οποία είναι επίσης κάθετη στο επίπεδο x-y και συνδέεται με την ταχύτητα $\vec{u}$ και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ με τη σχέση: $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

2η περίπτωση
Το υλικό σημείο κινείται σε επίπεδο παράλληλο στο x-y όπου βρίσκεται η αρχή του συστήματος αναφοράς Oxyz εκτελώντας κυκλική τροχιά ακτίνας d όπου το κέντρο της βρίσκεται στον άξονα z'z.

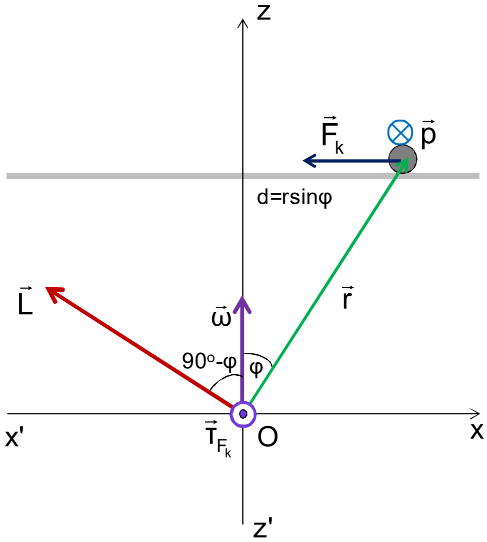


σχήμα (α)

Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα z'z.
Η γωνιακή ταχύτητα του υλικού σημείου βρίσκεται στον άξονα z'z.
Η ορμή (άρα και η ταχύτητα) του υλικού σημείου βρίσκεται στο επίπεδο κίνησης και εφαπτομενικό της κυκλικής τροχιάς. Επίσης είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ($\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$).
Το διάνυσμα της στροφορμής, ως προς το σημείο Ο, είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{p}$ και σχηματίζει γωνία 90°-φ με τον άξονα z'z, σχήματα (α), 3-διαστάσεις και (β), 2-διαστάσεις.
Το μέτρο της στροφορμής είναι:

$$L = pr\sin 90^{o} = mur$$

Παρατηρούμε ότι <u>το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{\mathbf{L}}$ δεν είναι συγγραμμικό με αυτό της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$</u> και φυσικά δεν έχει την διεύθυνση του άξονα περιστροφής z'z του υλικού σημείου.
Στην πραγματικότητα το διάνυσμα $\vec{\mathbf{L}}$ εκτελεί μια μεταπτωτική κίνηση γύρω από τον άξονα z'z σχηματίζοντας γωνία 90°-φ με αυτόν με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ίδια με αυτήν του υλικού σημείου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνισταμένη των δυνάμεων, κατά την διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, που ασκείται στο υλικό σημείο και αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη παράγει ροπή ως προς το σημείο Ο ($\vec{\tau}_{F_k} = \vec{r} \times \vec{F}_k$). Η ροπή αυτή είναι κάθετη στο διάνυσμα της στροφορμής και μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνσή της και όχι το μέτρο της, σχήμα (β).

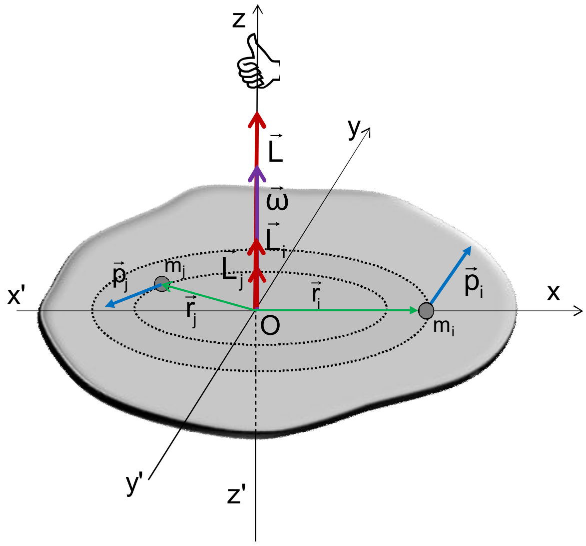


σχήμα (β)

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

3η περίπτωση

Στερεή επίπεδη πλάκα (αμελητέου πάχους) και τυχαίου σχήματος, η οποία εκτείνεται στο επίπεδο x-y του συστήματος αναφοράς Oxyz. Η πλάκα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z'z, με γωνιακή ταχύτητα ω.



Θεωρούμε ότι η πλάκα αποτελείται από στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2,...,m_ν, οι οποίες διαγράφουν κυκλικές τροχιές ακτίνας r_1, r_2,...,r_ν αντίστοιχα με γωνιακή ταχύτητα ω. Το μέτρο της ολικής στροφορμής του σώματος, <u>ως προς την αρχή των αξόνων Ο</u>, ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των επιμέρους στοιχειωδών μαζών. Δηλαδή:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_i + \ldots + \vec{L}_j$$

Τα διανύσματα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών είναι κάθετα στο επίπεδο της πλάκας και στην κατεύθυνση του άξονα z'z.

$$L = m_1 r_1 u_1 + m_2 r_2 u_2 + \ldots + m_i r_i u_i + \ldots + m_j r_j u_j \xrightarrow{u_i = \omega r_i}$$

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \ldots + m_i r_i^2 \omega + \ldots + m_j r_j^2 \omega \Leftrightarrow L = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \Leftrightarrow L = I_{z'z}\omega$$

Εναλλακτικά με τη βοήθεια διανυσματικής ανάλυσης:

$$\vec{L} = \int\limits_{\text{επιφάνεια}} d\vec{L} \Leftrightarrow \vec{L} = \int\limits_{\text{επιφάνεια}} (\vec{r} \times \vec{u})dm \xrightarrow{\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \vec{L} = \int\limits_{\text{επιφάνεια}} [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]dm \qquad (1)$$

Με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητας: $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\omega})$ (2)

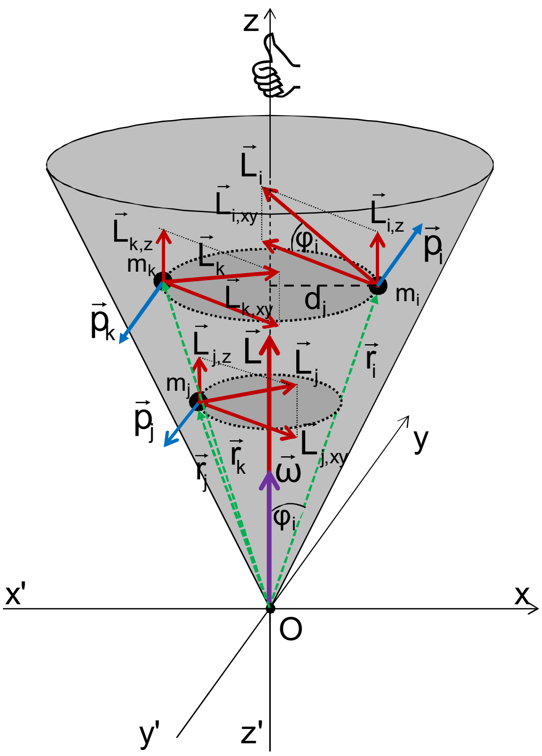
$$(1) \xrightarrow{(2)} \vec{L} = \int\limits_{\text{επιφάνεια}} \vec{\omega} r^2 dm \xrightarrow{\vec{\omega} = \text{σταθερή}} \vec{L} = \vec{\omega} \int\limits_{\text{επιφάνεια}} r^2 dm \Leftrightarrow \vec{L} = I_{z'z}\vec{\omega}$$

όπου $\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = 0$ λόγω καθετότητας

Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή είναι συγγραμμική και ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας και $I_{z'z}$ η ροπή αδράνειας της πλάκας ως προς τον άξονα z'z.

4η περίπτωση

Θεωρούμε το ομογενές γεωμετρικό στερεό του σχήματος, το οποίο έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα z'z ενώ η κορυφή του είναι το σημείο O του συστήματος Oxyz. Το στερεό στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ με άξονα περιστροφής τον άξονα z'z, που αποτελεί και τον άξονα συμμετρίας του.



Με ανάλογο συλλογισμό με την προηγούμενη περίπτωση έχουμε:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_i + \ldots + \vec{L}_j$$

Στην περίπτωση αυτή οι στροφορμές των στοιχειωδών μαζών έχουν τυχαίες κατευθύνσεις στο χώρο. Αναλύουμε τις επιμέρους στροφορμές σε 2 συνιστώσες, μία στον άξονα z'z και μία στο επίπεδο που είναι παράλληλο στο επίπεδο x-y. Λόγω της συμμετρίας, για κάθε στοιχειώδη μάζα m_i υπάρχει μια αντιδιαμετρική m_k όπου οι συνιστώσες $L_{i(xy)}$ και $L_{k(xy)}$ είναι αντίθετες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η συνεισφορά στη στροφορμή της κάθε στοιχειώδους μάζας να είναι η συνιστώσα στον άξονα των z'z.

Επομένως:

$$\vec{L} = \vec{L}_{1,z} + \vec{L}_{2,z} + \ldots + \vec{L}_{i,z} + \ldots \rightarrow L = p_1 r_1 \sin\varphi_1 + p_2 r_2 \sin\varphi_2 + \ldots + p_i r_i \sin\varphi_i + \ldots \Leftrightarrow$$

$$L = m_1 u_1 d_1 + m_2 u_2 d_2 + \ldots + m_i u_i d_i + \ldots \xrightarrow{u_i = \omega d_i} L = m_1 d_1{}^2 \omega + m_2 d_2{}^2 \omega + \ldots + m_i d_i{}^2 \omega + \ldots \Leftrightarrow$$

$$L = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2 \Leftrightarrow L = I_{z'z}\omega$$

Εναλλακτικά με τη βοήθεια διανυσματικής ανάλυσης:

$$\vec{L} = \int_{\text{επιφάνεια}} d\vec{L} \Leftrightarrow \vec{L} = \int_{\text{επιφάνεια}} (\vec{r} \times \vec{u})dm \xrightarrow{\vec{u} = \vec{\omega}\times\vec{r}} \vec{L} = \int_{\text{επιφάνεια}} [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]dm \qquad (3)$$

Με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητας (2)

$$(3) \xrightarrow{(2)} \vec{L} = \int_{\text{όγκος}} dm \cdot [\vec{\omega} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\omega})] \qquad (4)$$

όπου $\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$ (5), $\quad \vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (6),

$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{k}$ (7), $\quad \vec{r} \cdot \vec{\omega} = \omega r \cos\varphi = \omega z$ (8)

$$(4) \xrightarrow[(7),(8)]{(5),(6)} \vec{L} = \int_{\text{όγκος}} dm \cdot \left[(x^2 + y^2 + z^2) \cdot \omega\hat{k} - \left(x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}\right) \cdot \omega z\right] \Leftrightarrow$$

$$\vec{L} = \int_{\text{όγκος}} dm[(\underbrace{x^2 + y^2}_{d^2}) \cdot \omega\hat{k} - \omega z\left(x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j}\right)] \Leftrightarrow \vec{L} = \vec{\omega} \int_{\text{όγκος}} d^2 \cdot dm - \omega \int_{\text{όγκος}} zdm\left(x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j}\right)$$

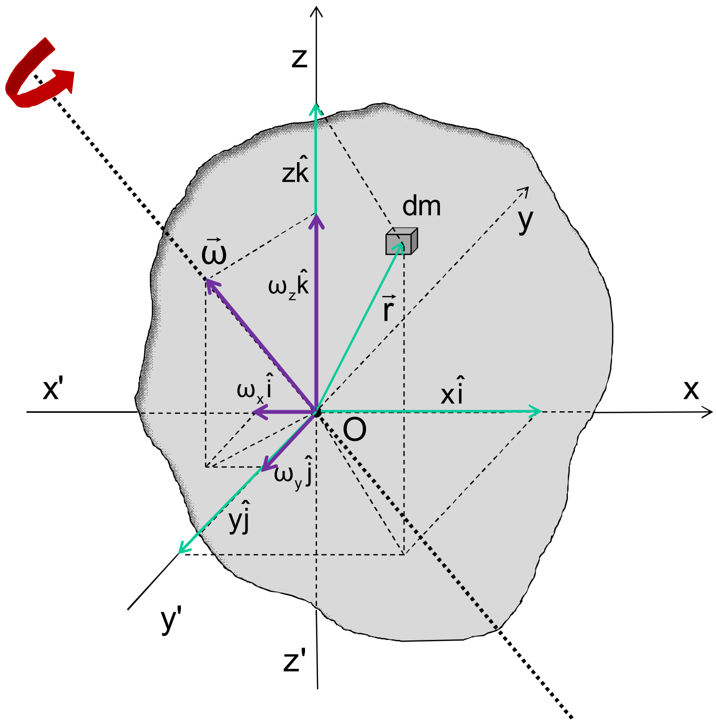
Λόγω της συμμετρίας του σχήματος το δεύτερο ολοκλήρωμα: $\omega \int\limits_{όγκος} zdm\left(x\cdot\hat{i}+y\cdot\hat{j}\right)=0$ εφόσον οι στοιχειώδεις μάζες dm κατανέμονται συμμετρικά γύρω από τον άξονα περιστροφής στα επίπεδα που είναι παράλληλα στο x-y.

Επομένως: $\vec{L}=\vec{\omega}\int\limits_{όγκος} d^2\cdot dm \xrightarrow{\int\limits_{όγκος} d^2\cdot dm = I_{z'z}} \vec{L}=I_{z'z}\vec{\omega}$

Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή είναι συγγραμμική ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας. Αν η κατανομή της μάζας του στερεού γύρω από τον άξονα περιστροφής δεν είναι συμμετρική τότε το ολοκλήρωμα $\omega \int\limits_{όγκος} zdm\left(x\cdot\hat{i}+y\cdot\hat{j}\right)\neq 0$ και ο φορέας του διανύσματος της στροφορμής αποκλίνει από την διεύθυνση του άξονα z'z.

5η (γενική) περίπτωση

Θεωρούμε τυχαίο γεωμετρικό στερεό, το οποίο στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ως προς άξονα περιστροφής με τυχαία διεύθυνση στο χώρο.



$$\vec{L}=\int\limits_{όγκος} dm\cdot\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (9)$$

Με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητας (2):

$$\vec{L}=\int\limits_{όγκος} dm\cdot\left[\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})-\vec{r}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right] \quad (10)$$

όπου

$$\vec{r}=x\cdot\hat{i}+y\cdot\hat{j}+z\cdot\hat{k} \qquad (5),$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (6),$$

$$\vec{\omega}=\omega_x\cdot\hat{i}+\omega_y\cdot\hat{j}+\omega_z\cdot\hat{k} \qquad (11)$$

$$\vec{r}\cdot\vec{\omega}=x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z \qquad (12)$$

$$(10)\xrightarrow[(11),(12)]{(5),(6)}\vec{L}=\int\limits_{όγκος} dm\cdot\left[r^2\left(\omega_x\cdot\hat{i}+\omega_y\cdot\hat{j}+\omega_z\cdot\hat{k}\right)-\left(x\cdot\hat{i}+y\cdot\hat{j}+z\cdot\hat{k}\right)\cdot(x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z)\right]\Leftrightarrow$$

$$\vec{L}=\int\limits_{όγκος} dm\cdot\left(r^2\omega_x-x^2\omega_x-xy\omega_y-xz\omega_z\right)\cdot\hat{i}+\int\limits_{όγκος} dm\cdot\left(r^2\omega_y-xy\omega_x-y^2\omega_y-yz\omega_z\right)\cdot\hat{j}+$$

$$+\int\limits_{όγκος} dm\cdot\left(r^2\omega_z-zx\omega_x-zy\omega_y-z^2\omega_z\right)\cdot\hat{k}\Leftrightarrow\vec{L}=L_x\hat{i}+L_y\hat{j}+L_z\hat{k}$$

όπου:
$$L_x = \int_{όγκος} \left(\underbrace{r^2 - x^2}_{y^2+z^2}\right) dm \cdot \omega_x - \int_{όγκος} xydm \cdot \omega_y - \int_{όγκος} xzdm \cdot \omega_z = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = -\int_{όγκος} xydm \cdot \omega_x + \int_{όγκος} \left(\underbrace{r^2 - y^2}_{x^2+z^2}\right) dm \cdot \omega_y - \int_{όγκος} yzdm \cdot \omega_z = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_y = -\int_{όγκος} xzdm \cdot \omega_x - \int_{όγκος} yzdm \cdot \omega_y + \int_{όγκος} \left(\underbrace{r^2 - z^2}_{x^2+y^2}\right) dm \cdot \omega_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Επομένως οι συνιστώσες της στροφορμή μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

όπου $\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$ ο τανυστής αδράνειας του οποίου τα 6 από τα 9 στοιχεία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, $I_{xx} = \int_{όγκος} \left(y^2 + z^2\right) dm$, $I_{yy} = \int_{όγκος} \left(x^2 + z^2\right) dm$, $I_{zz} = \int_{όγκος} \left(x^2 + y^2\right) dm$, $I_{xy} = -\int_{όγκος} xydm = I_{yx}$, $I_{xz} = -\int_{όγκος} xzdm = I_{zx}$, $I_{yz} = -\int_{όγκος} zydm = I_{zy}$, ενώ τα 3 από αυτά I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} αποτελούν τις ροπές αδρανείας του στερεού ως προς τους άξονες x’x, y’y και z’z.

Συμπεράσματα:

- Γενικά η στροφορμή και η γωνιακή ταχύτητα δεν είναι συγγραμμικά διανύσματα είτε αναφερόμαστε σε υλικό σημείο είτε σε στερεό σώμα.
- Η στροφορμή ενός στερεού είναι συγγραμμική και ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής μόνο στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής είναι και άξονας συμμετρίας του στερεού.
- Η στροφορμή ενός σώματος μπορεί να μεταβάλλεται παρόλο που η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος μπορεί να είναι σταθερή.
- Η στροφορμή υλικού σημείου ή στερεού υπολογίζεται σε σχέση με κάποιο σημείο και όχι σε σχέση με άξονα περιστροφής.
- Αν ο άξονας περιστροφής του στερεού σώματος είναι σταθερός τότε η επιλογή του συστήματος αναφοράς μπορεί να απλοποιήσει τον υπολογισμό της στροφορμής, ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς Ο, αν ένας εκ των αξόνων του συστήματος αναφοράς συμπέσει με τον άξονα περιστροφής και επομένως με τη διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας.