ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Θετικό ηλεκτρικό φορτίο q κινείται παράλληλα με ταχύτητα $\vec{v}$, κατά μήκος του άξονα x'x, σε μια κατανομή κινούμενων θετικών και αρνητικών φορτίων με γραμμικές πυκνότητες +λ και –λ και ταχύτητες $\vec{u}_o$ και $-\vec{u}_o$ αντίστοιχα ως προς ένα ακίνητο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (π.χ. σύστημα εργαστηρίου). Στο σύστημα αυτό το κινούμενο φορτίο δεν δέχεται ηλεκτρική δύναμη από τις κατανομές διότι το ηλεκτρικό πεδίο των κατανομών είναι μηδενικό.

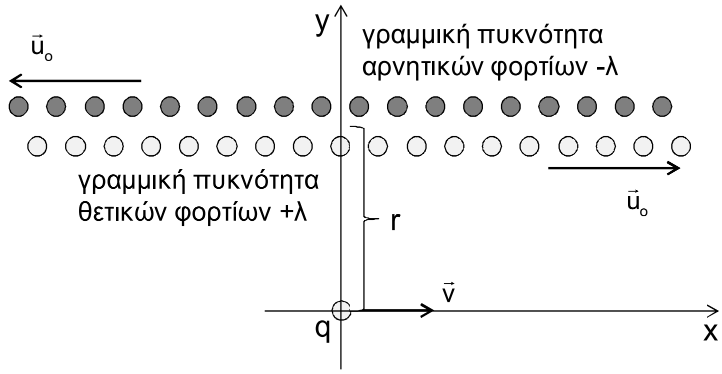
Στο σύστημα αναφοράς του κινούμενου φορτίου οι δύο κατανομές έχουν ταχύτητες $\vec{u}'_+$ και $\vec{u}'_-$ τα μέτρα των οποίων μπορούν να υπολογιστούν από τον μετασχηματισμό Lorentz των ταχυτήτων ως εξής:

$$u'_+ = \frac{u_o - v}{1 - \frac{v \cdot u_o}{c^2}} \qquad (1)$$

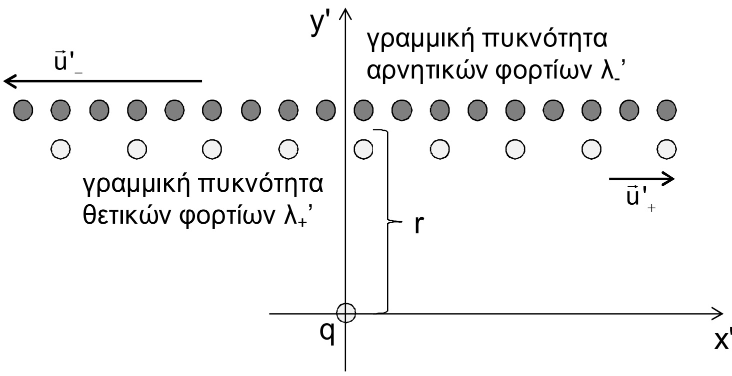
και

$$u'_- = \frac{u_o + v}{1 + \frac{v \cdot u_o}{c^2}} \qquad (2)$$

Ακίνητο Αδρανειακό Σύστημα



Αδρανειακό Σύστημα κινούμενου φορτίου



Οι δύο κατανομές, ως προς το δικό τους σύστημα αναφοράς θα υποστούν μια διαστολή μήκους (εφόσον ως προς το ακίνητο σύστημα έχουμε συστολή μήκους) και οι γραμμικές πυκνότητες θα έχουν τιμές $+\lambda\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}} = \frac{+\lambda}{\gamma_o}$ και $-\lambda\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}} = \frac{-\lambda}{\gamma_o}$, οπότε ως προς το σύστημα αναφοράς του σωματιδίου θα υποστούν μια νέα συστολή μήκους και θα αυξηθούν στις τιμές:

$$\lambda'_+ = +\frac{\lambda\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u'^2_+}{c^2}}} = \frac{+\lambda \cdot \gamma'_+}{\gamma_o} \quad \text{και} \quad \lambda'_- = -\frac{\lambda\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u'^2_-}{c^2}}} = \frac{-\lambda \cdot \gamma'_-}{\gamma_o}$$

οι οποίες είναι και εμφανώς διαφορετικές μεταξύ τους. Συνεπώς η γραμμική κατανομή φορτίου που αντιλαμβάνεται το φορτίο στο δικό του σύστημα αναφοράς θα είναι:

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_o}(\gamma'_+ - \gamma'_-) \Leftrightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_o}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u'_+}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u'_-}{c}\right)^2}}\right] \Leftrightarrow$$

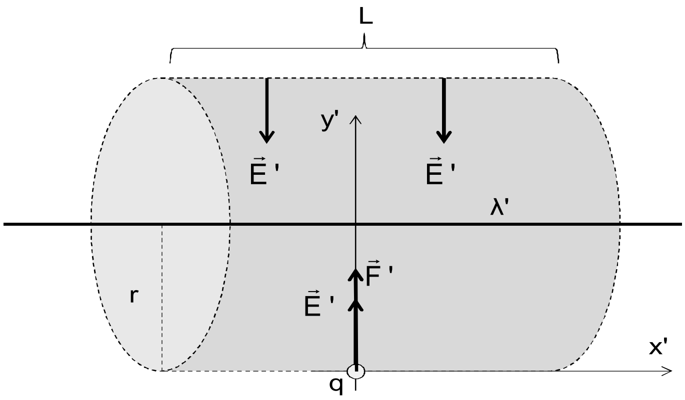
$$\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_o}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{u'_-}{c}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{u'_+}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u'_+}{c}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u'_-}{c}\right)^2}} \xrightarrow[(2)]{(1)} \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_o}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{u_o}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{v\cdot u_o}{c^2}}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\frac{u_o}{c}-\frac{v}{c}}{1-\frac{v\cdot u_o}{c^2}}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{u_o}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{v\cdot u_o}{c^2}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\frac{u_o}{c}-\frac{v}{c}}{1-\frac{v\cdot u_o}{c^2}}\right)^2}} \xrightarrow[\frac{v}{c}=\beta]{\frac{u_o}{c}=\beta_o}$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_o}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_o+\beta}{1+\beta\cdot\beta_o}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\beta_o-\beta}{1-\beta\cdot\beta_o}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_o+\beta}{1+\beta\cdot\beta_o}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\beta_o-\beta}{1-\beta\cdot\beta_o}\right)^2}} \Leftrightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_o}\frac{\sqrt{\frac{1+\beta^2\cdot\beta_o^2-\beta_o^2-\beta^2}{(1+\beta\cdot\beta_o)^2}}-\sqrt{\frac{1+\beta^2\cdot\beta_o^2-\beta_o^2-\beta^2}{(1-\beta\cdot\beta_o)^2}}}{\sqrt{\frac{1+\beta^2\cdot\beta_o^2-\beta_o^2-\beta^2}{(1+\beta\cdot\beta_o)^2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\beta^2\cdot\beta_o^2-\beta_o^2-\beta^2}{(1-\beta\cdot\beta_o)^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_o}\frac{\sqrt{\frac{1}{(1+\beta\cdot\beta_o)^2}}-\sqrt{\frac{1}{(1-\beta\cdot\beta_o)^2}}}{\sqrt{\frac{1+\beta^2\cdot\beta_o^2-\beta_o^2-\beta^2}{(1+\beta\cdot\beta_o)^2(1-\beta\cdot\beta_o)^2}}} \Leftrightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma_o}\frac{\sqrt{(1-\beta\cdot\beta_o)^2}-\sqrt{(1+\beta\cdot\beta_o)^2}}{\sqrt{1+\beta^2\cdot\beta_o^2-\beta_o^2-\beta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{\gamma_o}\frac{2\beta\cdot\beta_o}{\sqrt{(1-\beta^2)\cdot(1-\beta_o^2)}} \xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{(1-\beta_o^2)}}=\gamma_o]{\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}=\gamma} \lambda' = -2\lambda\beta\cdot\beta_o\gamma \qquad (3)$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για την γραμμική κατανομή φορτίου πυκνότητας λ' θα επιλέξουμε, λόγω συμμετρίας, μια κυλινδρική επιφάνεια με βάση ακτίνας r και μήκος L. Λόγω της συμμετρίας η ηλεκτρική ροή από τις δύο βάσεις είναι μηδενική ενώ από την υπόλοιπη επιφάνεια το διάνυσμα της έντασης είναι κάθετο και σταθερού μέτρου, οπότε:



$$\oiint_{\substack{\text{κυλινδρική}\\ \text{επιφάνεια}}} \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q_{εσ}}{\varepsilon_o} \Leftrightarrow E\cdot 2\pi rL = \frac{\lambda' L}{\varepsilon_o} \Leftrightarrow$$

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi r\varepsilon_o} \xrightarrow{(3)} E' = -\frac{\lambda\beta\cdot\beta_o\gamma}{\pi r\varepsilon_o}$$

Συνεπώς η δύναμη που θα δεχτεί το θετικό φορτίο q, στο σύστημα αναφοράς του, θα είναι προς τα θετικά του άξονα y'y και θα έχει μέτρο:

$$F'_y = \frac{\lambda\beta\cdot\beta_o\gamma}{\pi r\varepsilon_o}q \Leftrightarrow F'_y = \frac{\lambda\gamma q u_o v}{\pi r\varepsilon_o c^2}$$

Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς ισχύει: $$F_y = \frac{F'_y}{\gamma} \Leftrightarrow F_y = \frac{\lambda q u_o v}{\pi r\varepsilon_o c^2} \qquad (4)$$

Αν θεωρήσουμε ότι: $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d[+\lambda - (-\lambda)x]}{dt} \Leftrightarrow I = 2\lambda \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow I = 2\lambda u_o$

Η σχέση (4) γίνεται: $F_y = \frac{Iqv}{2\pi r \varepsilon_o c^2}$

Από τη σχέση της δύναμης Lorentz $\vec{F} = \vec{E}q + q\vec{v} \times \vec{B} = F_y$ για το ακίνητο σύστημα αναφοράς προκύπτει ότι Ε=0, άρα:

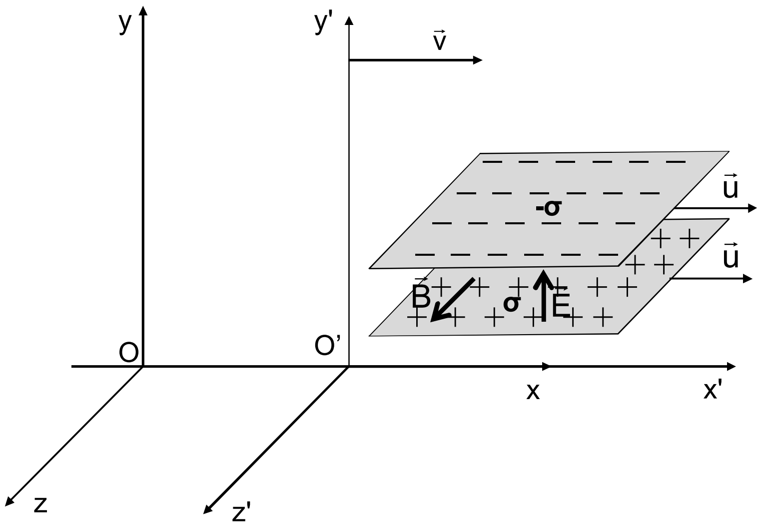
$$B = \frac{I}{2\pi r \varepsilon_o c^2} \xrightarrow{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_o \mu_o}} B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ – ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Τα δύο επίπεδα στρώματα επιφανειακού φορτίου σ και –σ αντίστοιχα κινούνται με ταχύτητα $\vec{u}$ ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς Oxyz κατά τη κατεύθυνση του άξονα Ox. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα:

- την εμφάνιση ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy έντασης:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$



- την εμφάνιση, κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox, δύο επιφανειακών ρευμάτων με πυκνότητες J_x=συ και –συ$_o$ οπότε και ενός μαγνητικού πεδίου κατά τη διεύθυνση του άξονα Oz έντασης:

$$B_z = \mu_o J_x$$

Η επιφανειακή πυκνότητα σ ως προς ένα σύστημα αναφοράς όπου τα δύο φύλλα θα είναι ακίνητα θα υποστεί μια διαστολή μήκους κατά έναν παράγοντα $\gamma_u = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, άρα η πυκνότητά τους θα ελαττωθεί κατά $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma_u}$ δηλαδή θα γίνει $\frac{\sigma}{\gamma_u}$.

Στο σύστημα αναφοράς Ox'y'z' το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox, οι ταχύτητες των δύο επίπεδων στρωμάτων είναι:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}} \qquad (5)$$

Οπότε η επιφανειακή πυκνότητα στο σύστημα αναφοράς Ox'y'z' θα υποστεί μια συστολή μήκους κατά έναν παράγοντα $\frac{1}{\gamma_{u'}'} = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}$, άρα η πυκνότητα θα αυξηθεί κατά $\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma_{u'}'$ και θα γίνει:

$$\sigma' = \sigma\frac{\gamma_{u'}'}{\gamma_u} \Leftrightarrow \sigma' = \sigma\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \Leftrightarrow \sigma' = \sigma\left(\frac{c^2-u^2}{c^2-u'^2}\right)^{1/2} \xrightarrow{(5)}$$

$$\sigma' = \sigma\left[\frac{c^2-u^2}{c^2-\left(c^2\frac{u-v}{c^2-v\cdot u}\right)^2}\right]^{1/2} \Leftrightarrow \sigma' = \sigma\left(\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(c^2-v\cdot u\right)^2}{\left(c^2-vu\right)^2-\left(cu-cv\right)^2}\right)^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma' = \sigma\left[\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(c^2-v\cdot u\right)^2}{\left(c^2-u^2\right)\left(c^2-v^2\right)}\right]^{1/2} \xrightarrow{:c^4} \sigma' = \sigma\left[\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v\cdot u}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right]^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma' = \sigma\frac{1-\frac{v\cdot u}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma\sigma\left(1-\frac{v\cdot u}{c^2}\right)$$

Και η πυκνότητα ρεύματος ίση με: $J' = \sigma' u' = \sigma\frac{1-\frac{v\cdot u}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{u-v}{1-\frac{v\cdot u}{c^2}} \Leftrightarrow J' = \gamma\sigma\left(u-v\right)$

Συνεπώς: $E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_o} = \gamma\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_o}-\frac{v\cdot\sigma u}{\varepsilon_o c^2}\right) \xrightarrow{\frac{1}{\varepsilon_o c^2}=\mu_o} E'_y = \gamma\left(E_y - v\cdot\mu_o\sigma u\right) \Leftrightarrow$

$$\boxed{E'_y = \gamma\left(E_y - v\cdot B_z\right)}$$

και

$$B'_z = \mu_o J' = \mu_o\sigma\gamma\left(u-v\right) \xrightarrow{\frac{1}{\varepsilon_o c^2}=\mu_o} \boxed{B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v\cdot E_y}{c^2}\right)}$$

$E_x' = E_x$, $\quad E_y' = \frac{E_y - v\cdot B_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\quad E_z' = \frac{E_z + v\cdot B_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$B_x' = B_x$, $\quad B_y' = \frac{B_y + \frac{v\cdot E_z}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\quad B_z' = \frac{B_z - \frac{v\cdot E_y}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Βιβλιογραφία

- ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ Μαθήματα φυσικής του πανεπιστημίου του Berkeley, τόμος II, E. Purcell, Αθήνα 1985

- Introduction to electrodynamics, D. J. Griffiths, New Jersey 1999